

# Quantização da energia e dualidade onda-partícula

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

24 de Junho de 2022

# Sumário

- 1 **Quantização da energia**
- 2 **Quantização da luz**
- 3 **Comportamento ondulatório da matéria**
- 4 **Apêndice**

## A antiga teoria quântica

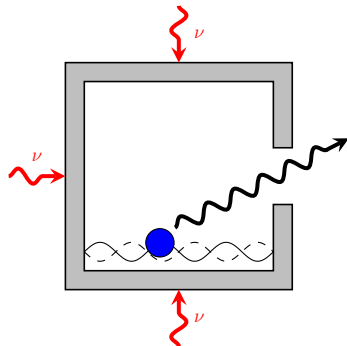
- ✓ *Numa reunião da sociedade alemã de física em 1900, Max Planck apresentou o seu artigo "Sobre a teoria da lei de distribuição de energia do espectro normal". **Esse dia marca o nascimento da física quântica.***
- ✓ *Até o surgimento da equação de Schroedinger, diversos estudos foram desenvolvidos demonstrando falhas na física clássica. Esses estudos, **chamados de antiga teoria quântica**, marcam os fundamentos da física quântica atual.*
- ✓ *Assim como a teoria da relatividade, a física quântica representa uma generalização da física clássica, que inclui as leis clássicas como casos especiais.*

### Corollary

*Os fenômenos ligados a física quântica abrangem todas as áreas da física clássica: mecânica, termodinâmica, ondas, mecânica estatística e eletromagnetismo.*

## O que é um corpo negro?

O corpo negro é um objeto que absorve toda a radiação que incide sobre ele. Sabendo que a radiação transporta energia por área e tempo, é de se esperar que os elétrons do material absorva a radiação, adquirindo energia cinética e aumentando assim a temperatura do objeto. Pela teoria do eletromagnetismo, cargas em movimento emitem radiação com a mesma frequência que elas oscilam. Portanto, a radiação observada poderá ser reconhecida como aquela emitida pelo corpo negro que se encontra a temperatura  $T$ .



Radiação emitida pelo corpo negro.

## Lei de Stefan-Boltzman

- ✓ A radiação (*intensidade*) incidente aumenta a vibração dos átomos, aumentando a temperatura do corpo negro;
- ✓ A radiação emitida somente depende da temperatura do corpo negro;
- ✓ De acordo com a teoria clássica, a radiação aumenta indefinidamente com a frequência da radiação emitida.

Chegando a lei de Stefan-Boltzman que relaciona a radiação emitida por um objeto com a sua temperatura  $T$ ,

$$R(T) = \sigma T^4.$$

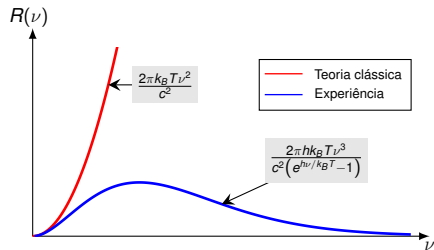
onde  $\sigma = 5,6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}$  *Utilize a animação para ver como a área abaixo da curva da densidade de radiação aumenta com a temperatura.*

## Catástrofe do ultravioleta

A catástrofe do ultravioleta representa a enorme discrepância entre a teoria clássica e os resultados experimentais, medidas para a radiação do corpo negro. Resumindo

- ✓ Para baixas frequências a teoria clássica se aproxima do resultado experimental;
- ✓ Para frequências maiores, a teoria clássica se afasta do resultado experimental.

*Utilize a animação para ver o máximo de radiância atingida e também o seu valor tendendo a zero para comprimentos de onda maiores.*



Comparação entre radiância calculada pela teoria clássica e os dados experimentais.

