



**CENTRO UNIVERSITÁRIO INSTITUTO DE  
EDUCAÇÃO SUPERIOR DE BRASÍLIA**

**Bacharelado em  
Ciência de Dados e Inteligência Artificial**

***Séries Temporais***

**Flávia Guimarães Gaia Paula e Nathalia de Toledo  
Sales do Amaral**

**Modelos GARCH**

**Brasília  
2022**

# Sumário

1	DEFINIÇÃO E APRESENTAÇÃO DO MODELO .....	3
2	APLICAÇÃO .....	4
3	APLICAÇÃO PRÁTICA .....	5
4	REFERÊNCIAS .....	10

# 1 Definição e apresentação do modelo

O presente trabalho se trata dos Modelo de Heterocedasticidade Condicional Autor-regressiva Generalizado (GARCH), que faz parte dos principais modelos econométricos de séries temporais univariadas, os Modelos de Heterocedasticidade Condicional. Se um modelo auto-regressivo de médias móveis (ARMA) for assumido para a variância do erro, tem-se um modelo de heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (GARCH).

Os objetivos deste trabalho são definir o que são os modelos GARCH, como ele pode ser aplicado, onde esse tipo de modelo pode ser aplicado e mostrar uma aplicação dos modelos GARCH com a linguagem R através de uma reprodução adaptada de Perlin (2020).

## **Modelo de heterocedasticidade condicional auto-regressiva generalizada**

Se pressupomos que a variância dos resíduos seja dada por um ARCH(p):

$$\text{var}(u_t) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + v_t \quad (1)$$

Pode ser muito difícil estimar todos os coeficientes com precisão. Uma solução é assumir que (1) seja um modelo de defasagens distribuídas (verifique que é a mesma definição) com decaimento geométrico. Em outras palavras, estaríamos assumindo que a variância irá depender dos resíduos defasados, e essa relação é geometricamente menor à medida que aumenta-se o número de defasagens. Assim, para estimar  $p$  defasagens, bastaria pressupormos:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_1 \lambda u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_1 \lambda^{p-1} u_{t-p}^2 + v_t \quad (2)$$

Como sugere a transformação de Koyck, os valores de  $\lambda$  e  $\alpha$  poderão ser dados pelo modelo:

$$\sigma_t^2 = \delta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 + v_t \quad (3)$$

Que é um modelo GARCH (1,1), pois inclui uma defasagem de  $u^2$  e outra de  $\sigma^2$ .

A equação original (2) seria então igual a:

$$\sigma_t^2 = \frac{\delta}{1-\lambda} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_1 \lambda u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_1 \lambda^{p-1} u_{t-p}^2 \quad (4)$$

Poderíamos ainda considerar quantas defasagens forem necessárias para  $u^2$  e  $\sigma^2$  através de um GARCH ( $p, q$ ):

$$\sigma_t^2 = \delta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \lambda_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \lambda_q \sigma_{t-q}^2 + v_t \quad (5)$$

**Figura 1:** Definição dos Modelos GARCH

## 2 Aplicação

O Modelo GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Heterosedastic constitui uma generalização do modelo ARCH, sugerido por Bollerslev (1986). Bollerslev (1986) propôs o modelo GARCH baseando-se em extensões consideradas fundamentais e eficientes para definirem mudanças de variâncias nas series temporais financeiras. Os modelos de volatilidade podem ser utilizados para calcular a volatilidade futura de ativos financeiros, seja com o objetivo de especulação ou com o objetivo de cobertura de risco (hedge).

Bollerslev (1986) demonstrou que os modelos GARCH podem proporcionar avaliações corretas para os parâmetros na amostra se o instrumento de medida de volatilidade for adequado, orientando a boas estimativas de volatilidade. No modelo GARCH a variância condicionada é parametrizada como uma função linear dos quadrados dos erros passados e das variancias condicionadas passadas.

Este tipo de modelos possibilita captar factos estilizados tradicionalmente relacionados adados de natureza económica e financeira, como por exemplo, a presença de fat tails na distribuição empírica das rendibilidades, o fenómeno dos clusters de volatilidade ou da não linearidade do seu comportamento e as alterações na capacidade de previsão.

