

Campo magnético induzido por corrente

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

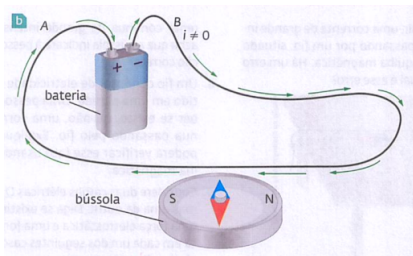
31 de Março de 2021

Sumário

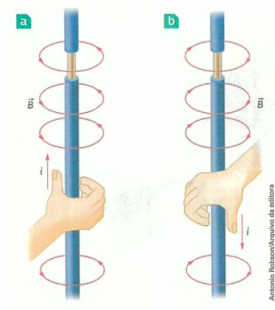
- 1 Lei de Biot-Savart
- 2 A Lei de Ampère
- 3 Aplicações
- 4 Apêndice

O nascimento da teoria do eletromagnetismo

A relação entre corrente elétrica e magnetismo surgiu na experiência de Oersted.



Experiência de Oersted mostrando que a corrente no fio produz alguma influência sobre a bússola.



Campo magnético circular produzido pela corrente elétrica

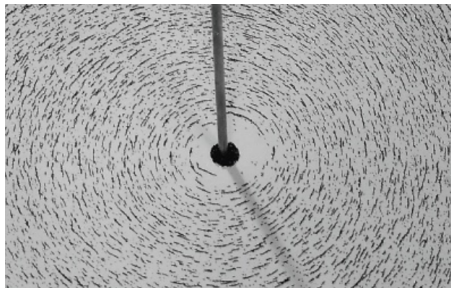
Observação experimental do campo magnético ao redor de um fio retilíneo

De acordo com a experiência, a corrente que percorre um fio condutor produz um campo magnético circular \vec{B} , que obedece a seguinte relação de proporcionalidade

$$B \propto \frac{i}{r}.$$

Como será mostrado a seguir, a relação de proporcionalidade nos fornece

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



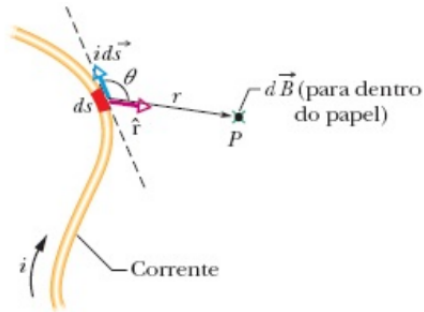
Campo magnético de limalhas de ferro ao redor de um fio por onde atravessa uma corrente elétrica i .

Campo magnético produzido por uma corrente

Um elemento de corrente $id\vec{s}$ produz um elemento de campo magnético $d\vec{B}$ no ponto P, segundo a relação abaixo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}.$$

Na figura ao lado, o campo magnético possui a orientação de estar entrando na tela. μ_0 é chamada permeabilidade magnética no vácuo.



Campo magnético $d\vec{B}$ produzido pelo elemento de corrente $id\vec{s}$ [1].

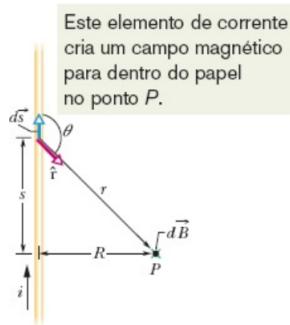
Campo magnético de um fio retilíneo à partir da Lei de Biot-Savart

O módulo do campo magnético $d\vec{B}$ no ponto P mostrado na figura ao lado é dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{s} \sin \theta}{r^2}.$$

Supondo um fio retilíneo infinito, podemos somar a contribuição de cada elemento $d\vec{s}$ do fio no ponto P integrando a equação acima,

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta ds}{r^2}.$$



Campo magnético $d\vec{B}$ no ponto P devido ao elemento $d\vec{s}$ de um fio retilíneo [1].

