Equações de Maxwell

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná Campus Irati

20 de março de 2023

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Sumário

- As equações de Maxwell
- Ondas eletromagnéticas
- Aplicações
- Apêndice

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Equações de Maxwell

As equações de Maxwell

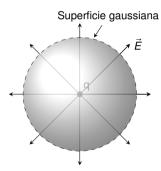
As principais equações do eletromagnetismo são

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$
 (Lei de Gauss)
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0,$$
 (Lei de Gauss do magnetismo)
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$
 (Lei de Faraday)
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i,$$
 (Lei de Ampère)

Prof. Flaviano W. Fernandes

Lei de Gauss

As equações de Maxwell



Fluxo do campo elétrico \vec{E} devido a carga q.

Lei de Gauss

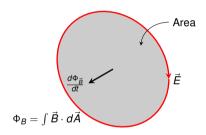
O fluxo total que atravessa uma superfície fechada é proporcional a carga total no interior dessa superfície.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Lei de Faraday-Lenz

As equações de Maxwell



 Φ_B : B por area perpendicular a espira

Fluxo do campo magnético \vec{B} .

Lei de Faradav

A variação do fluxo do campo magnético que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo elétrico induzido ao redor dessa espira,

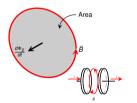
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Simetria entre campo elétrico e magnético

Simetria dos fenômenos elétricos e magnéticos

Maxwell, usando a idéia de simetria, sugeriu que assim como a variação de um campo magnético no espaço pode induzir um campo elétrico, a variação do campo elétrico também pode induzir um campo magnético.



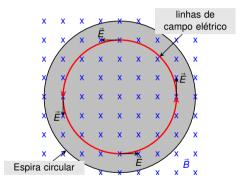
Variação do fluxo elétrico $\frac{d\Phi_E}{dt}$.

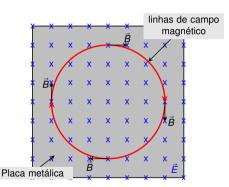
Lei de Maxwell

A variação do fluxo do campo elétrico que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo magnético induzido ao redor dessa espira.

Prof. Flaviano W. Fernandes

Campo magnético induzido devido a variação do campo elétrico





Linhas de campo elétrico \vec{E} circular devido a va- Linhas de campo magnético \vec{B} circular devido a riação do campo magnético \vec{B} . variação do campo elétrico \vec{E} .

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

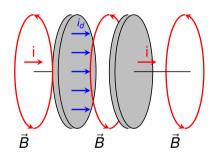
00000000

Corrente de deslocamento

Analisando a lei de Ampere, podemos perceber que o lado direito da equação obrigatoriamente deve possuir unidades de $\mu_0 i$. Na verdade, em regiões onde não há corrente elétrica, a variação do fluxo deve ser multiplicado por uma constante, de modo a satisfazer a seguinte equação

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 i_d.$$

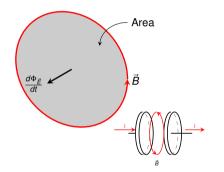
 i_d é chamado corrente de deslocamento e o campo magnético \vec{B} induzido por ele é idêntico ao campo criado pela corrente real i.



Campo magnético circular \vec{B} devido a corrente de deslocamento i_d .

Lei de Ampère-Maxwell

As equações de Maxwell



Variação do fluxo elétrico $\frac{d\Phi_E}{dt}$ induzindo um campo magnético circular \vec{B} .

Aplicando a idéia de simetria, podemos concluir que a seguinte relação deve acontecer

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \ \alpha \ \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

No entanto, para estar de acordo com a lei de Ampere, o lado direito deve ter unidades de $\mu_0 i$, chegando assim na lei de Maxwell,

$$\oint ec{B} \cdot dec{s} = arepsilon_0 \mu_0 rac{d\Phi_E}{dt}.$$

Equações de Maxwell

As equações de Maxwell

As equações de Maxwell são formadas pela combinação das quatro equações do eletromagnetismo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad \text{(Lei de Gauss)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \qquad \text{(Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \text{(Lei de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \text{(Lei de Ampère-Maxwell)}$$

Prof. Flaviano W. Fernandes

Equações de Maxwell no vácuo

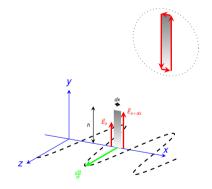
No vácuo temos ausência de cargas elétricas, o que resulta q=0 e i=0,

$$egin{aligned} \oint ec{E} \cdot dec{A} &= 0, \ &\oint ec{B} \cdot dec{A} &= 0, \ &\oint ec{E} \cdot dec{s} &= -rac{d\Phi_B}{dt}, \ &\oint ec{B} \cdot dec{s} &= \mu_0 arepsilon_0 rac{d\Phi_E}{dt} \end{aligned}$$

Prof. Flaviano W. Fernandes

As equações de Maxwell

Lei de Faraday-Lenz na ausência de matéria



Campo elétrico na direção do eixo v.

