Lei de Gauss

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

23 de Fevereiro de 2021

Sumário

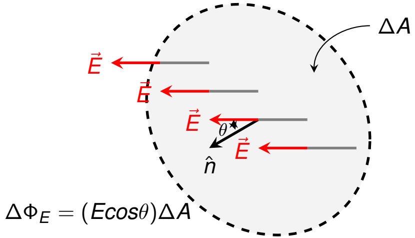
Definição de fluxo elétrico

Definimos fluxo do campo elétrico $\vec{E}$ que atravessa uma área ΔA como a somatória das linhas de campo elétrico que atravessam perpendicularmente essa área,

$$\Delta\Phi_E = (E cos\theta)\Delta A.$$

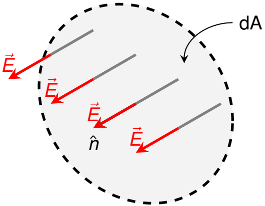
Fluxo do campo Elétrico

$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \widehat{n}\Delta A.$$

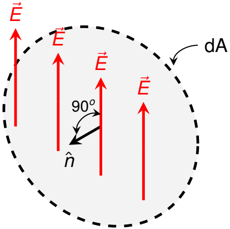


$\Delta\Phi_E$: E por area perpendicular a espira.

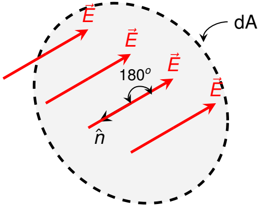
Fluxo e a orientação do campo elétrico em relação a área dA



Fluxo elétrico máximo.



Fluxo elétrico zero.



Fluxo elétrico mínimo.

Corollary

Se o sentido do campo elétrico é para fora da superfície, o fluxo é positivo. Se for para dentro, o fluxo é negativo e se o campo elétrico é paralelo, o fluxo é zero.

Fluxo total em uma superfície fechada

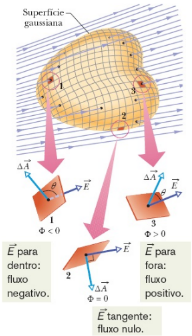
O fluxo total do campo elétrico que atravessa uma superfície fechada pode ser dado pela soma dos fluxos que atravessam cada parte dessa superfície,

$$\Delta\Phi_E = \sum \vec{E} \cdot \hat{n}\Delta A.$$

No limite $\Delta A \to dA$ a somatória se transforma em uma integral de superfície.

Fluxo do campo Elétrico

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA.$$



Linhas de campo elétrico atravessando uma superfície hipotética e fechada [1].

Fluxo elétrico em uma superfície gaussiana

De acordo com a Lei de Gauss, o fluxo total do campo elétrico que atravessa uma superfíce fechada é proporcional a quantidade de carga no interior dessa superfície,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \widehat{n} dA \,\alpha\, q.$$

Escolhemos convenientemente a constante de proporcionalidade como $1/\varepsilon_0$, onde $\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,817\,6 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\,m^2)}$.

Lei de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot \widehat{n} dA = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Corollary

Definimos superfície gaussiana como uma superfície hipotética e fechada por onde é possível calcular o fluxo total do campo elétrico que atravessa essa superfície.

Relação entre a Lei de Gauss e a Lei de Coulomb.

Considere uma superfície gaussiana na forma esférica que engloba uma carga puntiforme q, aplicando a Lei de Gauss temos

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{r} dA = \varepsilon_0 \oint E dA = q,$$

O campo elétrico é igual em qualquer posição na superfície da esfera, assim podemos tratá-lo como constante ao longo da superfície,

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q.$$

A área total da superfície esférica é dado por $4\pi r^2$, onde r é o raio da esfera, portanto

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q,$$

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.}$$

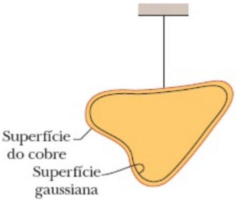
Podemos concluir que $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Condutor carregado

No caso de um condutor eletrizado, as cargas em excesso estão livres para se moverem e irão se afastar mutuamente se concentrando na superfície, o que implica no interior que

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0.$$

Na condição de equilíbrio eletrostático teremos $\vec{E} \parallel \hat{n}$, e para satisfazer a equação acima devemos ter $E = 0$.



Pedaço de metal [1].

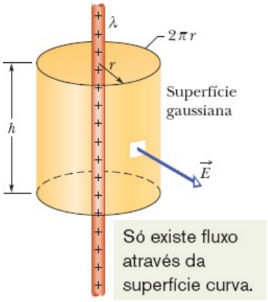
Corollary

O campo elétrico de um condutor em equilíbrio eletrostático é zero no seu interior e na superfície é perpendicular a essa superfície.

