

# Hidrodinâmica

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

19 de Outubro de 2020

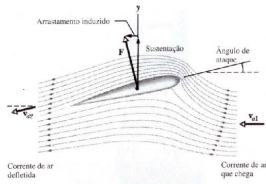
## Sumário

- 1 **Introdução**
- 2 **Vazão ou fluxo**
- 3 **Lei de conservação da massa**
  - Equação da continuidade
- 4 **Equação de Bernoulli**
- 5 **Aplicações**
- 6 **Apêndice**

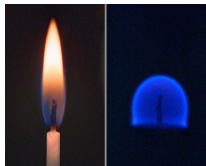
# O que é hidrodinâmica?

## Dinâmica dos fluidos

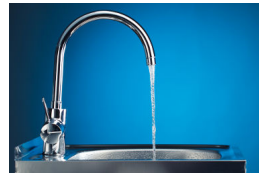
Estudo dos fluidos em movimento



Sustentação da aeronave devido ao empuxo.



Chama de uma vela.



Escoamento laminar.

# Viscosidade e escoamento

## Escoamento

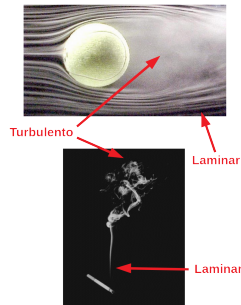
Do ponto de vista da dificuldade de escoamento do fluido, podemos citar os escoamentos

Laminar: A velocidade das partículas em cada ponto não muda com o tempo.

Turbulento: A velocidade das partículas em cada ponto varia com o tempo.

## Viscosidade

Dificuldade de escoamento do fluido



Exemplos de escoamentos laminar e turbulento.

## Definição de vazão ou fluxo

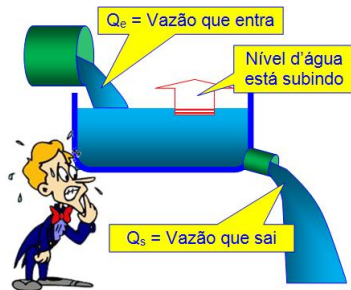
### Fluxo

Volume de fluido que atravessa uma seção transversal do tubo de corrente por unidade de tempo.

$$Z = \frac{\text{Volume}}{\Delta t}.$$

### Corollary

*Pela definição de fluxo, percebe-se que a sua unidade no SI é metro cúbico por segundo ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).*



Fluxo ou vazão de um fluido.

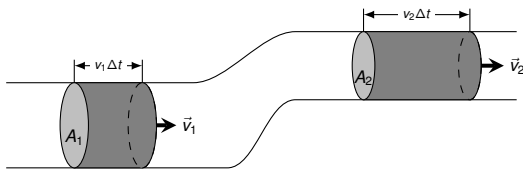
## Equação da continuidade baseada na Lei da conservação da matéria

Supondo uma quantidade de fluido que percorre uma distância  $S_1$  de área  $A_1$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , o volume ocupado por esse fluido é

$$V = \Delta S_1 A_1.$$

Mas sabendo que  $\Delta S_1 = v_1 \Delta t$ , onde  $v_1$  é a velocidade das moléculas do fluido que percorre esse espaço, temos

$$V = v_1 A_1 \Delta t.$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluxo que atravessa duas seções transversais.

## Equação da continuidade como Lei da conservação da matéria (continuação)

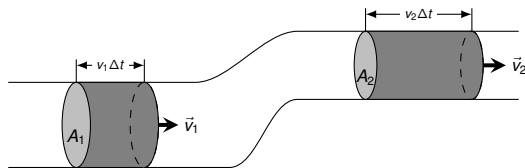
O mesmo raciocínio vale se ele atravessar a área  $A_2$  no mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ ,

$$V = v_2 A_2 \Delta t.$$

Supondo um fluido incompressível a massa é conservada e o volume se mantém. Sabendo que  $V = Z \Delta t$  temos

$$\cancel{Z \Delta t} = v_1 \cancel{A_1 \Delta t} = v_2 \cancel{A_2 \Delta t},$$

$$\boxed{Z = v_1 A_1 = v_2 A_2.}$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluido que atravessa um volume  $V$  no tempo  $\Delta t$ .

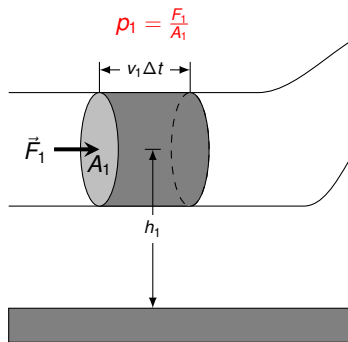
## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Supondo um fluido de volume  $V$  e massa  $m$  que atravessa a região 1 no intervalo de tempo  $\Delta t$ . O trabalho necessário para deslocá-lo a uma distância  $s_1$  é dado por

$$\tau_1 = \overbrace{F_1}^{p_1 A_1} \overbrace{v_1 \Delta t}^{s_1},$$

$$\tau_1 = p_1 \underbrace{A_1 s_1}_V.$$

$$\tau_1 = p_1 V.$$



Fluxo que atravessa a região 1.