### 3 Aplicação prática

A aplicação prática deste trabalho se trata de uma reprodução adaptada de Perlin (2020) em que o tipo GARCH irá simular  $ARIMA(1,0,0)$ -GARCH(1,1) através da linguagem R. Conforme Perlin (2020), a primeira é a equação para a média da série temporal  $y_t$ , a segunda define a distribuição heteroscedástica dos resíduos, e a terceira é a equação para modelar a variância, comumente definida como  $h_t$  para heteroscedasticidade. Portanto, se desejar outro modelo GARCH, altera-se a expressão de  $h_t$ .

No código abaixo foi utilizado o pacote `fGarch` inserindo a lista de valores dos parâmetros e especificando o conjunto de dados para o GARCH via função `garchSpec`. O gráfico de um GARCH simulado para os retornos de uma ação terá variância diferente conforme a subamostra, ou seja, muda com o tempo. A volatilidade da série simulada pode ser obtida pela função `volatility()`, para o objeto da simulação (`sim_garch`).

```
library(fGarch)

# estabelecer lista para a especificação do modelo
my_model = list(omega = 0.001, alpha = 0.15, beta = 0.8, mu = 0.02, ar = 0.1)

# especificar o garch spec ele ainda não executa o modelo, apenas especifica.
spec = garchSpec(model = my_model)

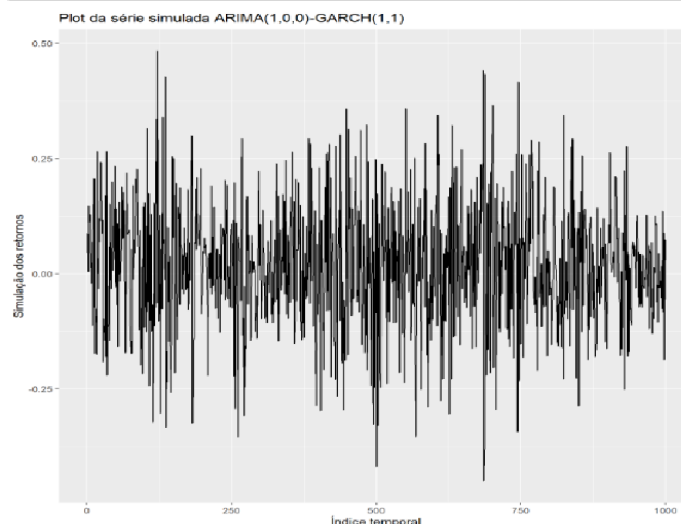
# resultados da especificação
print(spec)
```

```
Formula:
~ ar(1) + garch(1, 1)
Model:
ar:      0.1
mu:      0.02
omega: 0.001
alpha: 0.15
beta: 0.8
Distribution:
norm
Presample:
time      z      h      y
1         0 -2.288252 0.02 0.02222222
```

```
set.seed(20) # semente para garantir reprodução idêntica
# simular o modelo garch conforme a especificação "spec"
sim_garch = garchSim(spec, n = 1000)
```

A série pode ser visualizada graficamente utilizando o pacote e a função `ggplot2::ggplot`:

```
# fazer um dataframe temp_df para usar no ggplot
temp_df <- tibble(sim.ret = sim_garch$garch, idx = seq_along(sim_garch$garch))
library(ggplot2)
p <- ggplot(temp_df, aes(x = idx, y = sim.ret)) + geom_line() + labs(title = "Plot da série simulada ARIMA(1,0,0)-GARCH(1,1)",
  x = "Índice temporal", y = "Simulação dos retornos")
print(p)
```

