

# Potencial elétrico

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paran  
Campus Irati

22 de Fevereiro de 2021

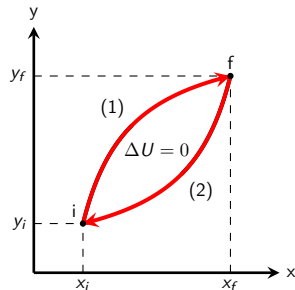
## Sumário

- 1 Trabalho, energia e potencial elétrico
- 2 Potencial e campo elétrico
- 3 Potencial de uma distribuição de cargas
- 4 Apêndice

## Energia potencial elétrica

Considere uma partícula carregada eletricamente no espaço que sofre a ação de uma força coulombiana devido a outro objeto carregado. Sabendo que a força é conservativa, temos que o trabalho  $W$  realizado por essa força para deslocar a partícula de um ponto  $i$  a outro ponto  $f$  é dado por

$$W = -\Delta U,$$
$$W = U_i - U_f.$$



Posições inicial (i) e final (f) de uma carga no plano xy.

## Relação entre potencial elétrico e trabalho

Definimos potencial elétrico  $V$  como o trabalho necessário para deslocar cada unidade de carga do infinito até o ponto  $P$  qualquer,

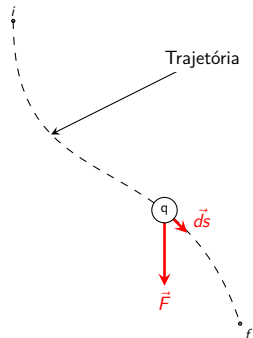
$$V = \frac{W_{\infty}}{q} = \frac{U_P - U_{\infty}}{q},$$

$$V = \frac{U_P}{q},$$

onde consideramos que  $U_{\infty} = 0$ .

### Potencial elétrico

Energia potencial por unidade de carga.



Trajetória de  $q$  do ponto  $i$  ao  $f$ .

## Relação entre energia potencial e potencial elétrico

Quando colocamos uma partícula de carga  $q$  em um ponto onde já existe um potencial elétrico  $V$ , a energia potencial da configuração é dada pela seguinte equação:

$$U = qV,$$

$(\text{Energia potencial elétrica}) = (\text{carga elétrica}) \times (\text{potencial elétrico}).$

### Considerações importantes

- ✓ A energia potencial elétrica e potencial elétrico estão diretamente relacionados, mas são muito diferentes, e uma não pode ser usada no lugar da outra;
- ✓ O potencial elétrico não é um vetor, como o campo elétrico, e sim um escalar.

## Diferença de potencial e deslocamento de cargas elétricas

Sabemos que  $U = qV$  e  $W = U_i - U_f$ , podemos dizer que

$$U_i - U_f = qV_i - qV_f,$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W}{q}.$$

### Corollary

- ✓ A diferença de potencial (ddp) entre dois pontos no espaço é igual à diferença entre os potenciais elétricos dos dois pontos;
- ✓ A unidade de medida do potencial e da ddp no SI é o Volt (V), ou  $N \cdot m/C$ .

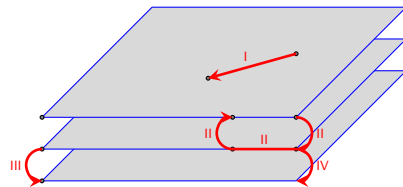
### Elétron-volt

Muito utilizado em sistemas subatômicos, é a energia igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga elementar  $e$ , através de uma ddp de um volt.

## Superfície equipotencial

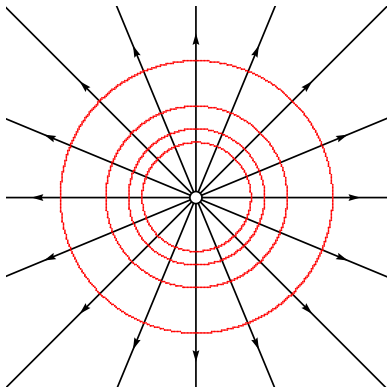
Pontos vizinhos que possuem o mesmo potencial elétrico formam o que chamamos de superfície equipotencial.

