

# Fluidos

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

30 de Maio de 2021

# Sumário

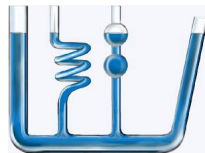
- 1 **Introdução**
- 2 **Hidrostática**
- 3 **Hidrodinâmica**
- 4 **Equação de Bernoulli**
- 5 **Apêndice**

## O que é um fluido?

### Fluido

Líquido incompressível que assume a forma do recipiente que o contém.

- ✓ Os sólidos são objetos que possuem forma definida, portanto não são fluidos;
- ✓ O Volume de um fluido não se altera independente da temperatura que se encontra e do recipiente que o contém.
- ✓ Conceitos como densidade e pressão são usados ao invés de massa e força.

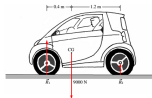


Formato de um fluido em diversos recipientes.

## Fluido versus corpo rígido

### Corpo rígido

- ✓ Formato rígido e imutável;
- ✓ Corpos homogêneos ou heterogêneos (a densidade pode variar ao longo da estrutura);
- ✓ Usamos conceitos de massa e força.



Exemplo de um corpo rígido.

### Fluido

- ✓ Formato flexível e se adapta ao recipiente;
- ✓ Corpos homogêneos (Densidade é a mesma ao longo do fluido);
- ✓ Usamos conceitos de densidade (massa específica) e pressão.



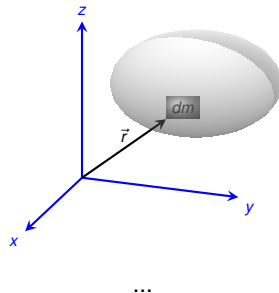
Exemplo de um fluido.

## Densidade

Definimos densidade  $\rho$  de um objeto como a taxa da quantidade infinitesimal de massa  $dm$  por elemento  $dV$  de seu volume,

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Assim, a densidade fornece informações de como a massa está sendo distribuída ao longo do volume.



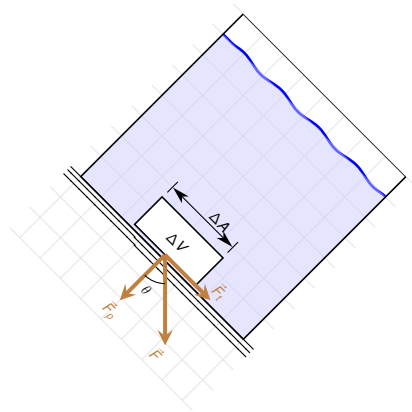
### Corollary

*Para objetos homogêneos  $\rho$  é chamada de massa específica, onde  $\rho = \frac{m}{V}$ .*

## Força atuando em cada elemento de um fluido

Considere uma força  $\Delta F$  atuando em um pequena área  $\Delta A$  no fundo de um recipiente. Chamaremos de  $\Delta F$  a força resultante atuando nessa área, onde podemos decompô-la em suas componentes tangencial  $\Delta \vec{F}_t$  e perpendicular  $\Delta \vec{F}_p$ . No entanto, em um fluido em equilíbrio a força resultante deve ser zero, portanto obrigatoriamente deveremos ter  $\Delta F_t = 0$ , restando apenas  $\Delta \vec{F}_p$ , que no caso deve ser equivalente ao peso da parte do fluido justamente acima, onde

$$\Delta F_p = \Delta F \cos \theta.$$



Força por unidade de área.

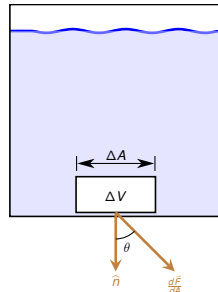
## Pressão

Definimos pressão  $p$  como a força distribuída por unidade de área perpendicular a superfície, ou seja,

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} = \frac{dF_p}{dA}.$$

No caso de uma força atuando obliquamente a área  $A$  temos que a pressão é definida como o produto escalar da força  $\vec{F}$  pelo versor  $\hat{n}$  perpendicular a área  $A$ ,

$$p = \frac{d}{dA} (F \cos \theta) = \left( \frac{dF}{dA} \right) \cos \theta = \frac{d\vec{F}}{dA} \cdot \hat{n}.$$

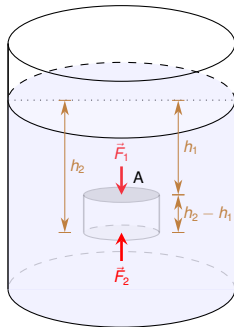


Força por unidade de área.