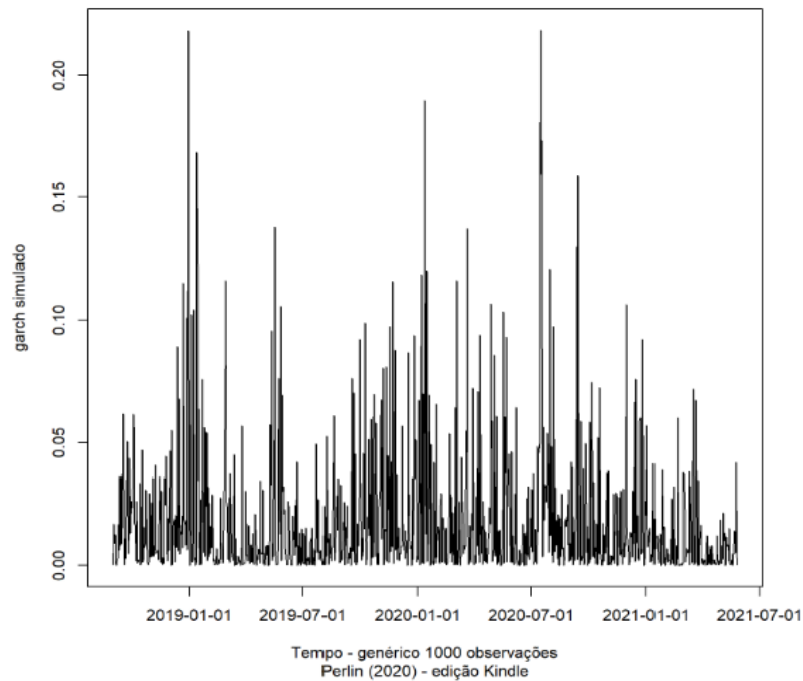


```

volatilidade <- volatility(sim_garch)
plot(volatilidade, main = "Volatilidade de um GARCH simulado", xlab = "Tempo - genérico 1000 observações",
      ylab = "garch simulado", sub = "Perlin (2020) - edição Kindle")

```

### Volatilidade de um GARCH simulado



```

library(fGarch)

# estabelecer lista para a especificação do modelo
my_model = list(omega = 0.001, alpha = 0.15, beta = 0.5, mu = 0.02, ar = 0.1)

# especificar o garch spec ele ainda não executa o modelo, apenas especifica.
spec = garchSpec(model = my_model)

# resultados da especificação
print(spec)

```

```

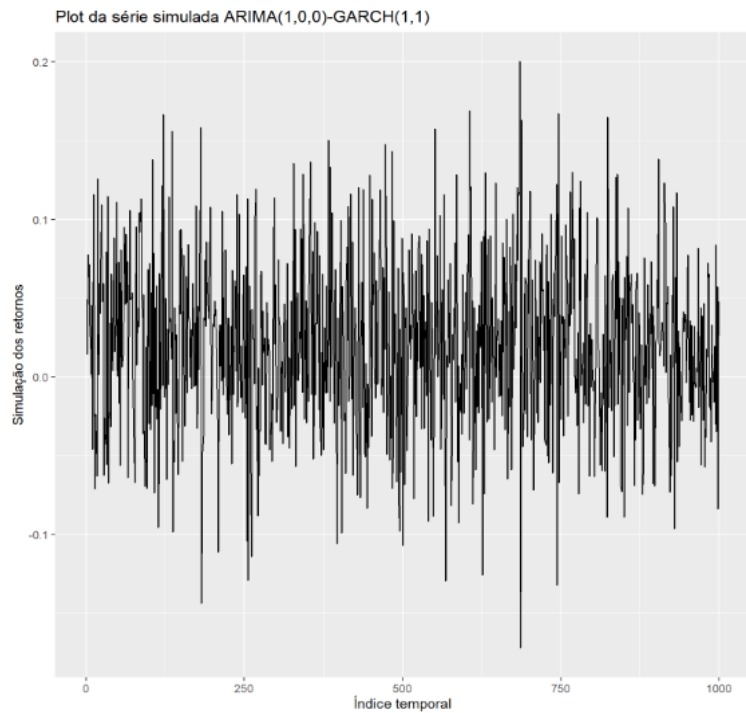
Formula:
~ ar(1) + garch(1, 1)
Model:
ar:      0.1
mu:      0.02
omega: 0.001
alpha: 0.15
beta: 0.5
Distribution:
norm
Presample:
time      z          h          y
1      0 0.31394 0.002857143 0.02222222

