# Equações de Maxwell

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

12 de Abril de 2021

# Sumário

## Equações de Maxwell

As principais equações do eletromagnetismo são

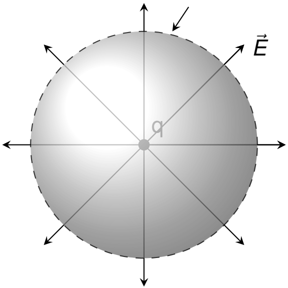
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad \text{(Lei de Gauss)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \qquad \text{(Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \text{(Lei de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i, \qquad \text{(Lei de Ampère)}$$

## Lei de Gauss



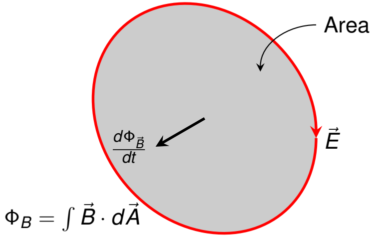

Fluxo do campo elétrico $\vec{E}$ devido a carga q.

### Lei de Gauss

A variação do fluxo do campo magnético que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo elétrico induzido ao redor dessa espira,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

# Lei de Faraday




$\Phi_B$: B por area perpendicular a espira

Fluxo do campo magnético $\vec{B}$.

## Lei de Faraday

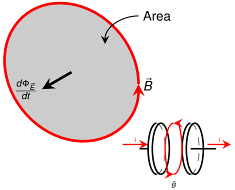
A variação do fluxo do campo magnético que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo elétrico induzido ao redor dessa espira,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

# Simetria entre campo elétrico e magnético

## Simetria dos fenômenos elétricos e magnéticos

Maxwell, usando a idéia de simetria, sugeriu que assim como a variação de um campo magnético no espaço pode induzir um campo elétrico, a variação do campo elétrico também pode induzir um campo magnético.

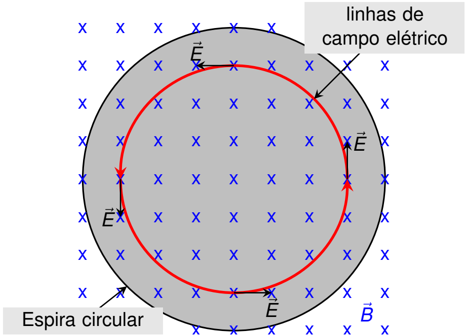


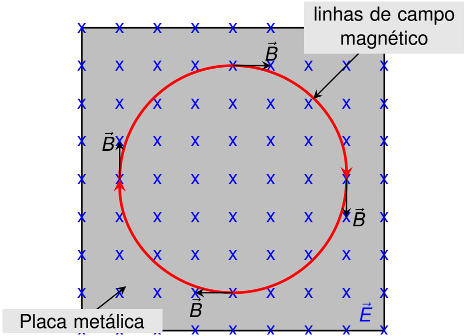

Variação do fluxo elétrico $\frac{d\Phi_E}{dt}$.

## Lei de Maxwell

A variação do fluxo do campo elétrico que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo magnético induzido ao redor dessa espira.

## Campo magnético induzido devido a variação do campo elétrico




Linhas de campo elétrico $\vec{E}$ circular devido a variação do campo magnético $\vec{B}$.

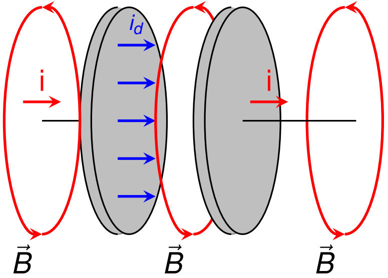
Linhas de campo magnético $\vec{B}$ circular devido a variação do campo elétrico $\vec{E}$.

## Corrente de deslocamento

Analisando a lei de Ampere, podemos perceber que o lado direito da equação obrigatoriamente deve possuir unidades de $\mu_0 i$. Na verdade, em regiões onde não há corrente elétrica, a variação do fluxo deve ser multiplicado por uma constante, de modo a satisfazer a seguinte equação

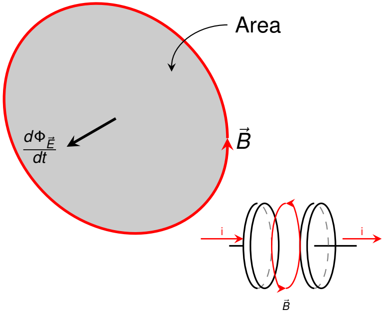
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 i_d.$$

$i_d$ é chamado corrente de deslocamento e o campo magnético $\vec{B}$ induzido por ele é idêntico ao campo criado pela corrente real $i$.




