Fluidos

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

29 de Maio de 2021

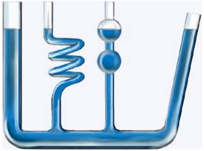
Sumário

O que é um fluido?

Fluido

Líquido incompressível que assume a forma do recipiente que o contém.

- ✓ Os sólidos são objetos que possuem forma definida, portanto não são fluidos;
- ✓ O Volume de um fluido não se altera independente da temperatura que se encontra e do recipiente que o contém.
- ✓ Conceitos como densidade e pressão são usados ao invés de massa e força.



Formato de um fluido em diversos recipientes.

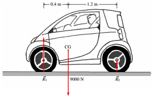
Fluido versus corpo rígido

Corpo rígido

- ✓ Formato rígido e imutável;
- ✓ Corpos homogêneos ou heterogêneos (a densidade pode variar ao longo da estrutura);
- ✓ Usamos conceitos de massa e força.

Fluido

- ✓ Formato flexível e se adapta ao recipiente;
- ✓ Corpos homogêneos (Densidade é a mesma ao longo do fluido);
- ✓ Usamos conceitos de densidade (massa específica) e pressão.



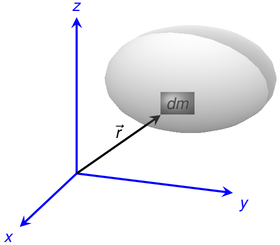
Exemplo de um corpo rígido.

Exemplo de um fluido.

Densidade

Definimos densidade ρ de um objeto como a taxa da quantidade infinitesimal de massa *dm* por elemento *dV* de seu volume,

$$\boxed{\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.}$$



...

Assim, a densidade fornece informações de como a massa está sendo distribuída ao longo do volume.

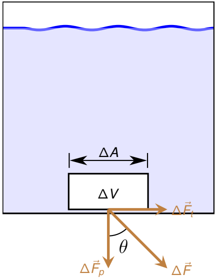
Corollary

Para objetos homogêneos ρ é chamada de massa específica, onde $\rho = \frac{m}{V}$.

Força atuando em cada elemento de um fluido

Considere uma força ΔF atuando em um pequena área ΔA no fundo de um recipiente. Chamaremos de ΔF a força resultante atuando nessa área, onde podemos decompô-la em suas componentes tangencial $\Delta \vec{F}_t$ e perpendicular $\Delta \vec{F}_p$. No entanto, em um fluido em equilíbrio a força resultante deve ser zero, portanto obrigatoriamente deveremos ter $\Delta F_t = 0$, restando apenas $\Delta \vec{F}_p$, que no caso deve ser equivalente ao peso da parte do fluido justamente acima, onde

$$\Delta F_p = \Delta F \cos\theta = P.$$



Força por unidade de área.

Pressão

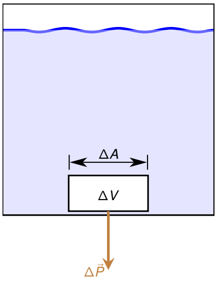
Sabendo que $\vec{P} = (\Delta m)\vec{g}$, temos para a força que atua em uma pequena área ΔA da parede do recipiente

$$\begin{aligned}
\Delta F &= (\Delta m) g, \\
\Delta F &= \rho g \Delta V, \\
\Delta F &= p \Delta A.
\end{aligned}$$

$\Delta m = \rho \Delta V$

p é a pressão que representa a força por unidade de área perpendicular a superfície, ou seja,

$$\boxed{p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}.}$$



Força por unidade de área.

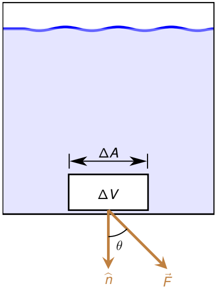
Pressão

Definimos pressão p como a força distribuída por unidade de área perpendicular a superfície, ou seja,

$$\boxed{p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} = \frac{dF_p}{dA}.}$$

No caso de uma força atuando obliquamente a área A temos que a pressão é definida como o produto escalar da força $\vec{F}$ pelo versor $\hat{n}$ perpendicular a área A,

$$\boxed{p = \frac{d}{dA}\left(F\cos\theta\right) = \left(\frac{dF}{dA}\right)\cos\theta = \frac{d\vec{F}}{dA}\cdot\hat{n}.}$$

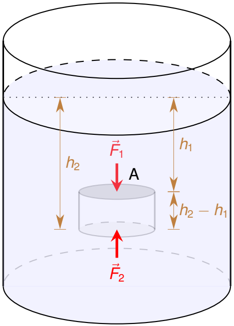


Força por unidade de área.