- ✓ O trabalho realizado ao longo de uma trajetória que se mantém em uma superfície equipotencial é nulo (I);
- ✓ O trabalho realizado ao longo de uma trajetória que começa e termina na mesma superfície equipotencial é nulo (II);
- ✓ Os trabalhos realizados ao longo de trajetórias que começam e terminam nas mesmas superfícies equipotenciais são iguais (III e IV).

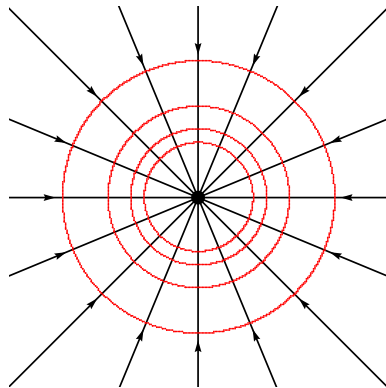


Família de superfícies equipotenciais.

## Família de superfícies equipotenciais de partículas puntiformes



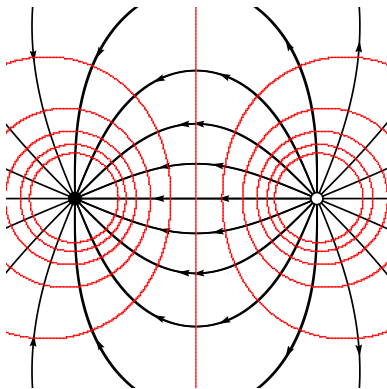
Carga positiva.



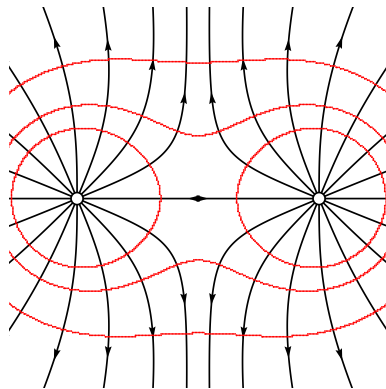
Carga negativa.



## Família de superfície equipotenciais de um par de partículas



Dipolo elétrico.



Cargas de sinais iguais.

## Potencial a partir do campo elétrico

O trabalho  $dW$  realizado por uma força  $\vec{F}$  afim de efetuar um deslocamento  $\vec{ds}$  em uma partícula é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Pela Lei de Coulomb temos  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Substituindo temos

$$dW = q\vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

Integrando ao longo de toda a trajetória

temos o trabalho total realizado pela força  $\vec{F}$ ,

$$W = q \int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

Foi mostrado anteriormente que  $W = -q\Delta V$ , substituindo temos

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

## Potencial Produzido por uma Partícula Carregada

Sabemos que uma carga puntiforme  $Q$  produz linhas de campo elétrico radiais, ou seja,  $\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ . Substituindo na expressão de  $\Delta V$  obtida anteriormente encontramos

$$V_f - V_i = - \int_i^f K \frac{Q}{r^2} dr,$$

$$V_f - V_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{R_i}^{R_f}.$$

Supondo que a partícula partiu do infinito podemos considerar  $R_i = \infty$  e  $V_i = 0$ ,

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

### Corollary

*O valor relativo do potencial elétrico depende do sinal da carga elétrica.*

## Campo elétrico a partir do potencial

O trabalho necessário para mover uma carga  $q$  em um deslocamento  $d\vec{s}$  de uma superfície equipotencial a outra é dado por  $-qdV$ , ou na forma  $q\vec{E} \cdot d\vec{s}$ , portanto

$$-qdV = q\vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Usando a regra diferencial temos

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}.$$

Se considerarmos o vetor posição como  $\vec{s} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  e  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

