Disjoint-set (Union-find)

Laboratório de Programação Competitiva I

Pedro Henrique Paiola

Rene Pegoraro

Wilson M Yonezawa

Introdução

- **Disjoint Set Union (DSU)**, também chamada de **Union-find**, devido as operações que esta estrutura de dados permite
- Esta estrutura armazena vários conjuntos disjuntos de elementos
  - Inicialmente, cada conjunto contém precisamente um elemento

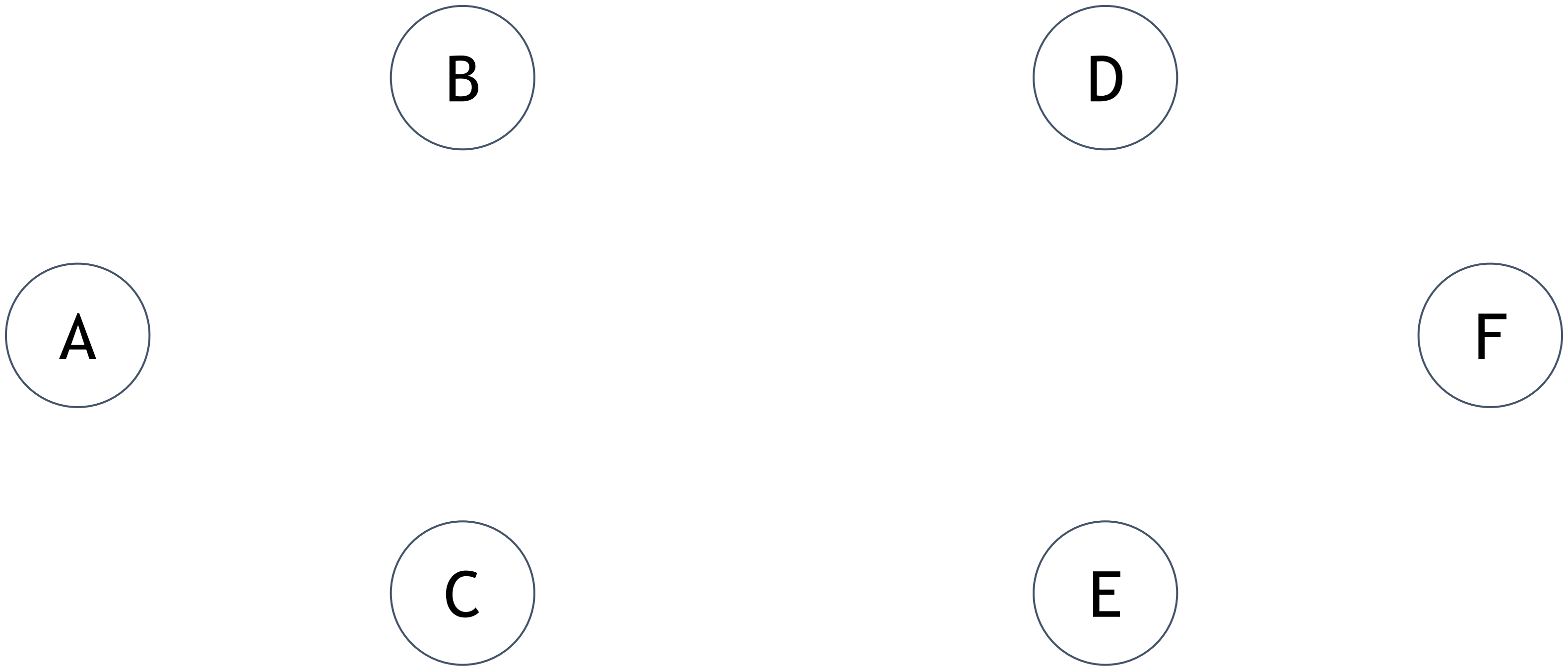
Introdução

- Permite a realização de duas operações:
  - **merge(a, b):** une os conjuntos aos quais a e b pertencem.
  - **find(a):** determina a qual conjunto o elemento a pertence.

- A partir do *find*, normalmente define-se a função *same*:
  - **same(a, b):** determina se a e b pertencem ao mesmo conjunto.

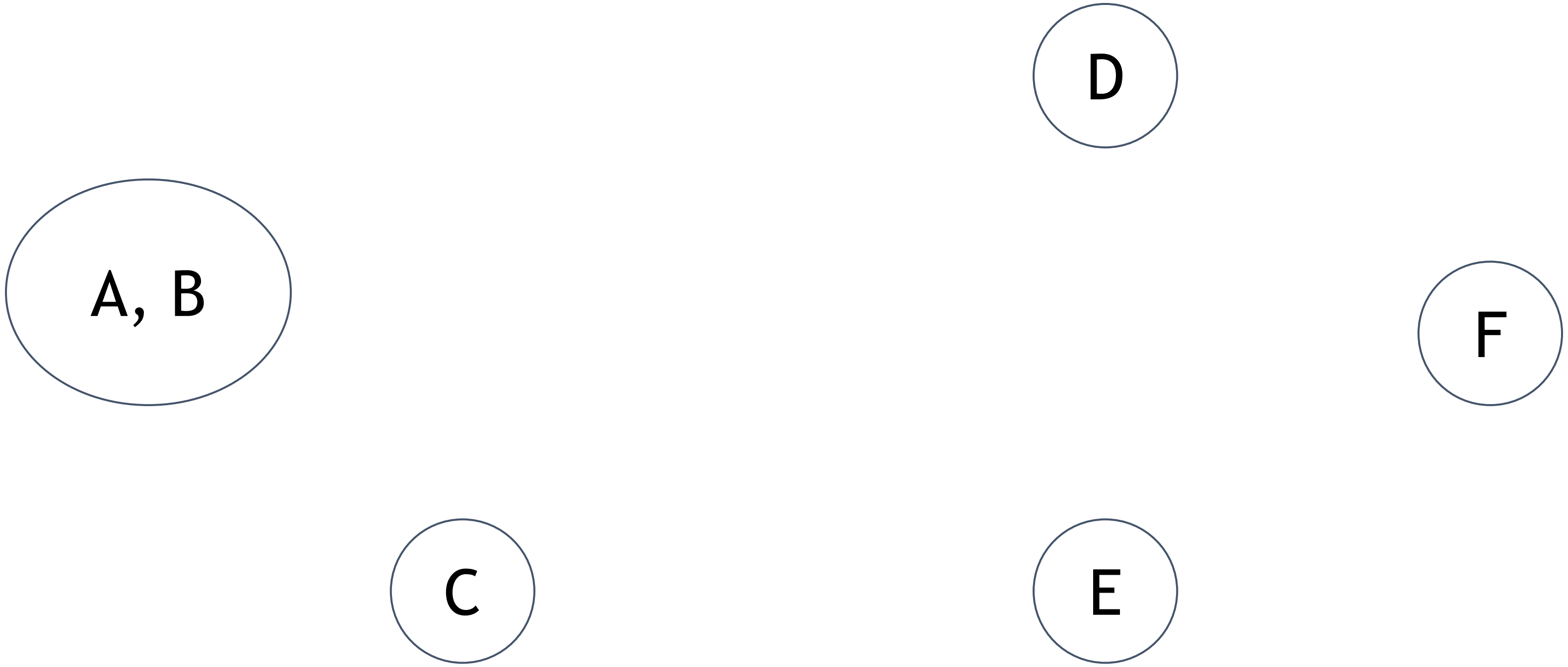
Exemplo

same(A, B) => False



Exemplo

merge(A, B)

