

Movimento em duas e três dimensões

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

19 de Fevereiro de 2022

Sumário

- 1 **Posição, velocidade e aceleração**
- 2 **Movimento balístico**
- 3 **Movimento circular**
- 4 **Apêndice**

Vetor posição e deslocamento

O vetor posição pode ser definido como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

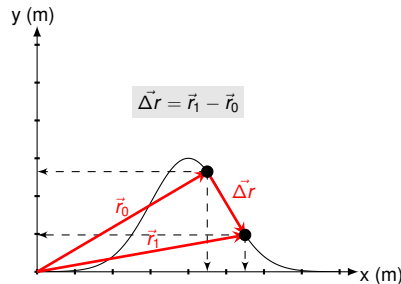
O deslocamento da partícula da posição \vec{r}_0 para \vec{r}_1 é dado por,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0,$$

$$\Delta\vec{r} = (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) - (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}),$$

$$\Delta\vec{r} = (x_1 - x_0)\hat{i} + (y_1 - y_0)\hat{j} + (z_1 - z_0)\hat{k},$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.$$



Deslocamento no plano xy.

Velocidade média

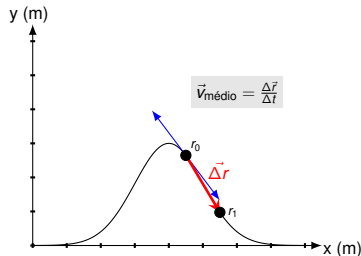
Sabemos que

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}}.$$

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta \vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt , a velocidade média é dado por

$$\vec{v}_{\text{médio}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

$$\vec{v}_{\text{médio}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}.$$



Tangente da trajetória da partícula na posição \vec{r}_0 .

Velocidade instantânea

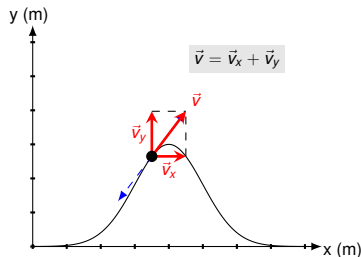
Reduzindo o intervalo de tempo Δt a um valor infinitesimal, $\Delta t \rightarrow 0$, temos

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

Concluimos assim que

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$



Velocidade \vec{v} de uma partícula e suas componentes vetoriais.

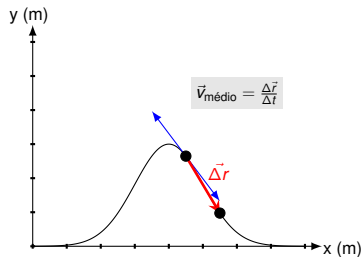
Aceleração média

Sabemos que

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação da velocidade}}{\text{intervalo de tempo}}.$$

Se uma partícula sofre uma variação $\Delta \vec{v}$ da sua velocidade em um intervalo de tempo Δt , a aceleração média é dado por

$$\vec{a}_{\text{médio}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$
$$\vec{a}_{\text{médio}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k}.$$



Cálculo da v_{med} a partir de $x(t)$.

Aceleração instantânea

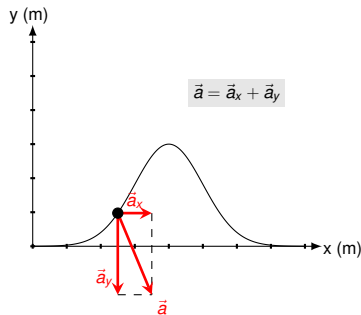
Reduzindo o intervalo de tempo Δt a um valor infinitesimal, $\Delta t \rightarrow 0$, temos

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}.$$

Concluimos assim que

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$



Gráficos da posição e velocidade.

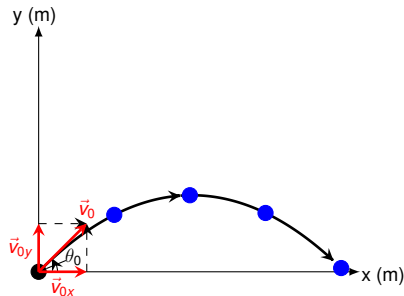
Movimento balístico

A velocidade inicial \vec{v}_0 de um projétil que faz um ângulo θ_0 com o eixo x pode ser decomposta em suas componentes horizontal e vertical,

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta_0 \hat{i} + v_0 \sin \theta_0 \hat{j}.$$

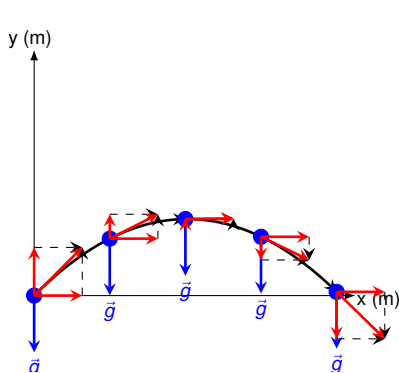
Corollary

No movimento balístico, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, e um não interfere no outro.