Campo magnético de um fio retilíneo à partir da Lei de Biot-Savart (continuação)

A relação entre as variáveis r e θ com o comprimento s é dado por

$$r = \sqrt{s^2 + R^2},$$
$$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

Substituindo temos

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{R ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}},$$

Fazendo a substituição $s = R \tan \theta$ e $ds = R \sec^2 \theta d\theta$ temos

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \frac{R \sec^2 \theta d\theta}{R^3 \sec^3 \theta},$$
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \cos \theta d\theta.$$

Aplicando os limites de integração temos

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}.$$

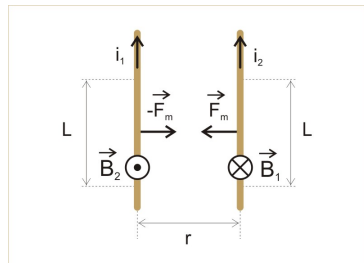
Força magnética entre dois fios

A corrente i_1 produzirá um campo magnético B_1 no fio 1. A força magnética atuando no fio 2 é $F_m = BiL$. No caso do fio retilíneo temos $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$, portanto

$$F_m = BiL,$$
$$F_m = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) iL.$$

Se $r=1\text{m}$, $i=1\text{A}$, e $L=1\text{m}$ a força F_m encontrada equivale a $2 \times 10^{-7} \text{ N}$. Substituindo temos

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}.$$

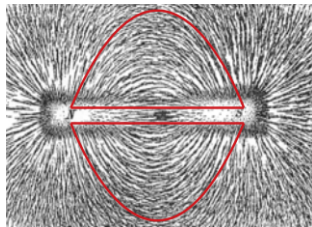


Força magnética F_m atuando entre dois fios retilíneo [5].

Integral do campo magnético circular

Sabemos que a corrente que percorre um fio retilíneo produz campos magnéticos circulares. Portanto é de se esperar que a integral de \vec{B} em um caminho fechado C deve ser diferente de zero,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0.$$



Linhas de campo formando caminhos fechados.

Corollary

A inexistência de monopolos magnéticos explica o fato das linhas de campo magnético serem obrigatoriamente circulares.

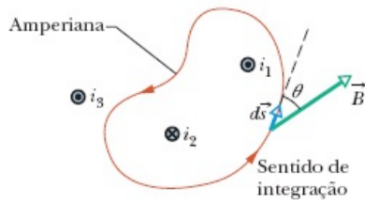
A Lei de Ampère

A experiência nos diz que a integral do campo magnético em um caminho fechado C (**chamada amperiana**) é proporcional à intensidade de corrente estacionária i envolvida pelo caminho C ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \propto i.$$

A constante de proporcionalidade é justamente a constante de permeabilidade magnética μ_0 , portanto

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_C B \cos \theta dr = \mu_0 i.$$



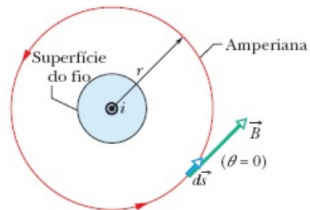
Aplicação da lei de Ampère a uma amperiana que envolve dois fios retíneos longo [1].

Campo magnética induzido por um fio retilíneo

Aplicando a lei de Ampere para uma amperiana circular de raio R que envolve um fio retilíneo longo por onde passa uma corrente i teremos

$$\oint_C \vec{B} \cos \theta ds = \mu_0 i.$$

Pela simetria do problema, percebe-se que B é constante para cada elemento $d\vec{s}$ da amperiana, e convenientemente escolhemos $\theta = 0^\circ$, de modo que iremos calcular o campo magnético circular ao redor do fio.



Uso da lei de Ampere para determinar o campo magnético ao redor de um fio retilíneo longo [1].