## Cálculo da pressão no interior de um fluido

Supondo um cilindro totalmente imerso e imóvel no interior de um fluido como mostra a figura ao lado, verificamos que

- ✓ O peso do cilindro aplica uma força puxando-o para **baixo**;
- ✓ O fluido pressiona as paredes do cilindro no intuito de espremê-lo de fora para dentro;
- ✓ A somatória da pressão na base produz uma força que empurra o cilindro para **cima**;
- ✓ A somatória da pressão no topo produz uma força que empurra o cilindro para **baixo**;



Forças atuando acima e abaixo do objeto submerso num fluido em repouso.



## Variação da pressão com altitude e profundidade

Sabemos que a força atuando em cima e embaixo do cilindro é dado por  $F = pA$ , onde  $A$  é a área do cilindro, portanto a força em cima e embaixo são

$$F_1 = p_1 A,$$

$$F_2 = p_2 A.$$

Se o cilindro está em repouso, pela segunda Lei de Newton a força resultante

deve ser zero, ou seja,

$$F_2 - F_1 = P = (\Delta m)g.$$

Pela definição de densidade,  $\Delta m = \rho \Delta V$ , e sabendo que o volume do cilindro é a base  $A$  vezes a altura  $h$  temos

$$p_2 A = p_1 A + \rho gh A,$$

$$\boxed{p_2 = p_1 + \rho gh.}$$

## Variação da pressão com a profundidade

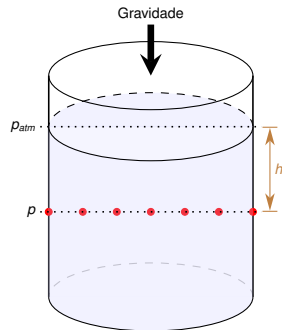
### Lei de Stevin

Se a superfície de um fluido, cuja densidade é  $\rho$ , está submetida a uma pressão  $p_{atm}$ , a pressão  $p$ , no interior desse líquido, a uma profundidade  $h$ , é dada por

$$p = p_{atm} + \rho gh$$

### Corollary

*A força da gravidade puxa o fluido para baixo causando uma pressão na base e nas paredes do recipiente.*



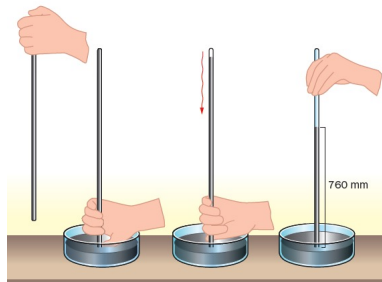
Pressão em função da profundidade  $h$ .

## Experiência de Torricelli

Coloca-se mercúrio cuja densidade é conhecida num tubo fino e vira-o de cabeça para baixo. O líquido irá descer e irá preencher o recipiente da parte de baixo. A parte de cima como estava fechada não entrou ar e com a descida do líquido criou-se um vácuo, portanto a pressão da parte de cima será zero. Pela Lei de Stevin temos que a pressão da parte de baixo é dado por

$$p_{atm} = \rho gh,$$

onde  $h$  é a coluna de mercúrio (se for medido ao nível do mar  $h=760\text{mm}$ ).

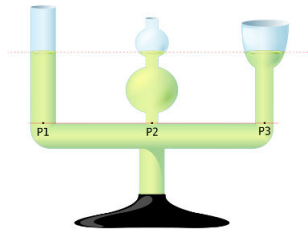


Representação da experiência de Torricelli.

## Vasos comunicantes

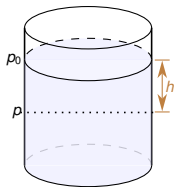
### Corollary

*Pela Lei de Stevin a variação da pressão em um fluido homogêneo ( $\rho = \text{constante}$ ) somente depende da profundidade do fluido e independe da posição do líquido ao longo da horizontal, portanto é esperado que a pressão seja a mesma para cada altura independente do recipiente que está contido o fluido.*



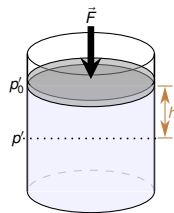
Pressão do fluido em diferentes recipientes (O líquido atinge a mesma altura independente do recipiente).

