

Busca binária

Laboratório de Programação Competitiva I

Pedro Henrique Paiola

Rene Pegoraro

Wilson M Yonezawa

Problema da busca

- Dada uma coleção de n elementos, determinar se um determinado elemento (**valor**) está presente nessa coleção e, se sim, qual a posição desse elemento.

- Exemplo: busca em vetor de inteiros

`vet = {2, 5, 7, 8, 10}`

`buscar(vet, 7) = 2` //o elemento 7 está na posição 2 do vetor

`buscar(vet, 2) = 0` //o elemento 2 está na posição 0 do vetor

`buscar(vet, 3) = -1` //o elemento 3 não se encontra no vetor

Problema da busca

- **Generalização:** dada uma relação $R(x, y)$, o problema da busca consiste em, para um certo valor y , determinar se há um possível valor de x que satisfaça $R(x, y)$, e se sim, retornar este valor.

Busca linear

- **1ª solução:** busca linear ou sequencial - percorrer o vetor desde a primeira posição até a última em busca de um elemento x :
 - Se o elemento for encontrado, retornamos a posição;
 - Senão, retornamos -1 (por exemplo) para indicar que o elemento não foi encontrado.

Busca linear

- Exemplo de implementação

```

int buscaLinear(vector<int> vet, int x)
{
    for(int i = 0; i < vet.size(); i++)
    {
        if (vet[i] == x)
            return i;
    }
    return -1;
}
  
```

Busca linear

- **Análise da complexidade:** no pior caso, em que o elemento não está no vetor, teremos que percorrer todas as n posições do vetor.
- Sendo assim, esse algoritmo tem complexidade $O(n)$.

Busca linear com dados ordenados

- Agora suponha que os dados do vetor foram previamente ordenados.
- Com isso conseguimos melhorar um pouco o algoritmo, pois ao buscar um elemento x , se passarmos por um $y \mid y > x$, podemos encerrar a busca.
- Exemplo

`vet = {0, 4, 6, 9, 10, ... }`

`//Se buscarmos o número 7 nesse vetor (sabendo que ele está ordenado), assim que passarmos pela posição 3 vamos saber que ele não se encontra no vetor, mesmo que ele tenha mais 100000 elementos`

Busca linear com dados ordenados

- Exemplo de implementação

```
int buscaLinearOrd(vector<int> vet, int x)
{
    for(int i = 0; i < vet.size(); i++)
    {
        if (vet[i] == x)
            return i;
        if (vet[i] > x)
            break;
    }
    return -1;
}
```


Busca linear com dados ordenados

- **Análise da complexidade:** apesar desse algoritmo ser mais “esperto”, se saindo melhor em alguns casos específicos, sua complexidade no pior caso ainda é $O(n)$.
 - Pior caso: o número procurado não está no vetor e é maior que o último elemento do vetor.

Busca binária

- Porém, ainda partindo do fato que temos o vetor ordenado, imagine que verificamos inicialmente a posição do meio do vetor (e não a primeira posição, como na busca linear)
- O que podemos concluir disso?

Busca binária

$\text{centro} = (\text{inicio} + \text{fim}) / 2$

Se $\text{vet}[\text{centro}] == x$, então o elemento está na posição “centro”

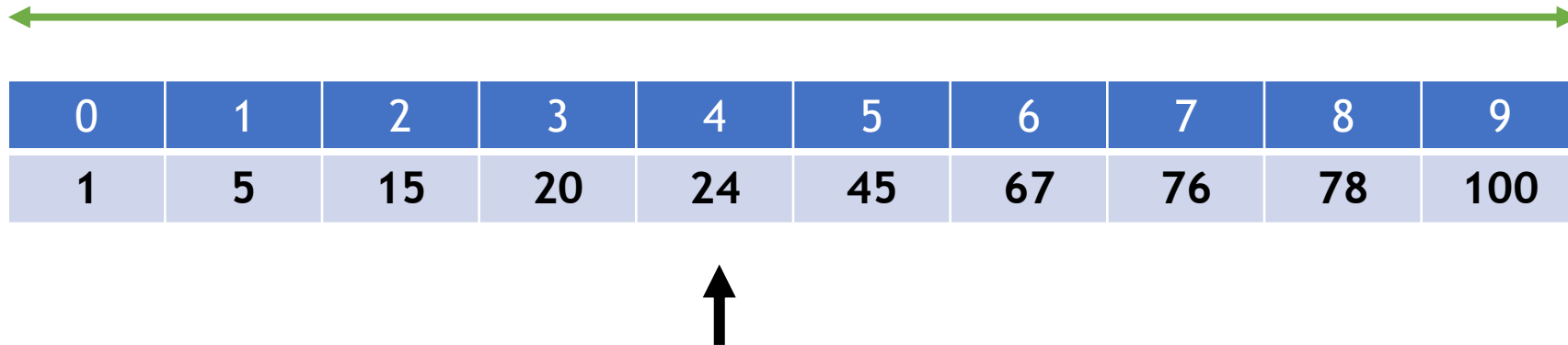
Se $\text{vet}[\text{centro}] > x$, então x só pode estar entre $\text{vet}[\text{inicio}]$ e $\text{vet}[\text{centro} - 1]$