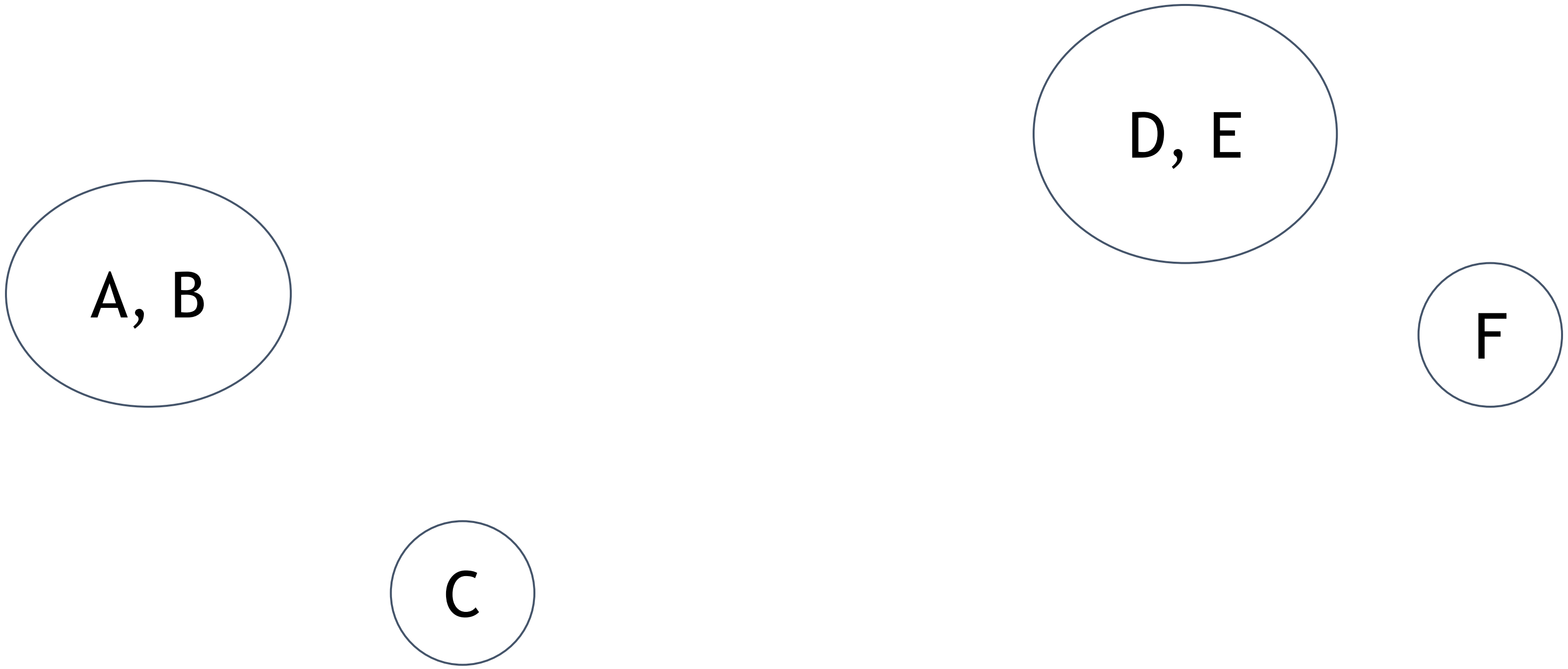


Departamento de Computação

Programação Competitiva unesp

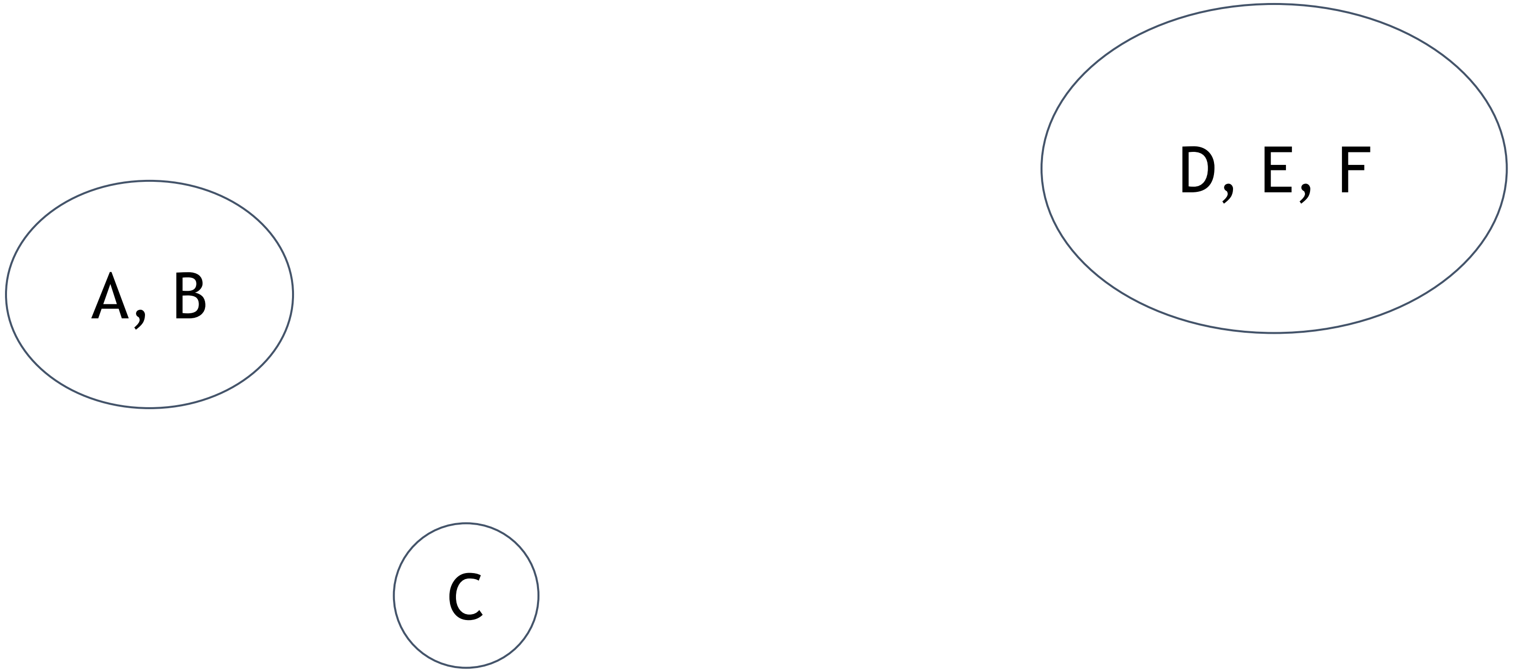
Exemplo

merge(D, E)



Exemplo

merge(D, F)

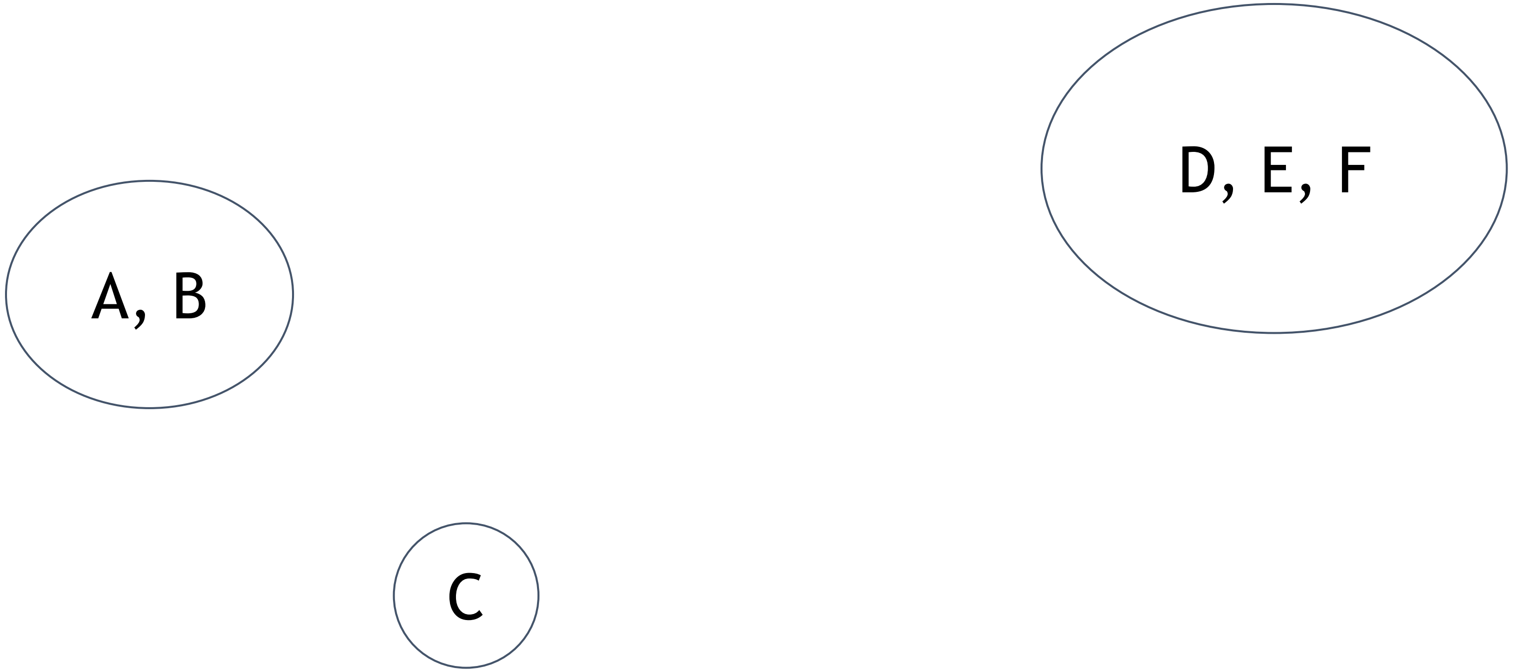


Exemplo

same(A, B) => True

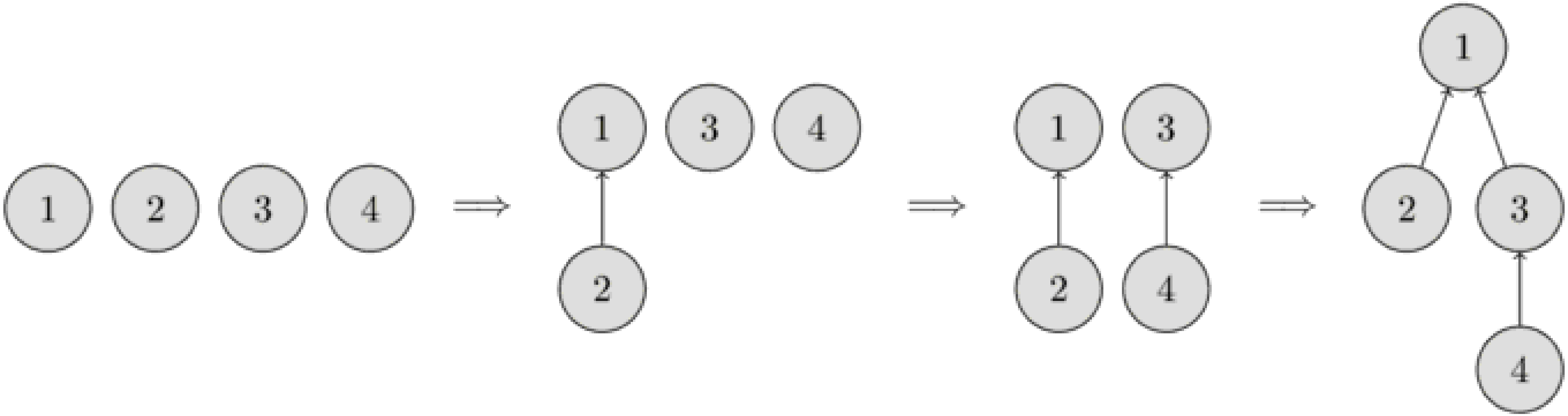
same(E, F) => True

same(A, D) => False



Estruturando a solução

- Para implementar uma DSU, cada conjunto será representado por uma **árvore**, onde a **raiz** da árvore será o representante/**líder** do conjunto.



Implementação (nem tão) ingênua

- **find(x)**: retorna o líder do conjunto a que x pertence

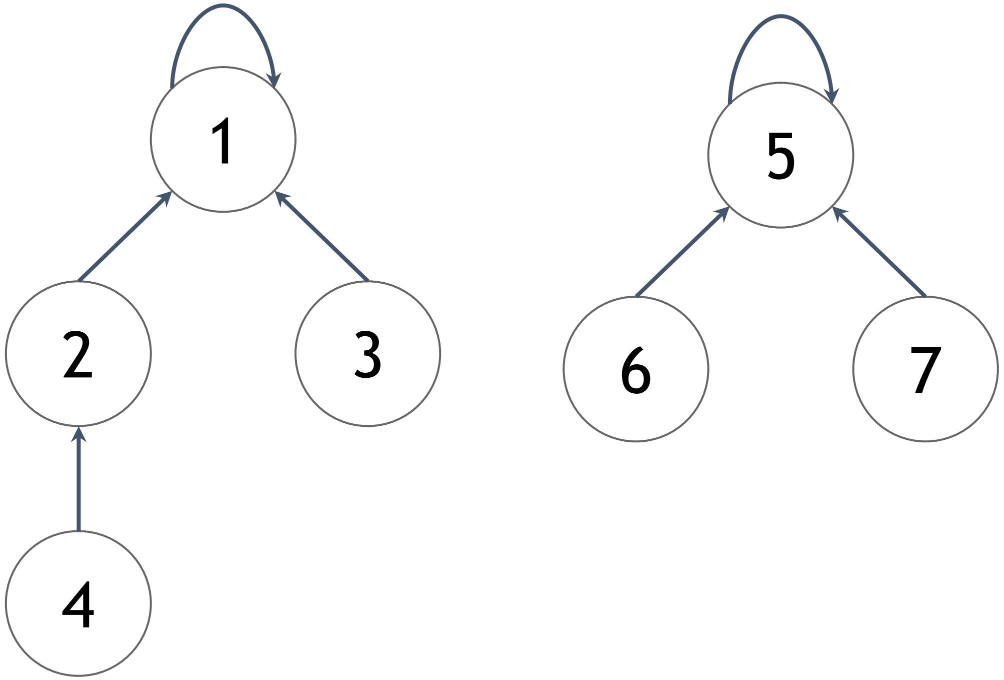
- **merge(x, y)**: conecta os líderes. Supondo que X seja líder de x e Y líder de y, vamos “eleger” Y como líder de X.