Campo magnética induzido por um fio retilíneo (continuação)

Dessa maneira, podemos dizer que

$$\oint_C B \cos \theta ds = \mu_0 i,$$

$$B \oint_C ds = \mu_0 i.$$

Sabendo que $C = 2\pi r$ temos

$$B(2\pi r) = \mu_0 i,$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Corollary

A solução acima corresponde ao dobro do resultado obtido pela lei de Biot-Savart para a solução do campo magnético ao redor de um fio semi-infinito, devido ao fato da lei de Ampère ser aplicada para o caso de um fio infinito.

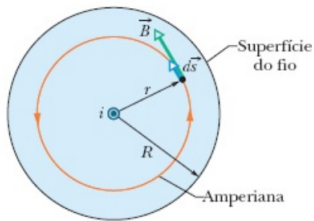
Campo magnético induzido por um cilindro

Para o caso de um cilindro circular de densidade de corrente \vec{J} , onde $i = \pi r^2 J$, se a amperiana for uma circunferência de raio r , onde $r < R$ teremos

$$B \oint_C ds = \mu_0 \overbrace{\pi r^2 J}^i,$$
$$B(2\pi r) = \mu_0 \pi r^2 J.$$

sendo $J = \frac{i}{\pi R^2}$, onde R é o raio do cilindro, temos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r.$$



Uso da lei de Ampere para determinar o campo magnético ao redor de um fio retilíneo longo [1].

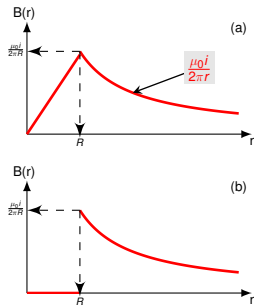
Campo magnético induzido por um cilindro (continuação)

Podemos resumir a solução encontrada para o cilindro maciço na forma abaixo,

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r, & (r < R), \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, & (r \geq R). \end{cases}$$

No caso de um cilindro oco, a intensidade de corrente no seu interior é zero, que resulta em

$$B(r) = \begin{cases} 0, & (r < R), \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, & (r \geq R). \end{cases}$$

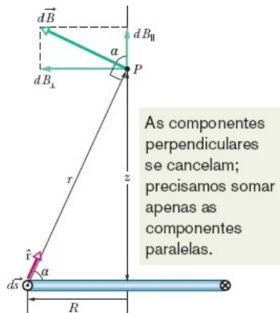


Campo magnético de um cilindro maciço (a) e oco (b).

Campo magnético em uma espira circular

Considere uma espira circular de raio R onde o objetivo é determinar o campo magnético \vec{B} a uma altura z do centro da espira. Pela simetria do problema é conveniente usarmos a lei de Biot-Savart ao invés da lei de Ampère. Pela figura podemos ver que o campo $d\vec{B}$ produzido pelo elemento de corrente $d\vec{s}$ é dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{s} \sin \frac{\pi}{2}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{s}}{r^2}.$$



Campo magnético \vec{B} no ponto P a uma distância z do centro de uma espira circular de raio R [1].

Campo magnético em uma espira circular (continuação)

Podemos ver que as componentes $d\vec{B}$ se cancelam mutuamente, restando apenas a componente $d\vec{B}$, onde

$$dB = dB \cos \alpha,$$

Analisando a figura podemos ver que

$$r^2 = z^2 + R^2,$$
$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

Substituindo na integral temos

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ids}{r^2} \right) (\cos \alpha),$$

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ids}{(z^2 + R^2)} \right) \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right),$$

$$dB = \underbrace{\frac{\mu_0 i R}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}}}_{\text{constante}} ds.$$

Campo magnético em uma espira circular (continuação)