Se $\text{vet}[\text{centro}] < x$, então x só pode estar entre $\text{vet}[\text{centro} + 1]$ e $\text{vet}[\text{fim}]$

- E qual a vantagem disso? Em uma única verificação eliminamos a necessidade de comparar o elemento buscado com metade do vetor.
- Para a metade onde o elemento x pode estar, aplicamos a mesma ideia, comparando com a posição do meio desse intervalo.

Busca binária

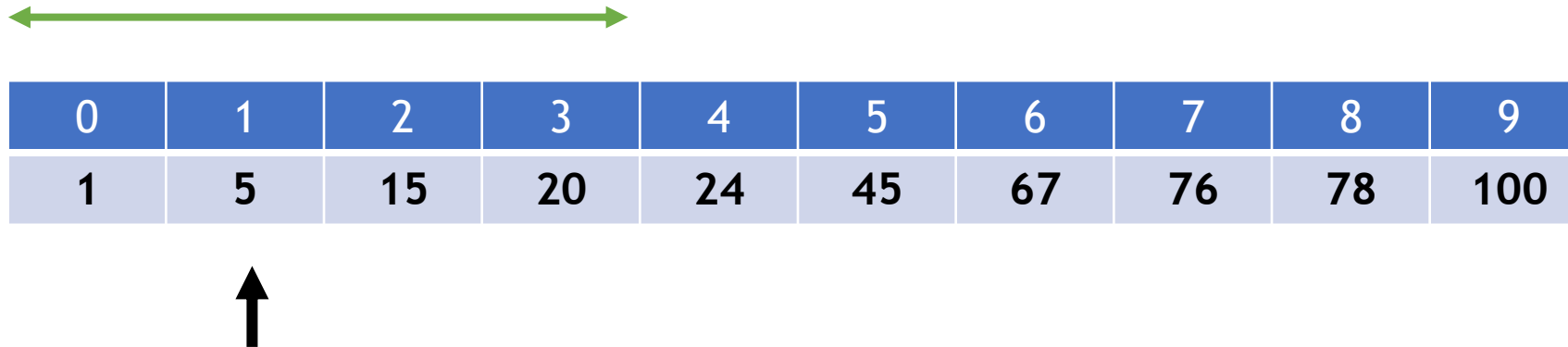
- Exemplo: busca do número 15



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Busca binária


- Exemplo: busca do número 15



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Busca binária

- Exemplo: busca do número 15



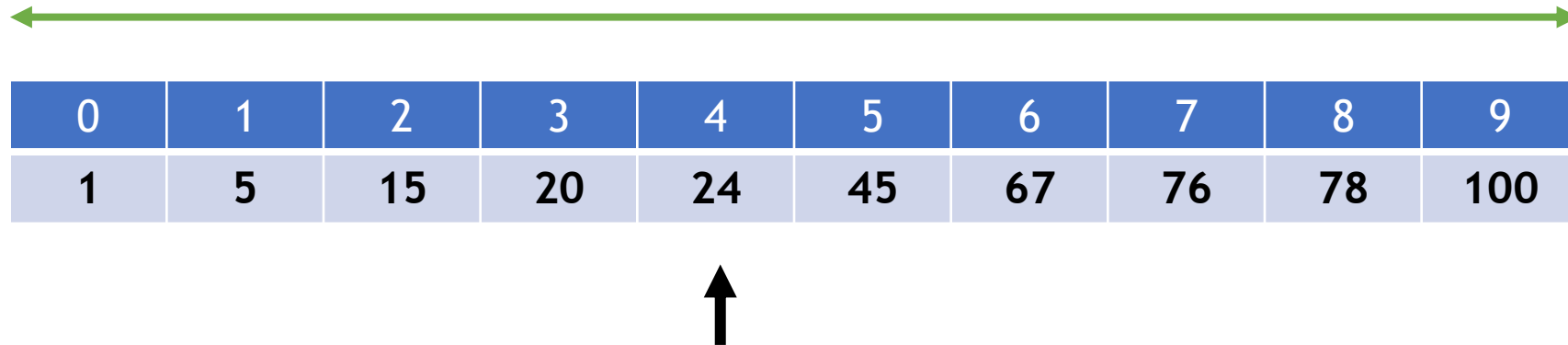
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100



Elemento encontrado!

