

Hidrodinâmica

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

14 de Julho de 2022

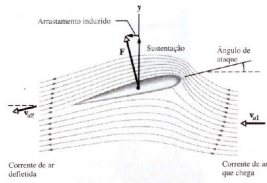
Sumário

- 1 **Introdução**
- 2 **Vazão ou fluxo**
- 3 **Lei de conservação da massa**
 - Equação da continuidade
- 4 **Equação de Bernoulli**
- 5 **Aplicações**
- 6 **Apêndice**

O que é hidrodinâmica?

Dinâmica dos fluidos

Estudo dos fluidos em movimento



Sustentação da aeronave devido ao empuxo.



Chama de uma vela.



Escoamento laminar.

Viscosidade e escoamento

Escoamento

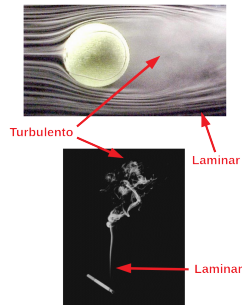
Do ponto de vista da dificuldade de escoamento do fluido, podemos citar os escoamentos

Laminar: A velocidade das partículas em cada ponto não muda com o tempo.

Turbulento: A velocidade das partículas em cada ponto varia com o tempo.

Viscosidade

Dificuldade de escoamento do fluido



Exemplos de escoamentos laminar e turbulento.

Definição de vazão ou fluxo

Fluxo

Volume de fluido que atravessa uma seção transversal do tubo de corrente por unidade de tempo.

$$Z = \frac{\text{Volume}}{\Delta t}.$$

Corollary

Pela definição de fluxo, percebe-se que a sua unidade no SI é metro cúbico por segundo (m^3/s).



Vazão de um fluido que sai da abertura de um cano e enche uma piscina.

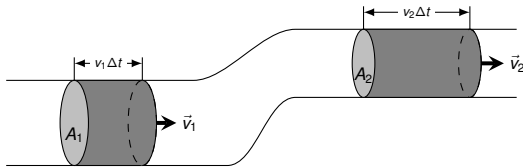
Equação da continuidade baseada na Lei da conservação da matéria

Supondo uma quantidade de fluido que percorre uma distância S_1 de área A_1 no intervalo de tempo Δt , o volume ocupado por esse fluido é

$$V = \Delta S_1 A_1.$$

Mas sabendo que $\Delta S_1 = v_1 \Delta t$, onde v_1 é a velocidade das moléculas do fluido que percorre esse espaço, temos

$$V = v_1 A_1 \Delta t.$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluxo que atravessa duas seções transversais.

Equação da continuidade como Lei da conservação da matéria (continuação)

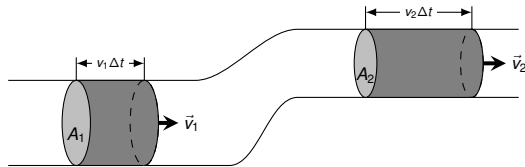
O mesmo raciocínio vale se ele atravessar a área A_2 no mesmo intervalo de tempo Δt ,

$$V = v_2 A_2 \Delta t.$$

Supondo um fluido incompressível a massa é conservada e o volume se mantém. Sabendo que $V = Z \Delta t$ temos

$$\cancel{Z \Delta t} = v_1 \cancel{A_1 \Delta t} = v_2 \cancel{A_2 \Delta t},$$

$$\boxed{Z = v_1 A_1 = v_2 A_2.}$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluido que atravessa um volume V no tempo Δt .

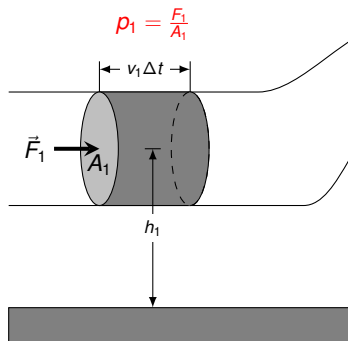
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Supondo um fluido de volume V e massa m que atravessa a região 1 no intervalo de tempo Δt . O trabalho necessário para deslocá-lo a uma distância s_1 é dado por

$$\tau_1 = \overbrace{F_1}^{p_1 A_1} \overbrace{v_1 \Delta t}^{s_1},$$

$$\tau_1 = p_1 \underbrace{A_1 s_1}_V.$$

$$\tau_1 = p_1 V.$$



Fluxo que atravessa a região 1

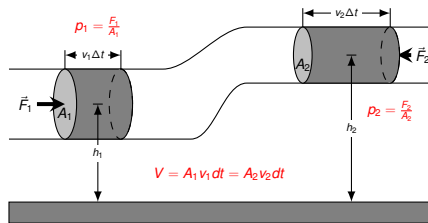
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

O fluido à direita empurra o restante no sentido contrário impedindo o seu deslocamento, isso produz um trabalho negativo, ou seja,

$$\tau_2 = - \overbrace{F_2}^{p_2 A_2} \overbrace{v_2 \Delta t}^{s_2},$$

$$\tau_2 = -p_2 \underbrace{A_2 s_2}_V.$$

$$\tau_2 = -p_2 V.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

Corollary

A mesma quantidade de fluido irá atravessar as regiões 1 e 2 nos intervalos Δt .