Implementação (nem tão) ingênua

```
int pai[MAX_N + 1];

void init(){
    for(int i = 1; i <= MAX_N; i++)
        pai[i] = i;
}

int find(int x){
    if (pai[x] == x)
        return x;
    return find(pai[x]);
}
```

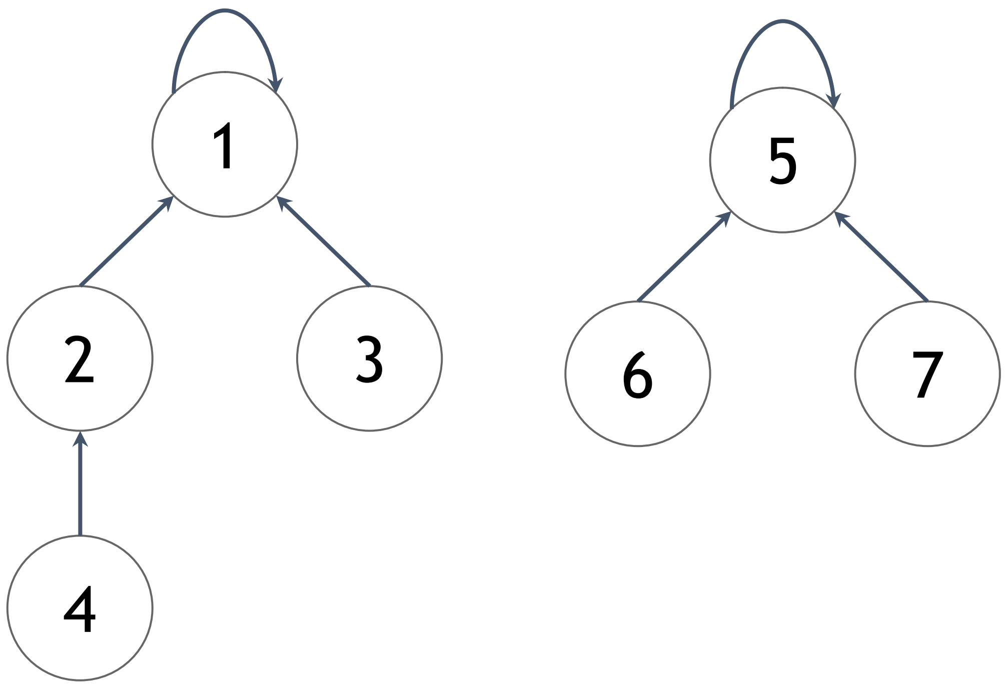
```
bool same(int x, int y){
    return find(x) == find(y);
}

void merge(int u, int v){
    int a = find(u);
    int b = find(v);
    pai[a] = b;
}
```

Implementação (nem tão) ingênua

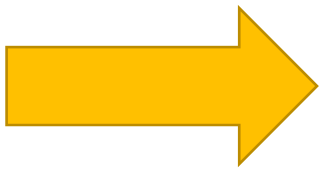


pai =	1	1	1	2	5	5	5

Implementação (nem tão) ingênua



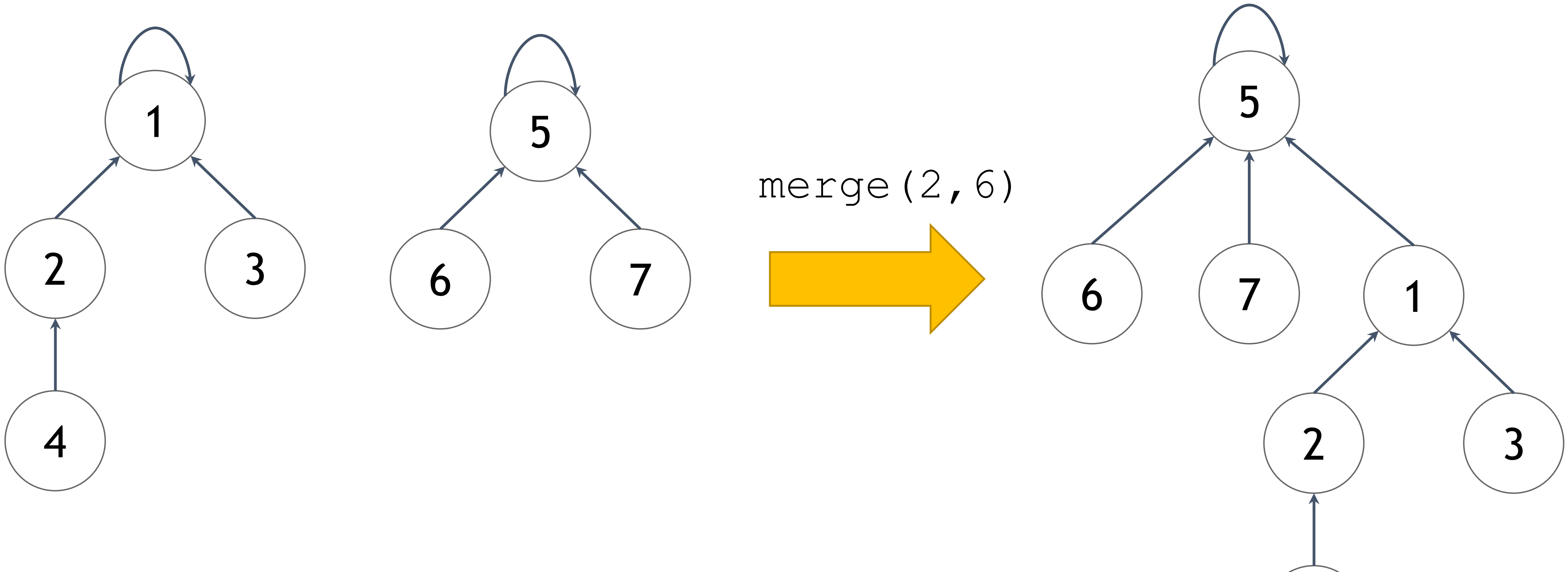
`merge(2,6)`



`pai =`

1	1	1	2	5	5	5

Implementação (nem tão) ingênua



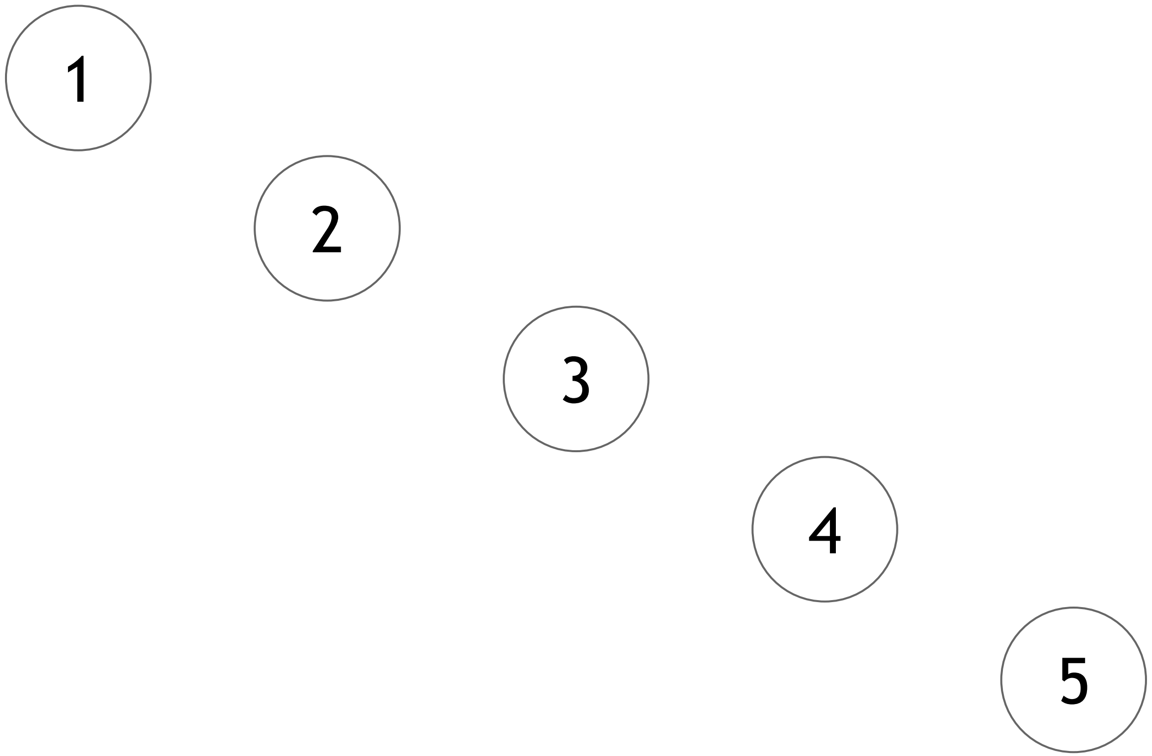
pai =

5	1	1	2	5	5	5

Implementação (nem tão) ingênua

- Qual o problema dessa implementação?
  - Casos degenerados que a tornam ineficiente