Cálculo da pressão no interior de um fluido

Supondo um cilindro totalmente imerso e imóvel no interior de um fluido como mostra a figura ao lado, verificamos que

- ✓ O peso do cilindro aplica uma força puxando-o para baixo;
- ✓ O fluido pressiona as paredes do cilindro no intuito de espremê-lo de fora para dentro;
- ✓ A somatória da pressão na base produz uma força que empurra o cilindro para cima;
- ✓ A somatória da pressão no topo produz uma força que empurra o cilindro para baixo;



Forças atuando acima e abaixo do objeto submerso num fluido em repouso.

Variação da pressão com altitude e profundidade

Sabemos que a força atuando em cima e embaixo do cilindro é dado por $F = pA$, onde A é a área do cilindro, portanto a força em cima e embaixo são

$$F_1 = p_1 A,$$
$$F_2 = p_2 A.$$

Se o cilindro está em repouso, pela segunda Lei de Newton a força resultante deve ser zero, ou seja,

$$F_2 - F_1 = P = (\Delta m)g.$$

Pela definição de densidade, $\Delta m = \rho \Delta V$, e sabendo que o volume do cilindro é a base A vezes a altura h temos

$$p_2 \cancel{A} = p_1 \cancel{A} + \rho g h \cancel{A},$$
$$\boxed{p_2 = p_1 + \rho g h.}$$

Variação da pressão com a profundidade

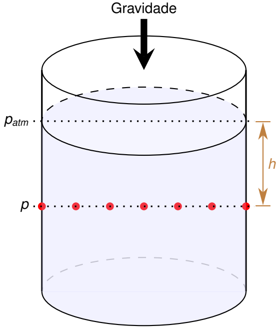
Lei de Stevin

Se a superfície de um fluido, cuja densidade é ρ, está submetida a uma pressão p_{atm}, a pressão p, no interior desse líquido, a uma profundidade h, é dada por

$$p = p_{atm} + \rho g h$$

Corollary

A força da gravidade puxa o fluido para baixo causando uma pressão na base e nas paredes do recipiente.



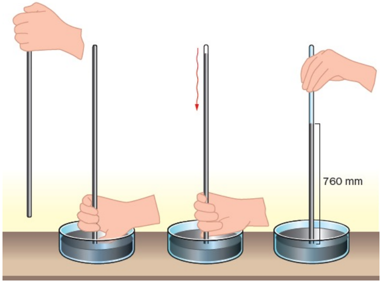
Pressão em função da profundidade h.

Experiência de Torricelli

Coloca-se mercúrio cuja densidade é conhecida num tubo fino e vira-o de cabeça para baixo. O líquido irá descer e irá preencher o recipiente da parte de baixo. A parte de cima como estava fechada não entrou ar e com a descida do líquido criou-se um vácuo, portanto a pressão da parte de cima será zero. Pela Lei de Stevin temos que a pressão da parte de baixo é dado por

$$p_{atm} = \rho g h,$$

onde h é a coluna de mercúrio (se for medido ao nível do mar h=760mm).

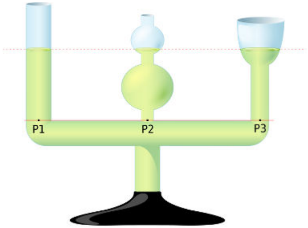


Representação da experiência de Torricelli.

Vasos comunicantes

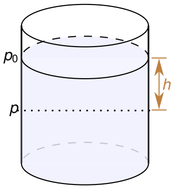
Corollary

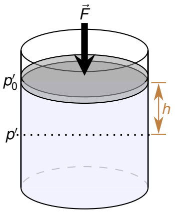
Pela Lei de Stevin a variação da pressão em um fluido homogêneo (ρ = constante) somente depende da profundidade do fluido e independe da posição do líquido ao longo da horizontal, portanto é esperado que a pressão seja a mesma para cada altura independente do recipiente que está contido o fluido.