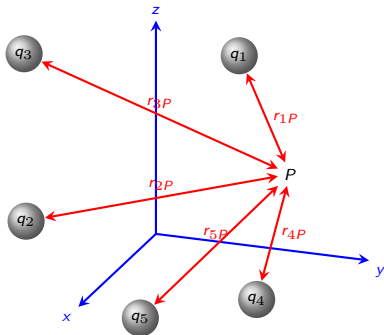
podemos determinar as componentes de  $\vec{E}$  na direção  $x$  usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{dV}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = (-E\cos\theta) \left(\frac{x}{s}\right), \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\vec{E} \cdot \hat{i} = -E_x.\end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio nas direções  $y$  e  $z$  temos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

## Potencial de uma distribuição discreta de cargas



Distância relativa entre cargas  $q$  e o ponto P.

Podemos calcular o potencial no ponto P produzido por uma distribuição de cargas usando o princípio da superposição,

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_N.$$

**Potencial elétrico de uma distribuição puntiforme de cargas elétricas**

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}$$

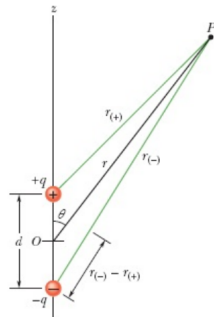
## Potencial Produzido por um dipolo elétrico

Na figura ao lado, o potencial elétrico em um ponto P é dado pela soma dos potenciais produzidos pelas duas cargas,

$$V = V_+ + V_- ,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{+q}{r_+} + \frac{-q}{r_-} \right) ,$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_- - r_+)}{r_- r_+} .$$



Potencial no ponto O devido a um dipolo elétrico.

## Potencial Produzido por um dipolo elétrico (continuação)

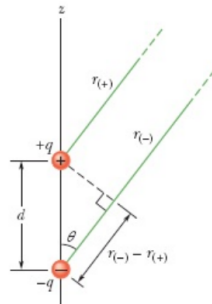
Se considerarmos pontos relativamente distantes do dipolo, onde  $r \gg d$ , podemos dizer que  $r_- \approx r_+ \approx r$  e

$$r_- - r_+ = d \cos \theta, \quad r_- r_+ = r^2.$$

Substituindo na expressão do potencial e definindo o momento de dipolo  $p = qd$ , temos

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$



$r_+$  e  $r_-$  são praticamente paralelos se  $r \gg d$ .

## Potencial de uma distribuição contínua de cargas

Tratando o elemento de carga  $dq$  como uma carga pontual, podemos usar a seguinte expressão para expressar o potencial  $dV$  no ponto  $P$  produzido por  $dq$ ,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r},$$

onde  $r$  é a distância entre  $P$  e a carga  $dq$ . Para calcular o potencial total  $V$  no ponto  $P$ , integramos cada contribuição de  $dq$ ,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}.$$

### Corollary

- ✓ *A integral deve ser calculada para toda a distribuição de carga.*
- ✓ *O potencial é um escalar, portanto não existem componentes vetoriais a serem considerados.*



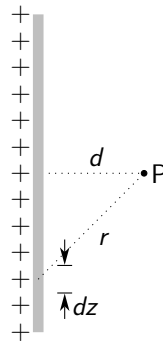
## Potencial elétrico de um fio retilíneo finito

Considere um fio retilíneo contendo uma distribuição uniforme de carga  $\lambda$ . Cada pedaço infinitesimal  $dz$  do fio terá uma quantidade de carga  $dq$ , onde o potencial no ponto P é dado por

$$dq = \lambda dz.$$

Cada elemento de carga  $dq$  irá produzir um potencial  $dV$  idêntico a de uma partícula puntiforme

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}.$$



Fio retilíneo com distribuição uniforme de carga  $\lambda$ .