```

```

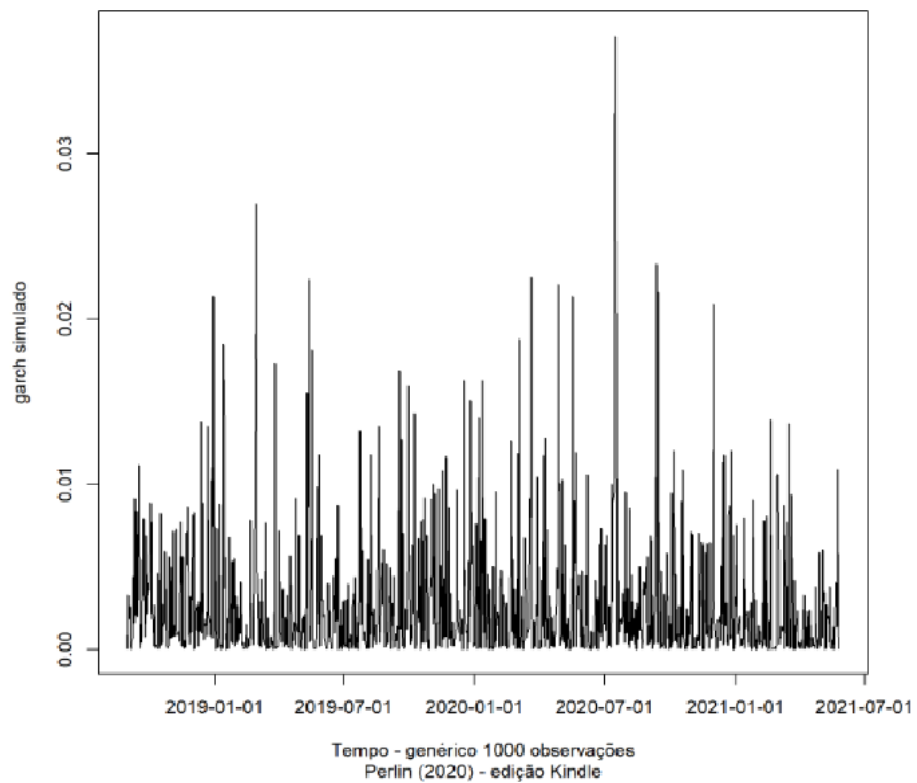
set.seed(20) # semente para garantir reprodução idêntica
# simular o modelo garch conforme a especificação 'spec'
sim_garch = garchSim(spec, n = 1000)
# fazer um dataframe temp_df para usar no ggplot
temp_df <- tibble::tibble(sim.ret = sim_garch$garch, idx = seq_along(sim_garch$garch))
library(ggplot2)
p <- ggplot(temp_df, aes(x = idx, y = sim.ret)) + geom_line() + labs(title = "Plot da série simulada ARIMA(1,0,0)-GARCH(1,1)",
  x = "Índice temporal", y = "Simulação dos retornos")
print(p)

```

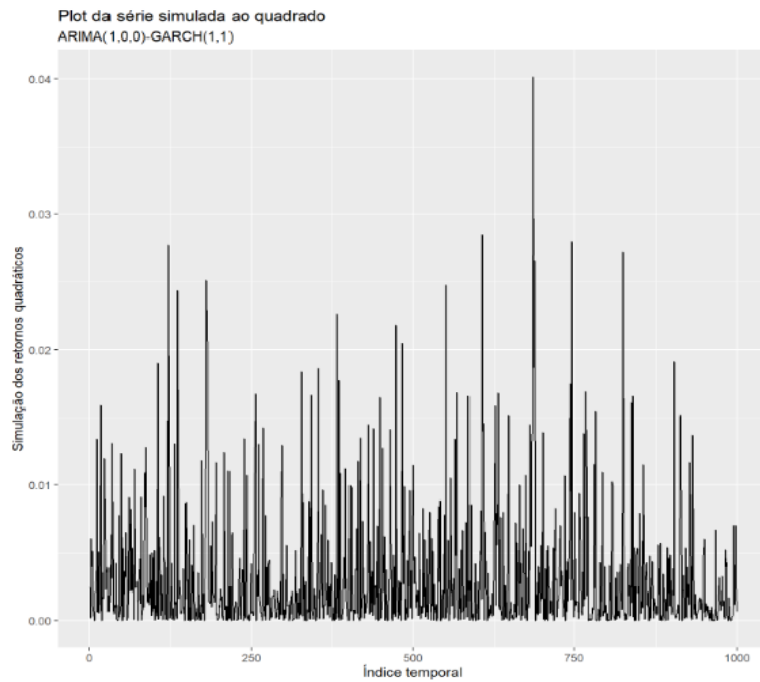


```
volatilidade <- volatility(sim_garch)
plot(volatilidade, main = "Volatilidade de um GARCH simulado", xlab = "Tempo - genérico 1000 observações",
      ylab = "garch simulado", sub = "Perlin (2020) - edição Kindle")
```

