Potencial elétrico

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paran
Campus Irati

15 de Agosto de 2022

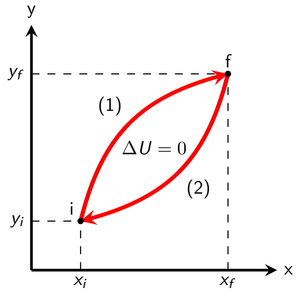
Sumário

1. Trabalho, energia e potencial elétrico
2. Potencial e campo elétrico
3. Potencial de uma distribuição de cargas
4. Apêndice

Energia potencial elétrica

Considere uma partícula carregada eletricamente no espaço que sofre a ação de uma força coulombiana devido a outro objeto carregado. Sabendo que a força é conservativa, temos que o trabalho W realizado por essa força para deslocar a partícula de um ponto i a outro ponto f é dado por

$$W = -\Delta U,$$
$$W = U_i - U_f.$$



Posições inicial (i) e final (f) de uma carga no plano xy.

Relação entre potencial elétrico e trabalho

Definimos potencial elétrico V como o trabalho necessário para deslocar cada unidade de carga do infinito até o ponto P qualquer,

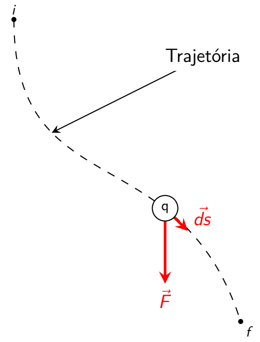
$$V = \frac{W_\infty}{q} = \frac{U_P - U_\infty}{q},$$

$$V = \frac{U_P}{q},$$

onde consideramos que $U_\infty = 0$.

Potencial elétrico

Energia potencial por unidade de carga.



Trajetória de q do ponto i ao f.

Relação entre energia potencial e potencial elétrico

Quando colocamos uma partícula de carga q em um ponto onde já existe um potencial elétrico V, a energia potencial da configuração é dada pela seguinte equação:

$$U = qV,$$

$$\boxed{(\text{Energia potencial elétrica}) = (\text{carga elétrica}) \times (\text{potencial elétrico}).}$$

Considerações importantes

- ✓ A energia potencial elétrica e potencial elétrico estão diretamente relacionados, mas são muito diferentes, e uma não pode ser usada no lugar da outra;
- ✓ O potencial elétrico não é um vetor, como o campo elétrico, e sim um escalar.

Diferença de potencial e deslocamento de cargas elétricas

Sabemos que $U = qV$ e $W = U_i - U_f$, podemos dizer que

$$U_i - U_f = qV_i - qV_f,$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W}{q}.}$$

Corollary

- ✓ *A diferença de potencial (ddp) entre dois pontos no espaço é igual à diferença entre os potenciais elétricos dos dois pontos;*
- ✓ *A unidade de medida do potencial e da ddp no SI é o Volt (V), ou $N \cdot m/C$.*

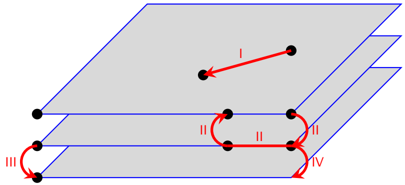
Elétron-volt

Muito utilizado em sistemas subatômicos, é a energia igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga elementar e, através de uma ddp de um volt.

Superfície equipotencial

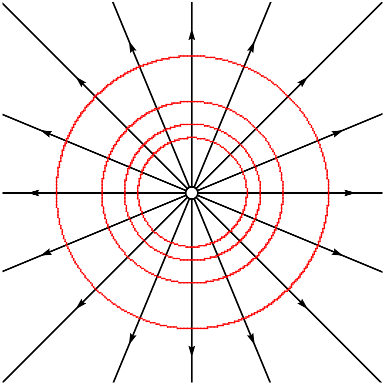
Pontos vizinhos que possuem o mesmo potencial elétrico formam o que chamamos de superfície equipotencial.

- ✓ O trabalho realizado ao longo de uma trajetória que se mantém em uma superfície equipotencial é nulo (I);
- ✓ O trabalho realizado ao longo de uma trajetória que começa e termina na mesma superfície equipotencial é nulo (II);
- ✓ Os trabalhos realizados ao longo de trajetórias que começam e terminam nas mesmas superfícies equipotenciais são iguais (III e IV).

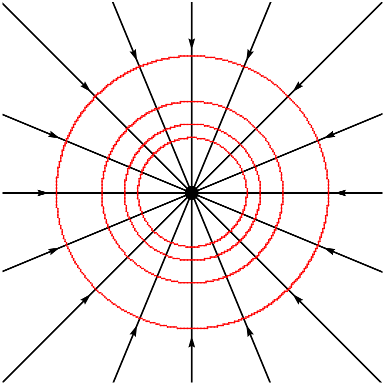


Família de superfícies equipotenciais.