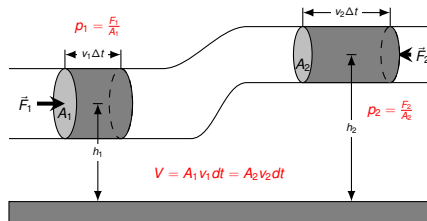
## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

O fluido à direita empurra o restante no sentido contrário impedindo o seu deslocamento, isso produz um trabalho negativo, ou seja,

$$\tau_2 = - \overbrace{F_2}^{p_2 A_2} \overbrace{v_2 \Delta t}^{s_2},$$

$$\tau_2 = -p_2 \underbrace{A_2 s_2}_V.$$

$$\tau_2 = -p_2 V.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

### Corollary

*A mesma quantidade de fluido irá atravessar as regiões 1 e 2 nos intervalos  $\Delta t$ .*

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

A força da gravidade é conservativa, de modo que as energias potenciais do fluido nas regiões 1 e 2,

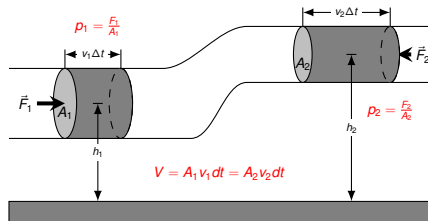
$$E_{p_1} = mgh_1$$

$$E_{p_2} = mgh_2.$$

As energias cinéticas que estão associadas ao movimento nas regiões 1 e 2 são

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Se não houver perdas de energia, a energia mecânica do fluido permanece inalterada, de modo que o trabalho total realizado deve ser igual a variação das energias cinéticas e potenciais,

$$\tau_1 + \tau_2 = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1,$$

portanto

$$\tau_1 + \tau_2 = \overbrace{\left( \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right)}^{\Delta E_c} +$$

$$+ \overbrace{(mgh_2 - mgh_1)}^{\Delta E_p},$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1,$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \left( \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \right).$$

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Separando os termos da região 1 da região 2 temos a equação

$$\tau_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -\tau_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Mas mostramos que

$$\begin{aligned}\tau_1 &= p_1 V, \\ \tau_2 &= -p_2 V.\end{aligned}$$

Substituindo na equação acima temos

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -(-p_2 V) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

mas sabemos que  $V = \frac{m}{\rho}$ ,

$$\begin{aligned}p_1 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 &= p_2 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2, \\ \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 &= \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2.\end{aligned}$$

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

### Equação de Bernoulli

Para um fluido não viscoso com escoamento laminar a soma das parcelas hidrostáticas e hidrodinâmicas é a mesma em cada ponto do fluido, no qual vale a equação

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = \dots,$$
$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{constante}.$$

### Corollary

*A equação de Bernoulli corresponde na hidrodinâmica à Lei de conservação da energia na mecânica.*

## Analizando os termos da equação de Bernoulli

Supondo a densidade constante ao longo de todo o fluido, podemos multiplicar todos os termos da equação por  $\rho$  e obter a relação

$$\underbrace{\cancel{\rho} \frac{p}{\cancel{\rho}} + \rho gh}_{\text{Lei de Stevin}} + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constante.}$$

### Corollary

*Parcela hidrostática ( $p + \rho gh$ ): Corresponde a pressão hidrostática no fluido;*

*Parcela fluidodinâmica ( $\rho \frac{v^2}{2}$ ): Corresponde a pressão hidrodinâmica;*

*Se o fluido está em repouso  $\frac{\rho v^2}{2} = 0$  temos a Lei de Stevin.*

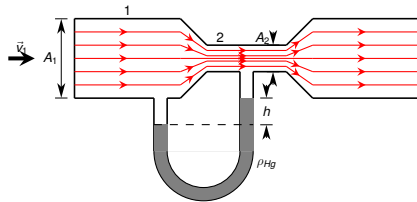
## Venturímetro

Supondo um escoamento horizontal ( $h_1 = h_2$ ) temos pela equação de Bernoulli

$$p_1 + \cancel{\rho gh_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \cancel{\rho gh_2} + \frac{\rho v_2^2}{2},$$
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Pela Lei de Stevin podemos dizer que a variação de pressão entre as regiões 1 e 2 vale

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg}gh$$



Tubo de Venturi.

## Venturímetro (continuação)

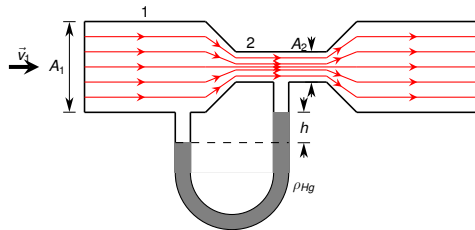
Pela equação da continuidade temos

$$v_2 = \left( \frac{A_1}{A_2} \right) v_1.$$

Substituindo temos

$$\overbrace{p_1 - p_2}^{\rho Hg g h} = \frac{\rho}{2} \overbrace{v_2^2}^{\frac{A_1}{A_2} v_1} - \frac{\rho v_1^2}{2},$$

$$v_1^2 = 2gh \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}.$$



Tubo de Venturi.