Pressão do fluido em diferentes recipientes (O líquido atinge a mesma altura independente do recipiente).

Variação da pressão na superfície do recipiente





Pela Lei de Stevin a pressão nos pontos 1 e 2 equivale a

$$p = p_0 + \rho g h.$$

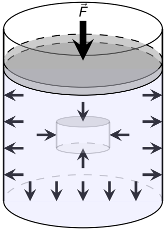
Pela Lei de Stevin a pressão nos pontos 1 e 2 equivale a

$$p' = p'_0 + \rho g h.$$

Variação da pressão ao longo das paredes do recipiente

Caculando o quanto a pressão na posição 1 aumenta temos

$$\Delta p = p' - p,$$
$$\Delta p = (p_0' + \rho g h) - (p_0 + \rho g h),$$
$$\Delta p = p_0' + \cancel{\rho g h} - p_0 - \cancel{\rho g h},$$
$$\boxed{\Delta p = \Delta p_0.}$$



Corollary

O acréscimo de pressão, em um ponto de um líquido em equilíbrio, transmite-se integralmente a todos os pontos desse líquido.

Máquinas hidráulicas

Pela definição de pressão podemos dizer que o aumento de pressão no pistão 1 é dado por

$$\Delta p_1 = \frac{F_1}{A_1}.$$

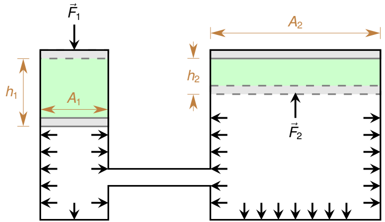
Pelo princípio de Pascal esse aumento será o mesmo no pistao 2, pois $\Delta p_1 = \Delta p_2$.

Princípio de Pascal

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

Corollary

O volume deslocado em um pistão é o mesmo deslocado em outro pistão.



Prensa hidráulica

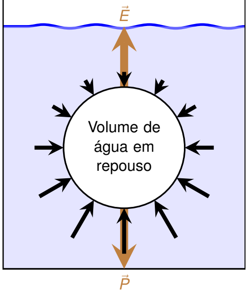
O que é empuxo?

Corollary

A somatória de todas as forças que o fluido atua nas paredes de um objeto imerso em um fluido é igual a força resultante que atua para cima no intuito de subir o objeto;

Se a força resultante $\vec{E}$ for de mesma intensidade da força peso $\vec{P}$ do volume do fluido deslocado, essa força é chamada de empuxo;

Se o empuxo for maior que a força peso o objeto flutua, e se for menor o objeto afunda.



Representação de empuxo como o peso da água deslocada.

Relação entre a densidade do fluido, do objeto e o princípio de Arquimedes

Pela definição de empuxo E podemos dizer que

$$E = m_{fluido}g,$$

mas pela definição de densidade temos $m_{fluido} = \rho_{fluido}V$, portanto

$$E = \rho_{fluido}Vg$$

O peso P do objeto mergulhado no fluido é dado por $P = m_{obj}g$, portanto se o empuxo for igual ao peso do objeto temos

$$m_{obj}g = \rho_{fluido}Vg,$$
$$\rho_{obj}\cancel{Vg} = \rho_{fluido}\cancel{Vg}.$$

Corollary

Se $\rho_{fluido} < \rho_{obj}$, o corpo afundará;

Se $\rho_{fluido} = \rho_{obj}$, o corpo ficará em equilíbrio;

Se $\rho_{fluido} > \rho_{obj}$, o corpo irá flutuar na superfície;

Fluidos ideias em movimento

Um fluido ideal em movimento satisfaz as seguintes condições:

- ✓ Escoamento laminar: a velocidade do fluido em ponto qualquer não varia com o tempo;
- ✓ Escoamento incompressível: a massa específica tem o mesmo valor em todos os pontos do fluido e em qualquer instante de tempo.
- ✓ Escoamento não viscoso: o fluido é não viscoso, ou seja, não apresenta resistência ao escoamento.
- ✓ Escoamento irrotacional: o movimento do fluido é apenas linear.