Simetria cilíndrica: Fio retilíneo

Considere uma barra cilíndrica contendo uma distribuição de cargas λ. Devido a simetria cilíndrica da distribuição de cargas, é conveniente considerarmos também uma superfície gaussiana com um formato também cilíndrico, pois assim poderemos determinar com uma certa simplicidade o fluxo nas bases e no corpo. O fluxo do campo elétrico é calculado somando o fluxo das bases e da lateral,

$$\Phi_E = \Phi_{\text{Base}} + \Phi_{\text{Topo}} + \Phi_{\text{Lateral}}.$$



Superfície gaussiana envolvendo um fio retilíneo carregado eletricamente [1].

Simetria cilíndrica: Fio retilíneo (continuação)

Mas, devido a simetria das cargas a componente axial resultante das contribuições do campo elétrico de cada carga elétrica elementar é zero, restando apenas a componente radial. Assim temos para cada contribuição da componente radial

$$\Phi_{\text{bases}} = \int_{A_{Base}} E cos(90^\circ) dA,$$

$$\Phi_{\text{lateral}} = \int_{A_{Lateral}} E cos(0^\circ) dA.$$

Portanto, o fluxo nas bases será zero enquanto que na lateral será

$$E\,(2\pi rh) = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

A carga q dentro da superfície gaussiana é dada por $q = \lambda h$, portanto

$$E\,(2\pi r\cancel{h}) = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0},$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.}$$

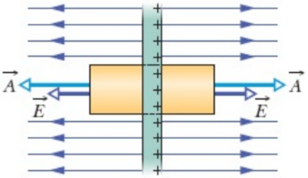
Simetria plana: Placa homogênea

Consideramos uma placa infinita, isolante, com uma densidade superficial de carga σ. Devido a distribuição uniforme de cargas é conveniente adotar uma simetria cilíndrica como mostra a figura ao lado. As componentes do campo elétrico permite que o fluxo da lateral seja zero enquanto que o fluxo nas bases serão máximos, portanto

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q,$$

$$\varepsilon_0 \left(E\cancel{A} + E\cancel{A} \right) = \sigma \cancel{A},$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.}$$



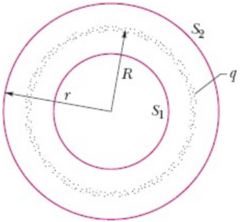
Vista lateral de uma pequena parte de uma placa de grande extensão com uma carga positiva [1].

Simetria esférica: Casca esférica

Considere uma casca esférica isolante de raio R carregada uniformemente com uma densidade superficial de carga σ. Para calcular o campo elétrico em um ponto a uma distância r do centro da casca, usamos uma superfície gaussiana também esférica mas de raio r. Aplicando a Lei de Gauss temos

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \widehat{n} dA = q.$$

Sabendo que o campo elétrico em uma superfície é perpendicular a ela, podemos dizer que em cada elemento de área temos $\vec{E} \cdot \widehat{n} dA = EdA$.



Seção reta de uma casca esférica fina, uniformemente carregada, com uma carga q [1].

Simetria esférica: Casca esférica (continuação)

Substituindo na Lei de Gauss resulta em

$$\varepsilon_0 \oint E dA = q.$$

Podemos também supor que o campo elétrico em qualquer ponto da superfície é o mesmo considerando que a carga está igualmente distribuída, portanto

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q,$$

$$\varepsilon_0 EA = q,$$

onde a área superficial da superfície gaussiana é dada por $A = 4\pi r^2$, substituindo

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q,$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.}$$

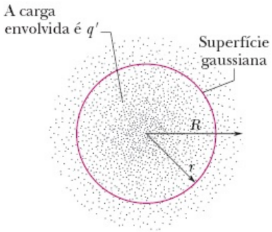
No caso $r < R$, temos que não haverá cargas no interior da superfície gaussiana, portanto o fluxo deverá ser zero, o que pode ser conseguido se $E = 0$.

Simetria esférica: Esfera maciça

Considere uma esfera maciça isolante de raio R carregada uniformemente com uma densidade volumétrica de carga ρ. Podemos considerar que a uma distância r do centro da esfera teremos diversas cascas esféricas com uma fina espessura sobrepostas, de modo que a carga total q' inserida na superfície gaussiana é a soma das cargas parciais de cada casca esférica, portanto

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q',$$

onde $q' = V\rho$ e $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ representa o volume de parte da esfera inserida na superfície gaussiana.



Superfície gaussiana, com r<R, envolvendo uma parcela q' da carga total q da esfera de raio R [1].