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

A força da gravidade é conservativa, de modo que as energias potenciais do fluido nas regiões 1 e 2,

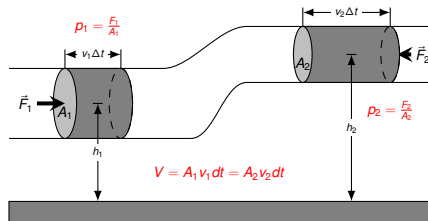
$$E_{p_1} = mgh_1$$

$$E_{p_2} = mgh_2.$$

As energias cinéticas que estão associadas ao movimento nas regiões 1 e 2 são

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Se não houver perdas de energia, a energia mecânica do fluido permanece inalterada, de modo que o trabalho total realizado deve ser igual a variação das energias cinéticas e potenciais,

$$\tau_1 + \tau_2 = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1,$$

portanto

$$\tau_1 + \tau_2 = \overbrace{\left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right)}^{\Delta E_c} +$$

$$+ \overbrace{(mgh_2 - mgh_1)}^{\Delta E_p},$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1,$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \right).$$

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Separando os termos da região 1 da região 2 temos a equação

$$\tau_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -\tau_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Mas mostramos que

$$\begin{aligned}\tau_1 &= p_1 V, \\ \tau_2 &= -p_2 V.\end{aligned}$$

Substituindo na equação acima temos

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -(-p_2 V) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

mas sabemos que $V = \frac{m}{\rho}$,

$$\begin{aligned}p_1 \cancel{m} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \cancel{m} v_1^2 + \cancel{m} g h_1 &= p_2 \cancel{m} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \cancel{m} v_2^2 + \cancel{m} g h_2, \\ \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 &= \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2.\end{aligned}$$

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Equação de Bernoulli

Para um fluido não viscoso com escoamento laminar a soma das parcelas hidrostáticas e hidrodinâmicas é a mesma em cada ponto do fluido, no qual vale a equação

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = \dots ,$$
$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{constante}.$$

Corollary

A equação de Bernoulli corresponde na hidrodinâmica à Lei de conservação da energia na mecânica.

Analizando os termos da equação de Bernoulli

Supondo a densidade constante ao longo de todo o fluido, podemos multiplicar todos os termos da equação por ρ e obter a relação

$$\underbrace{\cancel{\rho} \frac{p}{\cancel{\rho}} + \rho gh}_{\text{Lei de Stevin}} + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constante.}$$

Corollary

Parcela hidrostática ($p + \rho gh$): Corresponde a pressão hidrostática no fluido;

Parcela fluidodinâmica ($\rho \frac{v^2}{2}$): Corresponde a pressão hidrodinâmica;

Se o fluido está em repouso $\frac{\rho v^2}{2} = 0$ temos a Lei de Stevin.

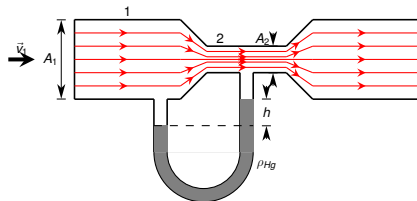
Venturímetro

Supondo um escoamento horizontal ($h_1 = h_2$) temos pela equação de Bernoulli

$$p_1 + \cancel{\rho gh_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \cancel{\rho gh_2} + \frac{\rho v_2^2}{2},$$
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Pela Lei de Stevin podemos dizer que a variação de pressão entre as regiões 1 e 2 vale

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg}gh$$



Tubo de Venturi.

Venturímetro (continuação)

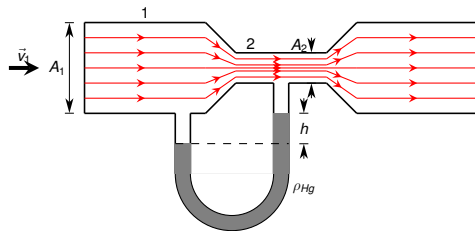
Pela equação da continuidade temos

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) v_1.$$

Substituindo temos

$$\overbrace{p_1 - p_2}^{\rho Hg g h} = \frac{\rho}{2} \overbrace{v_2^2}^{\frac{A_1}{A_2} v_1} - \frac{\rho v_1^2}{2},$$

$$v_1^2 = 2gh \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}.$$



Tubo de Venturi.

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	ômicon	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsílon	E	ϵ, ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	v
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ, φ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Referências e observações¹

 A. Máximo, B. Alvarenga, C. Guimarães, Física. Contexto e aplicações, v.1, 2.ed., São Paulo, Scipione (2016)

Esta apresentação está disponível para download no endereço
<https://flavianowilliams.github.io/education>

¹Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.