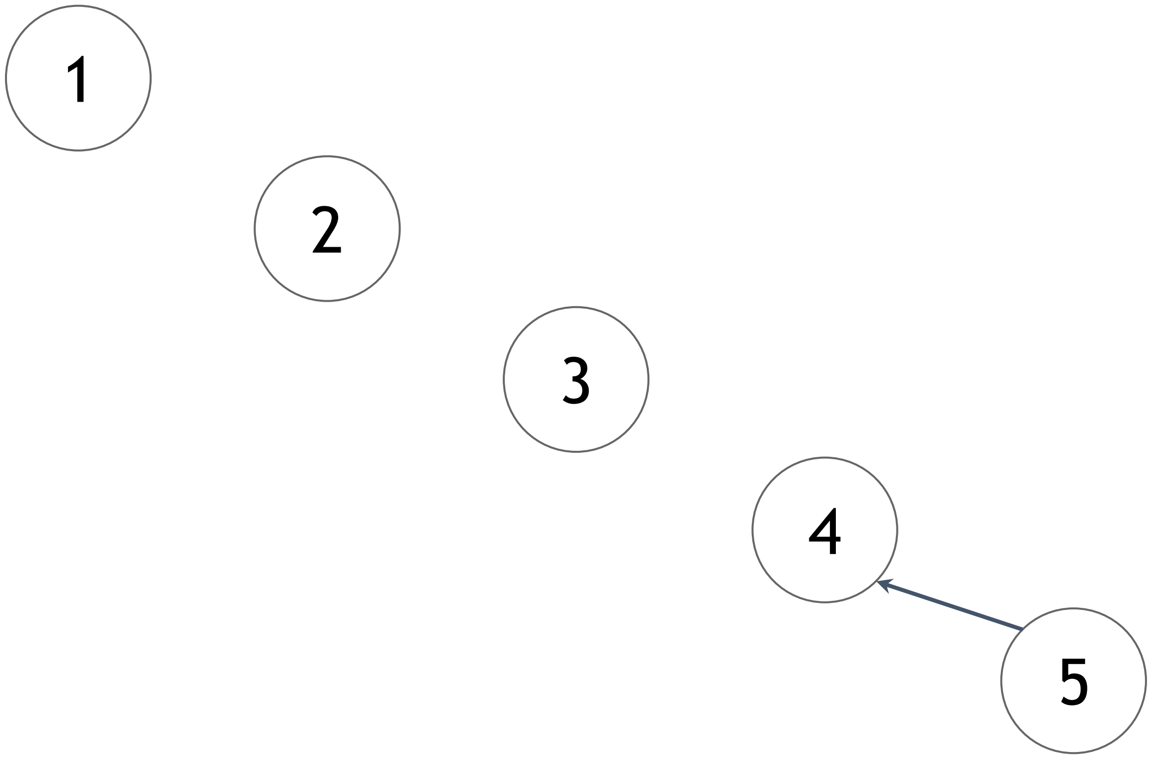
```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



Implementação (nem tão) ingênua

- Qual o problema dessa implementação?
  - Casos degenerados que a tornam ineficiente

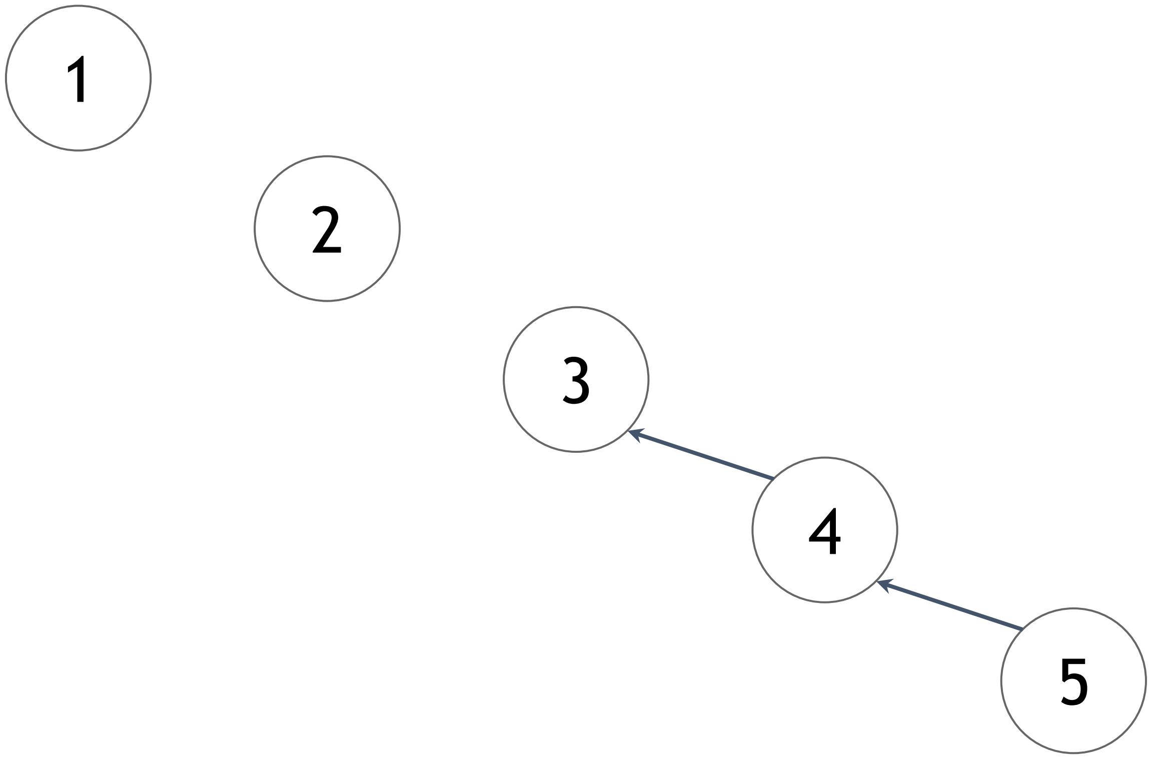
```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



Implementação (nem tão) ingênua

- Qual o problema dessa implementação?
  - Casos degenerados que a tornam ineficiente

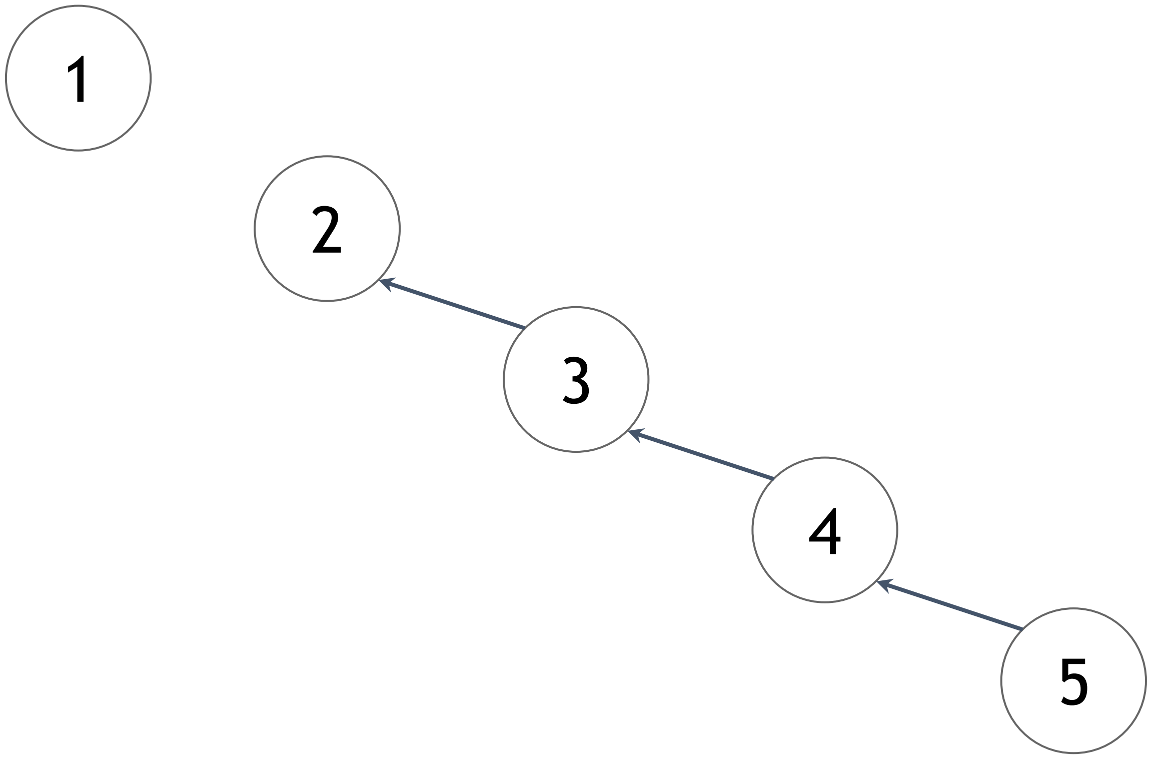
```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



Implementação (nem tão) ingênua

- Qual o problema dessa implementação?
  - Casos degenerados que a tornam ineficiente

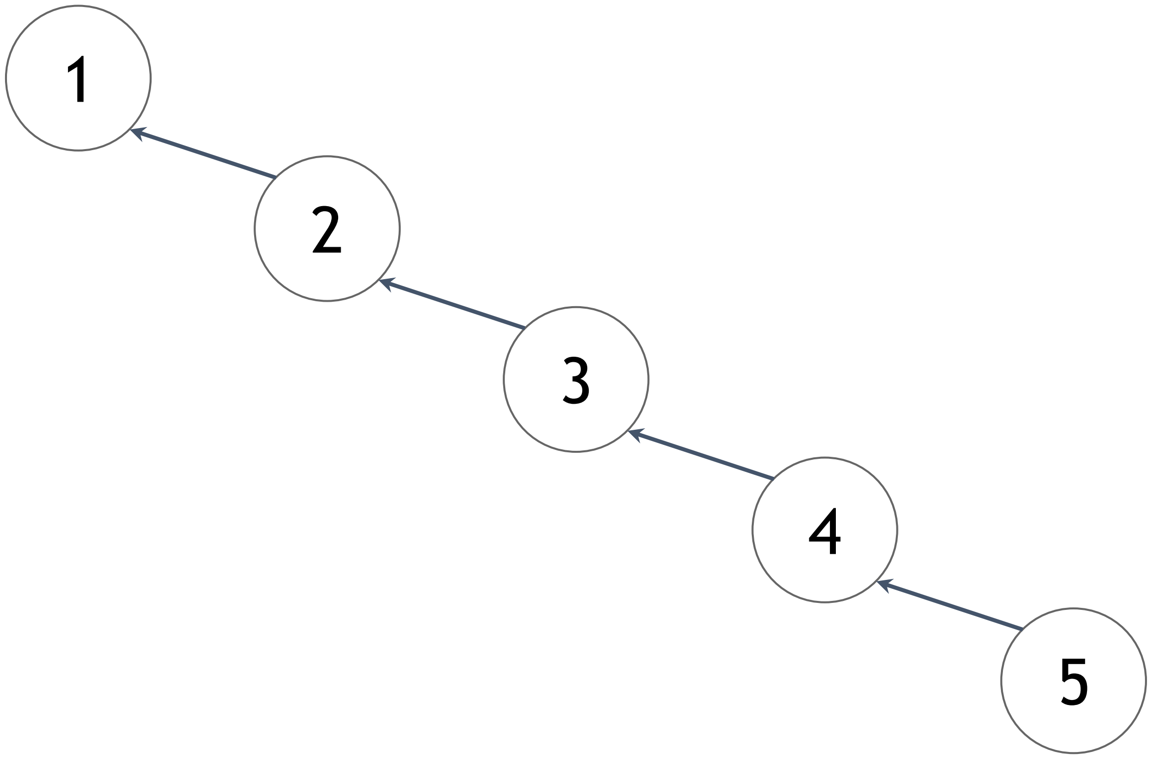
```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