Supondo um campo magnético na direção z cuja amplitude varia no tempo. Pela Lei de Faradav

$$\frac{d\Phi_{B}}{dt} = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

$$\frac{d\Phi_{B}}{dt} = -\begin{bmatrix} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 & \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ Edx + Edx - hE_{x} + hE_{x+dx} \\ h(E_{x} + dE) \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -hdE$$

As equações de Maxwell

Equação da onda à partir da lei de Faraday-Lenz

O fluxo do campo magnético é dado por Usando a regra de diferencial

$$\Phi_B = (B)(\underline{h}dx),$$
 $\frac{d}{dt}\Phi_B = hdx\frac{dB}{dt}$

Sabendo que $\frac{d\Phi_B}{dt} = -hdE$ temos

$$hdE = -hdx \frac{dB}{dt},$$
 $dE = -\left[\frac{dB}{dt}\right] dx.$

Aplicações

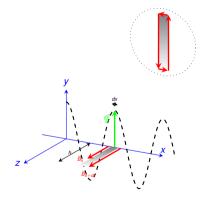
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

A única função para E(x, t) e B(x, t) que satisfaz a equação acima seria

$$E(x,t) = E_m cos(kx - \omega t),$$

$$B(x,t) = B_m cos(kx - \omega t)$$

Lei de Ampère-Maxwell na ausência de matéria



Campo magnético na direção z.

Sabemos que o campo elétrico varia no tempo ao longo da direção y. Pela Lei de Àmpere-Maxwell

$$\begin{split} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \begin{bmatrix} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 & \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \\ Bdx + Bdx + hB_x - hB_{x+dx} \\ h(B_x + dB) \end{bmatrix}, \\ \frac{d\Phi_E}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} h dB. \end{split}$$

Prof. Flaviano W. Fernandes

As equações de Maxwell

Equação da onda à partir da lei de Ampère-Maxwell

O fluxo do campo elétrico é dado por

$$\Phi_E = (E)(\underline{hdx}),$$
 $\frac{d\Phi_E}{dt} = hdx\frac{dE}{dt}.$

Sabendo que $\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{1}{arepsilon_0\mu_0}hdB$ temos

$$rac{1}{arepsilon_0\mu_0} h dB = -h \left[rac{dE}{dt}
ight] dx,$$

Usando a regra de diferencial

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Corollary

$$\begin{split} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \end{split}$$

Amplitude dos campos elétrico e magnético

Supondo uma solução que satisfaz a equação anterior. • Retornar ao slide anterior

$$E(x,t) = E_m cos(kx - \omega t),$$

$$B(x,t) = B_m cos(kx - \omega t)$$

Usando a equação $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ e derivando

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -E_{m}ksen(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = B_{m}\omega sen(kx - \omega t)$$

O que resulta

$$B_m\omega=E_m k$$

Aplicações

$$\max \tfrac{\omega}{k} = c,$$

$$B_m = \frac{E_m}{c}$$

Corollary

A intensidade do campo elétrico é muito maior que a do campo magnético.

Velocidade da onda eletromagnética

Usando a equação $\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}$ e derivando

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_m \omega sen(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} = -B_m k sen(kx - \omega t)$$

O que resulta

$$E_{m}\omega = rac{1}{arepsilon_{0}\mu_{0}}kB_{m}, \ rac{E_{m}}{B_{m}} = rac{1}{arepsilon_{0}\mu_{0}}rac{k}{\omega}$$

mas $rac{E_m}{B_m}=c$ e numa onda $c=rac{\omega}{k}$, teremos

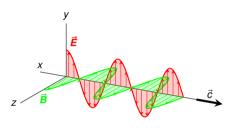
$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Corollary

Os campos elétrico e magnético propagam no vácuo a uma velocidade c.

Onda eletromagnética

As equações de Maxwell



Representação de uma onda eletromagnética.

Função da onda eletromagnética

$$\vec{E}(x,t) = E_m cos(kx - \omega t)\hat{y}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_m \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

Corollary

As equações de Maxwell nos fornece com solução duas ondas transversais que se propagam no espaço na mesma direção e com a mesma velocidade c.