## Radiância e radiação emitida pelo material

Pela teoria do eletromagnetismo, a **radiância**, ou seja, radiação emitida por cada onda de frequência  $\nu$  ( $R(\nu)$ ), que sai da cavidade de um corpo negro é dado por

$$R(\nu) = \frac{c}{4} u(\nu),$$

onde  $u(\nu)$  é a energia armazenada na cavidade por volume. Neste caso, a quantidade de energia na faixa de radiação com frequências entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  vale  $u(\nu)d\nu$ . Portanto, a quantidade de radiação  $dR$

emitida neste intervalo vale

$$dR = R(\nu)d\nu = \frac{c}{4} u(\nu)d\nu.$$

Para determinar a radiação total emitida pelo corpo negro, integramos a equação acima (**o que deve estar condizente com a lei de Stefan-Boltzman**),

$$R = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu)d\nu.$$

## Relação entre energia e temperatura

Pela termodinâmica, a energia de agitação dos elétrons por volume está associado estatisticamente com o valor médio da energia  $E$  multiplicado pelo número de cargas elétricas oscilantes,

$$u(\nu) = \langle E \rangle n(\nu),$$

No caso acima, podemos dizer que cada elétron ao oscilar emite uma onda eletromagnética de frequência  $\nu$ . Essa onda eletromagnética confinada em uma cavidade se comporta como uma onda

estacionária contendo um modo normal de vibração específico. Portanto, a onda eletromagnética produzida pelas cargas oscilantes podem escapar da cavidade, sendo em seguida captada pelo sensor como a radiância  $R(\nu)$ . É possível mostrar que a quantidade de modos de vibração por volume e por frequência é dado por (veja o apêndice C)

$$n(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}.$$



## Valor médio da energia para uma distribuição contínua de energia

Para determinar o valor médio da energia  $\langle E \rangle$ , usamos a expressão abaixo

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E f(E) dE}{\int_0^\infty f(E) dE},$$
$$P(E) = A e^{-E/k_B T}.$$

onde  $P(E)$  é conhecida como distribuição de Boltzmann e  $k_B$  é chamado constante de Boltzmann. Substituindo na ex-

pressão teremos

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty A E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty A e^{-E/k_B T} dE},$$
$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE}.$$

É possível provar que o resultado da equação acima equivale a

$$\boxed{\langle E \rangle = k_B T.}$$

## A equação de Rayleigh-Jeans

Considerando uma distribuição contínua de energia para a radiação emitida pelo corpo negro, teremos que a densidade de energia  $u(\nu)$  é dado por

$$u(\nu) = \langle E \rangle n(\nu);$$

$$u(\nu) = (k_B T) \left( \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right).$$

Substituindo na fórmula da radiação,

$$R = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu.$$

$$R = \frac{c}{4} \int_0^\infty \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu,$$

$$R = \frac{8\pi k_B T}{c^2} \int_0^\infty \nu^2 d\nu,$$

$$R = \frac{8\pi k_B T}{3c^2} \nu^3 \Big|_0^\infty = \infty.$$

Vemos que se considerarmos uma distribuição contínua de energia para  $u(\nu)$ , quando  $\nu \rightarrow \infty$  teremos  $R \rightarrow \infty$ , o que resulta na catástrofe do ultravioleta.

## A lei de Planck e o nascimento da física quântica

Para explicar a catástrofe do ultravioleta, duas causas são possíveis

- ✓ *Contagem errada do número de estados  $n(\nu)$ ;*
- ✓ *Valor da energia para cada modo vibracional está errado.*

### Hipótese de Planck

Como opção, Planck sugeriu que a energia das cargas oscilantes, e consequentemente a radiância emitida por ela, ao invés de assumir qualquer valor, ela deverá ter valores discretos bem definidos, e deve também ser proporcional a frequência da radiação emitida,

$$E_n = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$h$  é conhecido como a **constante de Planck**.

## Valor médio da energia para uma distribuição discreta de energia

O valor médio da energia  $\langle E \rangle$  para uma distribuição discreta de energias é dado por

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E (A e^{-E/k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} (A e^{-E/k_B T})},$$
$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E e^{-E/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E/k_B T}}.$$

Como temos valores discretos de energia, a integral é substituída por uma soma de valores de energia  $E_n$ . É possível provar que o resultado equivale a

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.$$

Substituindo em  $u(\nu)$  teremos

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}.$$

O resultado acima em  $R(\nu)$  reproduz perfeitamente os dados experimentais.