Implementação (nem tão) ingênua

- Qual o problema dessa implementação?
  - Casos degenerados que a tornam ineficiente
  - Tempo de busca: O(n)

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
```
`merge(4,1)`



Path Compression

- Ideia: comprimir os caminhos, fazendo todos os elementos do conjunto apontarem para o líder diretamente.
- Uma espécie de Programação Dinâmica.
- Tempo por operação: $O(\log n)$ amortizado

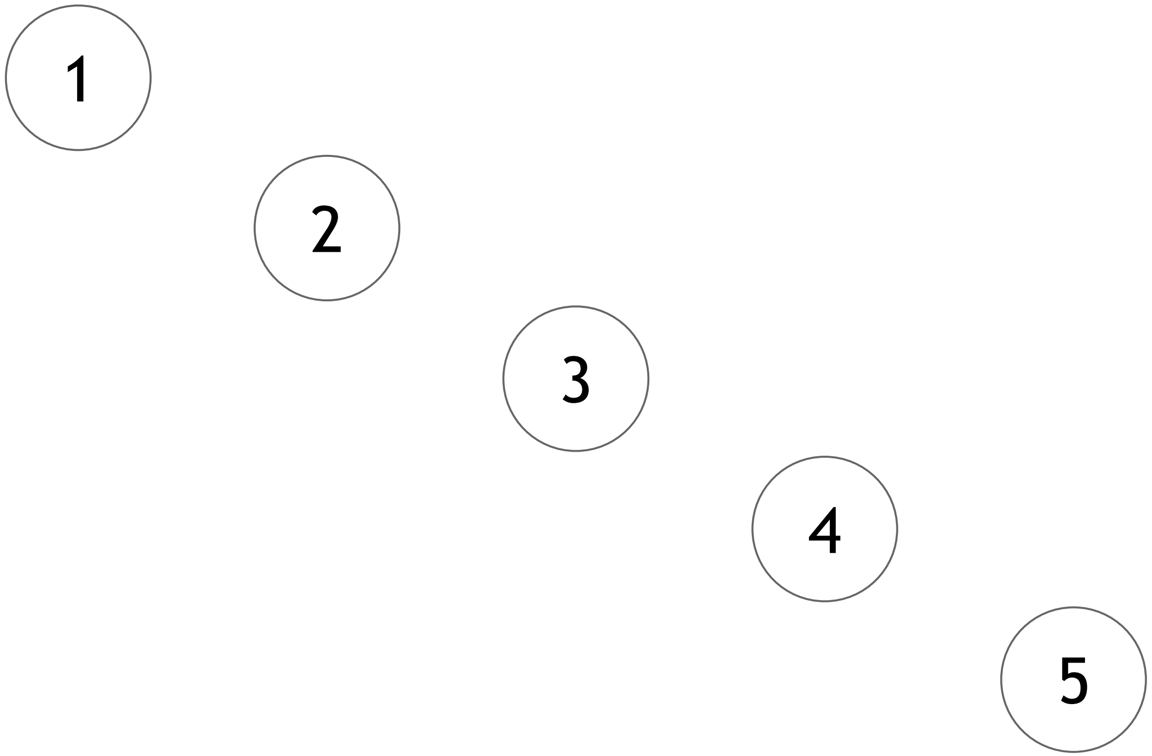
Path Compression

```
int pai[MAX_N + 1];

void init(){
    for(int i = 1; i <= MAX_N; i++)
        pai[i] = i;
}


int find(int x){
    if (pai[x] == x)
        return x;
    return pai[x] = find(pai[x]);
}
```

```
void merge(int u, int v){
    int a = find(u);
    int b = find(v);
    pai[a] = b;
}
```

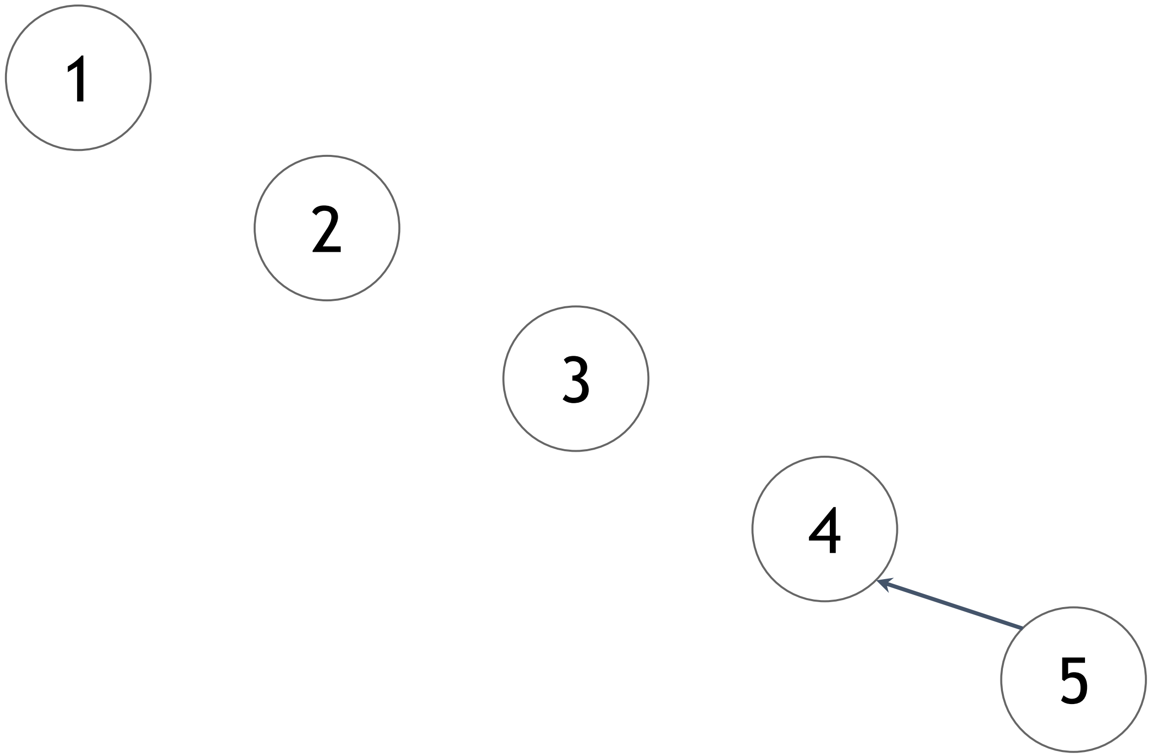
Path Compression

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



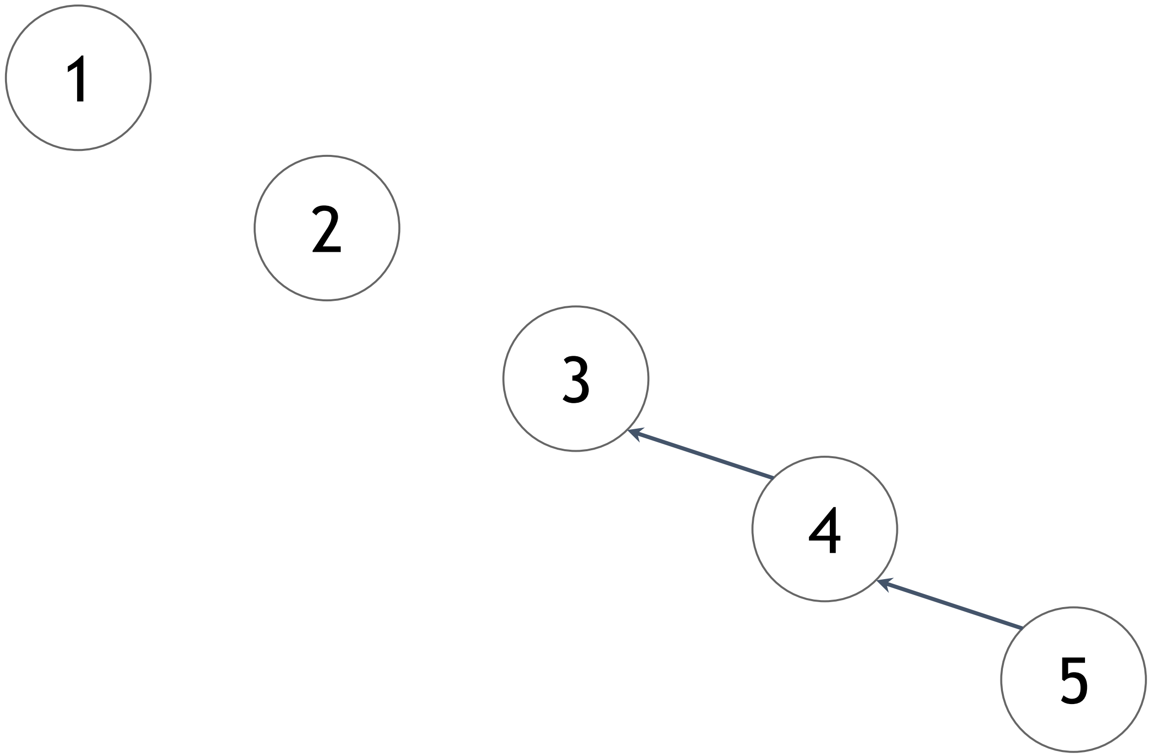
Path Compression

`merge(5,4)`
`merge(5,3)`
`merge(5,2)`
`merge(4,1)`



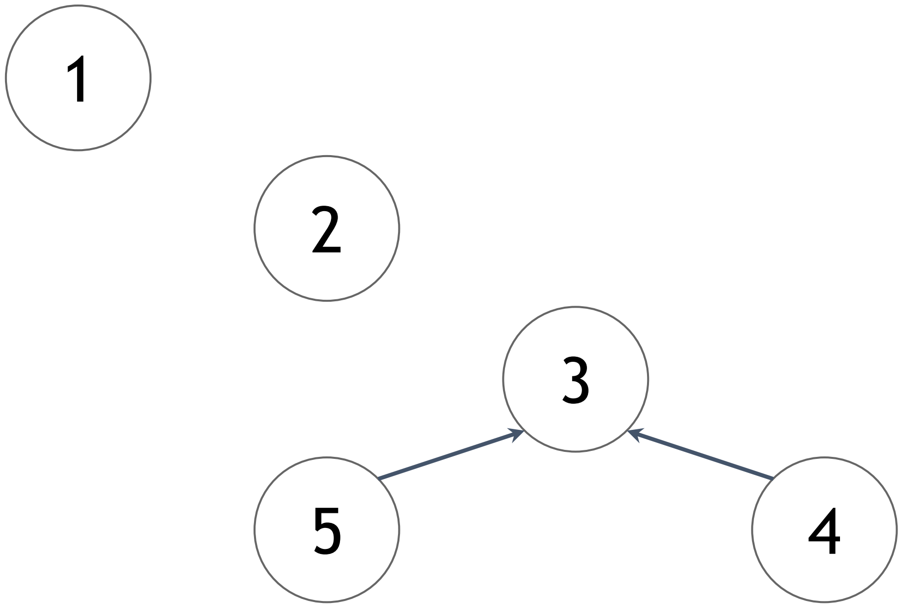
Path Compression