## Variação da pressão na superfície do recipiente



Pela Lei de Stevin a pressão nos pontos 1 e 2 equivale a

$$p = p_0 + \rho gh.$$



Pela Lei de Stevin a pressão nos pontos 1 e 2 equivale a

$$p' = p'_0 + \rho gh.$$

## Variação da pressão ao longo das paredes do recipiente

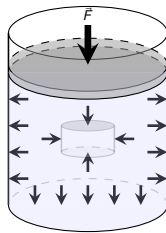
Calculando o quanto a pressão na posição 1 aumenta temos

$$\Delta p = p' - p,$$

$$\Delta p = (p'_0 + \rho gh) - (p_0 + \rho gh),$$

$$\Delta p = p'_0 + \rho gh - p_0 - \rho gh,$$

$$\Delta p = \Delta p_0.$$



### Corollary

*O acréscimo de pressão, em um ponto de um líquido em equilíbrio, transmite-se integralmente a todos os pontos desse líquido.*

## Máquinas hidráulicas

Pela definição de pressão podemos dizer que o aumento de pressão no pistão 1 é dado por

$$\Delta p_1 = \frac{F_1}{A_1}.$$

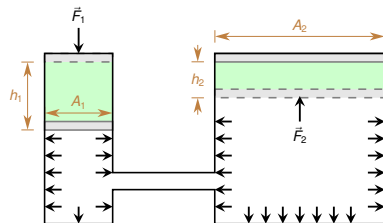
Pelo princípio de Pascal esse aumento será o mesmo no pistão 2, pois  $\Delta p_1 = \Delta p_2$ .

### Princípio de Pascal

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

### Corollary

*O volume deslocado em um pistão é o mesmo deslocado em outro pistão.*



Prensa hidráulica

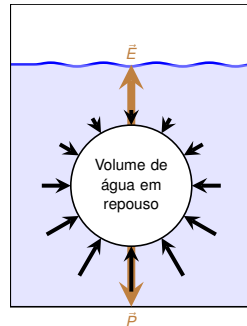
## O que é empuxo?

### Corollary

*A somatória de todas as forças que o fluido atua nas paredes de um objeto imerso em um fluido é igual a força resultante que atua para cima no intuito de subir o objeto;*

*Se a força resultante  $\vec{E}$  for de mesma intensidade da força peso  $\vec{P}$  do volume do fluido deslocado, essa força é chamada de empuxo;*

*Se o empuxo for maior que a força peso o objeto flutua, e se for menor o objeto afunda.*



Representação de empuxo como o peso da água deslocada.



## Relação entre a densidade do fluido, do objeto e o princípio de Arquimedes

Pela definição de empuxo  $E$  podemos dizer que

$$E = m_{\text{fluido}}g,$$

mas pela definição de densidade temos  $m_{\text{fluido}} = \rho_{\text{fluido}}V$ , portanto

$$E = \rho_{\text{fluido}}Vg$$

O peso  $P$  do objeto mergulhado no fluido é dado por  $P = m_{\text{obj}}g$ , portanto se o empuxo for igual ao peso do objeto temos

$$m_{\text{obj}}g = \rho_{\text{fluido}}Vg,$$
$$\rho_{\text{obj}}Vg = \rho_{\text{fluido}}Vg.$$

### Corollary

*Se  $\rho_{\text{fluido}} < \rho_{\text{obj}}$ , o corpo afundará;*

*Se  $\rho_{\text{fluido}} = \rho_{\text{obj}}$ , o corpo ficará em equilíbrio;*

*Se  $\rho_{\text{fluido}} > \rho_{\text{obj}}$ , o corpo irá flutuar na superfície;*

## Fluidos ideais em movimento

Um fluido ideal em movimento satisfaz as seguintes condições:

- ✓ Escoamento laminar: a velocidade do fluido em ponto qualquer não varia com o tempo;
- ✓ Escoamento incompressível: a massa específica tem o mesmo valor em todos os pontos do fluido e em qualquer instante de tempo.
- ✓ Escoamento não viscoso: o fluido é não viscoso, ou seja, não apresenta resistência ao escoamento.
- ✓ Escoamento irrotacional: o movimento do fluido é apenas linear.