## Potencial elétrico de um fio retilíneo finito (continuação)

Substituindo  $r$  na equação temos

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{(z^2 + d^2)^{1/2}}.$$

Para obter o potencial no ponto P integramos a contribuição de cada pedaço  $dz$  do fio,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dz}{(z^2 + d^2)^{1/2}}.$$

Para resolver a integral usamos a técnica do teorema de Cauchy, o que resulta em

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( x + (x^2 + d^2)^{1/2} \right) \right]_0^L.$$

Usando a identidade  $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$  chegamos ao resultado final,

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d} \right].$$

## Potencial elétrico de um disco carregado

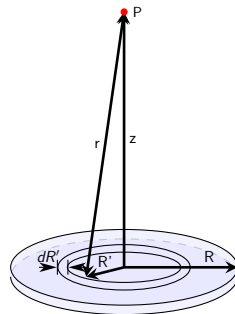
Considere um disco carregado eletricamente com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . Podemos considerar que o disco é formado por vários anéis de espessura  $dR$  e raio  $R$  contendo cargas  $dq$ , onde

$$dq = \sigma dA,$$

$$dq = \sigma 2\pi R' dR'.$$

sendo  $dA$  a área do anel. A carga total do disco é obtida integrando  $dq$  de cada anel, ou seja,

$$q = \int dq = \int_0^R \sigma dA = \sigma \pi R^2.$$



Disco circular com distribuição uniforme de carga.

## Potencial elétrico de um disco circular (continuação)

Cada anel de largura  $dR'$  irá produzir um potencial  $dV$  no ponto P, onde

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r},$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi R'}{(z^2 + R'^2)^{1/2}} dR'.$$

Integrando temos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma 2\pi R'}{(z^2 + R'^2)^{1/2}} dR'$$

Para resolver a integral fazemos a substituição  $X = z^2 + R'^2$  e  $dX = 2R' dR'$ ,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi\sigma \int X^{-1/2} dX,$$

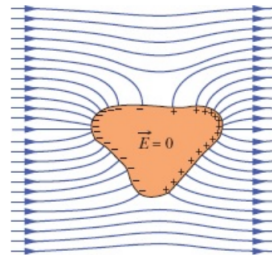
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \overbrace{\pi\sigma}^{q/R^2} \left[ \frac{(z^2 + R'^2)^{1/2}}{1/2} \right]_0^R.$$

Chegamos assim na solução final,

$$V(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - z \right).$$

## Potencial elétrico de um condutor carregado

- ✓ Uma carga em excesso colocada em um condutor se distribui na superfície do condutor de tal forma que o potencial é o mesmo em todos os pontos (tanto na superfície quanto no interior), mesmo que o condutor tenha uma cavidade interna;
- ✓ As linhas de campo elétrico cruzam perpendicularmente as superfícies superficiais.



Condutor descarregado inserido em um campo elétrico externo.

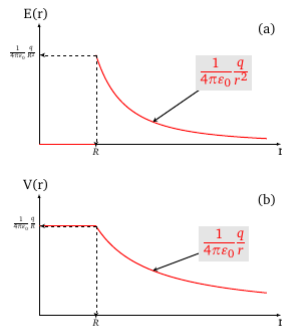
## Potencial elétrico em uma esfera condutora

Como foi visto anteriormente, o campo elétrico de uma esfera condutora é dado por

$$E(r) = \begin{cases} 0, & (r < R), \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & (r \geq R). \end{cases}$$

No caso da esfera condutora temos que o potencial é o mesmo no interior e na superfície,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & (r \leq R), \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & (r > R). \end{cases}$$



Campo elétrico (a) e potencial (b) de uma esfera condutora eletricamente carregada.

## Transformar um número em notação científica

### Corollary

*Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.*

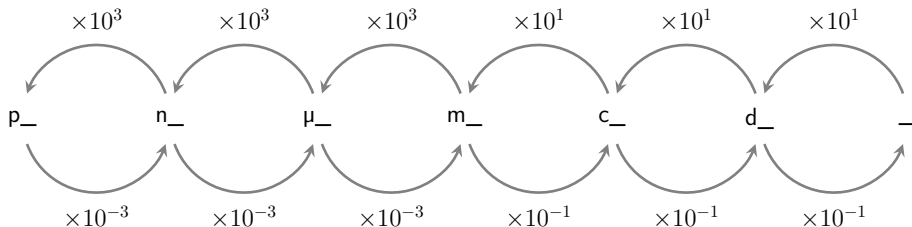
*Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.*

*Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

### Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6,59 \times 10^{15}$$

## Conversão de unidades em uma dimensão



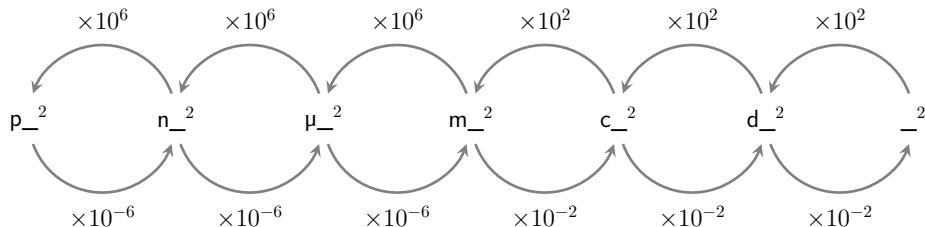
$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1) \times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ g} = 2,5 \times 10^{(1) \times 3} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^3 \text{ mg}$$

$$10 \text{ } \mu\text{C} = 10 \times 10^{[(-3) \times 1 + (-1) \times 3]} \text{ C} \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$



## Conversão de unidades em duas dimensões

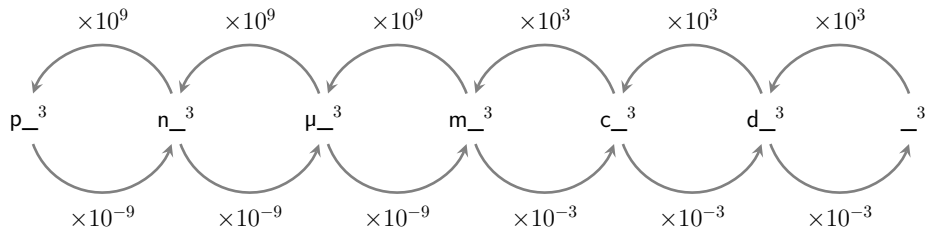


$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2) \times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2) \times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$10 \text{ } \mu\text{m}^2 = 10 \times 10^{[(-6) \times 1 + (-2) \times 3]} \text{ m}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-12} \text{ m}^2$$

## Conversão de unidades em três dimensões



$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3) \times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^9 \text{ mm}^3$$




$$10 \text{ }\mu\text{m}^3 = 10 \times 10^{[(-9) \times 1 + (-3) \times 3]} \text{ m}^3 \rightarrow 10 \times 10^{-18} \text{ m}^3$$

## Alfabeto grego

|         |           |                         |
|---------|-----------|-------------------------|
| Alfa    | $A$       | $\alpha$                |
| Beta    | $B$       | $\beta$                 |
| Gama    | $\Gamma$  | $\gamma$                |
| Delta   | $\Delta$  | $\delta$                |
| Epsílon | $E$       | $\epsilon, \varepsilon$ |
| Zeta    | $Z$       | $\zeta$                 |
| Eta     | $H$       | $\eta$                  |
| Teta    | $\Theta$  | $\theta$                |
| Iota    | $I$       | $\iota$                 |
| Capa    | $K$       | $\kappa$                |
| Lambda  | $\Lambda$ | $\lambda$               |
| Mi      | $M$       | $\mu$                   |

|         |            |                 |
|---------|------------|-----------------|
| Ni      | $N$        | $\nu$           |
| Csi     | $\Xi$      | $\xi$           |
| micron  | $O$        | $o$             |
| Pi      | $\Pi$      | $\pi$           |
| R       | $P$        | $\rho$          |
| Sigma   | $\Sigma$   | $\sigma$        |
| Tau     | $T$        | $\tau$          |
| ípsilon | $\Upsilon$ | $v$             |
| Fi      | $\Phi$     | $\phi, \varphi$ |
| Qui     | $X$        | $\chi$          |
| Psi     | $\Psi$     | $\psi$          |
| mega    | $\Omega$   | $\omega$        |

## Referências e observações<sup>1</sup>

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.