```
merge(5,4)
```
`merge(5,3)`
```
merge(5,2)
merge(4,1)
```



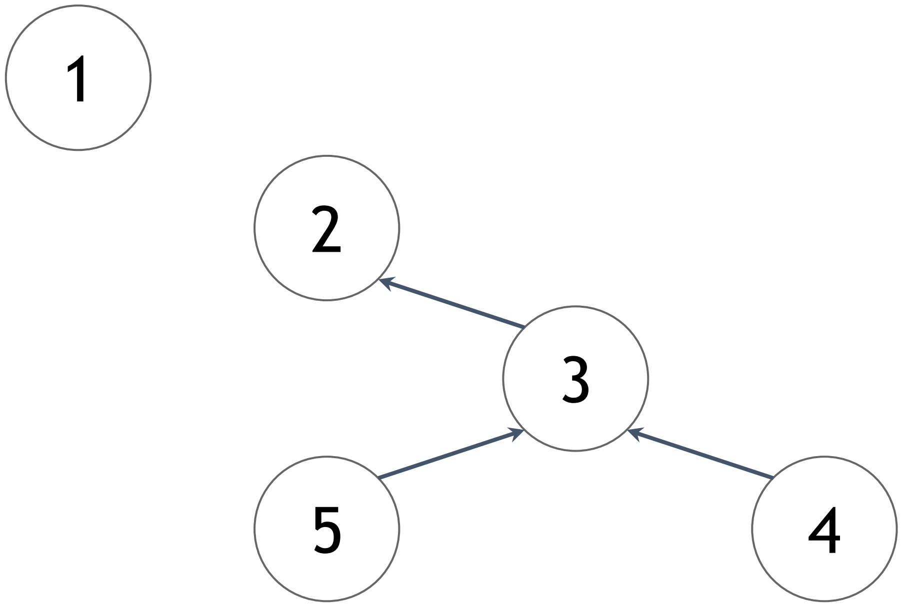
Path Compression

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



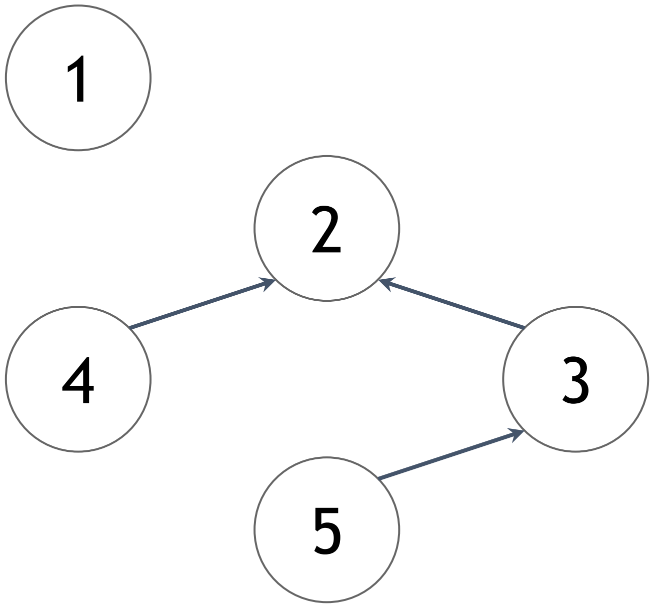
Path Compression

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
merge(4,1)
```



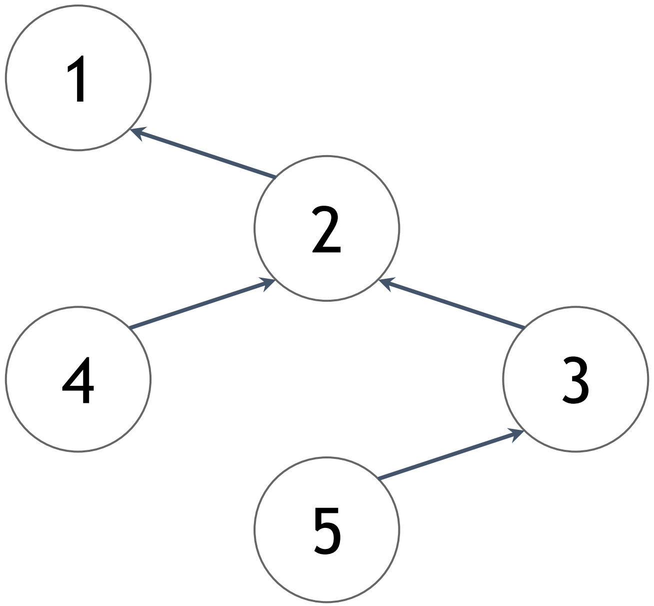
Path Compression

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
```
`merge(4,1)`



Path Compression

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(5,2)
```
`merge(4,1)`



Union by size

- Ideia: unir os conjuntos do menor para o maior, minimizando a profundidade dos conjuntos.
- Estratégia “small-to-large”
- Tempo por operação: O(log n)

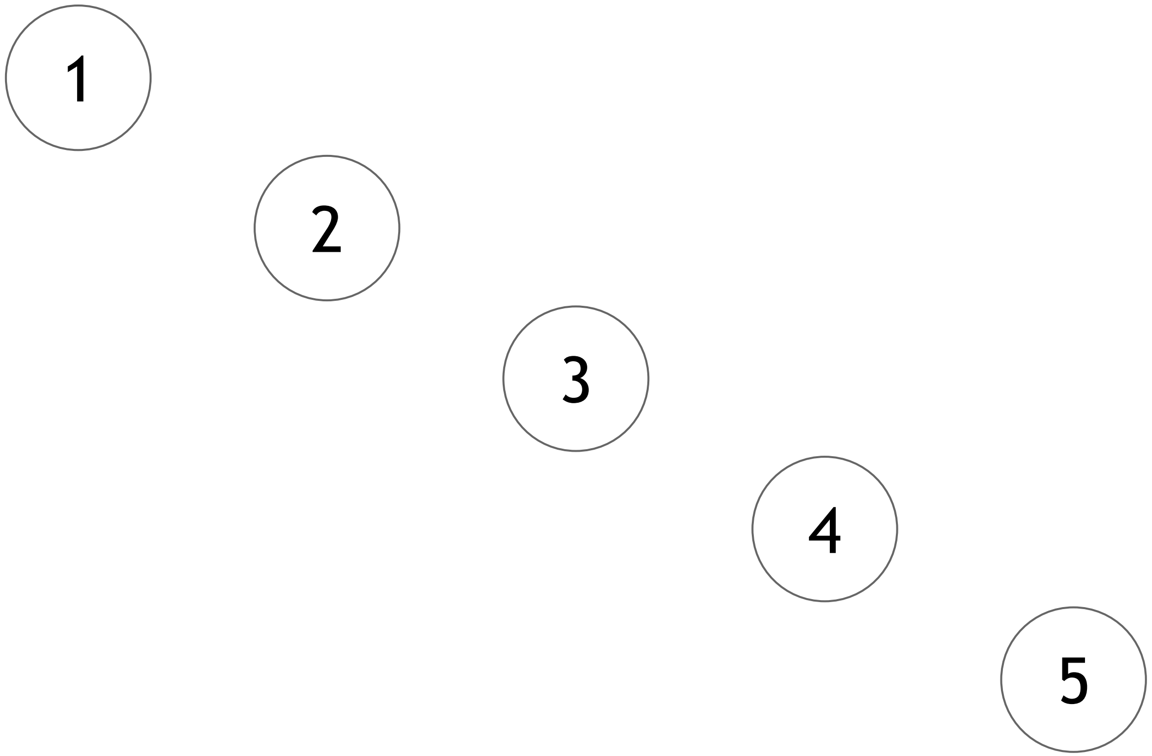
Union by size

```
int pai[MAX_N + 1];
int tam[MAX_N + 1];



void init()
{
    for(int i = 1; i <= MAX_N; i++)
    {
        pai[i] = i;
        tam[i] = 1;
    }
}
```

```
int find(int x)
{
    if (pai[x] == x)
        return x;
    return find(pai[x]);
}

void merge(int u, int v)
{
    int a = find(u);
    int b = find(v);
    if (tam[a] > tam[b])
        swap(a,b);
    pai[a] = b;
    tam[b] += tam[a];
}
```

Union by size

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(2,1)
merge(5,1)
```

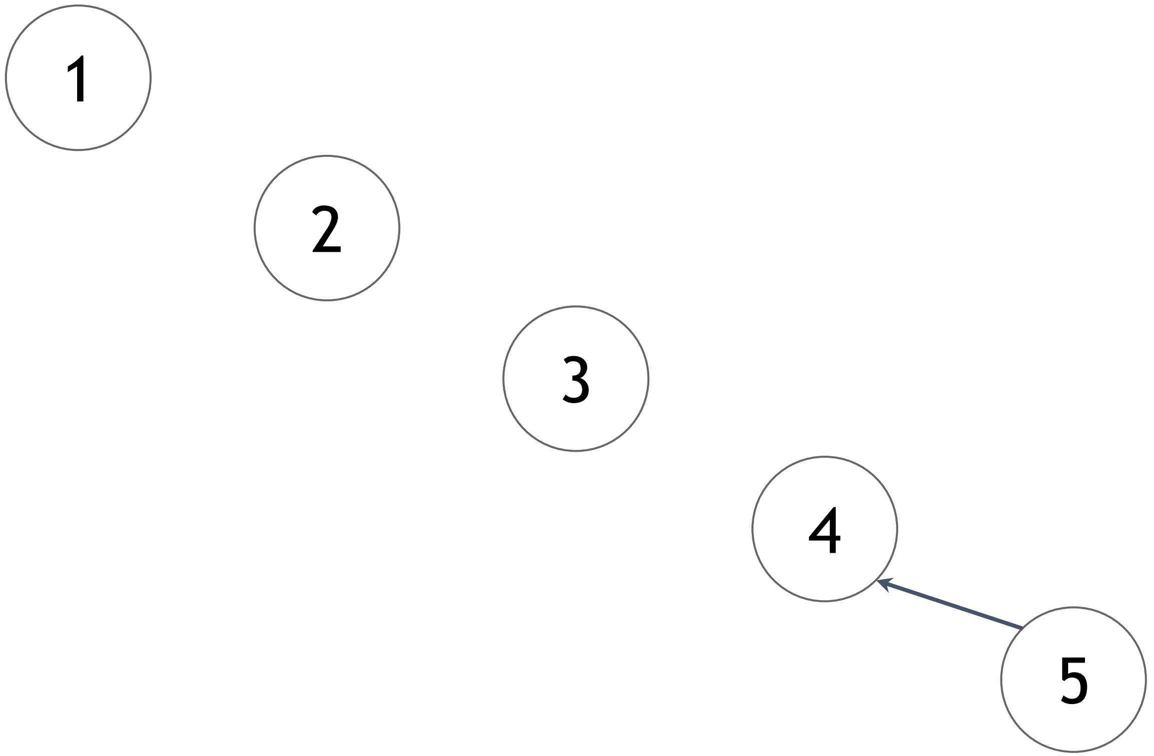


tam =

1	1	1	1	1

Union by size

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(2,1)
merge(5,1)
```