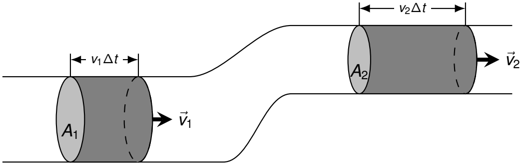
Equação da continuidade baseada na Lei da conservação da matéria

Supondo uma quantidade de fluido que percorre uma distância S_1 de área A_1 no intervalo de tempo Δt, o volume ocupado por esse fluido é

$$V = \Delta S_1 A_1 .$$

Mas sabendo que $\Delta S_1 = v_1 \Delta t$, onde v_1 é a velocidade das moléculas do fluido que percorre esse espaço, temos

$$V = v_1 A_1 \Delta t.$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluxo que atravessa duas seções transversais.

Equação da continuidade como Lei da conservação da matéria (continuação)

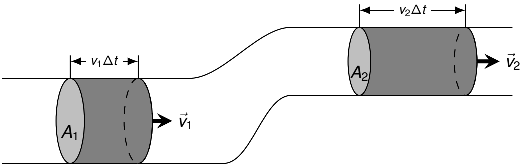
O mesmo raciocínio vale se ele atravessar a área A_2 no mesmo intervalo de tempo Δt,

$$V = v_2 A_2 \Delta t.$$

Supondo um fluido incompressível a massa é conservada e o volume se mantém. Sabendo que $V = Z\Delta t$ temos

$$Z\cancel{\Delta t} = v_1 A_1 \cancel{\Delta t} = v_2 A_2 \cancel{\Delta t},$$

$$\boxed{Z = v_1 A_1 = v_2 A_2.}$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluido que atravessa um volume V no tempo Δt.

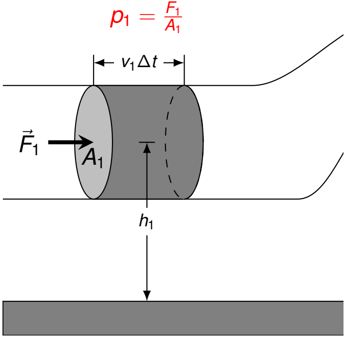
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Supondo um fluido de volume V e massa m que atravessa a região 1 no intervalo de tempo Δt. O trabalho necessário para deslocá-lo a uma distância s_1 é dado por

$$\tau_1 = \overbrace{F_1}^{p_1 A_1} \overbrace{v_1 \Delta t}^{s_1},$$

$$\tau_1 = p_1 \underbrace{A_1 s_1}_{V}.$$

$$\boxed{\tau_1 = p_1 V.}$$



Fluxo que atravessa a região 1.

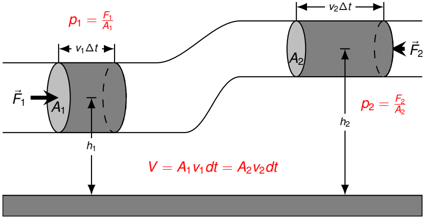
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

O fluido a direita empurra o restante no sentido contrário impedindo o seu deslocamento, isso produz um trabalho negativo, ou seja,

$$\tau_2 = -\overbrace{F_2}^{p_2 A_2}\ \overbrace{v_2 \Delta t}^{s_2},$$

$$\tau_2 = -p_2\,\underbrace{A_2 s_2}_{V}\ .$$

$$\boxed{\tau_2 = -p_2 V.}$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

Corollary

A mesma quantidade de fluido irá atravessar as regiões 1 e 2 nos intervalos Δt.

