

# Lei de Gauss

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

14 de março de 2023

# Sumário

- 1 **Fluxo elétrico**
- 2 **Lei de Gauss**
- 3 **Aplicações da Lei de Gauss**
- 4 **Apêndice**

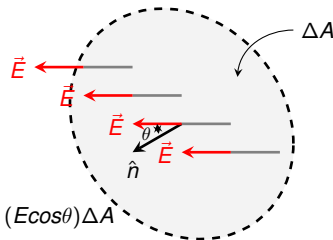
## Definição de fluxo elétrico

Definimos fluxo do campo elétrico  $\vec{E}$  que atravessa uma área  $\Delta A$  como a somatória das linhas de campo elétrico que atravessam perpendicularmente essa área,

$$\Delta\Phi_E = (E\cos\theta)\Delta A.$$

### Fluxo do campo Elétrico

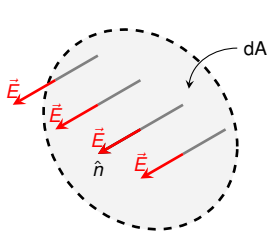
$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \hat{n}\Delta A.$$



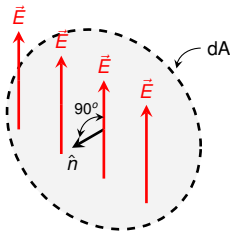
$$\Delta\Phi_E = (E\cos\theta)\Delta A$$

$\Delta\Phi_E$ : E por area perpendicular a espira.

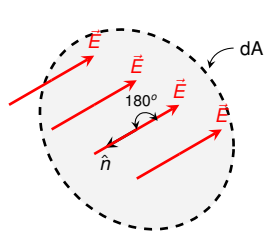
## Fluxo e a orientação do campo elétrico em relação a área $dA$



Fluxo elétrico máximo.



Fluxo elétrico zero.



Fluxo elétrico mínimo.

### Corollary

*Se o sentido do campo elétrico é para fora da superfície, o fluxo é positivo. Se for para dentro, o fluxo é negativo e se o campo elétrico é paralelo, o fluxo é zero.*

## Fluxo total em uma superfície fechada

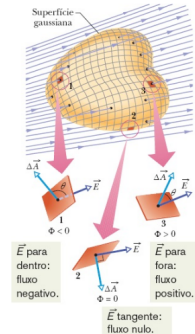
O fluxo total do campo elétrico que atravessa uma superfície fechada pode ser dado pela soma dos fluxos que atravessam cada parte dessa superfície,

$$\Delta\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A.$$

No limite  $\Delta A \rightarrow dA$  a somatória se transforma em uma integral de superfície.

### Fluxo do campo Elétrico

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA.$$



Linhas de campo elétrico atravessando uma superfície hipotética e fechada [1].

## Fluxo elétrico em uma superfície fechada

De acordo com a Lei de Gauss, o fluxo total do campo elétrico que atravessa uma superfície fechada é proporcional a quantidade de carga no interior dessa superfície,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA \propto q.$$

Escolhemos convenientemente a constante de

proporcionalidade como  $1/\epsilon_0$ , onde  $\epsilon_0 = 8,854\,187\,817\,6 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$ .

### Lei de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

### Corollary

*Definimos superfície gaussiana como uma superfície hipotética e fechada por onde é possível calcular o fluxo total do campo elétrico que atravessa essa superfície.*

## Relação entre a Lei de Gauss e a Lei de Coulomb.

Considere uma superfície gaussiana na forma esférica que engloba uma carga puntiforme  $q$ , aplicando a Lei de Gauss temos

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{r} dA = \varepsilon_0 \oint E dA = q,$$

O campo elétrico é igual em qualquer posição na superfície da esfera, assim podemos tratá-lo como constante ao longo da superfície,

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q.$$

A área total da superfície esférica é dado por  $4\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio da esfera, portanto

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q,$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

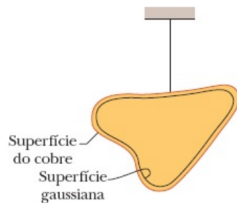
Podemos concluir que  $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ .

## Condutor carregado

No caso de um condutor eletrizado, as cargas em excesso estão livres para se moverem e irão se afastar mutuamente se concentrando na superfície, o que implica no interior que

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0.$$

Na condição de equilíbrio eletrostático teremos  $\vec{E} \parallel \hat{n}$ , e para satisfazer a equação acima devemos ter  $E = 0$ .



Pedaço de metal [1].

