# Ondas eletromagnéticas

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

21 de Abril de 2021

## Sumário

## Energia transportada em um onda eletromagnética

O vetor de Poyting $S$ é definido como a energia transportada pela onda por tempo e área,

$$S = \left( \frac{\text{energia/tempo}}{\text{área}} \right).$$

Porém, energia/área = potência, assim

$$S = \left( \frac{\text{potência}}{\text{área}} \right).$$

A partir do vetor de Poyting podemos encontrar a intensidade de uma onda eletromagnética. Da energia elétrica em um capacitor e em um indutor encontramos as expressões que definem a densidade de energia elétrica $u_E$ e magnética $u_B$ em função dos campos elétrico $E$ e magnético $B$,

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2,$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

## Densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética

Portanto, a energia total $u$ transportada por volume da onda eletromagnética pode ser definido como

$$u = u_E + u_B,$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(x,t)^2 + \frac{1}{2\mu_0}B(x,t)^2,$$

onde, pelas equações de Maxwell descobrimos que para uma onda se propagando na direção x teremos

$$E(x,t) = E_m \cos(kx - \omega t),$$
$$B(x,t) = B_m \cos(kx - \omega t).$$

Substituindo na expressão da energia resulta em

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 [E_m \cos(kx - \omega t)]^2 + \\ + \frac{1}{2\mu_0}[B_m \cos(kx - \omega t)]^2.$$

## Densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética (continuação)

Simplificando a expressão anterior obteremos

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_m^2 + \frac{1}{\mu_0} B_m^2\right)\cos^2(kx - \omega t).$$

Contudo, sabemos a partir das equações de Maxwell que $B_m = \frac{E_m}{c}$, substituindo

$$u = \frac{E_m^2}{2}\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2}\right)\cos^2(kx - \omega t).$$

Pelas equações de Maxwell também sabemos que $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$, substituímos encontramos

$$u = \frac{E_m^2}{2}\left(\frac{1}{\mu_0 c^2} + \frac{1}{\mu_0 c^2}\right)\cos^2(kx - \omega t),$$

$$u = \frac{E_m^2}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{\mu_0 c^2}\right)\cos^2(kx - \omega t),$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(kx - \omega t).}$$

## Vetor de Poyting

Podemos perceber que

$$\left(\frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}}\right) = \left(\frac{\text{energia}}{\text{volume}} \times \text{velocidade}\right).$$

Portanto, no caso de uma onda monocromática se propagando no vácuo, podemos dizer que

$$S = u \times c,$$

ou seja, o vetor de Poyting é justamente a densidade de energia multiplicado pela velocidade da luz. Substituindo $u(x,t)$ teremos

$$S = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(kx - \omega t),$$

Sabendo que $E(x,t) = E_m \cos(kx - \omega t)$, representamos S na forma compacta

$$\boxed{S(x,t) = \frac{1}{c\mu_0}E(x,t)^2.}$$

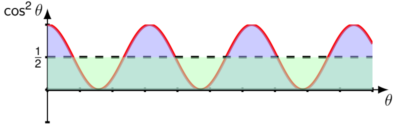
## Valor médio do vetor de Poyting

Entretando, do ponto de vista prático é mais conveniente obter informações a respeito do valor médio de uma grandeza ao invés de seu valor instantâneo. Dessa maneira definimos a intensidade $I$ como

$$I = \langle S(x,t) \rangle = \left\langle \frac{1}{c\mu_0} E(x,t)^2 \right\rangle .$$

Sabendo que $\langle \cos^2\theta \rangle = \frac{1}{2}$ teremos

$$\boxed{I = \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2.}$$




Valor médio de $\cos^2\theta$ vezes $\theta$ (área verde). Área de $\cos^2\theta$ (área azul).