Campo magnético circular $\vec{B}$ devido a corrente de deslocamento $i_d$.

# Lei de Ampère-Maxwell




Variação do fluxo elétrico $\frac{d\Phi_E}{dt}$ induzindo um campo magnético circular $\vec{B}$.

Aplicando a idéia de simetria, podemos concluir que a seguinte relação deve acontecer

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \; \alpha \; \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

No entanto, para estar de acordo com a lei de Ampere, o lado direito deve ter unidades de $\mu_0 i$, chegando assim na lei de Maxwell,

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.}$$

## Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são formadas pela combinação das quatro equações do eletromagnetismo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad \text{(Lei de Gauss)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \qquad \text{(Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \text{(Lei de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \text{(Lei de Ampère-Maxwell)}$$

## Equações de Maxwell no vácuo

No vácuo temos ausência de cargas elétricas, o que resulta q=0 e i=0,

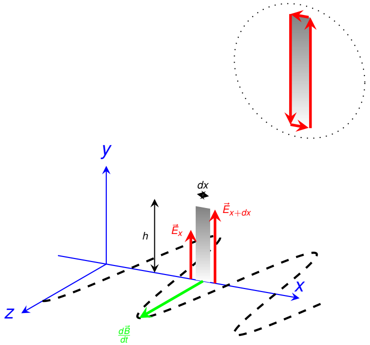
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0,$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0,$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

# Lei de Faraday-Lenz na ausência de matéria




Campo elétrico na direção do eixo y.

Supondo um campo magnético na direção z cuja amplitude varia no tempo. Pela Lei de Faraday

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \vec{E}\cdot d\vec{s},$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\left[\overbrace{Edx}^{\vec{E}\cdot d\vec{l}=0} + \overbrace{Edx}^{\vec{E}\cdot d\vec{l}=0} - hE_x + \underbrace{hE_{x+dx}}_{h(E_x+dE)}\right],$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -hdE.$$

## Equação da onda à partir da lei de Faraday-Lenz

O fluxo do campo magnético é dado por

$$\Phi_B = (B)(\underbrace{hdx}_{cte}),$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_B = hdx\frac{dB}{dt}$$

Sabendo que $\frac{d\Phi_B}{dt} = -hdE$ temos

$$hdE = -hdx\frac{dB}{dt},$$

$$dE = -\left[\frac{dB}{dt}\right]dx.$$

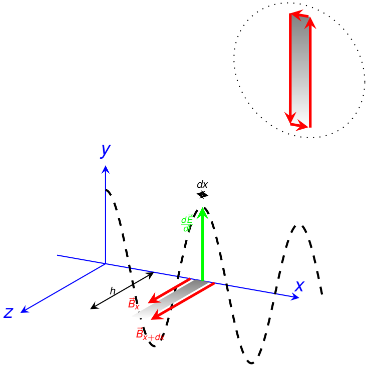
Usando a regra de diferencial

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

A única função para $E(x,t)$ e $B(x,t)$ que satisfaz a equação acima seria

$$E(x,t) = E_m cos\left(kx - \omega t\right),$$
$$B(x,t) = B_m cos\left(kx - \omega t\right)$$

# Lei de Ampère-Maxwell na ausência de matéria




Campo magnético na direção z.

Sabemos que o campo elétrico varia no tempo ao longo da direção y. Pela Lei de Àmpere-Maxwell

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \left[\overbrace{Bdx}^{\vec{B}\cdot d\vec{l}=0} + \overbrace{Bdx}^{\vec{B}\cdot d\vec{l}=0} - hB_x + \underbrace{hB_{x+dx}}_{h(B_x+dB)}\right],$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} hdB.$$

## Equação da onda à partir da lei de Ampère-Maxwell

O fluxo do campo elétrico é dado por

$$\Phi_E = (E)(\underbrace{hdx}_{cte}),$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = hdx\frac{dE}{dt}.$$

Sabendo que $\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}hdB$ temos

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\cancel{h}dB = -\cancel{h}\left[\frac{dE}{dt}\right]dx,$$

Usando a regra de diferencial

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}.}$$

**Corollary**

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

## Amplitude dos campos elétrico e magnético

Supondo uma solução que satisfaz a equação anterior, Retornar ao slide anterior

$$E(x,t) = E_m cos\,(kx - \omega t)\,,$$
$$B(x,t) = B_m cos\,(kx - \omega t)$$

Usando a equação $\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$ e derivando

$$\frac{dE}{dx} = -E_m k sen\,(kx\omega t)$$
$$\frac{dB}{dt} = B_m \omega sen\,(kx - \omega t)$$