### Corollary

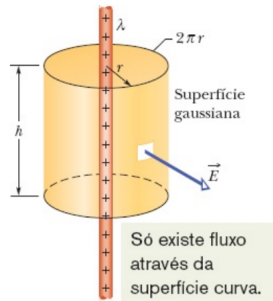
*O campo elétrico de um condutor em equilíbrio eletrostático é zero no seu interior e na superfície é perpendicular a essa superfície.*



## Simetria cilíndrica: Fio retilíneo

Considere uma barra cilíndrica contendo uma distribuição de cargas  $\lambda$ . Devido a simetria cilíndrica da distribuição de cargas, é conveniente considerarmos também uma superfície gaussiana com um formato também cilíndrico, pois assim poderemos determinar com uma certa simplicidade o fluxo nas bases e no corpo. O fluxo do campo elétrico é calculado somando o fluxo das bases e da lateral,

$$\Phi_E = \Phi_{\text{Base}} + \Phi_{\text{Topo}} + \Phi_{\text{Lateral}}.$$



Superfície gaussiana envolvendo um fio retilíneo carregado eletricamente [1].

## Simetria cilíndrica: Fio retilíneo (continuação)

Mas, devido a simetria das cargas a componente axial resultante das contribuições do campo elétrico de cada carga elétrica elementar é zero, restando apenas a componente radial. Assim temos para cada contribuição da componente radial

$$\Phi_{\text{bases}} = \int_{A_{\text{Base}}} E \cos(90^\circ) dA,$$

$$\Phi_{\text{lateral}} = \int_{A_{\text{Lateral}}} E \cos(0^\circ) dA.$$

Portanto, o fluxo nas bases será zero enquanto que na lateral será

$$E (2\pi rh) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

A carga  $q$  dentro da superfície gaussiana é dada por  $q = \lambda h$ , portanto

$$E (2\pi rh) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0},$$

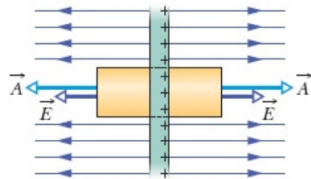
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

## Simetria plana: Placa homogênea

Consideramos uma placa infinita, isolante, com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . Devido a distribuição uniforme de cargas é conveniente adotar uma simetria cilíndrica como mostra a figura ao lado. As componentes do campo elétrico permite que o fluxo da lateral seja zero enquanto que o fluxo nas bases serão máximos, portanto

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q,$$
$$\varepsilon_0 (E\mathcal{A} + E\mathcal{A}) = \sigma\mathcal{A},$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$



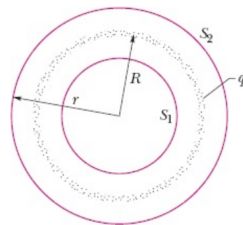
Vista lateral de uma pequena parte de uma placa de grande extensão com uma carga positiva [1].

## Simetria esférica: Casca esférica

Considere uma casca esférica isolante de raio  $R$  carregada uniformemente com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . Para calcular o campo elétrico em um ponto a uma distância  $r$  do centro da casca, usamos uma superfície gaussiana também esférica mas de raio  $r$ . Aplicando a Lei de Gauss temos

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q.$$

Sabendo que o campo elétrico em uma superfície é perpendicular a ela, podemos dizer que em cada elemento de área temos  $\vec{E} \cdot \hat{n} dA = E dA$ .



Seção reta de uma casca esférica fina, uniformemente carregada, com uma carga  $q$  [1].

## Simetria esférica: Casca esférica (continuação)

Substituindo na Lei de Gauss resulta em

$$\varepsilon_0 \oint E dA = q.$$

Podemos também supor que o campo elétrico em qualquer ponto da superfície é o mesmo considerando que a carga está igualmente distribuída, portanto

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 E \oint dA &= q, \\ \varepsilon_0 EA &= q,\end{aligned}$$

onde a área superficial da superfície gaussiana é dada por  $A = 4\pi r^2$ , substituindo

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

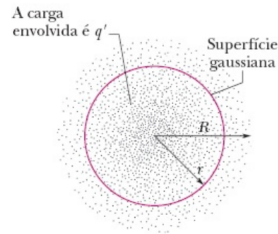
No caso  $r < R$ , temos que não haverá cargas no interior da superfície gaussiana, portanto o fluxo deverá ser zero, o que pode ser conseguido se  $E = 0$ .

## Simetria esférica: Esfera maciça

Considere uma esfera maciça isolante de raio  $R$  carregada uniformemente com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ . Podemos considerar que a uma distância  $r$  do centro da esfera teremos diversas cascas esféricas com uma fina espessura sobrepostas, de modo que a carga total  $q'$  inserida na superfície gaussiana é a soma das cargas parciais de cada casca esférica, portanto

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q',$$

onde  $q' = V\rho$  e  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$  representa o volume de parte da esfera inserida na superfície gaussiana.



Superfície gaussiana, com  $r < R$ , envolvendo uma parcela  $q'$  da carga total  $q$  da esfera de raio  $R$  [1].

## Simetria esférica: Esfera maciça (continuação)

Substituímos na Lei de Gauss e sabendo que a área da gaussiana é igual a  $4\pi r^2$ ,

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = \frac{4\pi \rho r^3}{3},$$
$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$

Porém, torna-se conveniente representar a solução em termos da carga total  $q$ , onde  $q = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$ ,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, \quad (r < R).$$

Se  $r \geq R$  o campo elétrico é de uma esfera com distribuição uniforme de carga.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (r \geq R).$$

Fora da esfera, o campo elétrico torna-se igual a de uma carga puntiforme.