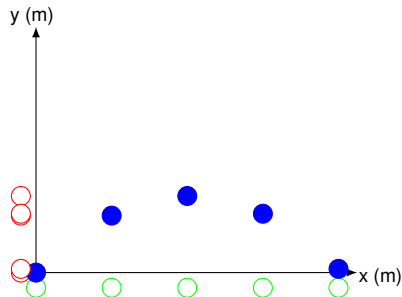


Trajetória parabólica de um projétil.

Movimentos horizontal e vertical na trajetória balística



Trajetória da partícula.



Movimentos horizontal e vertical.

Movimento horizontal

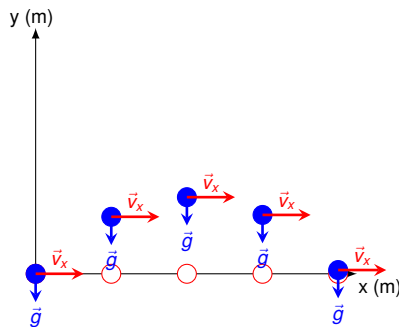
No movimento horizontal temos que a aceleração é zero (pois a única aceleração é a da gravidade que está orientada na direção do eixo y), portanto

$$x = x_0 + v_{0x}t.$$

Sabendo que $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t,$$

$$v(t) = v_0 \cos \theta_0.$$



Movimento horizontal da partícula.

Movimento vertical

No movimento vertical a aceleração é constante, onde

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Portanto é válido as fórmulas do movimento retilíneo uniformemente variado. Sabendo que

$$v_y = v \operatorname{sen} \theta,$$

temos as equações do movimento vertical,

Movimento vertical.

Definição	Equação
Velocidade	$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$
Torricelli	$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g\Delta y$
Posição	$y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Posição	$y(t) = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 \operatorname{sen} \theta + v_y) t$
Posição	$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}gt^2$

Equação da trajetória

Podemos determinar o tempo na equação $x = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t$ no movimento horizontal, na forma

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta_0}.$$

Sabendo que o tempo registrado nos dois movimentos (horizontal e vertical) são os mesmos e considerando que $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, podemos assim substi-

tuir t em $y(t)$,

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$y = 0 + v_0 \sin \theta_0 \left(\frac{x - 0}{v_0 \cos \theta_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - 0}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2,$$

$$y(x) = \tan \theta_0 x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}.$$

Alcance horizontal

Para determinar a distância horizontal R percorrida pelo projétil ($R = \Delta x$), substituímos R em

$$R = v_0 \cos \theta_0 t.$$

O trecho R corresponde as posições inicial e final onde $y_{\text{final}} = y_0$, portanto

$$\Delta y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Eliminando t na primeira equação e substituindo na segunda temos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

Corollary

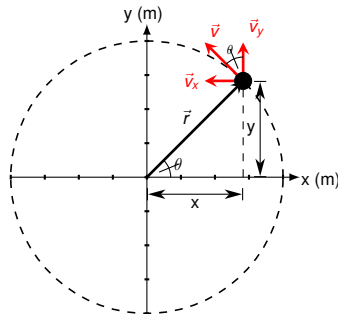
O alcance horizontal R é máximo para um ângulo de lançamento igual a 45° .

Movimento circular uniforme

Considerando a trajetória circular de uma partícula, a velocidade \vec{v} é sempre tangente a trajetória. Como o movimento é bidimensional, decompomos em duas componentes, nas direções x e y,

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j},$$

$$\vec{v} = -v \sin \theta \hat{i} + v \cos \theta \hat{j}.$$



Velocidade \vec{v} tangencial a trajetória circular.