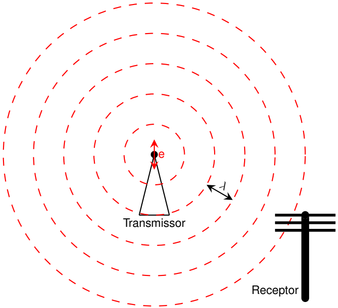
## Relação entre intensidade e potência

Pela definição de intensidade temos

$$\text{Intensidade} = \left(\frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}}\right).$$

Porém, sabemos que potência = energia por tempo, o que nos fornece

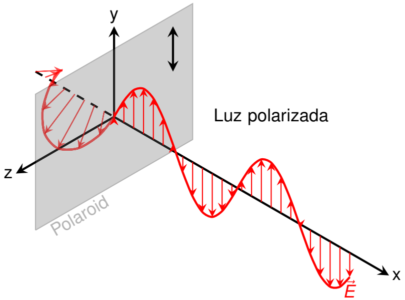
$$\boxed{\text{Intensidade} = \left(\frac{\text{potência}}{\text{área}}\right).}$$




Intensidade da onda de rádio (esféricas) diminuindo com o quadrado da distância.

## Polarização da Luz

Diferentemente de ondas transmitidas por uma antena de rádio ou TV, as ondas emitidas pelo sol tem a direção do campo elétrico mudando aleatoriamente ao longo do tempo. Uma maneira de filtrar a luz do sol é a utilização de um filtro polarizador, que permite passar somente as ondas cuja direção do campo elétrico é paralelo a direção de orientação dos átomos que compõem o material. Demais campos elétricos são absorvidos devido a polarização dos elétrons no material.




Onda polarizada.

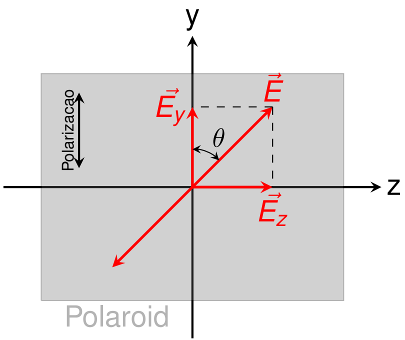
## Polarização da Luz

Sabemos que a intensidade da onda depende do quadrado do campo elétrico $E$. Podemos decompor $E$ em suas componentes horizontal e vertical. Sabendo que somente a componente $\vec{E}_y$ é atravessado temos

$$I = \frac{1}{2c\mu_0}E_y^2 = \overbrace{\frac{1}{2c\mu_0}E_m^2}^{I_0}\cos^2\theta,$$

$$\boxed{I = I_0\cos^2\theta.}$$

onde $I_0$ é a intensidade da onda incidente.




Polarização da luz à partir do vetor campo elétrico $\vec{E}$.

## Polarização da luz incidente não polarizada

Se onda for não polarizada, ou seja, teremos frentes de onda cuja direção do campo elétrico assume todos os valores entre $\theta = 0°$ a $\theta = 360°$. Sabendo que $E_m^2 = E_{m,z}^2 + E_{m,y}^2$ teremos para a onda não polarizada

$$I_0 = \sum \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2,$$

$$I_0 = \sum \left( \frac{1}{2c\mu_0} E_{m,z}^2 + \frac{1}{2c\mu_0} E_{m,y}^2 \right).$$

A soma das componentes em y é a mesma de z, portanto

$$I_0 \to 2 \underbrace{\left( \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2 \right)}_{I}.$$

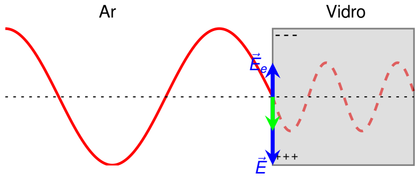
Definindo I a intensidade da onda polarizada teremos

$$\boxed{I = \frac{1}{2} I_0.}$$

## Propagação da onda na matéria

A onda eletromagnética ao atravessar um meio dielétrico, induz um movimento de elétrons do material, o qual faz surgir um campo elétrico com sentido contrário ao campo elétrico da onda. Como resultado, a onda transmitida no material terá um campo elétrico efetivo $\vec{E}_\kappa$, devido a diferença do campo $\vec{E}$ da onda no ar com o campo elétrico produzido pela polarização das cargas $\vec{E}_p$,

