

Ondas eletromagnéticas

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

22 de Abril de 2021

Sumário

- 1 Transporte de energia
- 2 Polarização da luz
- 3 Fenômenos ópticos e a luz
- 4 Apêndice

Energia transportada em um onda eletromagnética

O vetor de Poynting S é definido como a energia transportada pela onda por tempo e área,

$$S = \left(\frac{\text{energia/tempo}}{\text{área}} \right).$$

Porém, energia/área = potência, assim

$$S = \left(\frac{\text{potência}}{\text{área}} \right).$$

A partir do vetor de Poynting podemos encontrar a intensidade de uma onda ele-

tromagnética. Da energia elétrica em um capacitor e em um indutor encontramos as expressões que definem a densidade de energia elétrica u_E e magnética u_B em função dos campos elétrico E e magnético B ,

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética

Portanto, a energia total u transportada por volume da onda eletromagnética pode ser definido como

$$u = u_E + u_B,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E(x, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(x, t)^2,$$

onde, pelas equações de Maxwell descobrimos que para uma onda se propa-

gando na direção x teremos

$$E(x, t) = E_m \cos(kx - \omega t),$$

$$B(x, t) = B_m \cos(kx - \omega t).$$

Substituindo na expressão da energia resulta em

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 [E_m \cos(kx - \omega t)]^2 + \frac{1}{2\mu_0} [B_m \cos(kx - \omega t)]^2.$$

Densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética (continuação)

Simplificando a expressão anterior obteremos

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E_m^2 + \frac{1}{\mu_0} B_m^2 \right) \cos^2(kx - \omega t).$$

Contudo, sabemos a partir das equações de Maxwell que $B_m = \frac{E_m}{c}$, substituindo

$$u = \frac{E_m^2}{2} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(kx - \omega t).$$

Pelas equações de Maxwell também sabemos que $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$, substituímos encontramos

$$u = \frac{E_m^2}{2} \left(\frac{1}{\mu_0 c^2} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(kx - \omega t),$$

$$u = \frac{E_m^2}{2} \left(\frac{2}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(kx - \omega t),$$

$$u(x, t) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(kx - \omega t).$$

Vetor de Poyting

Podemos perceber que

$$\left(\frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}} \right) = \left(\frac{\text{energia}}{\text{volume}} \times \text{velocidade} \right).$$

Portanto, no caso de uma onda monocromática se propagando no vácuo, podemos dizer que

$$S = u \times c,$$

ou seja, o vetor de Poyting é justamente a densidade de energia multiplicado pela

velocidade da luz. Substituindo $u(x, t)$ teremos

$$S = \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t),$$

Sabendo que $E(x, t) = E_m \cos(kx - \omega t)$, representamos S na forma compacta

$$S(x, t) = \frac{1}{c\mu_0} E(x, t)^2.$$

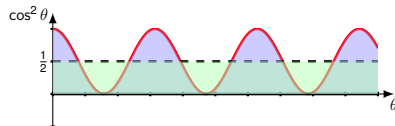
Valor médio do vetor de Poynting

Entretando, do ponto de vista prático é mais conveniente obter informações a respeito do valor médio de uma grandeza ao invés de seu valor instantâneo. Dessa maneira definimos a intensidade I como

$$I = \langle S(x, t) \rangle = \left\langle \frac{1}{c\mu_0} E(x, t)^2 \right\rangle.$$

Sabendo que $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$ teremos

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2.$$



Valor médio de $\cos^2 \theta$ vezes θ (área verde). Área de $\cos^2 \theta$ (área azul).