## Lei de Planck para baixas frequências

Pela teoria clássica temos que a teoria se aproxima do resultado experimental quando  $\nu \ll 1$ , usando a expansão

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2} \left( \frac{h\nu}{k_B T} \right)^2 + \dots,$$

podemos dizer que  $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1$  se  $h\nu \ll k_B T$ . Substituindo em  $u(\nu)$  resulta em

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi h\nu^3 T}{c^3 \left( 1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1 \right)},$$

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3},$$

o que corresponde a lei de Rayleigh-Jeans da teoria clássica da radiação.

### Corollary

*Para  $h\nu/k_B T \ll 1$  a equação de Planck se resume na lei de Rayleigh-Jeans.*

## Lei de Planck para frequências elevadas

Considerando a emissão de radiação de altas frequências, onde  $h\nu \gg kT$ . Isso faz com que  $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \gg 1$ , portanto podemos desprezar o valor 1 do denominador de  $u(\nu)$ . Temos assim

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 e^{\frac{h\nu}{k_B T}}} \Rightarrow \left( \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right) e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}.$$

Pela definição de radiância, onde  $R(\nu) = cu(\nu)/4$  temos

$$R(\nu) = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}.$$

Sabendo que  $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \rightarrow 0$  para  $h\nu \gg kT$ , podemos dizer que  $R(\nu \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , concordando com o resultado experimental.

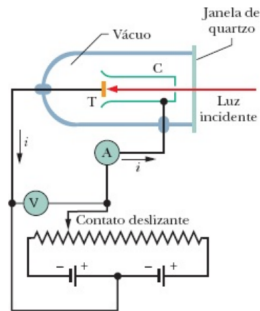
### Corollary

*Para  $h\nu/k_B T \gg 1$  a equação de Planck se resume ao limite de Wien, onde  $R(\nu \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .*

## Efeito fotoelétrico

Vamos considerar um equipamento por onde incide uma luz de determinada frequência no alvo T de um metal específico. A experiência mostra que os elétrons são ejetados do material gerando uma corrente  $i$  que pode ser registrada pelo amperímetro A.

Uma diferença de potencial  $V$  é ajustada entre os terminais do aparelho com a intenção de frear os elétrons até pararem, registrando assim uma corrente zero no amperímetro. Dessa maneira, a energia cinética máxima  $K$  deve ser igual a  $eV_F$ .



Montagem usada para o estudo do efeito fotoelétrico.

## O que era esperado pela teoria clássica

De acordo com a teoria do eletromagnetismo, a intensidade da onda  $I$  eletromagnética é dado por  $I = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}$ , ou seja, depende somente da amplitude do campo elétrico  $E_m$  e não da frequência da luz. Além do mais, como a intensidade é potência por área, era de se esperar que o metal absorvesse cada vez ao longo do tempo. Assim o elétron teria energia cinética o suficiente para escapar do material. Portanto, era de se esperar que

- ✓ *a energia cinética dos elétrons deveria depender da intensidade da onda;*
- ✓ *o efeito fotoelétrico deveria ocorrer com a luz de qualquer frequência;*
- ✓ *deveria haver um retardo de tempo, de modo que o elétron absorvesse energia do feixe continuamente.*

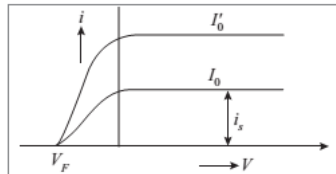


## O que foi observado experimentalmente

Foi observado que a energia cinética  $K$ , onde

$$K = eV_F,$$

independe da luz incidente. Aumentando a intensidade, apenas aumenta a corrente no circuito, mas o potencial de corte  $V_F$  permanece o mesmo.



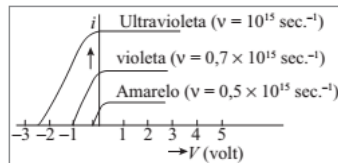
Variação da corrente com o potencial.

### Corollary

*O efeito fotoelétrico independe da intensidade da luz incidente.*

## O que foi observado experimentalmente

Foi observado que para cada material existe um limiar de frequência  $\nu_0$ . Caso a frequência da luz incidente for menor que  $\nu_0$ , o efeito fotoelétrico não ocorre para aquele material. A figura apresenta um metal alcalino, onde para cada luz incidente, existe um potencial de corte. Nesse caso, o efeito fotoelétrico deixaria de ocorrer para a luz vermelha, que possui frequência menor que a amarela ( $\nu_{\text{verm}} = 0,4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ).