Simetria esférica: Esfera maciça (continuação)

Substituímos na Lei de Gauss e sabendo que a área da gaussiana é igual a $4\pi r^2$,

$$\varepsilon_0 E(\cancel{4\pi} r^{\cancel{2}}) = \frac{\cancel{4\pi}\rho r^{\cancel{3}}}{3},$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r.$$

Porém, torna-se conveniente representar a solução em termos da carga total q, onde $q = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$,

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r, \quad (r < R).}$$

Se $r \geq R$ o campo elétrico é de uma esfera com distribuição uniforme de carga.

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \quad (r \geq R).}$$

Fora da esfera, o campo elétrico torna-se igual a de uma carga puntiforme.

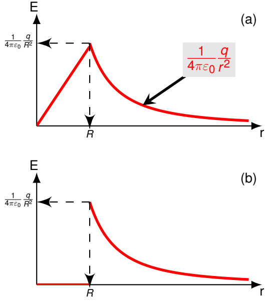
Simetria esférica: Esfera maciça (continuação)

Podemos resumir a solução encontrada para a esfera maciça isolante na forma abaixo,

$$\boxed{E(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r, & (r<R),\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & (r\geq R).\end{cases}}$$

No caso da esfera condutora temos que a carga total q se concentra na superfície, ou seja,

$$\boxed{E(r)=\begin{cases}0, & (r<R),\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & (r\geq R).\end{cases}}$$



Campo elétrico de uma esfera isolante (a) e condutora (b).

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.

Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.

Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar"com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.

Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6{,}59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathrm{p}\_ \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{n}\_ \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mu\_ \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{m}\_ \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-1}"'] & \mathrm{c}\_ \arrow[l, bend right, "\times 10^{1}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-1}"'] & \mathrm{d}\_ \arrow[l, bend right, "\times 10^{1}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-1}"'] & \_ \arrow[l, bend right, "\times 10^{1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$1\ \mathrm{mm} = 1 \times 10^{(-1)\times 2}\ \mathrm{dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2}\ \mathrm{dm}$$

$$2,5\ \mathrm{g} = 2,5 \times 10^{(1)\times 3}\ \mathrm{mg} \rightarrow 2,5 \times 10^{3}\ \mathrm{mg}$$

$$10\ \mu\mathrm{C} = 10 \times 10^{[(-3)\times 1+(-1)\times 3]}\ \mathrm{C} \rightarrow 10 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

Conversão de unidades em duas dimensões

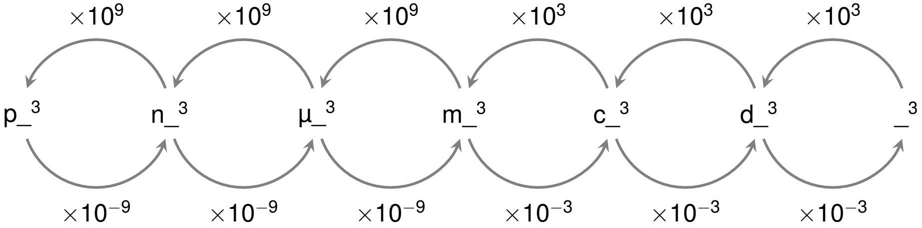
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{p_}^2 \arrow[r, bend right, "\times 10^{-6}"'] & \mathrm{n_}^2 \arrow[l, bend right, "\times 10^{6}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-6}"'] & \mu\mathrm{_}^2 \arrow[l, bend right, "\times 10^{6}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-6}"'] & \mathrm{m_}^2 \arrow[l, bend right, "\times 10^{6}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-2}"'] & \mathrm{c_}^2 \arrow[l, bend right, "\times 10^{2}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-2}"'] & \mathrm{d_}^2 \arrow[l, bend right, "\times 10^{2}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-2}"'] & \mathrm{_}^2 \arrow[l, bend right, "\times 10^{2}"']
\end{tikzcd}$$

$$1\ \mathrm{mm}^2 = 1 \times 10^{(-2)\times 2}\ \mathrm{dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4}\ \mathrm{dm}^2$$

$$2,5\ \mathrm{m}^2 = 2,5 \times 10^{(2)\times 3}\ \mathrm{mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^{6}\ \mathrm{mm}^2$$

$$10\ \mu\mathrm{m}^2 = 10 \times 10^{[(-6)\times 1+(-2)\times 3]}\ \mathrm{m}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões



$$1\ \mathrm{mm}^3 = 1 \times 10^{(-3)\times 2}\ \mathrm{dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{dm}^3$$

$$2,5\ \mathrm{m}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 3}\ \mathrm{mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{9}\ \mathrm{mm}^3$$

$$10\ \mu\mathrm{m}^3 = 10 \times 10^{[(-9)\times 1+(-3)\times 3]}\ \mathrm{m}^3 \rightarrow 10 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsílon	E	ϵ,ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ,φ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Referências e observações[1]

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.