Lógica Fuzzy

Profa. Leticia T. M. Zoby

(leticia.zoby@iesb.edu.br)

Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy é dito normalizado se o valor máximo é 1: $\sup_{x \in U} \mu_A(x) = 1$

- Um conjunto fuzzy que não é normal é chamado de subnormal. Duas características importantes do conjunto fuzzy:
  - O **suporte** de A: é a parte de U sobre a qual a função de pertinência de A não é nula. A sua notação é supp(A) e verifica: $supp(A) = \{x \in U \ / \ \mu_A(x) \neq)0 \}$
  - O **núcleo** (ou cerne) de A: ele não é vazio na condição de que o conjunto fuzzy A seja normalizado. A sua notação é nuc(A) e verifica: $nuc(A) = \{x \in U \ / \ \mu_A(x) = 1)\}$

Conjuntos Fuzzy

Conjunto α–cut

- Para todo valor α do intervalo [0,1], é definido o α-cut A_α (ou corte no nível α) de um conjunto fuzzy A de U como o sub-conjunto: $A_\alpha = \{x \in U \ / \ \mu_A(x) \geq \alpha\}$

- Qualquer conjunto fuzzy A forma uma família aninhada (nested family) de conjuntos, isto é: $A_\alpha \subset A_\beta$ quando $\alpha > \beta$

Conjuntos Fuzzy

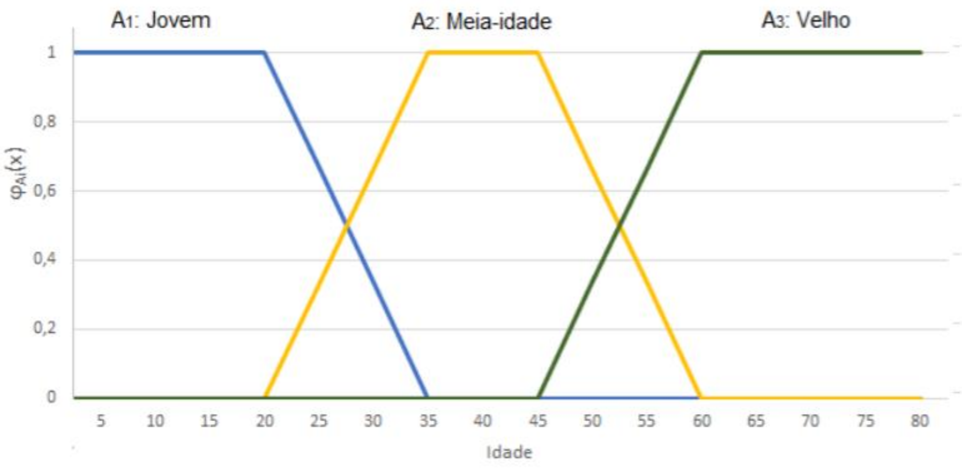
Exemplo:

- Conceito: jovem; meia-idade; velho

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 20 \\ \frac{(35-x)}{15}, & \text{se } 20 < x < 35, \\ 0, & \text{se } x \geq 35 \end{cases}$$

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 20 \text{ ou } x \geq 60 \\ \frac{(x-20)}{15}, & \text{se } 20 < x < 35 \\ \frac{(60-x)}{15}, & \text{se } 45 < x < 60 \\ 1, & \text{se } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$\varphi_{A_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 45 \\ \frac{(x-45)}{15}, & \text{se } 45 < x < 60. \\ 1, & \text{se } x \geq 60 \end{cases}$$