Família de superfícies equipotenciais de partículas puntiformes

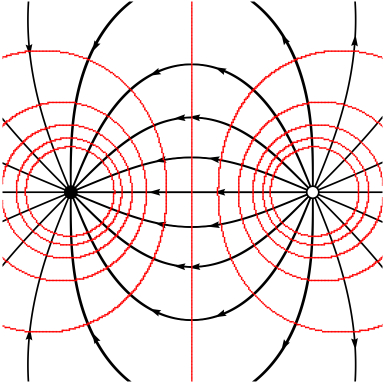


Carga positiva.

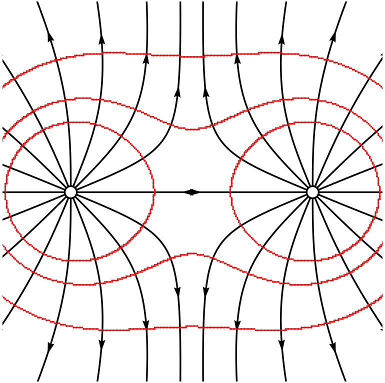


Carga negativa.

Família de superfície equipotenciais de um par de partículas



Dipolo elétrico.



Cargas de sinais iguais.

Potencial a partir do campo elétrico

O trabalho dW realizado por uma força $\vec{F}$ afim de efetuar um deslocamento $\vec{ds}$ em uma partícula é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Pela Lei de Coulomb temos $\vec{F} = q\vec{E}$. Substituindo temos

$$dW = q\vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

Integrando ao longo de toda a trajetória temos o trabalho total realizado pela força $\vec{F}$,

$$W = q\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

Foi mostrado anteriormente que $W = -q\Delta V$, substituindo temos

$$\boxed{V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}.}$$

Potencial Produzido por uma Partícula Carregada

Sabemos que uma carga puntiforme Q produz linhas de campo elétrico radiais, ou seja, $\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\widehat{r}$. Substituindo na expressão de ΔV obtida anteriormente encontramos

$$\Delta V = -\int_i^f K\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r} = -\int_i^f K\frac{Q}{r^2}dr,$$

$$V_f - V_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_i}^{R_f}.$$

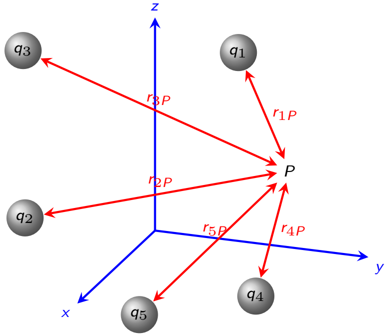
Supondo que a partícula partiu do infinito podemos considerar $R_i = \infty$ e $V_i = 0$,

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.}$$

Corollary

O valor relativo do potencial elétrico depende do sinal da carga elétrica.

Potencial de uma distribuição discreta de cargas



Distância relativa entre cargas q e o ponto P.

Podemos calcular o potencial no ponto P produzido por uma distribuição de cargas usando o princípio da superposição,

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_N.$$

Potencial elétrico de uma distribuição puntiforme de cargas elétricas

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}$$

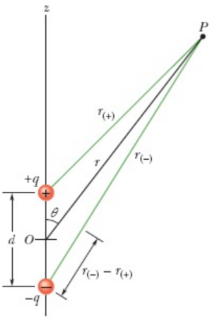
Potencial produzido por um dipolo elétrico

Na figura ao lado, o potencial elétrico em um ponto P é dado pela soma dos potenciais produzidos pelas duas cargas,

$$V = V_+ + V_-,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right),$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_- - r_+)}{r_- r_+}.$$



Potencial no ponto O devido a um dipolo elétrico. [1]

Potencial Produzido por um dipolo elétrico (continuação)

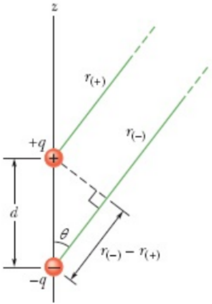
Se considerarmos pontos relativamente distantes do dipolo, onde $r >> d$, podemos dizer que $r_- \approx r_+ \approx r$ e

$$r_- - r_+ \approx d cos\theta, \quad r_- r_+ \approx r^2.$$

Substituindo na expressão do potencial e definindo o momento de dipolo $p = qd$, temos

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d cos\theta}{r^2},$$

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p cos\theta}{r^2}.}$$



r_+ e r_- são praticamente paralelos se $r >> d$ [1].