Variação da corrente para diversos valores da frequência da luz.

### Corollary

*Para frequências menores que  $\nu_0$  o efeito fotoelétrico não ocorre, qualquer que seja a intensidade da iluminação.*

## Hipótese de Einstein

Para explicar as divergências observadas no efeito fotoelétrico, Einstein propôs que a luz é constituída por pacotes de energia chamada fóton, onde cada fóton carrega a quantidade de energia

$$E = h\nu.$$

Assim, a energia cinética  $K$  dos elétrons que saem do material é dado por

$$K = eV_F = h\nu - \phi.$$

$\phi$  é denominado função trabalho, que representa a energia necessária para remover o elétron do material.

## Explicações plausíveis para o efeito fotoelétrico

- ✓ *O efeito fotoelétrico independe da intensidade da luz incidente. Um aumento na intensidade significa mais fótons com a mesma energia  $h\nu$  colidindo com elétrons diferentes, o que justifica o aumento na corrente elétrica. Mas se a energia de cada fóton não equivaler a função trabalho, os elétrons não conseguem escapar do material independente da quantidade fótons.*
- ✓ *Para frequências menores que  $\nu_0$  o efeito fotoelétrico não ocorre, qualquer que seja a intensidade da iluminação. Na colisão dos fótons com os elétrons, uma energia equivalente a  $h\nu$  é absorvida pelo elétron. Se essa energia não equivaler a função trabalho, o elétron não consegue escapar do material.*
- ✓ *Assim que a luz incide no metal, os elétrons são imediatamente removidos, não havendo um retardo de tempo. Na colisão, a energia dos fótons é imediatamente absorvida, não havendo a necessidade de mais colisões.*

## Como obter a constante de Planck e o limiar de frequência?

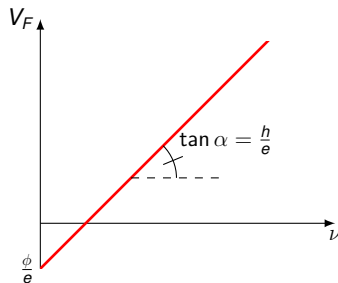
Isolando o potencial de corte  $V_F$  anteriormente teremos

$$eV_F = h\nu - \phi,$$

$$V_F = \frac{h}{e}\nu - \frac{\phi}{e}.$$

Considerando  $V_F$  como função da frequência da luz incidente, podemos representá-la em um gráfico  $V_F$  versus  $\nu$ , onde o coeficiente angular da reta representa o valor da constante de Planck,

$$h = 6,57 \times 10^{-34} \text{ J s.}$$

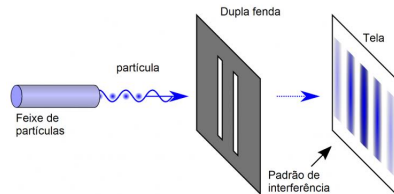


Representação de  $h$  a partir do gráfico potencial de corte versus frequência.

## Hipótese de de Broglie

Devido a simetria da natureza, o dualismo onda-partícula é um fenômeno absolutamente geral, ou seja, assim como foi observado que a luz possui comportamento corpuscular, é esperado que a partícula também possua comportamento ondulatório. De forma geral, podemos resumir

$$\nu = \frac{E}{h},$$
$$\lambda = \frac{h}{p}.$$



Fenômeno de interferência ondulatória envolvendo um feixe de elétrons.

## Apêndice A - Observações<sup>1</sup>

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Apêndice B - Demonstração do valor $kT$ para a energia média.

Considere a energia média  $\langle E \rangle$  onde definimos  $\beta = 1/kT$ ,

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-\beta E} dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}$$

Podemos ver que  $-\frac{d}{d\beta} e^{-\beta E} = E e^{-\beta E}$ ,

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty \left( -\frac{d}{d\beta} e^{-\beta E} \right) dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}$$

$$\langle E \rangle = \frac{-\frac{d}{d\beta} \left( \int_0^\infty e^{-\beta E} dE \right)}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}.$$

Definindo  $F(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta E} dE$  teremos

$$\langle E \rangle = -\frac{\frac{dF(\beta)}{d\beta}}{F(\beta)},$$

Assim poderemos obter  $\langle E \rangle$  sem a necessidade de resolver a integral.



