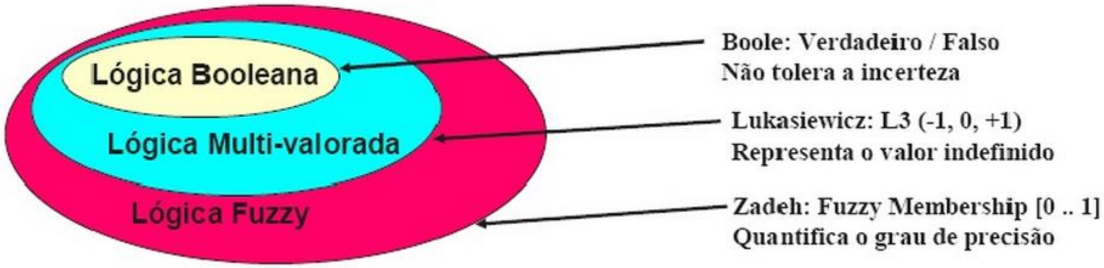
Lógica Fuzzy

Profa. Leticia T. M. Zoby

(leticia.zoby@iesb.edu.br)

Lógica Fuzzy

- Relembrando:
  - Incerteza, sinônimos: Aleatoriedade, dúvida, indecisão, imprecisão
  - A teoria fuzzy trata incertezas relacionadas a linguagem natural
  - Conjunto clássico
    - Pertinência



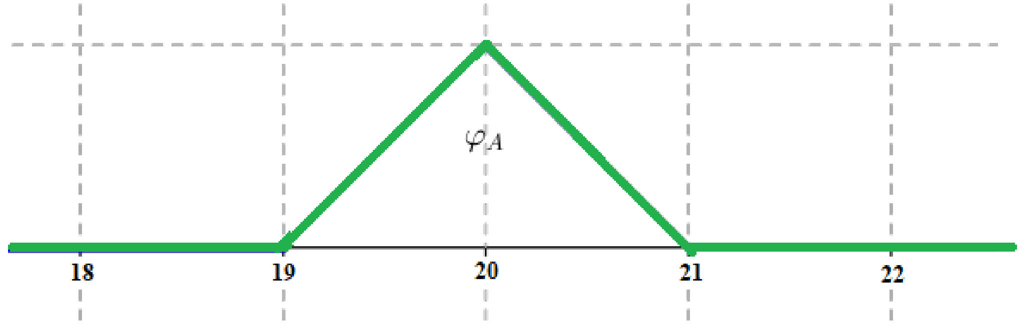
Conjuntos Fuzzy

Definição

- Considere um universo de discurso U (conjunto clássico). Um subconjunto fuzzy, ou simplesmente conjunto fuzzy, A de U é caracterizado por uma função φ_A: U –> [0,1] chamada função de pertinência.

- O valor φ_A (x) indica o grau com o que elemento x ∈ U pertence ao conjunto fuzzy A.

- Ex:



Conjuntos Fuzzy

- Notação:

- A ideia de graus de pertinência da Lógica Fuzzy
  - Função característica: $A : X \to \{0, 1\}$

elementos do conjunto universo X pertencem totalmente ao conjunto A: $A(x) = 1$ ou não pertencem ao conjunto: $A(x) = 0$