Busca binária

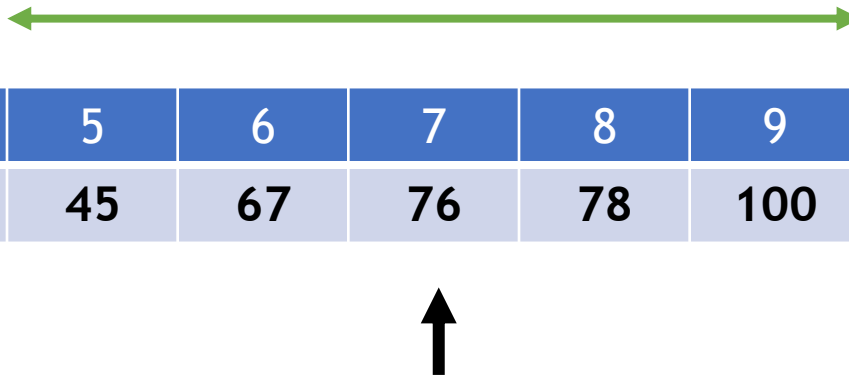
- Exemplo: busca do número 50



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Busca binária

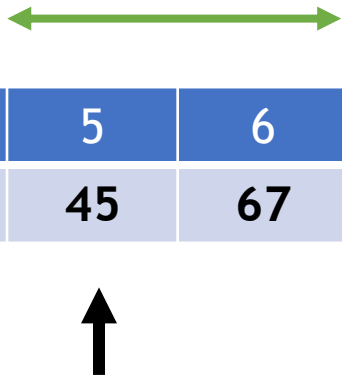
- Exemplo: busca do número 50



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Busca binária

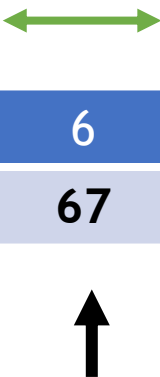
- Exemplo: busca do número 50



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Busca binária


- Exemplo: busca do número 50



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Busca binária

- Exemplo: busca do número 50



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	15	20	24	45	67	76	78	100

Elemento não encontrado!

Busca binária

- Exemplo de implementação - versão recursiva:

```

int buscaBinaria(int vet[], int esq, int dir, int x)
{
    if (esq > dir)
        return -1;
    int meio = (esq + dir)/2;
    if (vet[meio] > x)
        return buscaBinaria(vet, esq, meio-1, x);
    if (vet[meio] < x)
        return buscaBinaria(vet, meio+1, dir, x);
    return meio;
}
  
```

Busca binária

- Exemplo de implementação - versão iterativa:

```

int buscaBinaria2(int vet[], int n, int x)
{
    int esq = 0, dir = n - 1, meio;
    while(esq <= dir) {
        meio = (esq + dir)/2;
        if (vet[meio] == x) return meio;
        if (vet[meio] > x)  dir = meio - 1;
        else               esq = meio + 1;
    }
    return -1;
}
  
```

Busca binária

- **Análise da complexidade:** não iremos fazer a demonstração formal, mas o fato de dividirmos o intervalo de busca sempre pela metade faz com que a complexidade no algoritmo, no pior caso, **seja $O(\log n)$** . Sendo assim, mais eficiente que a busca linear.
- **OBS: NÃO ESQUEÇA** que o vetor deve estar ordenado, e um algoritmo assintoticamente ótimo de ordenação tem complexidade **$O(n \log n)$** .

Busca binária “generalizada”

- A busca binária não se aplica somente a busca em vetores, podendo ser generalizada para diversas aplicações.
- Em Programação Competitiva, em especial, encontraremos diversos problemas que podem ser resolvidos utilizando busca binária.

Fase Regional da Maratona 2019

• Problema M: Maratona Brasileira de Comedores de pipocas

A competição consiste em N sacos de pipocas colocados lado a lado, onde cada saco possui uma quantidade arbitrária de pipoca.

A competição ocorrem em equipes, cada uma composta por C competidores, e cada competidor pode comer, no máximo, até T pipocas por segundos.