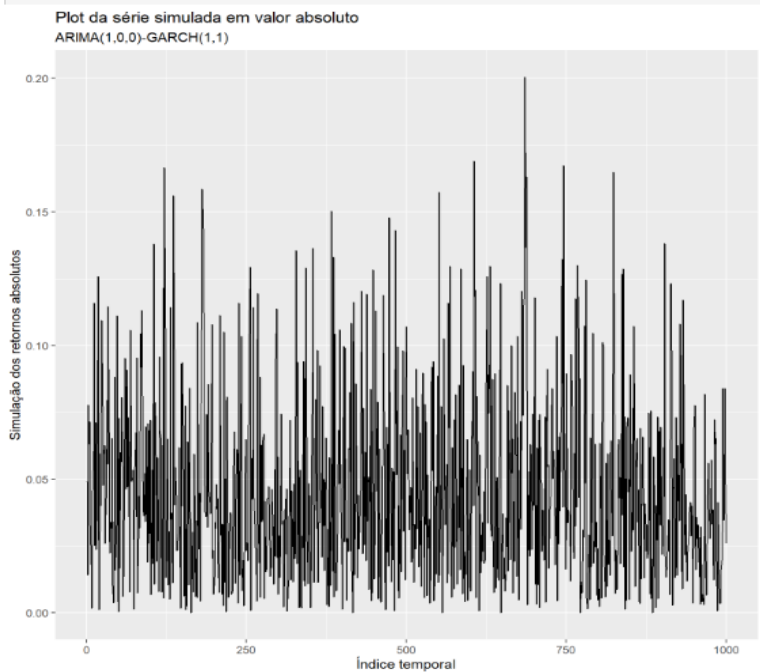
### Volatilidade de um GARCH simulado



```
temp_df$sim.ret2 <- temp_df$sim.ret^2
temp_df$sim.ret.abs <- abs(temp_df$sim.ret)
# plots
library(ggplot2)
p <- ggplot(temp_df, aes(x = idx, y = sim.ret2)) + geom_line() + labs(title = "Plot da série simulada ao quadrado",
  subtitle = "ARIMA(1,0,0)-GARCH(1,1)", x = "Índice temporal", y = "Simulação dos retornos quadráticos")
print(p)
```



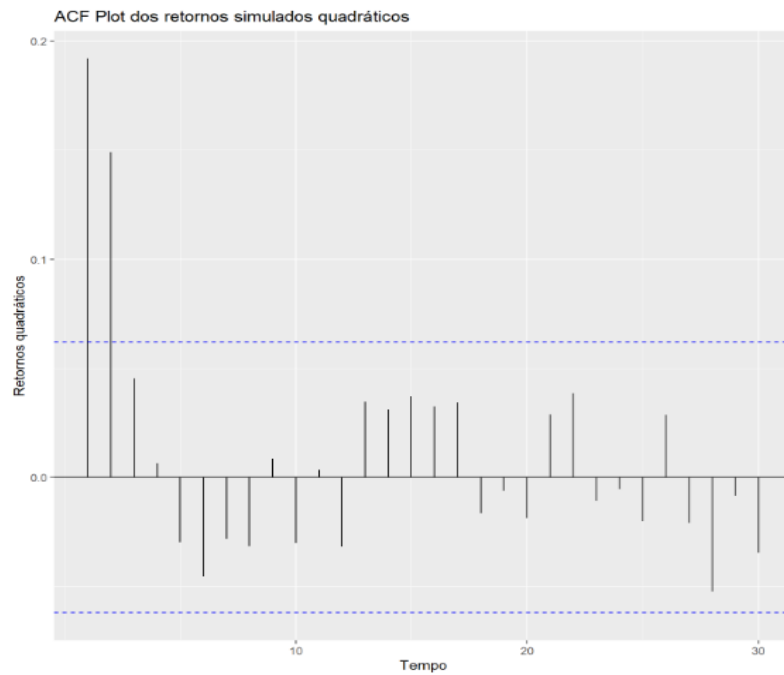
```
library(ggplot2)
p <- ggplot(temp_df, aes(x = idx, y = sim.ret.abs)) + geom_line() + labs(title = "Plot da série simulada em valor absoluto",
  subtitle = "ARIMA(1,0,0)-GARCH(1,1)", x = "Índice temporal", y = "Simulação dos retornos absolutos")
print(p)
```