  - Função de Pertinência: $A : X \to [0, 1]$

X - conjunto base

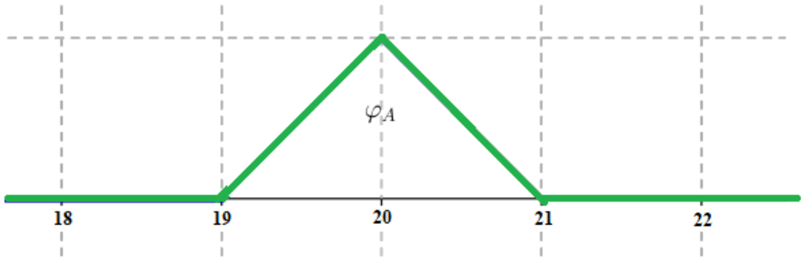
A - conjunto fuzzy

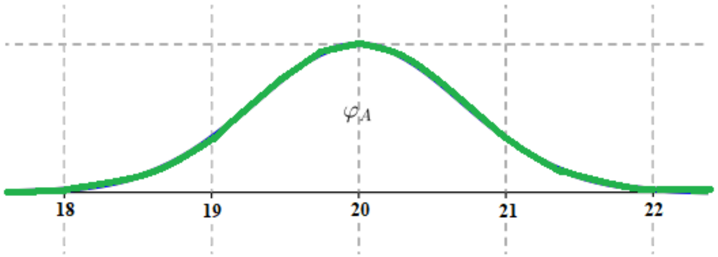
elementos do conjunto base pertencem ao conjunto com um certo grau, que usualmente varia entre 0 e 1.

Conjuntos Fuzzy

Notação

- Fuzzy A é completamente caracterizado por sua função de pertinência φ_{A}.
- Por outro lado, uma função $\varphi_A : U \rightarrow [0,1]$ caracteriza um único conjunto fuzzy A.





Representações de funções de pertinência

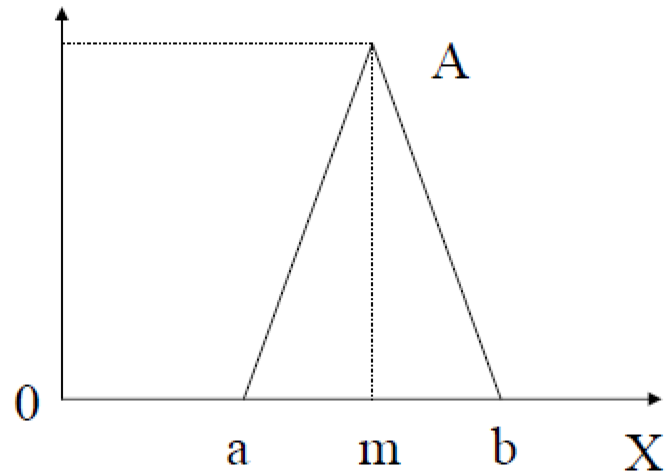
- Representação gráfica
- Representação analítica
- Representação tabular
- Representação por lista

Formas de Conjuntos Fuzzy

Representação gráfica e analítica (mais usados)

- **Triangulares**

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ (x-a)/(m-a), & \text{se } x \in [a,m] \\ (b-x)/(b-m), & \text{se } x \in [m,b] \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$



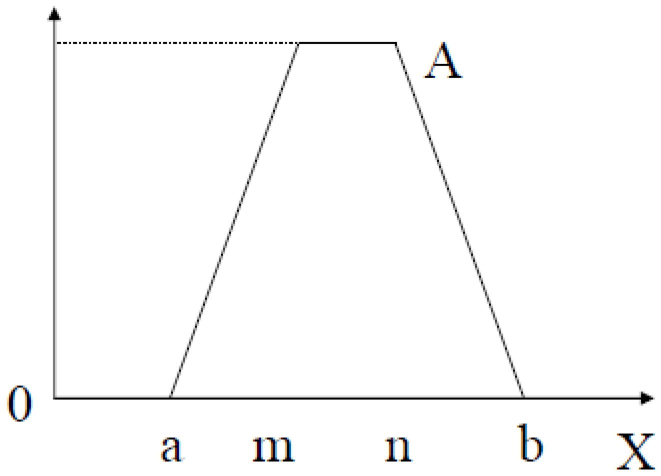
$$A(x;\, a, m, b) = \max\{\min[(x-a)/(m-a),(b-x)/(b-m)],0\}$$

Formas de Conjuntos Fuzzy

Representação gráfica e analítica

- **Trapezoidal**

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ (x-a)/(m-a), & \text{se } x \in [a,m] \\ 1, & \text{se } x \in [m,n] \\ (b-x)/(b-n), & \text{se } x \in [n,b] \\ 0, & \text{se } x > b \end{cases}$$