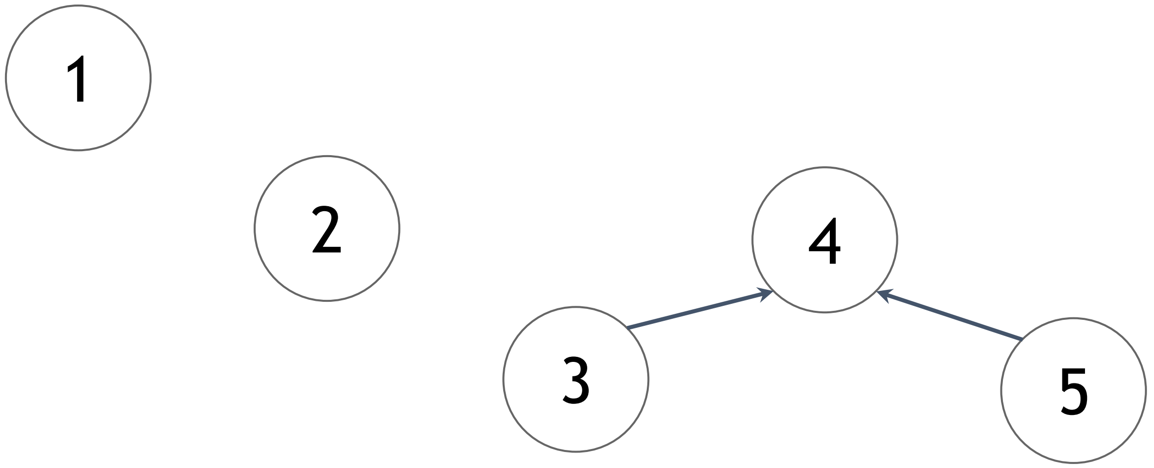


tam =

1	1	1	2	1

Union by size

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(2,1)
merge(5,1)
```

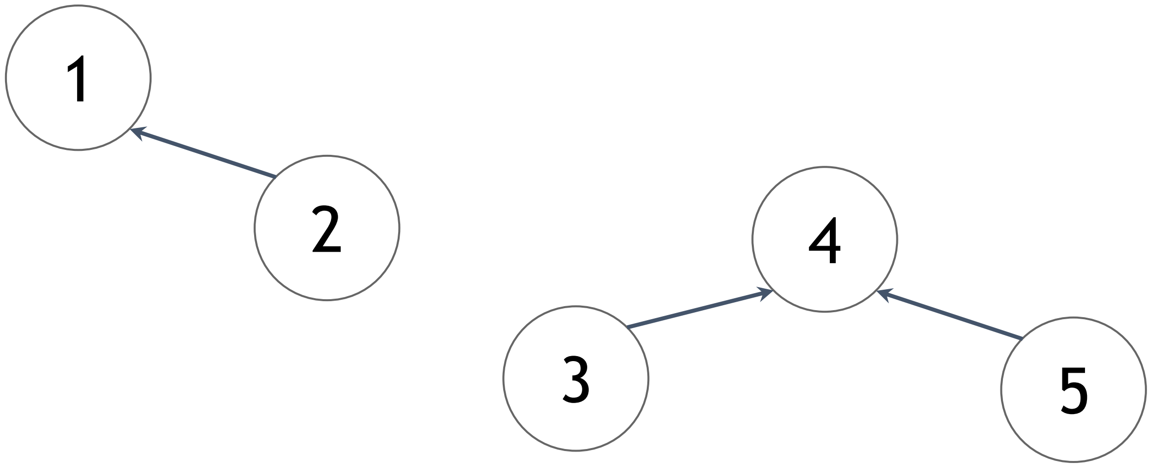


tam =

1	1	1	3	1

Union by size

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(2,1)
merge(5,1)
```

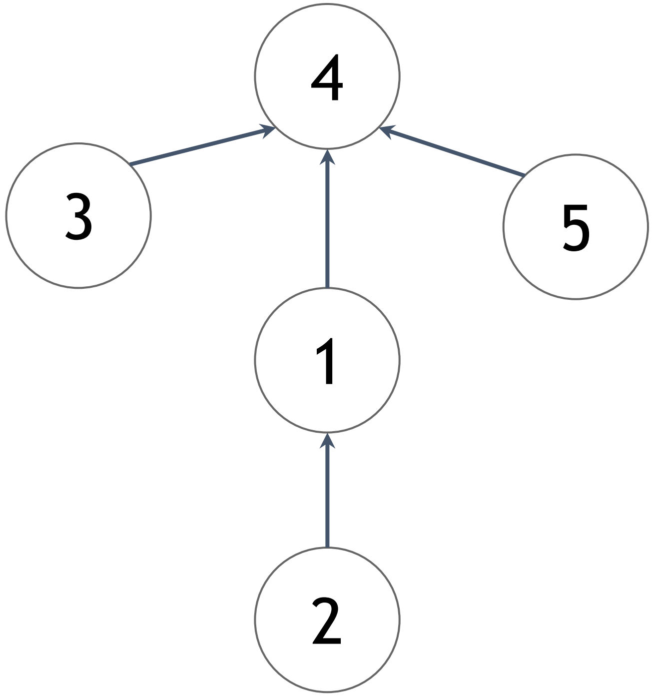


tam =

2	1	1	3	1

Union by size

```
merge(5,4)
merge(5,3)
merge(2,1)
```
`merge(5,1)`



tam =

2	1	1	5	1

Path Compression + Union by size

- Unindo ambas as técnicas garante-se complexidade quase constante, sendo a implementação mais recomendada.
- Outras técnicas de melhorias (na união dos conjuntos)
  - Union by rank
  - Linking by index
  - Coin-flip linking

Departamento de Computação

Programação Competitiva unesp

Problema: WAR (UVa - 10158)

- Conjunto n de pessoas de diferentes países.
- Duas pessoas são consideradas amigas se são do mesmo país, ou inimigas se são diferentes países.
- Neste problema, podem ser feitas 4 tipos de operações:
    - setFriends(x, y)
    - setEnemies(x, y)
    - areFriends(x, y)
    - areEnemies(x,y)
- Se uma operação contradizer alguma anterior, ela não é realizada e imprimimos -1 na tela

Problema: WAR (UVa - 10158)

- Propriedades da amizade $\sim$:
  - Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$
  - Se $x \sim y$ então $y \sim x$
  - $x \sim x$

- Propriedades da inimizade $*$:
  - Se $x\ *\ y$ então $y\ *\ x$
  - Não acontece $x\ *\ x$

- E também
  - Se $x\ *\ y$ e $y\ *\ z$, então $x \sim z$ (o inimigo do meu inimigo é meu amigo)
  - Se $x \sim y$ e $y\ *\ z$, então $x\ *\ z$ (o inimigo do meu amigo é meu inimigo)

Problema: WAR (UVa - 10158)

- A partir dessas propriedades, podemos modelar o problema utilizando disjoint-sets. Cada pessoa x possui dois conjuntos associados, o conjunto $amigos(x)$ e o conjunto $inimigos(x)$. E estes conjuntos devem satisfazer as propriedades anteriores.

- Detalhe de implementação: nos exemplos que vimos até agora, criamos um vetor pai de tamanho N, de forma que cada elemento começa associado a um conjunto. Neste exercício vamos criar um vetor de tamanho 2*N, onde a primeira metade são os conjuntos de amigos e a segunda de inimigos

Problema: WAR (UVa - 10158)

- Inicializando os conjuntos:
  - Toda pessoa é amiga dela mesma ($x \sim x$)
    - `pai[amigos(x)] = x;`
  - Ninguém é inimigo de si mesmo (Não $x * x$)
    - `pai[inimigos(x)] = 0;` //Considerando as pessoas numeradas de 1 a n

Problema: WAR (UVa - 10158)

- setFriends(x, y)
  - Primeiro, precisamos verificar se x e y não são inimigos, o que iria gerar uma contradição
  - Caso não, então fazemos
    - merge(amigos(x), amigos(y))
    - merge(inimigos(x), inimigos(y))

Problema: WAR (UVa - 10158)

- setEnemies(x, y)
  - Primeiro, precisamos verificar se x e y não são amigos, o que iria gerar uma contradição
  - Caso não, então fazemos
    - merge(amigos(x), inimigos(y))
    - merge(inimigos(x), amigos(y))