Conjuntos Fuzzy

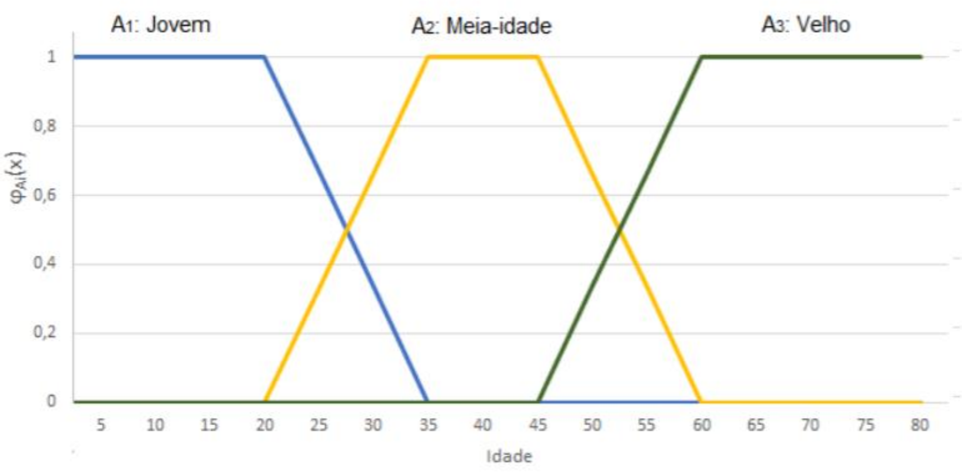
Exemplo:

- Conceito: jovem; meia-idade; velho

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 20 \\ \frac{(35-x)}{15}, & \text{se } 20 < x < 35, \\ 0, & \text{se } x \geq 35 \end{cases}$$

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 20 \text{ ou } x \geq 60 \\ \frac{(x-20)}{15}, & \text{se } 20 < x < 35 \\ \frac{(60-x)}{15}, & \text{se } 45 < x < 60 \\ 1, & \text{se } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$\varphi_{A_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 45 \\ \frac{(x-45)}{15}, & \text{se } 45 < x < 60. \\ 1, & \text{se } x \geq 60 \end{cases}$$



- Conjuntos suportes fuzzy A_1, A_2, A_3 são:
  - $\text{supp}A_1 = \{x \in [0, 80] \mid x < 35\} = [0, 35[$,
  - $\text{supp}A_2 = \{x \in [0, 80] \mid 20 < x < 60\} =]20, 60[$,
  - $\text{supp}A_3 = \{x \in [0, 80] \mid x > 45\} =]45, 80]$.

Lógica Fuzzy

- Relembrando: ^(conjunção), v (disjunção), -> (implicação)

$$\bar{a} = 1 - a$$
$$a \vee b = Max(a,b)$$
$$a \wedge b = Min(a,b)$$

- Tomando os valores binários “0” e “1” , podemos mostrar para a função implicação (->) a seguinte tautologia:

$$a \rightarrow b = \overline{p \wedge \bar{q}} = \bar{p} \vee q$$

Lógica Fuzzy

- Regras são expressas através de *implicações lógicas* da forma *se ... então*, representando uma relação $R_{A->B}$ entre um ou mais *antecedentes* e um ou mais *consequentes*.

- A função de pertinência associada a esta relação é definida por intermédio do operador de implicação $f_{->}$, que deve ser escolhido apropriadamente. O conceito de implicação está relacionado a um ramo da matemática conhecido como *lógica proposicional*, que é isomórfica à *teoria dos conjuntos*, sendo que ambas são isomórficas à *álgebra booleana*.

Lógica Fuzzy

- A tautologia tem um importante papel na lógica fuzzy, por ter sido ponto de partida para a conceituação da implicação fuzzy. A Lógica Fuzzy está na linguagem natural onde há predominância de raciocínio aproximado e preposições vagas.

		Lukasiewicz			Bochvar			Kleene			Heyting		
a	b	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	0	1/2	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1/2	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1
1/2	1	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela: Lógica tri-valores

Lógica Fuzzy

- **Variável Linguística**

- Uma variável linguística é uma variável cujos valores são sentenças na forma de linguagem "natural".
  - Ex: distância, temperatura, altura
- E os termos pequeno, grande, muito jovem, muito próximo, entre outros, são os valores para as variáveis linguísticas.