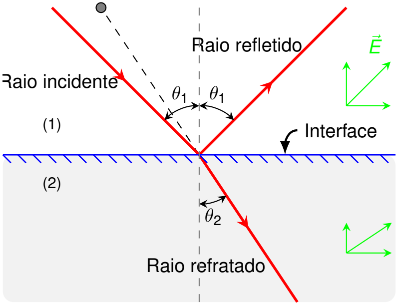
$$E_\kappa = E - E_p.$$




Onda atravessando um meio material.

## Desvio da direção de propagação da onda ao atravessar a matéria

Considere um raio de luz incidindo em um material dielétrico com a inclinação de $\theta_1$ graus em relação ao eixo normal a superfície. Podemos decompor o vetor campo elétrico em suas componentes horizontal e vertical. Ao atravessar o meio refrigente, a componente vertical de $\vec{E}$ causa uma polarização da matéria, diminuindo assim a amplitude vertical do campo elétrico. Entretando, horizontalmente o campo elétrico não se altera, pois não há polarização nessa direção. Isso por sua vez altera a direção do campo elétrico $\vec{E}$, alterando assim a direção de propagação da onda.




Reflexão e refração dos raios de luz.

## Redução da velocidade da onda ao atravessar a matéria

Considere uma onda atravessando um meio dielétrico neutro e na ausência de corrente elétrica, nesse caso as equações de Maxwell no vácuo ainda são válidas, com a pequena modificação, que o campo elétrico da onda deverá ser reduzido por uma quantidade $\kappa$, onde $\kappa$ é a constante dielétrica do meio, ou seja,

$$\vec{E}_\kappa = \frac{\vec{E}}{\kappa}, \quad (\kappa > 1).$$

Assim, a partir da lei de Ampère-Maxwell

$$\frac{\partial(\kappa E_\kappa)}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x},$$
$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}.$$

Da lei de Faraday-Lenz temos a equação da luz no vácuo, onde a variação no tempo de $\vec{B}$ induz um campo $\vec{E}$ circular,

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

## Redução da velocidade da onda ao atravessar a matéria (continuação)

Considerando que os campos elétrico e magnético admitem soluções do tipo $A(x,t) = A_m cos\,(kx - \omega t)$ teremos

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial x} = -E_{\kappa m} k sen\,(kx - \omega t)\,,$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = B_m \omega sen\,(kx - \omega t)\,,$$
$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial t} = E_{\kappa m} \omega sen\,(kx - \omega t)\,,$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} = -B_m k sen\,(kx - \omega t)$$

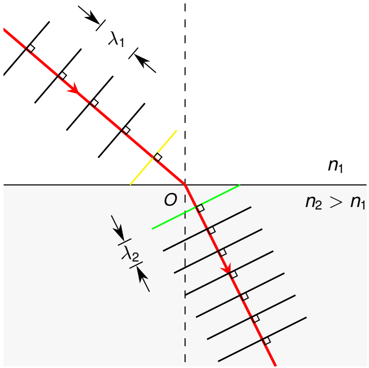
Substituindo nas equações anteriores teremos

$$\frac{E_{\kappa m}}{B_m} = \frac{\omega}{k} = v,$$
$$\frac{E_{\kappa m}}{B_m} = \frac{k}{\omega \kappa \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{v \kappa \varepsilon_0 \mu_0}.$$

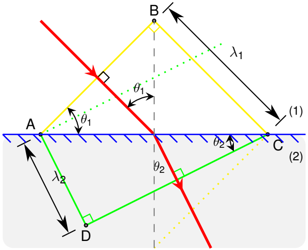
Sabendo que $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ teremos

$$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}.}$$

# Variação do comprimento de onda com a refração




$\lambda$ diminui quando a luz é refratada.




Frentes de onda na interface.