O que resulta

$$B_m \omega = E_m k$$

mas $\frac{\omega}{k} = c$,

$$\boxed{B_m = \frac{E_m}{c}}$$

**Corollary**

*A intensidade do campo elétrico é muito maior que a do campo magnético.*

## Velocidade da onda eletromagnética

Usando a equação $\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}$ e derivando

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -E_m\omega sen\left(kx - \omega t\right)$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} = B_m k sen\left(kx - \omega t\right)$$

O que resulta

$$E_m\omega = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}kB_m,$$
$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{k}{\omega}$$

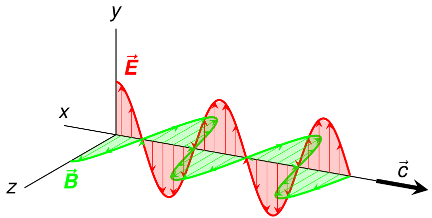
mas $\frac{E_m}{B_m} = c$ e numa onda $c = \frac{\omega}{k}$, teremos

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.}$$

**Corollary**

*Os campos elétrico e magnético propagam no vácuo a uma velocidade c.*

## Onda eletromagnética




Representação de uma onda eletromagnética.

### Função da onda eletromagnética

$$\vec{E}(x,t) = E_m cos\,(kx - \omega t)\,\hat{y}$$
$$\vec{B}(x,t) = B_m cos\,(kx - \omega t)\,\hat{z}$$

### Corollary

*As equações de Maxwell nos fornece com solução duas ondas transversais que se propagam no espaço na mesma direção e com a mesma velocidade c.*

## A luz como onda eletromagnética

Maxwell percebeu que a velocidade c obtida à partir do eletromagnetismo é exatamente idêntica a velocidade da luz, já bem conhecida ná época através de diversas técnicas de medição.

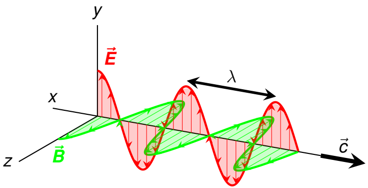
*"A velocidade das ondas transversais em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos electromagnéticos dos Srs. Kohrausch e Weber, concorda tão exactamente com a velocidade da luz, calculada pelos experimentos óticos do Sr. Fizeau, que é difícil evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos eléctricos e magnéticos."*

**Corollary**

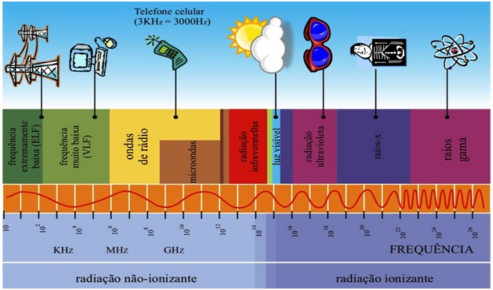
*A luz é uma onda eletromagnética capaz de se propagar no vácuo com a velocidade de aproximadamente* $3 \times 10^8\ m/s$.

## Espectro eletromagnético

Identificamos uma onda eletromagnética à partir da sua assinatura energética (energia transportada por área e tempo), no qual depende da sua frequência.

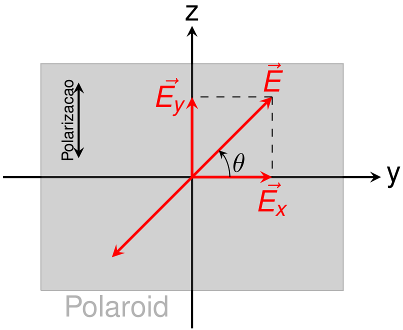



Onda eletromagnética




Espectro eletromagnético

## Polarização da Luz




Polarização da luz à partir do vetor campo elétrico $\vec{E}$.