Lógica Fuzzy

- ## Variável Linguística

- Formalmente, uma variável linguística é caracterizada pela quíntupla: (H, T(H), U, G, M) onde:
  - H: é o nome da variável.
  - T(H): é o conjunto de termos linguísticos de H.
  - U: é o universo em discurso.
  - G: é a regra sintática que gera os termos linguísticos de H.
  - M: é regra semântica que associa com cada valor linguístico seu significado M(x), que é um subconjunto nebuloso em U.
  - X: é um valor genérico para H.

Lógica Fuzzy

- **Regra Composicional de Inferência**

- As relações entre variáveis linguísticas são descritas através de declarações condicionais nebulosas do tipo SE X É A ENTÃO Y É B, onde X e Y são variáveis linguísticas, e A e B são conjuntos fuzzy.

Lógica Fuzzy

- **Regra Composicional de Inferência**

- Considere uma função real y = f(x), tal como na Figura 2.
- Se x for igual a "a" qual seria o valor para y? A resposta é facilmente obtida fazendo-se y = b = f(a).

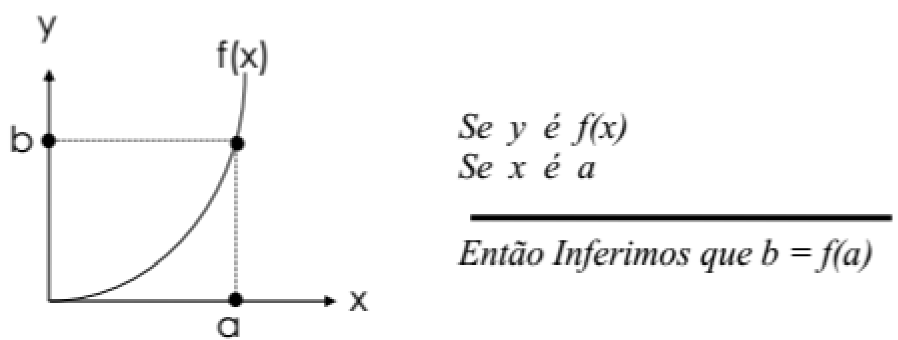


Figura 2: Procedimento geométrico para cálculo de b=f(a).

Lógica Fuzzy

- **Regra Composicional de Inferência**

- Exemplo: Seja X = Y = 1 + 2 + 3 + 4, e R uma relação nebulosa em XxY:

$$R_{XxY} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_X = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Então a relação B=AoR é dada por:

$$B_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Lógica Fuzzy

- **Regra Composicional de Inferência**

- Genericamente, a regra composição de inferência pode ser descrita da seguinte forma:

Se X é A Então Y é B	(implicação)
X é A'	(premissa)
Y é B'	(conclusão)

- A solução para B' : B'= A' º (A->B). Em termos de função de pertinência temos: μ B'(v) = V μ A'(u) ^ μ A->B (u,v)

Onde (A->B) é a implicação entre A e B, e depende da interpretação lógica da função de implicação: Se A Então B. A seguir, listamos algumas soluções propostas para $\mu_{A\text{->}B}(u,v)$.

Lógica Fuzzy

- **Regra Composicional de Inferência**

Soluções propostas para $\mu_{A\to B}(u,v)$	
$(\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1-\mu_A(u))$	*Zadeh (1973)*
$1 \wedge (1-\mu_A(u)+\mu_B(v))$	
$\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)$	*Mamdani (1974)*
$\begin{cases} 1 & se \quad \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ \mu_A(u) & se \quad \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$	*Mizumoto (1979)*
$\mu_A(u) \cdot \mu_B(v)$	*Larsen (1980)*
$1-\mu_A(u)+\mu_A(u)\mu_B(v)$	*Bandler (1980)*
$f_{\to}(\mu_A(u),\mu_B(u))$ *	*Gupta e J. Qui (1991)*

∗ onde f é uma função de implicação que usa os operadores T-norm e S-norm.