$$A(x;\, a, m, n, b) = \max\{\min[(x-a)/(m-a), 1, (b-x)/(b-m)], 0\}$$

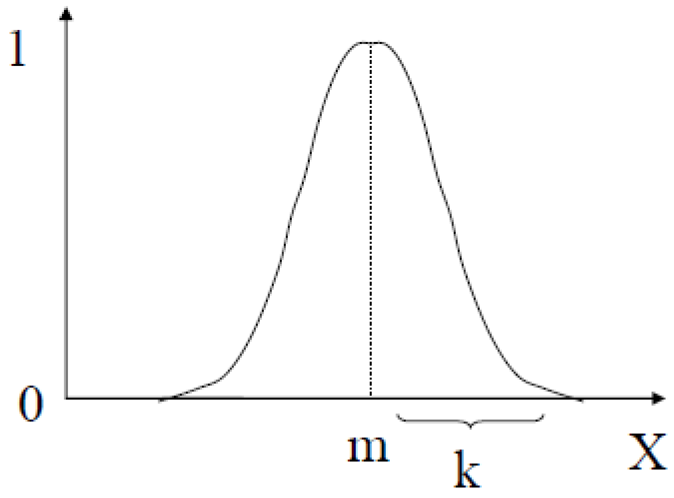
Formas de Conjuntos Fuzzy

Representação gráfica e analítica

- Gausiana

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2}$$

onde $k > 0$



Formas de Conjuntos Fuzzy

Representação tabular

- Para conjuntos base finitos (discretizados)

  Ex: conjunto base contínuo: T = [0,40]

  conjunto base discretizado:

  TD = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40}

- A tabela lista elementos do conjunto base e seus graus de pertinência, podendo omitir os que tem grau de pertinência zero

Formas de Conjuntos Fuzzy

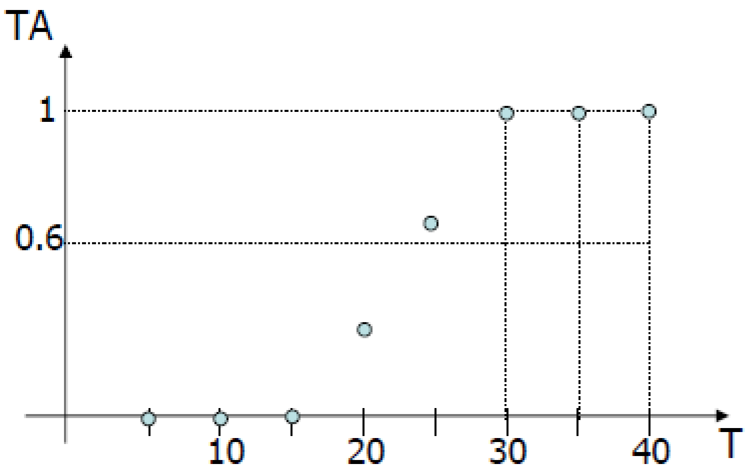
Exemplo: Temperatura alta

- Conjuntos base: TD = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40}

Tabela

x ∈ TD	TA(x)
0	0
5	0
10	0
15	0
20	0.34
25	0.67
30	1
35	1
40	1

Gráfico



Formas de Conjuntos Fuzzy

Representação por lista

TA= $\{\langle 0,0\rangle, \langle 5,0\rangle, \langle 10,0\rangle, \langle 15,0\rangle, \langle 20,0.34\rangle, \langle 25,0.67\rangle, \langle 30,1\rangle, \langle 35,1\rangle, \langle 40,1\rangle\}$

- Notação de lista:

$$TA = 0/0 + 0/5 + 0/10 + 0.34/20 + 0.67/25 + 1/30 + 1/35 + 1/40$$

Ou:

$$TA = 0.34/20 + 0.67/25 + 1/30 + 1/35 + 1/40$$

Conjuntos Fuzzy

Relações básicas

- Subconjunto
  - $A \subset B$, se $\mu_{B(x)} \geq \mu_{A(x)}$ para cada $x \in X$
- Igualdade
  - $A = B$, se $\mu_{A(x)} = \mu_{B(x)}$ para cada $x \in X$

Operações em Conjuntos Fuzzy

- Operações padrão
  - Complemento Fuzzy
  - Interseção Fuzzy
  - União Fuzzy
- Operações Generalizadas
  - T-normas e Intersecção generalizada
  - T-conormas e União generalizada
  - Dualidade e leis de De Morgan
- Operações de Agregação