Movimento circular uniforme (continuação)

Usando trigonometria podemos substituir $\text{sen}\theta$ por y/r e $\text{cos}\theta$ por x/r , ou seja,

$$\vec{v} = \left(-\frac{yv}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{xv}{r}\right)\hat{j}.$$

Considerando v e r constantes, podemos determinar a aceleração \vec{a} derivando \vec{v} em relação ao tempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx}{dt}\right)\hat{j},$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v v_y}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{v v_x}{r}\right)\hat{j}.$$

Mas $v_x = -v \text{sen}\theta$ e $v_y = v \text{cos}\theta$,

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \text{cos}\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \text{sen}\theta\right)\hat{j}.$$

Movimento circular uniforme (continuação)

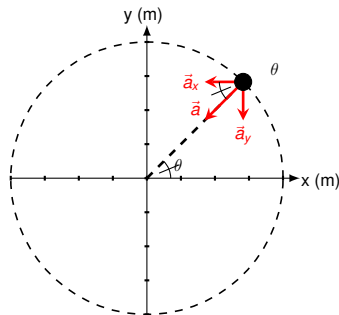
A partir da aceleração \vec{a} , demonstrado anteriormente, calculamos o seu módulo

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

$$a^2 = \left(-\frac{v^2}{r} \cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{v^2}{r} \sin\theta\right)^2,$$

$$a^2 = \left(-\frac{v^2}{r}\right)^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_1,$$

$$a = \frac{v^2}{r}.$$



Direção radial da aceleração \vec{a} .

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.

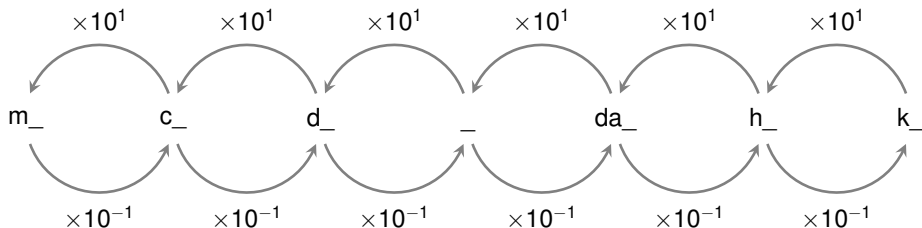
Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.

Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.

Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6,59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

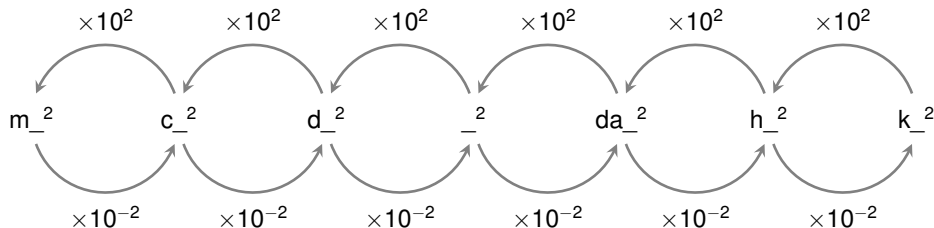


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1) \times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ kg} = 2,5 \times 10^{(1) \times 6} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mg}$$

$$10 \text{ ms} = 10 \times 10^{(-1) \times 3} \text{ s} \rightarrow 10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Conversão de unidades em duas dimensões

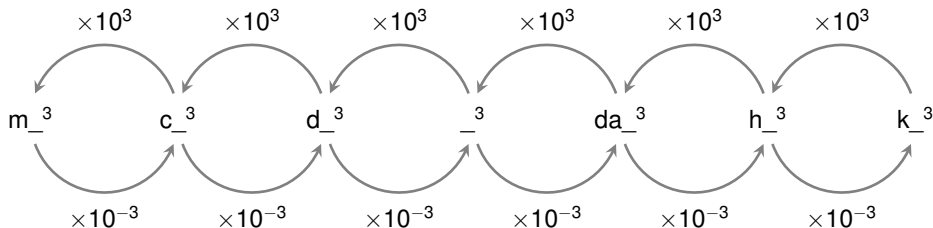


$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2) \times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2) \times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$10 \text{ ms}^2 = 10 \times 10^{(-2) \times 3} \text{ s}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ s}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões



$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3) \times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^9 \text{ mm}^3$$

$$2,5 \text{ km}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 6} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{18} \text{ mm}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsílon	E	ϵ, ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Teta	Θ	θ
Iota	I	ι
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mi	M	μ

Ni	N	ν
Csi	Ξ	ξ
ômicon	O	o
Pi	Π	π
Rô	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ípsilon	Υ	υ
Fi	Φ	ϕ, φ
Qui	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Ômega	Ω	ω

Observações¹

Esta apresentação está disponível para download no endereço
<https://flavianowilliams.github.io/education>

¹ Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

 D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)