Lógica Fuzzy

- **Regra Composicional de Inferência**
- Zadeh conceituou a implicação nebulosa inspirado na função implicação definida na lógica clássica, cuja tabela verdade é mostrada a seguir:

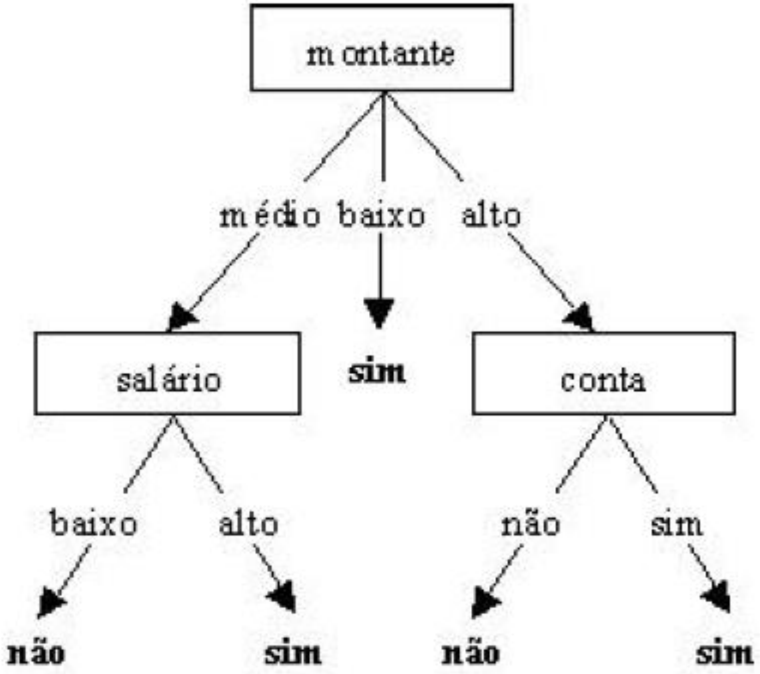
A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- A partir desta tabela, podemos escrever: A->B = AB +A'. Agora se A e B são conjuntos nebulosos definidos em U e V, então a função de pertinência para A->B pode ser escrita como: $\mu_{A\text{->}B}$ (u,v)= $(\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) v (1-\mu_A(u))$
- Mamdani, no entanto, interpretou A->B como sendo "A acoplado com B", assim:

A->B = AxB ou $\mu_{A\text{->}B}$ (u,v)= $\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)$

Lógica Fuzzy

- **Sistemas Nebulosos**
- Um sistema nebuloso é formado pela agregação de um conjunto de relações linguísticas estruturadas no formato "Se X_1 é A_1 e X_2 é A_2 e ....X_n é A_n então Y é B", denominadas de regras de inferência.
  - Ex Árvore de Decisão



- Possível derivar regras (SE) do ex:

  R1:

  Se montante = médio e salário = baixo

  Então classe = não

  R2:

  Se montante = médio e salário = alto

  Então classe = sim

Lógica Fuzzy

- **Sistemas Nebulosos**

- ATENÇÃO:
- Não devemos confundir: Sistema Nebuloso e Sistema Especialista, apesar da semelhança.
- O SE utiliza processamento simbólico para resolver as regras de inferência.
- O SN utiliza processamento numérico para resolver as regras de inferência.