Integrando a equação anterior teremos

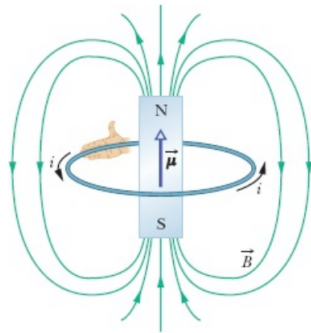
$$B = \left(\frac{\mu_0 i R}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \overbrace{(2\pi R)}^S.$$

Se $z \gg R$ podemos dizer que $z^2 + R^2 \approx z^2$, assim

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\pi R^2}{z^3},$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}}.$$

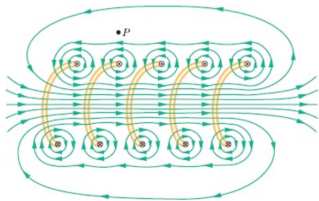
onde $\mu = i\pi R^2$ é o momento magnético da espira.



Dipolo magnético produzido por uma espira circular [1].

Solenóide

Podemos representar um solenóide como uma bobina helicoidal formada por espiras circulares muito próximas uma da outra. Sabemos que cada espira circular irá produzir um campo magnético ao seu redor, o campo resultante em cada ponto no espaço será a somatória do campo produzido por cada espira,



Representação artística das linhas de campo magnético ao redor de um solenóide [1].

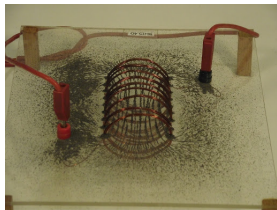
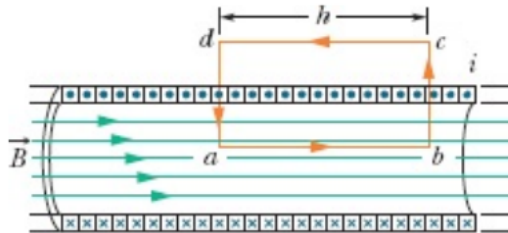


Foto das linhas de campo magnético ao redor de um solenóide.

Campo magnético de um solenóide

Considere uma amperiana retangular como mostra a figura ao lado, aplicando a lei de Ampere podemos separar a contribuição da integral em quatro partes distintas,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^{cb} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \\ + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$



Aplicação da lei de Ampère a um solenóide usando como amperiana o retângulo $abcd$ [1].

Campo magnético de um solenóide (continuação)

A primeira integral fornece

$$Bh = \mu_0 Ni,$$

onde N é o número de espiras envolvidas pela amperiana. A segunda e a quarta integrais são nulas porque \vec{B} é perpendicular a $d\vec{s}$, portanto $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$. A terceira integral está associada ao fato que o campo magnético fora do solenóide é zero, pois o campo magnético produzido na parte inferior praticamente

anula o campo magnético produzido na parte superior. Portanto, resta-nos apenas a seguinte equação

$$Bh = \mu_0 Ni.$$

Definindo n o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide, podemos dizer que $N = nh$, assim

$$Bh = \mu_0 n h i.$$

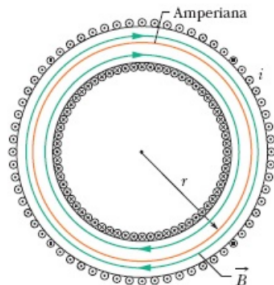
$$B = \mu_0 n i.$$

Campo magnético de um toróide

Podemos imaginar um toróide como um solenóide que foi encurvado até as extremidades se tocarem, formando um anel. Assim como no caso do solenóide, o campo magnético está todo confinado em seu interior. Pela simetria do problema, é conveniente usarmos a lei de Ampère para o cálculo o campo. Considerando uma amperiana de raio r que envolve todas as N espiras do toróide temos

$$B(2\pi r) = \mu_0 Ni,$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}.$$








Seção reta horizontal de um toróide [1].

Observações¹

Esta apresentação está disponível para download no endereço
<https://flavianowilliams.github.io/education>

¹Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)
-  <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/>
-  Os fundamentos da fisica