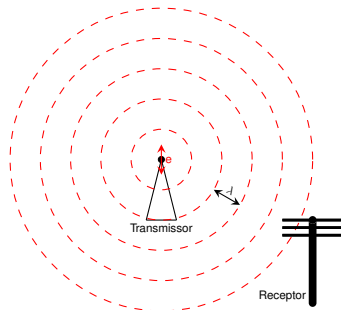
Relação entre intensidade e potência

Pela definição de intensidade temos

$$\text{Intensidade} = \left(\frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}} \right).$$

Porém, sabemos que potência = energia por tempo, o que nos fornece

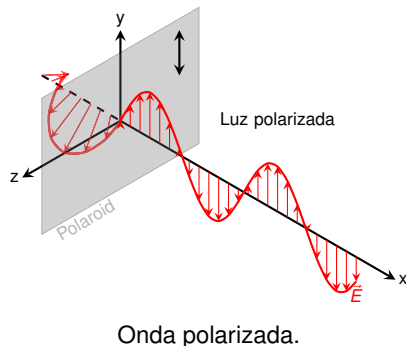
$$\text{Intensidade} = \left(\frac{\text{potência}}{\text{área}} \right).$$



Intensidade da onda de rádio (esféricas) diminuindo com o quadrado da distância.

Polarização da Luz

Diferentemente de ondas transmitidas por uma antena de rádio ou TV, as ondas emitidas pelo sol tem a direção do campo elétrico mudando aleatoriamente ao longo do tempo. Uma maneira de filtrar a luz do sol é a utilização de um filtro polarizador, que permite passar somente as ondas cuja direção do campo elétrico é paralelo a direção de orientação dos átomos que compõem o material. Demais campos elétricos são absorvidos devido a polarização dos elétrons no material.



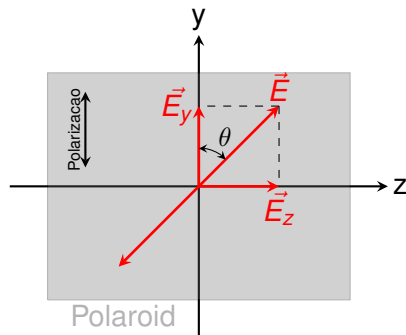
Polarização da Luz

Sabemos que a intensidade da onda depende do quadrado do campo elétrico E . Podemos decompor E em suas componentes horizontal e vertical. Sabendo que somente a componente \vec{E}_y é atravessado temos

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_y^2 = \overbrace{\frac{1}{2c\mu_0} E_m^2}^{I_0} \cos^2 \theta,$$

$I = I_0 \cos^2 \theta.$

onde I_0 é a intensidade da onda incidente.



Polarização da luz à partir do vetor campo elétrico \vec{E} .

Polarização da luz incidente não polarizada

Se onda for não polarizada, ou seja, teremos frentes de onda cuja direção do campo elétrico assume todos os valores entre $\theta = 0^\circ$ a $\theta = 360^\circ$. Sabendo que $E_m^2 = E_{m,z}^2 + E_{m,y}^2$ teremos para a onda não polarizada

$$I_0 = \sum \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2,$$

$$I_0 = \sum \frac{1}{2c\mu_0} E_{m,z}^2 + \sum \frac{1}{2c\mu_0} E_{m,y}^2.$$

A soma das componentes em y é a mesma de z, portanto

$$I_0 \rightarrow 2 \underbrace{\left(\frac{1}{2c\mu_0} E_{m,y}^2 \right)}_I.$$

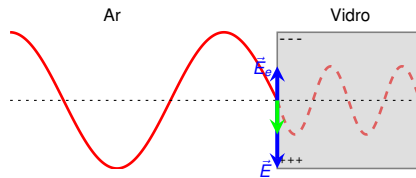
Definindo I a intensidade da onda polarizada teremos

$$I = \frac{1}{2} I_0.$$

Propagação da onda na matéria

A onda eletromagnética ao atravessar um meio dielétrico, induz um movimento de elétrons do material, o qual faz surgir um campo elétrico com sentido contrário ao campo elétrico da onda. Como resultado, a onda transmitida no material terá um campo elétrico efetivo \vec{E}_κ , devido a diferença do campo \vec{E} da onda no ar com o campo elétrico produzido pela polarização das cargas \vec{E}_p ,

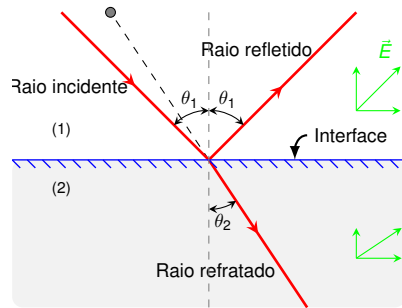
$$E_\kappa = E - E_p.$$



Onda atravessando um meio material.