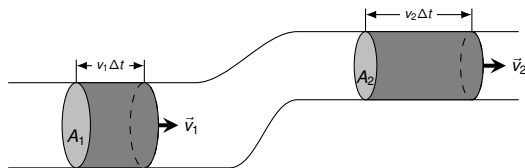
## Equação da continuidade baseada na Lei da conservação da matéria

Supondo uma quantidade de fluido que percorre uma distância  $S_1$  de área  $A_1$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , o volume ocupado por esse fluido é

$$V = \Delta S_1 A_1.$$

Mas sabendo que  $\Delta S_1 = v_1 \Delta t$ , onde  $v_1$  é a velocidade das moléculas do fluido que percorre esse espaço, temos

$$V = v_1 A_1 \Delta t.$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluxo que atravessa duas seções transversais.

## Equação da continuidade como Lei da conservação da matéria (continuação)

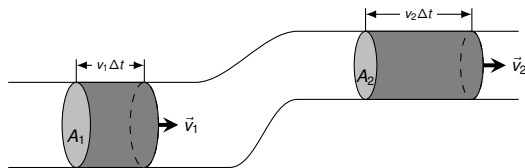
O mesmo raciocínio vale se ele atravessar a área  $A_2$  no mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ ,

$$V = v_2 A_2 \Delta t.$$

Supondo um fluido incompressível a massa é conservada e o volume se mantém. Sabendo que  $V = Z \Delta t$  temos

$$\cancel{Z \Delta t} = v_1 A_1 \cancel{\Delta t} = v_2 A_2 \cancel{\Delta t},$$

$$\boxed{Z = v_1 A_1 = v_2 A_2.}$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluido que atravessa um volume  $V$  no tempo  $\Delta t$ .

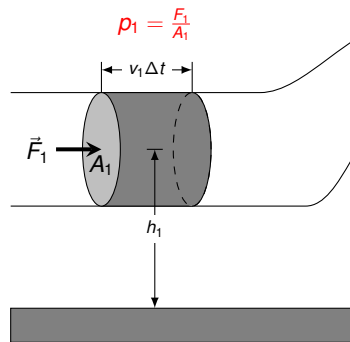
## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Supondo um fluido de volume  $V$  e massa  $m$  que atravessa a região 1 no intervalo de tempo  $\Delta t$ . O trabalho necessário para deslocá-lo a uma distância  $s_1$  é dado por

$$\tau_1 = \overbrace{F_1}^{p_1 A_1} \overbrace{v_1 \Delta t}^{s_1},$$

$$\tau_1 = p_1 \underbrace{A_1 s_1}_V.$$

$$\tau_1 = p_1 V.$$



Fluxo que atravessa a região 1.

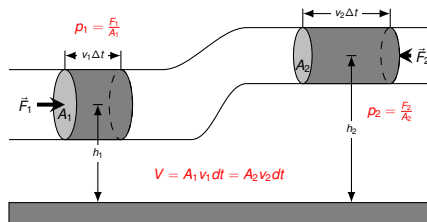
## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

O fluido à direita empurra o restante no sentido contrário impedindo o seu deslocamento, isso produz um trabalho negativo, ou seja,

$$\tau_2 = - \overbrace{F_2}^{p_2 A_2} \overbrace{v_2 \Delta t}^{s_2},$$

$$\tau_2 = -p_2 \underbrace{A_2 s_2}_V.$$

$$\tau_2 = -p_2 V.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

### Corollary

*A mesma quantidade de fluido irá atravessar as regiões 1 e 2 nos intervalos  $\Delta t$ .*

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

A força da gravidade é conservativa, de modo que as energias potenciais do fluido nas regiões 1 e 2,