Lógica Fuzzy

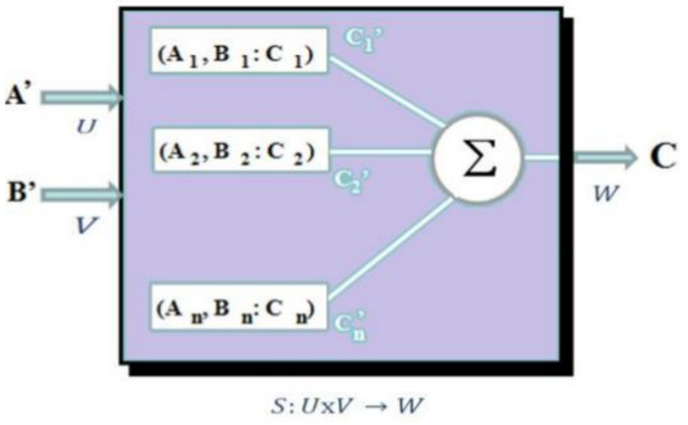
- **Sistemas Nebulosos**

- Exemplo de avaliação de crédito:

  - R1: SE a renda do cliente é alta E sua dívida é pequena, ENTÃO seu crédito é alto.
  - R2: SE a renda do cliente não é tão alta E sua dívida é média, ENTÃO seu crédito é médio.
  - R3: SE a renda do cliente é baixa E sua dívida é alta, ENTÃO seu crédito é baixo.