Potencial de uma distribuição contínua de cargas

Tratando o elemento de carga dq como uma carga pontual, podemos usar a seguinte expressão para expressar o potencial dV no ponto P produzido por dq,

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r},$$

onde r é a distância entre P e a carga dq. Para calcular o potencial total V no ponto P, integramos cada contribuição de dq,

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}.}$$

Corollary

✓ *A integral deve ser calculada para toda a distribuição de carga.*

✓ *O potencial é um escalar, portanto não existem componentes vetoriais a serem considerados.*

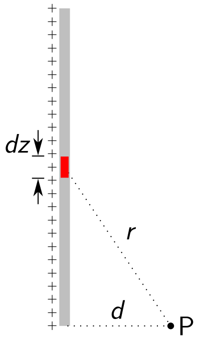
Potencial elétrico de um fio retilíneo finito

Considere um fio retilíneo contendo uma distribuição uniforme de carga λ. Cada pedaço infinitesimal dz do fio terá uma quantidade de carga dq, onde o potencial no ponto P é dado por

$$dq = \lambda dz.$$

Cada elemento de carga dq irá produzir um potencial dV idêntico a de uma partícula puntiforme

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}.$$



Fio retilineo com distribuição uniforme de carga λ.

Potencial elétrico de um fio retilíneo finito (continuação)

Substituindo r na equação temos

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{(z^2+d^2)^{1/2}}.$$

Para obter o potencial no ponto P integramos a contribuição de cada pedaço dz do fio,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda dz}{(z^2+d^2)^{1/2}}.$$

Para resolver a integral usamos a técnica do teorema de Cauchy, o que resulta em

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[z+(z^2+d^2)^{1/2}\right]\Big|_0^L.$$

Usando a identidade $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ chegamos ao resultado final,

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{L+(L^2+d^2)^{1/2}}{d}\right].}$$

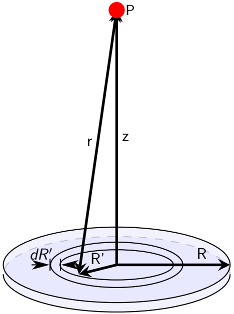
Potencial elétrico de um disco carregado

Considere um disco carregado eletricamente com uma densidade superficial de carga σ. Podemos considerar que o disco é formado por vários anéis de espessura $dR1$ e raio R contendo cargas dq, onde

$$dq = \sigma dA,$$
$$dq = \sigma 2\pi R' dR'.$$

sendo dA a área do anel. A carga total do disco é obtida integrando dq de cada anel, ou seja,

$$q = \int dq = \int_0^R \sigma dA = \sigma \pi R^2.$$



Disco circular com distribuição uniforme de carga.

Potencial elétrico de um disco circular (continuação)

Cada anel de largura dR' irá produzir um potencial dV no ponto P, onde

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r},$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R'}{(z^2 + R'^2)^{1/2}}dR'.$$

Integrando temos

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma 2\pi R'}{(z^2 + R'^2)^{1/2}}dR'$$

Para resolver a integral fazemos a substituição $X = z^2 + R'^2$ e $dX = 2R'dR'$,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\pi\sigma\int X^{-1/2}dX,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\overbrace{\pi\sigma}^{q/R^2}\left[\frac{(z^2 + R'^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^R.$$

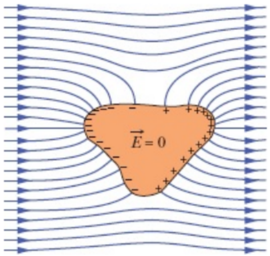
Chegamos assim na solução final,

$$\boxed{V(z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right).}$$

Potencial elétrico de um condutor carregado

✓ Uma carga em excesso colocada em um condutor se distribui na superfície do condutor de tal forma que o potencial é o mesmo em todos os pontos (tanto na superfície quanto no interior), mesmo que o condutor tenha uma cavidade interna;

✓ As linhas de campo elétrico cruzam perpendicularmente as superfícies equipotenciais.



Condutor descarregado inserido em um campo elétrico externo [1].

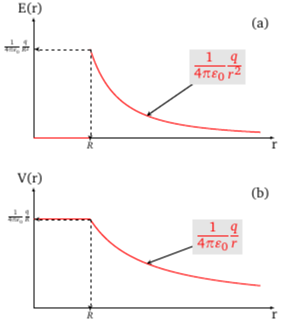
Potencial elétrico em uma esfera condutora

Como foi visto anteriormente, o campo elétrico de uma esfera condutora é dado por

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} 0, & (r < R), \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, & (r \geq R). \end{cases}}$$

No caso da esfera condutora temos que o potencial é o mesmo no interior e na superfície,

$$\boxed{V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}, & (r \leq R), \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, & (r > R). \end{cases}}$$



Campo elétrico (a) e potencial (b) de uma esfera condutora eletricamente carregada [1].