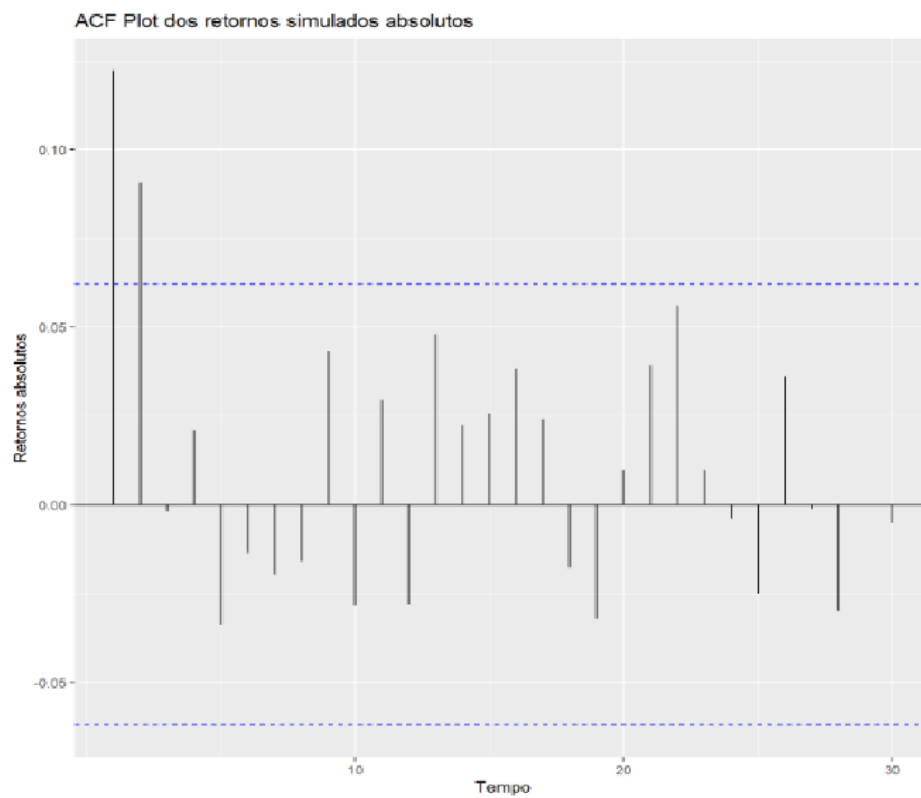
Agora observarei as autocorrelações dessas séries:

```
temp_df.tsb <- tsibble::as_tsibble(temp_df, index = idx)
# plots ACF
library(feasts)
temp_df.tsb %>% ACF(sim.ret2) %>% autoplot() + labs(title = "ACF Plot dos retornos simulados quadráticos",
  y = "Retornos quadráticos", x = "Tempo")
```





```
temp_df.tsb %>% ACF(sim.ret.abs) %>% autoplot() + labs(title = "ACF Plot dos retornos simulados absolutos",
  y = "Retornos absolutos", x = "Tempo")
```



## 4 Referências

Oliveira, C. S., Andrade, G. M. Abordagem Bayesiana para modelos estocásticos com heterocedasticidade para os retornos IBovespa. <http://www2.ime.unicamp.br/sinape/sites/default/files/>

Bollerslev, T. Glossary to ARCH (GARCH). Research paper, School of Economics and Management, University of Aarhus, 2008. Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract=1263250>.

Perlin, Marcelo S. (2020) Análise de Dados Financeiros e Econômicos com o R (p. 481). Edição do Kindle.

Maia, G. A. Modelos ARCH e GARCH. <https://www4.eco.unicamp.br/docentes/gori/images/arquiv>  
Wikipedia. Modelos ARCH. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelos\\_ARCHGARCH](https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelos_ARCHGARCH)

Tsay, R.S., Analysis of Financial Time Series, 2nd ed., Wiley, 2005.

Rpubs. Comandos R para análises de séries temporais. <https://rpubs.com/EconFin/mgarch> Chaves, C.

H. Modelos ARCH e GARCH. <https://rpubs.com/hudsonchavs/archgarch> Avelleda, M. L. GARCH aplicado ao Ibovespa. <https://rpubs.com/lucasma3/623188>

Figueiredo, R. M. A. Séries temporais: GARCH exemplo em R. [https://rpubs.com/amrofi/ST\\_ARCH](https://rpubs.com/amrofi/ST_ARCH)

Perlin, M. S., Mastella, M., Vancin, D. F., Ramos, H. P. (2020). Um Tutorial sobre Modelos Garch no R. Revista De Administração Contemporânea, 25(1), e200088. <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac2021200088>