Desvio da direção de propagação da onda ao atravessar a matéria

Considere um raio de luz incidindo em um material dielétrico com a inclinação de θ_1 graus em relação ao eixo normal a superfície. Podemos decompor o vetor campo elétrico em suas componentes horizontal e vertical. Ao atravessar o meio refrigente, a componente vertical de \vec{E} causa uma polarização da matéria, diminuindo assim a amplitude vertical do campo elétrico. Entretanto, horizontalmente o campo elétrico não se altera, pois não há polarização nessa direção. Isso por sua vez altera a direção do campo elétrico \vec{E} , alterando assim a direção de propagação da onda.



Reflexão e refração dos raios de luz.

Redução da velocidade da onda ao atravessar a matéria

Considere uma onda atravessando um meio dielétrico neutro e na ausência de corrente elétrica, nesse caso as equações de Maxwell no vácuo ainda são válidas, com a pequena modificação, que o campo elétrico da onda deverá ser reduzido por uma quantidade κ , onde κ é a constante dielétrica do meio, ou seja,

$$\vec{E}_\kappa = \frac{\vec{E}}{\kappa}, \quad (\kappa > 1).$$

Assim, a partir da lei de Ampère-Maxwell

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\kappa E_\kappa)}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial E_\kappa}{\partial t} &= -\frac{1}{\kappa \epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}. \end{aligned}$$

Da lei de Faraday-Lenz temos a equação da luz no vácuo, onde a variação no tempo de \vec{B} induz um campo \vec{E} circular,

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Redução da velocidade da onda ao atravessar a matéria (continuação)

Considerando que os campos elétrico e magnético admitem soluções do tipo

$A(x, t) = A_m \cos(kx - \omega t)$ teremos

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial x} = -E_{\kappa m} k \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B_m \omega \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial t} = E_{\kappa m} \omega \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -B_m k \sin(kx - \omega t)$$

Substituindo nas equações anteriores teremos

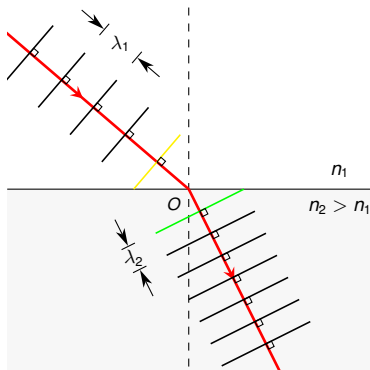
$$\frac{E_{\kappa m}}{B_m} = \frac{\omega}{k} = v,$$

$$\frac{E_{\kappa m}}{B_m} = \frac{k}{\omega \kappa \epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{v \kappa \epsilon_0 \mu_0}.$$

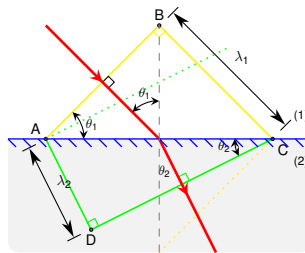
Sabendo que $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ teremos

$$v = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}.$$

Variação do comprimento de onda com a refração



λ diminui quando a luz é refratada.



Frentes de onda na interface.