Campo elétrico a partir do potencial

O trabalho necessário para mover uma carga q em um deslocamento $d\vec{s}$ de uma superfície equipotencial a outra é dado por $-qdV$, ou na forma $q\vec{E}\cdot d\vec{s}$, portanto

$$-qdV = q\vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

Usando a regra diferencial temos

$$Ecos\theta = -\frac{dV}{ds}.$$

Se considerarmos o vetor posição como $\vec{s} = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$ e $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ podemos determinar as componentes de $\vec{E}$ na direção x usando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = (-Ecos\theta)\left(\frac{x}{s}\right),$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\vec{E}\cdot\widehat{i} = -E_x.$$

Usando o mesmo raciocínio nas direções y e z temos

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.}$$

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.

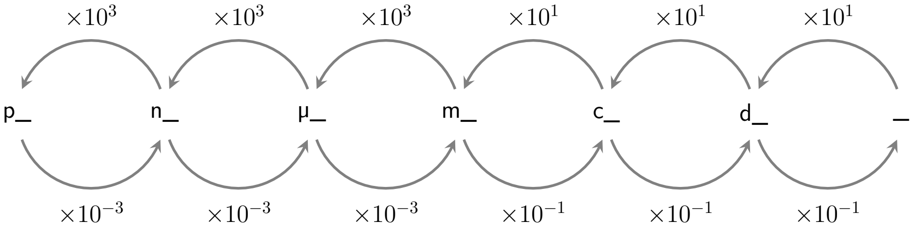
Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.

Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.

Exemplo

$$6\ 590\ 000\ 000\ 000\ 000,0 = 6{,}59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão



$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1)\times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ g} = 2,5 \times 10^{(1)\times 3} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^{3} \text{ mg}$$

$$10 \; \mu\text{C} = 10 \times 10^{[(-3)\times 1 + (-1)\times 3]} \text{ C} \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Conversão de unidades em duas dimensões

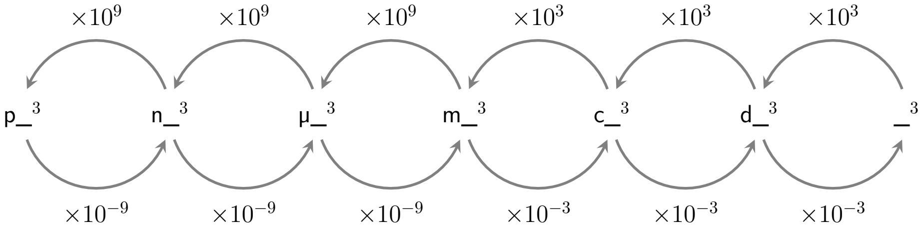
$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{p}\_^{2} \arrow[r, bend right, "\times 10^{-6}"'] & \mathrm{n}\_^{2} \arrow[l, bend right, "\times 10^{6}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-6}"'] & \mu\_^{2} \arrow[l, bend right, "\times 10^{6}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-6}"'] & \mathrm{m}\_^{2} \arrow[l, bend right, "\times 10^{6}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-2}"'] & \mathrm{c}\_^{2} \arrow[l, bend right, "\times 10^{2}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-2}"'] & \mathrm{d}\_^{2} \arrow[l, bend right, "\times 10^{2}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-2}"'] & \_^{2} \arrow[l, bend right, "\times 10^{2}"']
\end{tikzcd}
$$

$$1\ \mathrm{mm}^2 = 1 \times 10^{(-2)\times 2}\ \mathrm{dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4}\ \mathrm{dm}^2$$

$$2,5\ \mathrm{m}^2 = 2,5 \times 10^{(2)\times 3}\ \mathrm{mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^{6}\ \mathrm{mm}^2$$

$$10\ \mu\mathrm{m}^2 = 10 \times 10^{[(-6)\times 1 + (-2)\times 3]}\ \mathrm{m}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões



$$1\ \text{mm}^3 = 1 \times 10^{(-3)\times 2}\ \text{dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6}\ \text{dm}^3$$

$$2,5\ \text{m}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 3}\ \text{mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{9}\ \text{mm}^3$$

$$10\ \mu\text{m}^3 = 10 \times 10^{[(-9)\times 1+(-3)\times 3]}\ \text{m}^3 \rightarrow 10 \times 10^{-18}\ \text{m}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsílon	E	ϵ,ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Teta	Θ	θ
Iota	I	ι
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mi	M	μ

Ni	N	ν
Csi	Ξ	ξ
micron	O	o
Pi	Π	π
R	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
ípsilon	Υ	υ
Fi	Φ	ϕ,φ
Qui	X	χ
Psi	Ψ	ψ
mega	Ω	ω

Referências e observações[1]

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)

Esta apresentação está disponível para download no endereo
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.