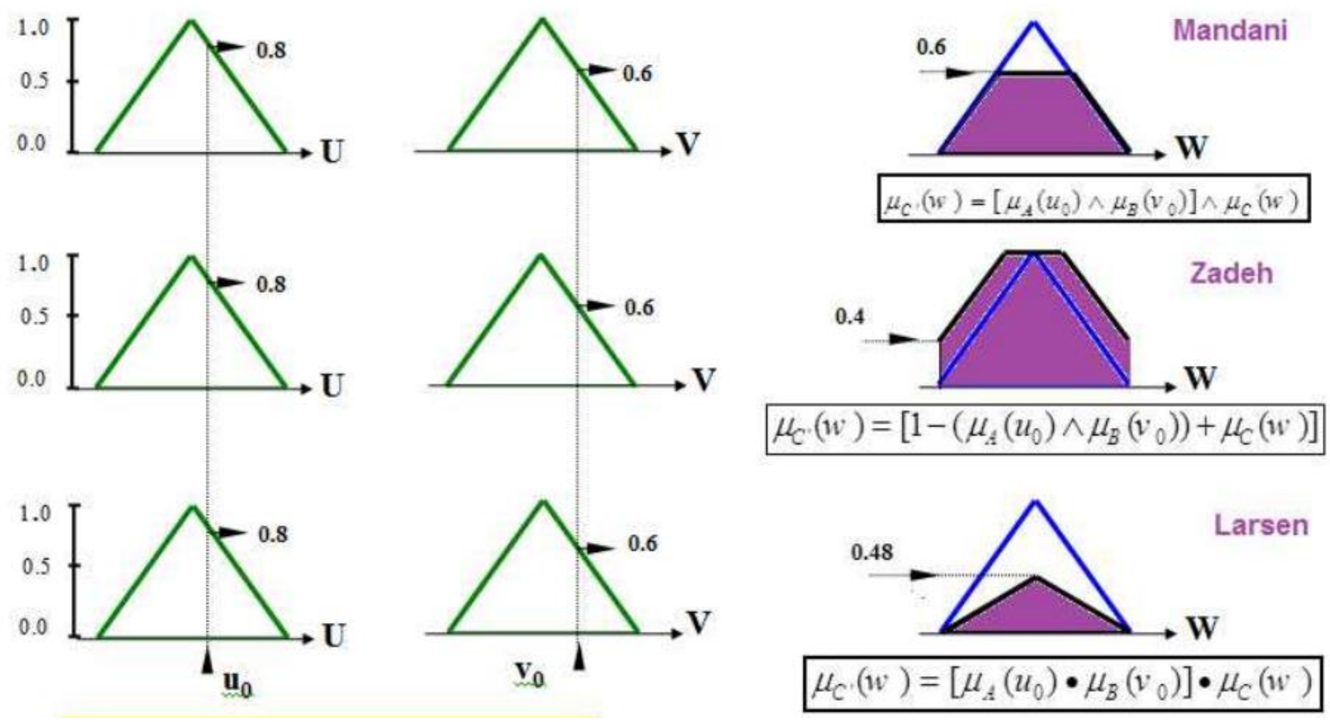
Lógica Fuzzy

- **Sistemas Nebulosos**
- **Na R1:**
  - a variável linguística X_1 estaria associada com a renda do cliente (X_1 ≡Cliente.renda);
  - a variável linguística X_2 estaria associada com a dívida do cliente (X_2 ≡Cliente.dívida);
  - a variável linguística Y estaria associada com o crédito do cliente (Y ≡Cliente.crédito);
  - a variável linguística A_1 (A_1 ≡alta.renda); a variável linguística B_1 (B_1 ≡pequena.dívida); C_1 (C_1 ≡Cliente.crédito)



Lógica Fuzzy

- **Sistemas Nebulosos**
- **"SE X_1 é A E X_2 é B ENTÃO Y é C"**



Lógica Fuzzy

Sistemas Nebulosos – Inferência Mamdani

- Um dos métodos mais utilizados para tirar conclusões a partir de regras fuzzy
- O método Mamdani fundamenta-se na regra de composição de inferência max-min, propondo uma relação fuzzy binária para modelar as regras fuzzy.
- Para cada regra da forma

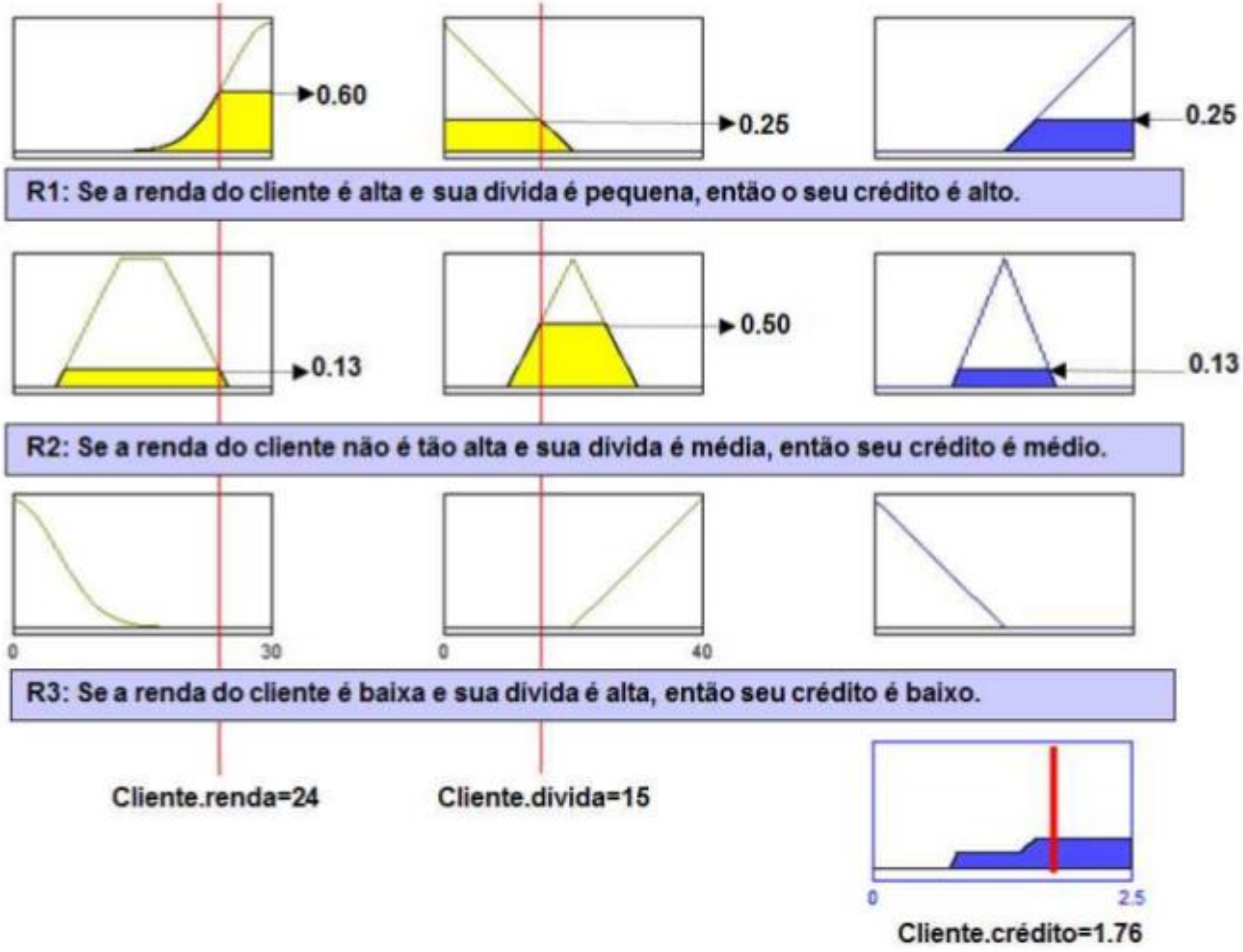
  R_i : Se x_1 é A_{1i}, ..., x_n é A_{ni} então y é B_i; i = 1; 2, ..., k.