A luz como onda eletromagnética

Maxwell percebeu que a velocidade c obtida à partir do eletromagnetismo é exatamente idêntica a velocidade da luz, já bem conhecida ná época através de diversas técnicas de medição.

"A velocidade das ondas transversais em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos electromagnéticos dos Srs. Kohrausch e Weber, concorda tão exactamente com a velocidade da luz, calculada pelos experimentos óticos do Sr. Fizeau, que é difícil evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos eléctricos e magnéticos."

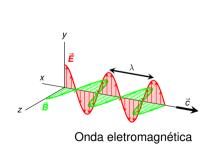
Corollary

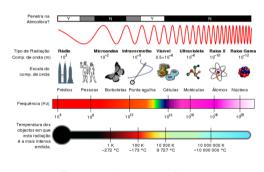
A luz é uma onda eletromagnética capaz de se propagar no vácuo com a velocidade de aproximadamente $3 \times 10^8 \ m/s$.

Prof. Flaviano W. Fernandes

Espectro eletromagnético

Identificamos uma onda eletromagnética à partir da sua assinatura energética (energia transportada por área e tempo), no qual depende da sua frequência.

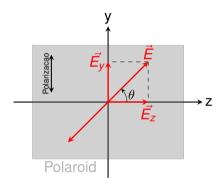




Espectro eletromagnético

Prof. Flaviano W. Fernandes

Polarização da Luz



Polarização da luz à partir do vetor campo elétrico \vec{E} .

A componente polarizada na direção y é dado por

$$E_{y} = Ecos(\theta)$$

Sabendo que a intensidade da Luz é dado por $I \approx E_m^2$,

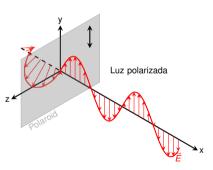
$$I_{\mathrm{pol.}} = I_{\mathrm{pol.}} cos^{2}\left(\theta\right)$$

mas $cos^{2}(\theta) \leq 1$, portanto

Corollary

Intensidade da onda polarizada é sempre menor ou igual a intensidade da onda não-polarizada.

Polarização da Luz



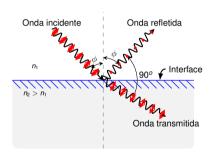
Onda polarizada.



Lente polarizada.

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Polarização da Luz por reflexão



Representação de uma onda refletida.

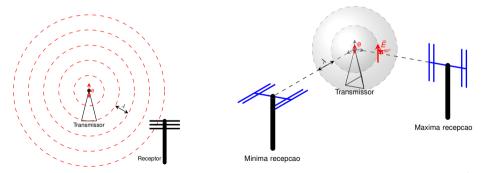


Polarização da luz vista por uma lente polarizada.

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Ondas de rádio

Pelas equações de Maxwell, uma carga oscilando no espaço gera um pulso eletromagnético com frequência igual a frequência de oscilação.



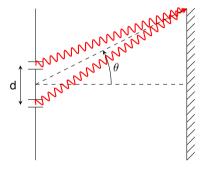
Propação da onda a partir da fonte emissora.

Recepção a partir da direção do campo \vec{E} .

Prof. Flaviano W. Fernandes

IFPR-Irati

Interferência



Interferência entre duas ondas de mesmo comprimento de onda e equidistantes a uma distância d.

Frangas de interferência

Intensidade máxima:

$$dsen\theta = m\lambda, m = 0, 1, 2, \cdots$$

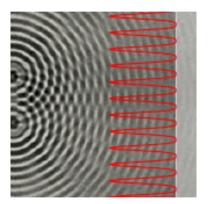
Intensidade mínima:

$$dsen\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

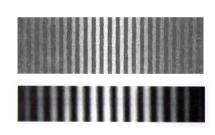
 Ondas eletromagnéticas
 Apêndo

 00000000
 0000000€0

Franjas de interferência



Interferência entre ondas na água



Franjas de interferência

Aplicações de interferência da Luz



Borboleta Morpho



00000000

Vista inferior

Prof. Flaviano W. Fernandes IFPR-Irati

Observações¹

As equações de Maxwell

Esta apresentação está disponível para download no endereço https://flavianowilliams.github.io/education

¹Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10, ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)
- https://pt.m.wikipedia.org/wiki/
- https://github.com/josephwright/beamer
- Jacques Crémer, A very minimal introduction to TikZ*, Toulouse School of Economics (2011)