A componente polarizada na direção y é dado por

$$E_y = E cos(\theta)$$

Sabendo que a intensidade da Luz é dado por $I \approx E_m^2$,

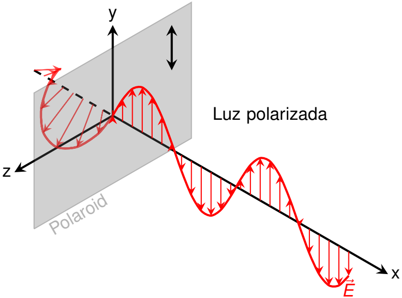
$$I_{\text{pol.}} = I_{\text{pol.}} cos(\theta)$$

mas $cos(\theta) \leq 1$, portanto

**Corollary**

*Intensidade da onda polarizada é sempre menor ou igual a intensidade da onda não-polarizada.*

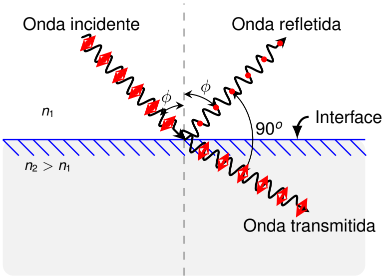
# Polarização da Luz



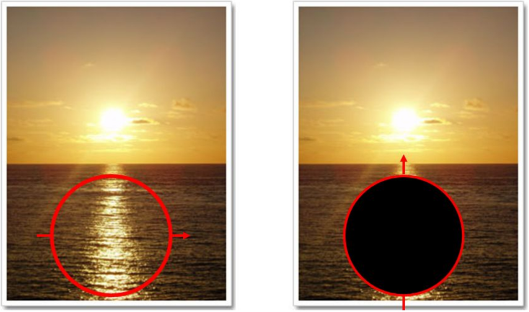

Onda polarizada.

Duas lentes polarizadas.

# Polarização da Luz por reflexão



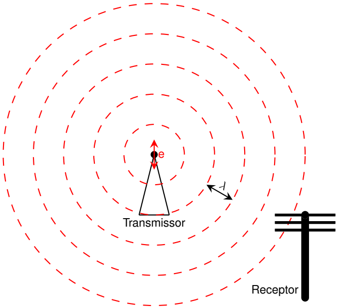

Representação de uma onda refletida.



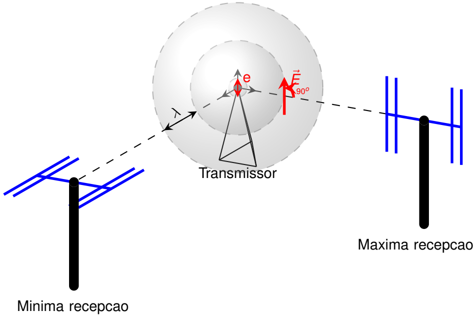
Polarização da luz vista por uma lente polarizada.

# Ondas de rádio

Pelas equações de Maxwell, uma carga oscilando no espaço gera um pulso eletromagnético com frequência igual a frequência de oscilação.

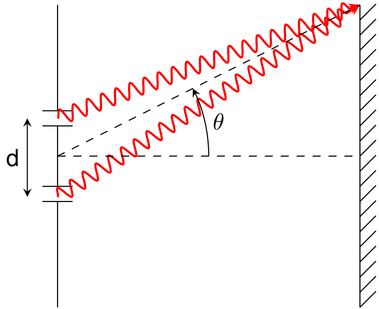



Propação da onda a partir da fonte emissora.




Recepção a partir da direção do campo $\vec{E}$.

# Interferência




Interferência entre duas ondas de mesmo comprimento de onda e equidistantes a uma distância d.

## Frangas de interferência

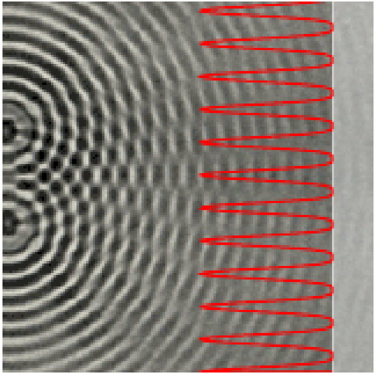
Intensidade máxima:

$$d sen\theta = m\lambda, \;\; m = 0, 1, 2, \cdots$$

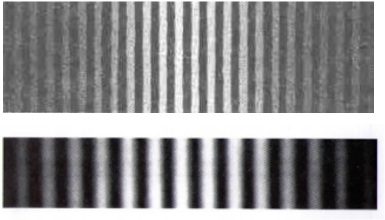
Intensidade mínima:

$$d sen\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \;\; m = 0, 1, 2, \cdots$$

# Franjas de interferência



Interferência entre ondas na água



Franjas de interferência

## Aplicações de interferência da Luz

Borboleta Morpho


Vista inferior

## Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Referências


- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)
- https://pt.m.wikipedia.org/wiki/
- https://github.com/josephwright/beamer
- Jacques Crémer, A very minimal introduction to TikZ*, Toulouse School of Economics (2011)