Operações em Conjuntos Fuzzy

Operações padrão

- Complemento Fuzzy

  $A' = X - A \rightarrow \mu_{A'(x)} = 1 - \mu_{A(x)}$

- Interseção Fuzzy

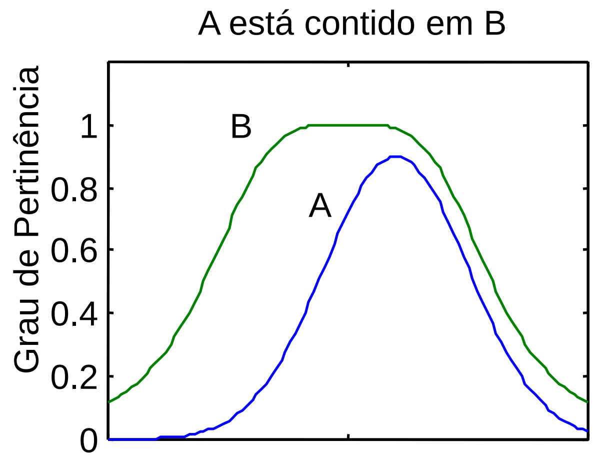
  $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) = A(x) \wedge B(x)$

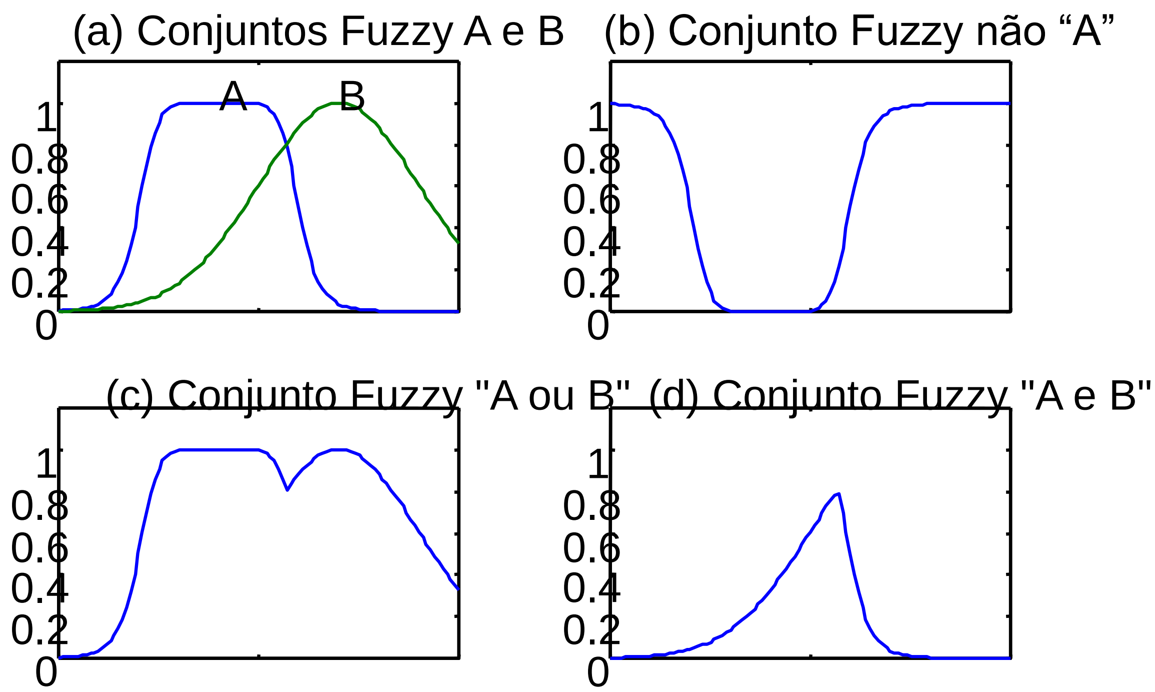
- União Fuzzy

  $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x)$

Conjuntos Fuzzy

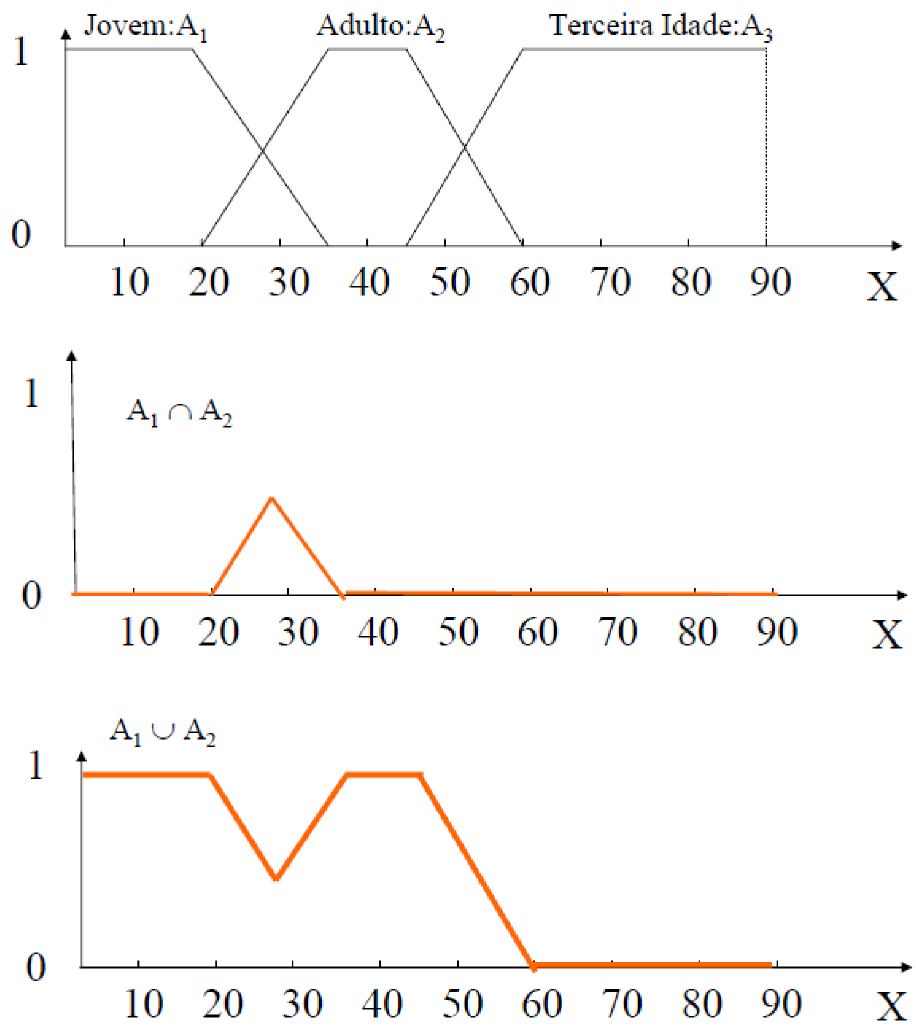
Representação





Conjuntos Fuzzy

Representação



Operações em Conjuntos Fuzzy

Operações Generalizadas

- São operações entre conjuntos (complemento, união e interseção) que assumem formas diferentes das operações padrão

- Normas triangulares: fornecem modelos genéricos para as operações de intersecção e união de conjuntos fuzzy

- Norma Triangular (t-normas) : intersecção

- Co-normas triangulares (s-normas): união

Operações em Conjuntos Fuzzy

T-norma

- Os conceitos de união, intersecção e complementação podem ser tratados de forma mais geral através do emprego de operações conhecidas como t-normas e t-co-normas
- Uma operação $t:[0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$ é dita ser uma t-norma se:
  - a. $t(0,0) = 0$
  - b. $t(a,b) = t(b,a)$ (comutatividade)
  - c. $t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c)$ (associatividade)
  - d. $(a \leq c) \wedge (b \leq d) \Rightarrow t(a,b) \leq t(c,d)$ (monotonicidade)
  - e. $t(a,1) = a$ (identidade)

Operações em Conjuntos Fuzzy

T-conorma

- Uma operação é denomonada t-conorma se possui as propriedades {b, c, d} e ainda satisfaz:
  - a. $s(1,1) = 1$
  - b. $s(b,0) = b$
- Pode-se verificar que **min(a,b)** é uma tnorma e que **max(a,b)** é uma t-conorma.