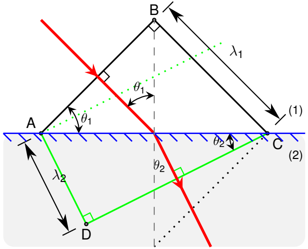
## Aplicando a trigonometria para definir a relação entre $\theta$ e $\lambda$

Na figura ao lado vemos que o triângulo ABC é retângulo, onde o ângulo do vértice BÂC é igual ao ângulo de incidência. Usando a lei dos senos encontramos

$$\overline{BC} = \lambda_1 = \overline{AC} sen(\theta_1).$$

Da mesma maneira, o triângulo ADC também é retângulo, onde

$$\overline{AD} = \lambda_2 = \overline{AC} sen(\theta_2).$$



Frentes de onda na interface.

## Lei de Snell

Temos assim

$$\lambda_1 = \overline{AC}sen(\theta_1),$$
$$\lambda_2 = \overline{AC}sen(\theta_2).$$

Dividindo os dois lados da equação temos

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)}.$$

Sabemos que na onda a relação entre comprimento de onda e velocidade é dado por $v = \lambda f$, onde f é a frequência que não se altera quando a onda atravessa de um meio ao outro, portanto

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)}.$$

Se o meio 1 for o vácuo ou ar temos $v_1 = c$, ou seja,

$$\boxed{\frac{c}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{sen(\theta_{ar})}{sen(\theta_2)}.}$$

## Índice de refração

No caso da luz atravessando do ar para um meio mais refrigente temos a relação

$$\frac{c}{v} = \frac{sen(\theta_{ar})}{sen(\theta)}.$$

Se definirmos $n = \sqrt{\kappa}$ teremos $n = c/v$ como a fração da velocidade da luz que diminui ao atravessar o meio, assim

$$n = \frac{sen(\theta_{ar})}{sen(\theta_2)}.$$

Para uma onda que atravessa dois meios com índices de refração diferentes temos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)},$$

$$\frac{\left(\frac{c}{v_2}\right)}{\left(\frac{c}{v_1}\right)} = \frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)},$$

$$\xleftarrow{\qquad\qquad\qquad} \times \frac{c}{c}$$

**Lei de Snell**

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)}, \quad (n > 1).$$

## Reflexão total

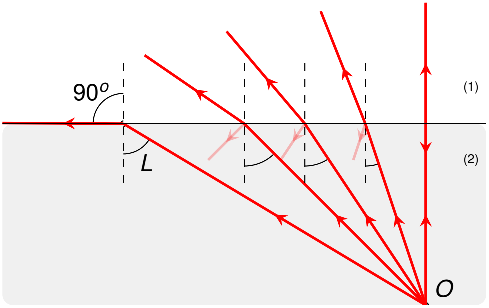
Aplicando a Lei de Snell temos

$$n_2 sen(L) = n_1 \overbrace{sen(90^o)}^{1},$$

$$sen(L) = \frac{n_1}{n_2}.$$

### Ângulo de reflexão total da luz

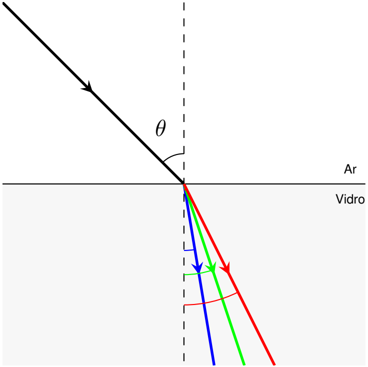
$$L = sen^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right), \quad (n_2 > n_1).$$




Reflexão total da luz.

## Relação entre o índice de refração e a cor da luz

- ✓ Cada cor no espectro de luz visível é caracterizada por uma frequência em um comprimento de onda específico;
- ✓ A luz branca é a combinação de várias cores com comprimentos de onda diferentes;
- ✓ Cada cor terá velocidades diferentes após a refração, o que faz com que elas também tenham ângulos de refração diferentes.




Dispersão dos raios de luz.

## Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Referências


- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.4, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.4, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)