## Apêndice B - Demonstração do valor $kT$ para a energia média.

Pela propriedade do logaritmo e empregando a regra da cadeia, temos que a sua derivada é dada por

$$\frac{d \ln [1/F(\beta)]}{d\beta} = \left( \frac{d \ln(1/F)}{dF} \right) \left( \frac{dF}{d\beta} \right)$$

Porém, sabemos que  $\frac{d \ln(1/F)}{dF} = 1/F$ , portanto

$$\frac{d \ln [1/F(\beta)]}{d\beta} = \left( \frac{1}{F} \right) \left( \frac{dF}{d\beta} \right)$$

Assim podemos ver que

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{d}{d\beta} \ln(1/F(\beta)), \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \left[ \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE} \right]. \end{aligned}$$

Resolvendo a integral teremos

$$\langle E \rangle = -\frac{d \ln(1/\beta)}{d\beta} = 1/\beta,$$

$\langle E \rangle = kT.$

## Apêndice C - Contagem dos modos normais de vibração em uma cavidade

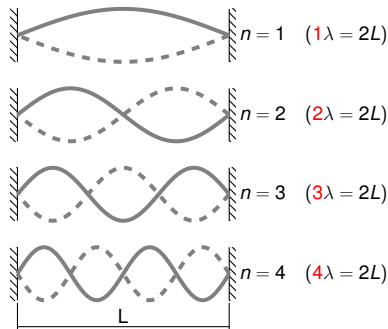
Considere ondas eletromagnéticas polarizadas e confinadas em uma cavidade de comprimento  $L$ . Uma onda confinada apresenta o comportamento de ondas estacionárias de função

$$E(x, t) = E_m \sin(kx) \sin(\omega t),$$

onde temos

$$\nu = \frac{nc}{2L},$$

e  $n$  representa os modos normais de vibração.



Modos normais de vibração.

## Apêndice C - Contagem dos modos normais de vibração em uma cavidade

Para uma cavidade cúbica devemos considerar modos normais de vibração nas direções x, y e z, e os valores possíveis para n podem ser representados em um gráfico como mostra a figura ao lado. Assim, para um dado valor n poderemos ter N modos de vibração diferentes, ou seja,

conteúdo...

$$N(n) = \frac{4\pi n^2}{8},$$

onde n é um número inteiro positivo e

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2.$$

## Apêndice C - Contagem dos modos normais de vibração em uma cavidade

Sabendo que

$$n = \frac{2L}{c}\nu,$$
$$\Delta n = \frac{2L}{c}\Delta\nu.$$

podemos dizer que a cada intervalo de frequência  $\Delta\nu$  teremos a seguinte quantidade de modos normais

$$N(\nu)\Delta\nu = \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \left(\frac{2L\Delta\nu}{c}\right).$$

$$N(\nu)\Delta\nu = \frac{4\pi L^3 \nu^2}{c^3} \Delta\nu.$$

Esse valor representa a quantidade de modos de vibração em um intervalo  $\Delta\nu$ , para saber a quantidade por volume devemos dividir por  $L^3$ , e considerando o caso mais geral de uma onda não-polarizada devemos multiplicar por 2,

$$n(\nu)\Delta\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Delta\nu.$$

## Apêndice D - A hipótese de Planck e a lei de Stefan-Boltzman

Utilizando a expansão em série da função  $1/(e^x + 1)$  teremos

$$\frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}$$

Substituindo na fórmula de  $u(\nu)$  segundo Planck teremos




$$R = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu.$$

$$R = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^3 \sum e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} d\nu,$$
$$R = \frac{2\pi h}{c^2} \sum \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} d\nu.$$

Resolvendo a integral através do método de integração por partes chegamos a

$$R = \left( \frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3} \sum 1/n^4 \right) T^4,$$
$$R = \sigma T^4.$$

## Referências

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.4, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.4, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)