Cada competidor da equipe deverá comer uma sequência contígua de sacos de pipocas. É perfeitamente válido que um competidor não coma nenhuma pipoca.

Todas as pipocas de um mesmo saco devem ser comidas por um único competidor.

Fase Regional da Maratona 2019

• Problema M: Maratona Brasileira de Comedores de pipocas

O objetivo da competição é comer todas as pipocas no **menor tempo possível**, dado que os C competidores podem comer em paralelo e eles respeitarão todas as regras impostas.

Entrada

N = quantidade de sacos de pipocas ($\leq 10^5$)

C = quantidade de competidores de uma mesma equipe

T = quantidade máxima de pipoca/s que um competidor pode comer

P_i = quantidade de pipocas no saco i

Fase Regional da Maratona 2019

- **Solução:** vamos partir de um problema mais simples:
 - Dado um tempo x , determinar se a equipe é capaz de comer todas as pipocas neste tempo. Por motivos de simplificação, vamos supor $T = 1$
 - Para isso, basta percorrer o vetor e tentar atribuir o máximo de sacos de pipocas para um competidor (enquanto $< x$). Quando não for possível fazer isso, passamos para o próximo competidor.
 - Se conseguirmos chegar no final do vetor, respeitando o limite de competidores da equipe, então é possível comer as pipocas no tempo x .
 - Esse processo tem complexidade $O(N)$

Fase Regional da Maratona 2019

```

bool ehPossivel(vector<int> &pip, int c, int x){
    int soma = 0, competidorAtual = 0;
    for(int i = 0; i < pip.size(); i++){
        soma += pip[i];
        if (soma > x){
            competidorAtual++;
            if (competidorAtual == c)
                return false;
            soma = pip[i];
        }
    }
    return true;
}
  
```

Fase Regional da Maratona 2019

- Em que isso ajuda? Intuitivamente é possível perceber que até um certo valor k (o tempo mínimo que almejamos) a equipe não conseguirá comer todas as pipocas, e a partir deste tempo ela sempre conseguirá.
- Se tentássemos representar esse comportamento em um vetor, teríamos algo assim:

$x =$	1	2	...	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$...
Possível?	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Fase Regional da Maratona 2019

- Esse caráter monotônico, ou monótono, da função permite que apliquemos uma busca binária para encontrar o tempo k .
- Quando pensamos nos resultados da função compondo um vetor, é fácil ver que ela é não decrescente ($f(x) \leq f(x+1)$).
- Em suma, iremos aplicar uma busca binária com **esq** = 0 e **dir** = **MAX**, buscando o primeiro caso em que é possível comer todas as pipocas.
- Complexidade: $O(n \cdot \log \text{MAX})$

Fase Regional da Maratona 2019

```
int solve(vector<int> &pip, int c, int t_ini, int t_fim){
    int x, k = t_fim;
    while(t_ini <= t_fim){
        x = (t_ini + t_fim)/2;
        if (ehPossivel(pip, c, x)){
            k = x;
            t_fim = x - 1;
        } else {
            t_ini = x + 1;
        }
    }
    return k;
}
```

Busca binária “generalizada”

- Como identificar se um problema pode ser resolvido por busca binária?
- É difícil determinar uma regra geral, além de que depende muito da modelagem e da forma que você está representando o problema.
- Mas uma dica importante é determinar se o problema possui um caráter **monotônico** como o exercício anterior.
 - Pode ser descrito por uma função crescente ou decrescente.