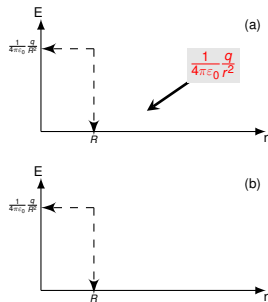
## Simetria esférica: Esfera maciça (continuação)

Podemos resumir a solução encontrada para a esfera maciça isolante na forma abaixo,

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & (r < R), \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & (r \geq R). \end{cases}$$

No caso da esfera condutora temos que a carga total  $q$  se concentra na superfície, ou seja,

$$E(r) = \begin{cases} 0, & (r < R), \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & (r \geq R). \end{cases}$$



Campo elétrico de uma esfera isolante (a) e condutora (b).



## Transformar um número em notação científica

### Corollary

*Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.*

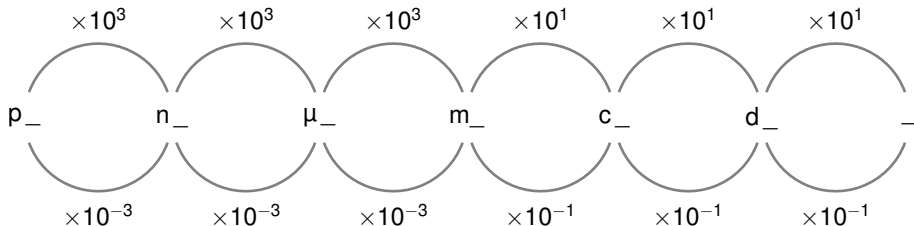
*Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.*

*Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

### Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6,59 \times 10^{15}$$

## Conversão de unidades em uma dimensão

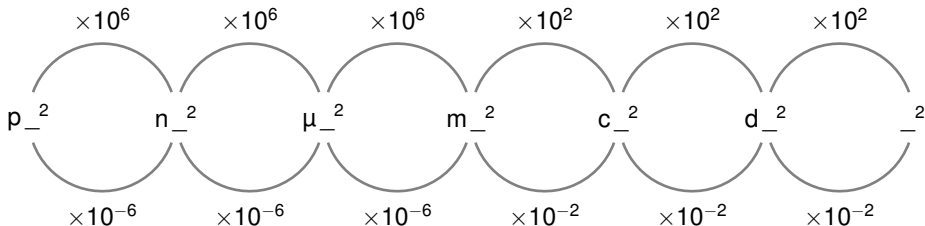


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1) \times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ g} = 2,5 \times 10^{(1) \times 3} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^3 \text{ mg}$$

$$10 \mu\text{C} = 10 \times 10^{[(-3) \times 1 + (-1) \times 3]} \text{ C} \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

## Conversão de unidades em duas dimensões

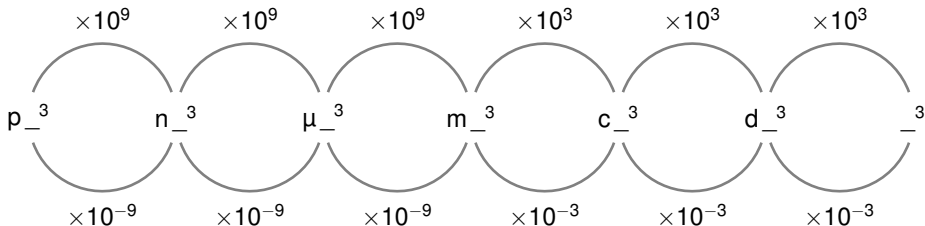


$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2) \times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2) \times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$10 \mu\text{m}^2 = 10 \times 10^{[(-6) \times 1 + (-2) \times 3]} \text{ m}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-12} \text{ m}^2$$

## Conversão de unidades em três dimensões



$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3) \times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^9 \text{ mm}^3$$




$$10 \text{ } \mu\text{m}^3 = 10 \times 10^{[(-9) \times 1 + (-3) \times 3]} \text{ m}^3 \rightarrow 10 \times 10^{-18} \text{ m}^3$$

## Alfabeto grego

Alfa	$A$	$\alpha$
Beta	$B$	$\beta$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$
Delta	$\Delta$	$\delta$
Epsílon	$E$	$\epsilon, \varepsilon$
Zeta	$Z$	$\zeta$
Eta	$H$	$\eta$
Teta	$\Theta$	$\theta$
Iota	$I$	$\iota$
Capa	$K$	$\kappa$
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$
Mi	$M$	$\mu$

Ni	$N$	$\nu$
Csi	$\Xi$	$\xi$
ômicon	$O$	$o$
Pi	$\Pi$	$\pi$
Rô	$P$	$\rho$
Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Tau	$T$	$\tau$
Ípsilon	$\Upsilon$	$\upsilon$
Fi	$\Phi$	$\phi, \varphi$
Qui	$X$	$\chi$
Psi	$\Psi$	$\psi$
Ômega	$\Omega$	$\omega$

## Referências e observações<sup>1</sup>

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup> Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.