## Transformar um número em notação científica

### Corollary

*Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.*

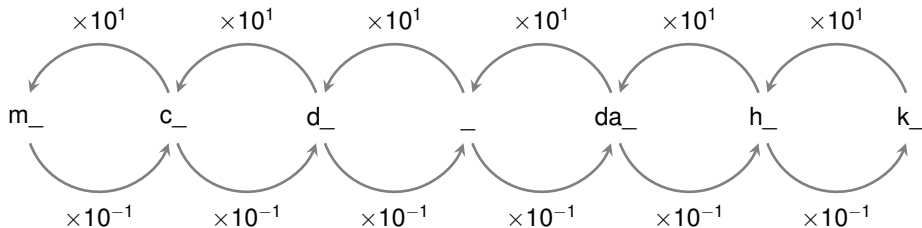
*Passo 2: Andar com a vírgula até que somente reste um número diferente de zero no lado esquerdo.*

*Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

### Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6,59 \times 10^{15}$$

## Conversão de unidades em uma dimensão

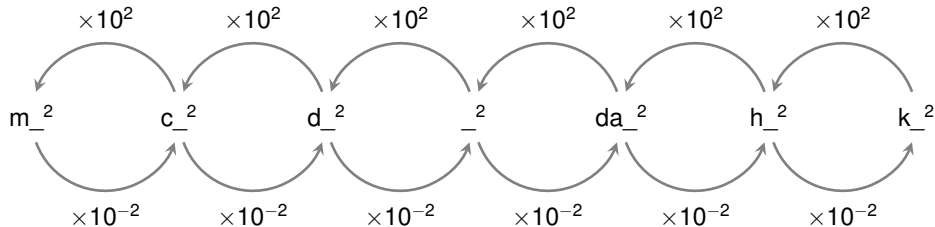


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1) \times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ kg} = 2,5 \times 10^{(1) \times 6} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mg}$$

$$10 \text{ ms} = 10 \times 10^{(-1) \times 3} \text{ s} \rightarrow 10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

## Conversão de unidades em duas dimensões

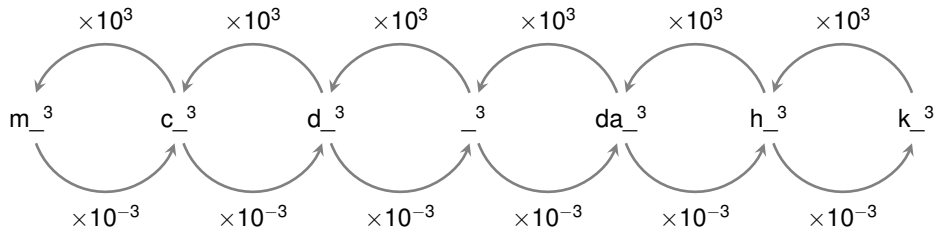


$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2) \times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2) \times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$10 \text{ ms}^2 = 10 \times 10^{(-2) \times 3} \text{ s}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ s}^2$$

## Conversão de unidades em três dimensões



$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3) \times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^9 \text{ mm}^3$$

$$2,5 \text{ km}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 6} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{18} \text{ mm}^3$$

## Alfabeto grego

|         |           |                         |         |            |                 |
|---------|-----------|-------------------------|---------|------------|-----------------|
| Alfa    | $A$       | $\alpha$                | Ni      | $N$        | $\nu$           |
| Beta    | $B$       | $\beta$                 | Csi     | $\Xi$      | $\xi$           |
| Gama    | $\Gamma$  | $\gamma$                | ômicon  | $O$        | $o$             |
| Delta   | $\Delta$  | $\delta$                | Pi      | $\Pi$      | $\pi$           |
| Epsílon | $E$       | $\epsilon, \varepsilon$ | Rô      | $P$        | $\rho$          |
| Zeta    | $Z$       | $\zeta$                 | Sigma   | $\Sigma$   | $\sigma$        |
| Eta     | $H$       | $\eta$                  | Tau     | $T$        | $\tau$          |
| Teta    | $\Theta$  | $\theta$                | Ípsilon | $\Upsilon$ | $v$             |
| Iota    | $I$       | $\iota$                 | Fi      | $\Phi$     | $\phi, \varphi$ |
| Capa    | $K$       | $\kappa$                | Qui     | $X$        | $\chi$          |
| Lambda  | $\Lambda$ | $\lambda$               | Psi     | $\Psi$     | $\psi$          |
| Mi      | $M$       | $\mu$                   | Ômega   | $\Omega$   | $\omega$        |

## Referências e observações<sup>1</sup>

 A. Máximo, B. Alvarenga, C. Guimarães, Física. Contexto e aplicações, v.1, 2.ed., São Paulo, Scipione (2016)

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/teaching>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.