Operações em Conjuntos Fuzzy

Leis de Morgan

- Negação do “E”
  - $\sim(P \cap Q) \Leftrightarrow (\sim P) \cup (\sim Q)$

- Negação do “OU”
  - $\sim(P \cup Q) \Leftrightarrow (\sim P) \cap (\sim Q)$

- EX:
  - Não fui ao mercado e comprei frutas. (Afirmação)
  - Fui ao mercado ou não comprei frutas. (Negação)

Relações Fuzzy

- Definição de relação fuzzy
- Operações sobre relações: projeção
- Relações fuzzy binárias
- Composição de relações fuzzy

Relações Fuzzy

Definição de relação fuzzy

- Relações convencionais (crisp):
  - Relações representam a presença ou ausência de associação, interação ou interconexão entre os elementos de dois ou mais conjuntos
- Relação entre conjuntos X_1, X_2, ..., X_n – subconjunto do
- Produto cartesiano dos conjuntos X_i

- Função característica:
- $R(x1, x2, \ldots, xn) = 1$ see $\langle x1, x2, \ldots, xn \rangle \in R$

0 caso contrário

Relações Fuzzy

Definição de relação fuzzy

- Relações convencionais:

X = {inglês, francês}
Y = {dolar, libra, franco, marco}
Z = {USA, França, Canadá, Inglaterra, Alemanha}

R(X, Y, Z) = {⟨ inglês, dolar, USA ⟩,
⟨ francês, franco, França ⟩,
⟨inglês, dolar, Canadá ⟩,
⟨ francês, dolar, Canadá⟩,
⟨ inglês, libra, Inglaterra⟩}

Relações Fuzzy

Relações fuzzy

- Conjuntos fuzzy definido no produto cartesiano de conjuntos convencionais $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onde as t-uplas $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ podem ter graus de pertinência variados na relação
- $X = \{a, b, c\}$ $Y = \{1, 2\}$
- $X \mathbf{X} Y = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2) \}$
- $A = 0.1/(a,1) + 0.6/(a,2) + 0.9/(b,1) + 1/(b,2) + 0/(c,1) + 0,2/(c,2)$

Relações Fuzzy

Representação matricial

X = {NY, Paris}   Y = {Beijing, NY, Londres}

Relação nebulosa representando *muito longe:*

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{NY} & \text{Paris} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Beijing} \\ \text{NY} \\ \text{Londres} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Relações Fuzzy

Produto cartesiano de conjuntos fuzzy

- A e B conjuntos fuzzy sobre X e Y

A **X** B (produto cartesiano de A e B) é uma relação fuzzy T no conjunto X X Y onde

$$T(x, y) = \min [A(x), B(y)]$$

- X = {a, b, c} Y = {1, 2, 3}
- A = 1/a + 0.6/b + 0.3/c B = 1/1 + 0.5/2 + 0/3
- A X B = 1/(a,1) + 0.5/(a,2) + 0/(a,3) + 0.6/(b,1) + 0,5/(b,2) +0/(b,3) + 0.3/(c,1) + 0.3/(c,2) + 0/(c,3)

Relações Fuzzy

Relações fuzzy binárias

- São generalizações de funções
- R(X,Y) pode associar a cada elemento de X dois ou mais elementos de Y
- Operações básicas de funções (inversa, composição) são aplicáveis a relações

Relações Fuzzy

Junção de relações fuzzy binárias

- Operações sobre duas relações fuzzy binária que produz triplas em vez de pares

- Sejam $P(X,Y)$ e $Q(Y,Z)$
  - Junção relacional de P e Q correspondente a composição max-min:

$$R(X,Y,Z) = P(X,Y) * Q(Y,Z)$$

- $R(x,y,z) = [P * Q](x,y,z) = \min[P(x,y),Q(y,z)]$ para todo $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$

Referências

- LUGER, George F**. Inteligência Artificial**. Pearson (Edição Digital). 2015.
- PIMENTEL, Carlos. Lógica Nebulosa: Uma Introdução. 3 ed. Fortaleza: UFCE: 2014.