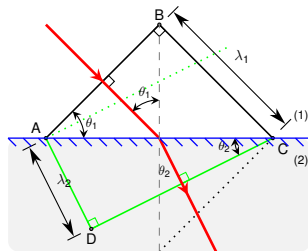
Aplicando a trigonometria para definir a relação entre θ e λ

Na figura ao lado vemos que o triângulo ABC é retângulo, onde o ângulo do vértice BÂC é igual ao ângulo de incidência. Usando a lei dos senos encontramos

$$\overline{BC} = \lambda_1 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_1).$$

Da mesma maneira, o triângulo ADC também é retângulo, onde

$$\overline{AD} = \lambda_2 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_2).$$



Frentes de onda na interface.

Lei de Snell

Temos assim

$$\lambda_1 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_1),$$

$$\lambda_2 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_2).$$

Dividindo os dois lados da equação temos

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}.$$

Sabemos que na onda a relação entre comprimento de onda e velocidade

é dado por $v = \lambda f$, onde f é a frequência que não se altera quando a onda atravessa de um meio ao outro, portanto

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}.$$

Se o meio 1 for o vácuo ou ar temos $v_1 = c$, ou seja,

$$\boxed{\frac{c}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{sen}(\theta_{ar})}{\text{sen}(\theta_2)}}.$$

Índice de refração

No caso da luz atravessando do ar para um meio mais refrigente temos a relação

$$\frac{c}{v} = \frac{\text{sen}(\theta_{ar})}{\text{sen}(\theta)}.$$

Se definirmos $n = \sqrt{\kappa}$ teremos $n = c/v$ como a fração da velocidade da luz que diminui ao atravessar o meio, assim

$$n = \frac{\text{sen}(\theta_{ar})}{\text{sen}(\theta_2)}.$$

Para uma onda que atravessa dois meios

com índices de refração diferentes temos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)},$$
$$\left(\frac{c}{v_2}\right) = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)},$$
$$\left(\frac{c}{v_1}\right) = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)},$$

$\times \frac{c}{c}$

Lei de Snell

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}, \quad (n > 1).$$

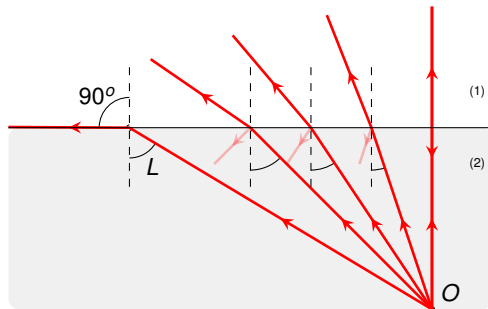
Reflexão total

Aplicando a Lei de Snell temos

$$n_2 \operatorname{sen}(L) = n_1 \overbrace{\operatorname{sen}(90^\circ)}^1,$$
$$\operatorname{sen}(L) = \frac{n_1}{n_2}.$$

Ângulo de reflexão total da luz

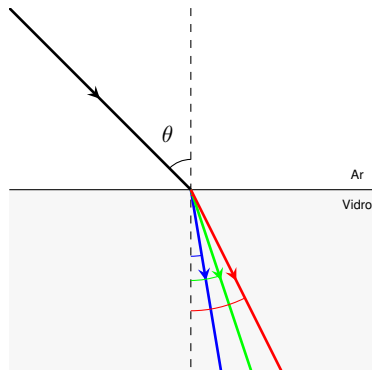
$$L = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \right), \quad (n_2 > n_1).$$



Reflexão total da luz.

Relação entre o índice de refração e a cor da luz

- ✓ Cada cor no espectro de luz visível é caracterizada por uma frequência em um comprimento de onda específico;
- ✓ A luz branca é a combinação de várias cores com comprimentos de onda diferentes;
- ✓ Cada cor terá velocidades diferentes após a refração, o que faz com que elas também tenham ângulos de refração diferentes.






Dispersão dos raios de luz.

Observações¹

Esta apresentação está disponível para download no endereço
<https://flavianowilliams.github.io/education>

¹Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.4, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.4, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)