- O método Mamdani modela pela aplicação Δ (mínimo). Além disso, assume-se para o conectivo lógico "e" a t-norma Δ (mínimo) e para o conectivo lógico "ou" a t-conorma $\blacktriangledown$(máximo).

Lógica Fuzzy

Sistemas Nebulosos – Inferência Mamdani

- Exemplo:



Lógica Fuzzy

Sistemas Nebulosos – Inferência Mamdani

Exemplo:

- Supondo que para um dado cliente sua renda seja $X_1 = u_0 = 24$ e que sua dívida seja $X_2 = v_0 = 15$, então o processo de inferência nebulosa realiza as operações numéricas descritas a seguir:
  - para todas as regras da base de regras, é calculado o valor verdade da premissa de cada regra por meio da função conjunção ($\wedge$):
- Regra 1: $\mu_1 = \mu_{A1}(u_0) \wedge \mu_{B1}(v_0)$
- Regra 2: $\mu_2 = \mu_{A2}(u_0) \wedge \mu_{B2}(v_0)$
- Regra 3: $\mu_3 = \mu_{A3}(u_0) \wedge \mu_{B2}(v_0)$

Lógica Fuzzy

Sistemas Nebulosos – Inferência Mamdani

Exemplo:

- Regra 1: $\mu_1 = \mu_{A1}(u_0) \wedge \mu_{B1}(v_0)$
- Regra 2: $\mu_2 = \mu_{A2}(u_0) \wedge \mu_{B2}(v_0)$
- Regra 3: $\mu_3 = \mu_{A3}(u_0) \wedge \mu_{B2}(v_0)$

E:

- Regra 1: $\mu_1 = \mu_{A1}(24) \wedge \mu_{B1}(15) = 0{,}6 \wedge 0{,}25 = \min = 0{,}25$
- Regra 2: $\mu_2 = \mu_{A1}(24) \wedge \mu_{B1}(15) = 0{,}13 \wedge 0{,}5 = \min = 0{,}13$
- Regra 3: $\mu_3 = \mu_{A1}(24) \wedge \mu_{B1}(15) = 0{,}0 \wedge 0{,}0 = \min = 0{,}0$

Referências

- LUGER, George F**. Inteligência Artificial**. Pearson (Edição Digital). 2015.
- PIMENTEL, Carlos. Lógica Nebulosa: Uma Introdução. 3 ed. Fortaleza: UFCE: 2014.