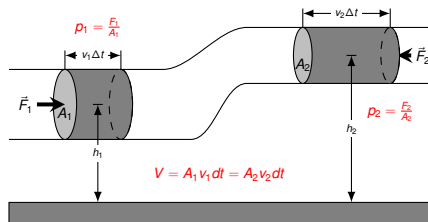
$$E_{p_1} = mgh_1$$

$$E_{p_2} = mgh_2.$$

As energias cinéticas que estão associadas ao movimento nas regiões 1 e 2 são

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Se não houver perdas de energia, a energia mecânica do fluido permanece inalterada, de modo que o trabalho total realizado deve ser igual a variação das energias cinéticas e potenciais,

$$\tau_1 + \tau_2 = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1,$$

portanto

$$\tau_1 + \tau_2 = \overbrace{\left( \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right)}^{\Delta E_c} +$$

$$+ \overbrace{(mgh_2 - mgh_1)}^{\Delta E_p},$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1,$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \left( \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \right).$$



## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Separando os termos da região 1 da região 2 temos a equação

$$\tau_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -\tau_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Mas mostramos que

$$\begin{aligned}\tau_1 &= p_1 V, \\ \tau_2 &= -p_2 V.\end{aligned}$$

Substituindo na equação acima temos

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -(-p_2 V) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

mas sabemos que  $V = \frac{m}{\rho}$ ,

$$\begin{aligned}p_1 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 &= p_2 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2, \\ \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 &= \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2.\end{aligned}$$

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

### Equação de Bernoulli

Para um fluido não viscoso com escoamento laminar a soma das parcelas hidrostáticas e hidrodinâmicas é a mesma em cada ponto do fluido, no qual vale a equação

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = \dots ,$$
$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{constante}.$$

### Corollary

*A equação de Bernoulli se baseia na lei de conservação da energia na mecânica.*

## Analizando os termos da equação de Bernoulli

Supondo a densidade constante ao longo de todo o fluido, podemos multiplicar todos os termos da equação por  $\rho$  e obter a relação

$$\underbrace{\cancel{\rho} \frac{\rho}{\cancel{\rho}} + \rho gh}_{\text{Lei de Stevin}} + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constante.}$$

### Corollary

*Parcela hidrostática ( $\rho + \rho gh$ ):* Corresponde a pressão hidrostática no fluido;

*Parcela fluidodinâmica ( $\rho \frac{v^2}{2}$ ):* Corresponde a pressão hidrodinâmica;

*Se o fluido está em repouso  $\frac{\rho v^2}{2} = 0$  temos a Lei de Stevin.*

## Lei de Stevin para um fluido não homogêneo

Sabemos que a diferença das forças atuando em cima e embaixo do cilindro é dado por  $F = pA$ , onde  $A$  é a área do cilindro, portanto a força resultante será

$$\Delta F = F_2 - F_1,$$

$$\Delta F = \rho g \Delta V = p \Delta A,$$

onde para o cilindro de altura  $dz$  teremos  $\Delta V = A \Delta z$ . Substituindo

$$p \Delta A = -\rho g \Delta A dz,$$

ou seja,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g.$$

Integrando teremos

$$\Delta p = - \int_{z_0}^h g \rho(z) dz.$$

## Variação da pressão com a altitude (em construção)

No caso anterior, se  $\rho = cte$  chegamos na Lei de Stevin como caso especial. Entretanto, se tivermos  $\rho(z) = \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} p(z)$ , teremos

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dz} &= -g \left[ \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} p(z) \right], \\ dp &= - \left[ g \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} p(z) \right] dz, \\ \frac{dp}{p} &= - \left( g \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} \right) dz.\end{aligned}$$

Integrando teremos

$$\begin{aligned}\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} &= - \int_0^z g \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} dz, \\ \ln p(z) - \ln p_{atm} &= - \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} z, \\ \ln \left[ \frac{p(z)}{p_{atm}} \right] &= - \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} z, \\ \boxed{p(z) = p_{atm} e^{-\left( \frac{\rho_{atm}}{\rho_{atm}} \right) z}}.\end{aligned}$$

## Observações<sup>1</sup>

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Referências e observações<sup>2</sup>

 A. Máximo, B. Alvarenga, C. Guimarães, Física. Contexto e aplicações, v.1, 2.ed., São Paulo, Scipione (2016)

---

<sup>2</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.