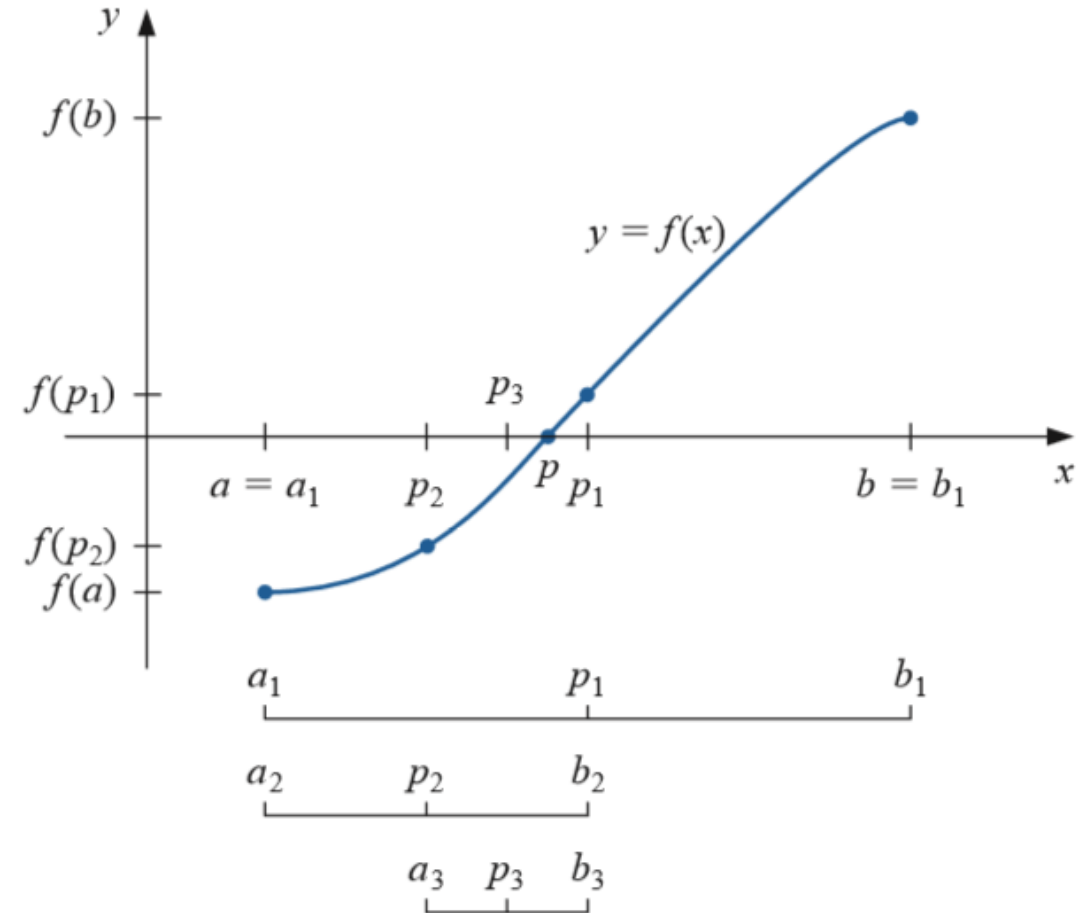
Busca binária “generalizada”

- Exemplo de problema recorrente: determinar o menor x tal que $f(x) \geq k$.
 - Se vale que $f(x) \leq f(x+1)$ para todo x , então o problema pode ser resolvido utilizando busca binária.
 - Exemplo, com $k = 20$

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x) =$	2	4	7	10	15	19	23	25	30

Método da bisseção

- Até agora trabalhamos com funções no domínio dos inteiros.
- Esse problema pode ser generalizado para funções definida nos reais. Neste caso temos o chamado **método da bisseção** ou **bissecção**.



Método da bisseção

- Exemplo: cálculo de raiz quadrada

```

double raiz(double x, double eps=1e-3){
    double l = 0, r = x;
    double m;
    while (r-l > eps){
        m = (l+r)/2;
        //cout << m << endl;
        if (m*m < x)
            l = m;
        else
            r = m;
    }
    return (l+r)/2;
}
  
```

Método da bisseção

- Exemplo: cálculo de raiz quadrada

$\text{sqrt}(2) = 1.41421$

1	1.5	1.25	1.375	1.4375	1.40625	1.42188	1.41406	1.41797
1.41602	1.41504	1.41455						

$\text{raiz}(2) = 1.41455$

Função unimodal

- Em alguns problemas também podemos lidar com funções unimodais.
 - Funções que possuem apenas um ponto de mínimo ou máximo.
 - Ou ainda, funções que apresentam apenas dois comportamentos: é crescente em um determinado intervalo e decrescente em outra.
- Neste caso é mais interessante aplicar uma busca ternária. Normalmente estamos procurando justamente o mínimo/máximo da função.

Referências

<http://www.ic.unicamp.br/~zanoni/mc102/2013-1s/aulas/aula15.pdf>

http://www.dcc.fc.up.pt/~pribeiro/aulas/daa1617/slides/2_ordenacao_07102016.pdf

<https://www.ic.unicamp.br/~ripolito/peds/mc102z/material/aula13.pdf>

<https://www.youtube.com/watch?v=GU7DpgHINWQ>

<https://codeforces.com/blog/entry/76686>

<https://sites.google.com/site/calculus10/home/lista-2/metodos/metodo-da-bisseccao>

<https://noic.com.br/materiais-informatica/curso/techniques-01/>