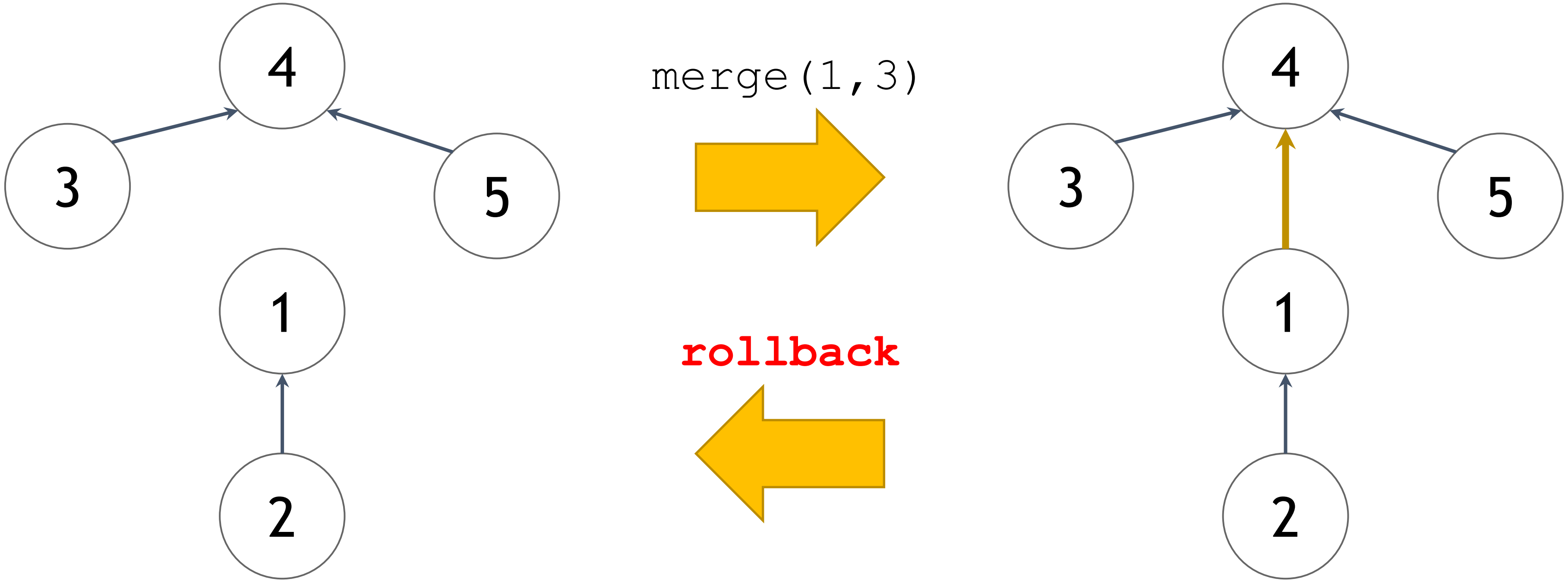
Problema: WAR (UVa - 10158)

- areFriends(x, y)
  - same(amigos(x), amigos(y))

- areEnemies(x, y)
  - same(amigos(x), inimigos(y))

Rollback

- Em alguns problemas, pode ser necessário realizar um *rollback*, desfazendo uniões imediatamente anteriores.



Rollback

- A cada operação *merge*, são feitas duas atribuições:
  - `pai[i] = x;`
  - `tam[j] = y;`
- Sendo assim, basta salvar os valores antigos em uma pilha, para restaurar se for necessário.
  - Uma pilha para o vetor pai: $< i,\ pai[i] >$
  - Uma pilha para o vetor tam: $< j,\ tam[j] >$
- Não permite usar *path compression*.

Rollback

```
int pai[MAX_N + 1];
int tam[MAX_N + 1];
stack<pair<int, int> > old_pai;
stack<pair<int, int> > old_tam;

void init()
{
    for(int i = 1; i <= MAX_N; i++)
    {
        pai[i] = i;
        tam[i] = 1;
    }
}
```

```
int find(int x)
{
    if (pai[x] == x)
        return x;
    return find(pai[x]);
}
```

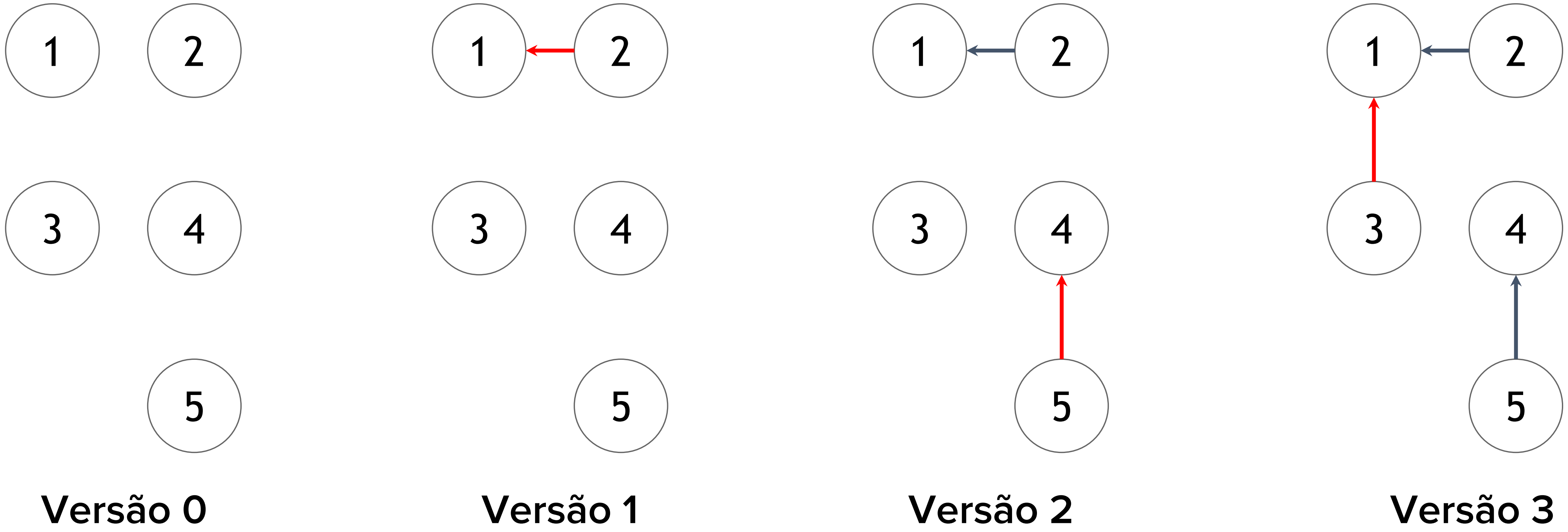
Rollback

```
void merge(int u, int v)
{
    int a = find(u);
    int b = find(v);
    if (tam[a] > tam[b])
        swap(a,b);
    old_pai.emplace(a, pai[a]);
    old_tam.emplace(b, tam[b]);
    pai[a] = b;
    tam[b] += tam[a];
}
```

```
void roolback()
{
    auto paiAnt = old_pai.top();
    auto tamAnt = old_tam.top();
    pai[paiAnt.first] = paiAnt.second();
    tam[tamAnt.first] = tamAnt.second();
    old_pai.pop();
    old_tam.pop();
}
```

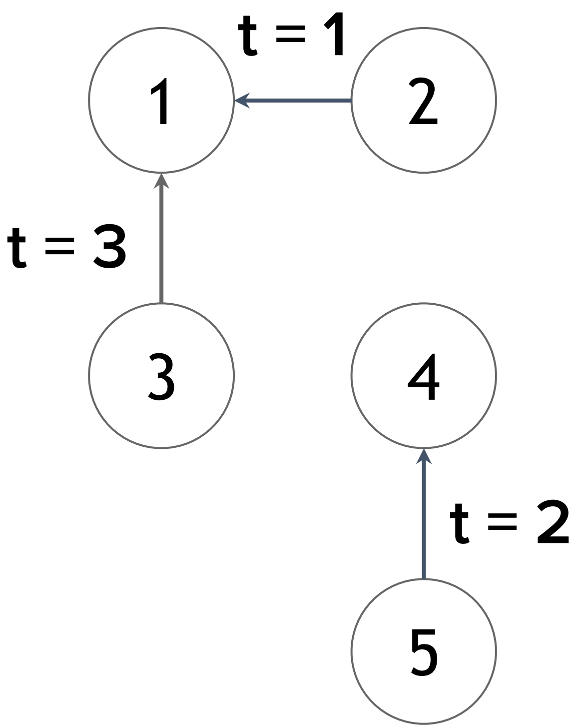
Persistência parcial

- O objetivo é poder consultar versões anteriores da estrutura.



Persistência parcial

- Ideia: anotar o tempo de cada ligação



Persistência parcial

- Operações básicas:
  - **merge(x, y)**: conecta os conjuntos de **x** e **y** (criando uma nova "versão")
  - **find(x, t)**: retorna a qual conjunto **x** pertence no momento **t**
  - **same(x, y, t)**: verifica se **x** e **y** pertencem ao mesmo conjunto no momento **t**

Persistência parcial

```
int pai[MAX_N + 1];
int tam[MAX_N + 1];
int his[MAX_N + 1];
int tempo;

void init()
{
    tempo = 0;
    for(int i = 1; i <= MAX_N; i++)
{
        pai[i] = i;
        tam[i] = 1;
        his[i] = 0;
    }
}
```

```
int find(int x, int t)
{
    if (pai[x] == x) return x;
    if (his[x] > t)  return x;
    return find(pai[x]);
}

void merge(int u, int v)
{
    tempo++;
    int a = find(u, tempo);
    int b = find(v, tempo);
    if (tam[a] > tam[b])
        swap(a,b);
    pai[a] = b;
    his[a] = tempo;
    tam[b] += tam[a];
}
```

Pictionary (Gym - 102078A)

- Neste problema, temos um conjunto de N cidades, inicialmente todas desconectadas.
- Rodovias são construídas entre a cidades em M dias. Em um dia i, é construída uma estrada entre a e b se $gcd(a, b) = M - i + 1$.
- São feitas Q *queries*, constituídas por pares de cidades. O resultado de cada *query* é o número mínimo de dias necessários para conectar o par de cidades (direta ou indiretamente)

Pictionary (Gym - 102078A)

- Usaremos disjoint-sets com persistência parcial para unir as cidades marcando o momento em que as uniões foram feitas.
    - Para cada dia d, vamos conectar as cidades com $\gcd(a,b) = M - d + 1$, que vamos chamar de x. Iterando sobre d, vamos realizar um merge de x com todos os seus múltiplos (até n).
    - Mas e se duas cidades $(x, k.x)$ já tiverem sido conectadas indiretamente antes? Sem problemas, o merge vai verificar que as cidades já foram unidas em um momento anterior e não vai fazer nada.

Pictionary (Gym - 102078A)

- Usaremos disjoint-sets com persistência parcial para unir as cidades marcando o momento em que as uniões foram feitas.
  - Para cada dia d, vamos conectar as cidades com $\gcd(a, b) = M - d + 1$, que vamos chamar de x. Iterando sobre d, vamos realizar um merge de x com todos os seus múltiplos (até n).
  - Mas e se duas cidades $(x, k.x)$ já tiverem sido conectadas indiretamente antes? Sem problemas, o merge vai verificar que as cidades já foram unidas em um momento anterior e não vai fazer nada.
- Para realizar as *queries*, executaremos uma busca binária para descobrir o número mínimo de dias necessários para conectar as cidades a e b.

Referências

https://files.johnjq.com/slides/summer/union-find.pdf
https://github.com/icmcgema/gema/blob/master/XX-Union_Find.md
https://cp-algorithms.com/data_structures/disjoint_set_union.html
https://www.youtube.com/watch?v=E33jZUw2l9Q