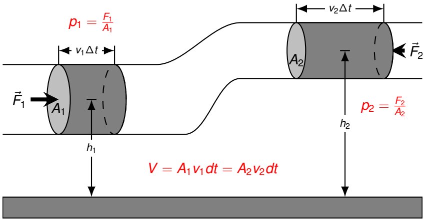
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

A força da gravidade é conservativa, de modo que as energias potenciais do fluido nas regiões 1 e 2,

$$E_{p_1} = mgh_1$$
$$E_{p_2} = mgh_2.$$

As energias cinéticas que estão associadas ao movimento nas regiões 1 e 2 são

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$E_{c_2} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Se não houver perdas de energia, a energia mecânica do fluido permanece inalterada, de modo que o trabalho total realizado deve ser igual a variação das energias cinéticas e potenciais,

$$\tau_1 + \tau_2 = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1,$$

portanto

$$\tau_1 + \tau_2 = \overbrace{\left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right)}^{\Delta E_c} + $$
$$+ \overbrace{(mgh_2 - mgh_1)}^{\Delta E_p},$$
$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1,$$
$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1\right).$$

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Separando os termos da região 1 da região 2 temos a equação

$$\tau_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -\tau_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \\ + mgh_2.$$

Mas mostramos que

$$\tau_1 = p_1 V,$$
$$\tau_2 = -p_2 V.$$

Substituindo na equação acima temos

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -(-p_2 V) + \\ + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

mas sabemos que $V = \frac{m}{\rho}$,

$$p_1 \frac{\cancel{m}}{\rho} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh_1 = p_2 \frac{\cancel{m}}{\rho} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 + \cancel{m}gh_2,$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Equação de Bernoulli

Para um fluido não viscoso com escoamento laminar a soma das parcelas hidrostáticas e hidrodinâmicas é a mesma em cada ponto do fluido, no qual vale a equação

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = \cdots,$$

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{constante}.$$

Corollary

A equação de Bernoulli se baseia na lei de conservação da energia na mecânica.

Analisando os termos da equação de Bernoulli

Supondo a densidade constante ao longo de todo o fluido, podemos multiplicar todos os termos da equação por ρ e obter a relação

$$\underbrace{\cancel{\rho}\frac{p}{\cancel{\rho}} + \rho g h}_{\text{Lei de Stevin}} + \rho\frac{v^2}{2} = \text{constante.}$$

Corollary

Parcela hidrostática $(p + \rho g h)$*: Corresponde a pressão hidrostática no fluido;*

Parcela fluidodinâmica $\left(\rho\frac{v^2}{2}\right)$*: Corresponde a pressão hidrodinâmica;*

Se o fluido está em repouso $\frac{\rho v^2}{2} = 0$ *temos a Lei de Stevin.*

Lei de Stevin para um fluido não homogêneo

Sabemos que a diferença das forças atuando em cima e embaixo do cilindro é dado por $F = pA$, onde A é a área do cilindro, portanto a força resultante será

$$\Delta F = F_2 - F_1,$$
$$\Delta F = \rho g \Delta V = p \Delta A,$$

onde para o cilindro de altura dz teremos $\Delta V = A \Delta z$. Substituindo

$$p\cancel{A} = -\rho g \cancel{A} dz,$$

ou seja,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z) g.$$

Integrando teremos

$$\boxed{\Delta p = -\int_{z_0}^{h} g\rho(z) dz.}$$

Variação da pressão com a altitude (em construção)

No caso anterior, se $\rho = cte$ chegamos na Lei de Stevin como caso especial. Entretanto, se tivermos $\rho(z) = \frac{\rho_{atm}}{p_{atm}} p(z)$, teremos

$$\frac{dp}{dz} = -g\left[\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}} p(z)\right],$$

$$dp = -\left[g\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}} p(z)\right] dz,$$

$$\frac{dp}{p} = -\left(g\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}}\right) dz.$$

Integrando teremos

$$\int_{p_{atm}}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_{0}^{z} g\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}} dz,$$

$$\ln p(z) - \ln p_{atm} = -\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}} z,$$

$$\ln\left[\frac{p(z)}{p_{atm}}\right] = -\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}} z,$$

$$\boxed{p(z) = p_{atm} e^{-\left(\frac{\rho_{atm}}{p_{atm}}\right) z}.}$$

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências e observações[2]

A. Máximo, B. Alvarenga, C. Guimarães, Física. Contexto e aplicações, v.1, 2.ed., São Paulo, Scipione (2016)

[2]Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.