

Campo elétrico

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

27 de Junho de 2022

Sumário

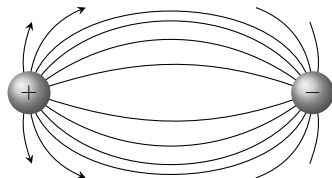
- 1 **Linhas de força**
- 2 **Distribuição discreta de cargas**
- 3 **Dipolo elétrico**
- 4 **Distribuição contínua de cargas**
- 5 **Apêndice**

O conceito de campo elétrico

❓ Se a interação eletrostática ocorre a distância, como uma carga elétrica percebe a presença de outra?

Corollary

- ✓ *A presença de uma carga elétrica Q em uma região do espaço produz um campo de interação chamado de campo elétrico que funciona como intermédio entre as cargas elétricas.*
- ✓ *A existência desse campo é verificado através da força exercida em uma carga de prova quando colocada nesta região.*

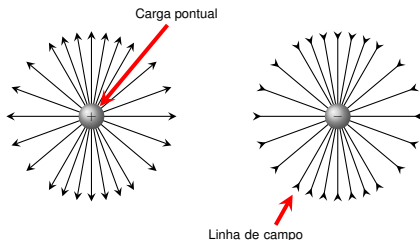


Linhas de força entre duas cargas.

O que são linhas de força?

Carga de prova

Partícula carregada cuja carga é pequena quanto possível para que seu campo não interfira nas demais cargas.



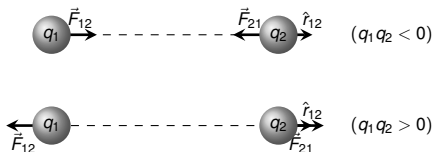
Linhas de força de cargas pontuais.

- ✓ Michael Faraday utilizou o artifício para mostrar como ocorre a intermediação entre as cargas elétricas.
- ✓ As linhas de força de uma carga positiva divergem para fora enquanto que na carga negativa convergem para dentro.

Campo elétrico à partir da Lei de Coulomb

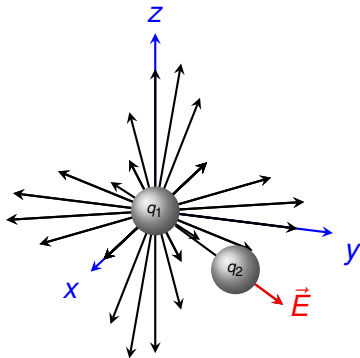
A força que uma partícula com carga Q atua na carga de prova q é dado pela lei de Coulomb

$$\vec{F}_{Qq} = k \frac{Qq}{r_{Qq}^2} \hat{r}_{Qq}$$



Sentido da força em relação ao sinal das cargas.

Campo elétrico como grandeza vetorial



Linhas de força da carga Q no espaço.

$$\vec{F}_{12} = \left[k \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \right] q_2$$
$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1(r) q_2$$

Campo elétrico de uma carga puntiforme

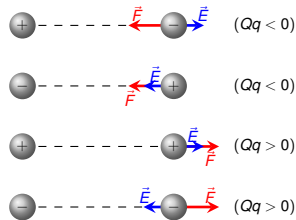
$$\vec{E}_1(r) = k \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

Características do campo elétrico

Corollary

A direção e o sentido do vetor \vec{E} são dados pela direção e pelo sentido da força que atua na carga de prova positiva, ou seja,

- ✓ Se $q > 0$, o campo elétrico \vec{E} e a força \vec{F} tem o mesmo sentido;
- ✓ Se $q < 0$, o campo elétrico \vec{E} e a força \vec{F} tem sentidos opostos.



Sentido da força e campo elétrico em relação ao sinal das cargas.

Corollary

A unidade de medida do campo elétrico no SI é Newton/Coulomb.

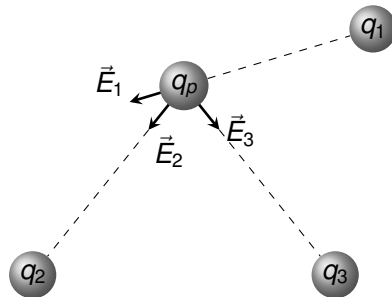
Distribuição discreta de cargas puntiformes

Sabendo que $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, e que $\vec{F}_p = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \dots$, podemos afirmar que para uma distribuição de cargas teremos

$$\frac{\vec{F}_p}{q_p} = \frac{\vec{F}_{p1}}{q_1} + \frac{\vec{F}_{p2}}{q_2} + \frac{\vec{F}_{p3}}{q_3} + \dots$$

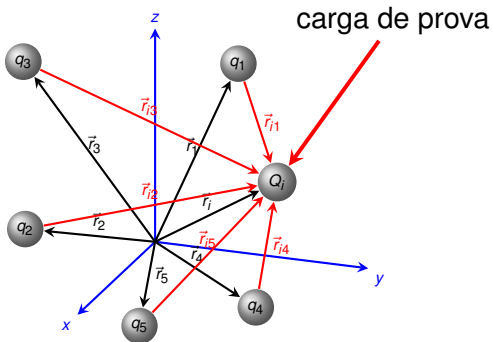
O campo elétrico \vec{E} , existente no ponto p, é dado pela resultante dos campos $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, produzidos separadamente pelas cargas q_1, q_2, \dots ,

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$



Campos elétricos \vec{E} no ponto p.

Campo de várias cargas pontuais



Distância relativa entre cargas q_j e a carga q_i .

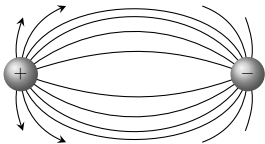
$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

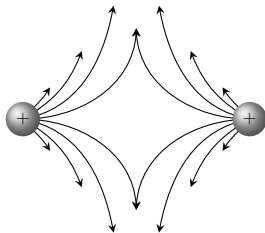
Campo elétrico de uma distribuição puntiforme

$$\vec{E}_i = k \sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$$

Linhas de força de duas cargas pontuais



Cargas com sinais contrários



Cargas com sinais iguais

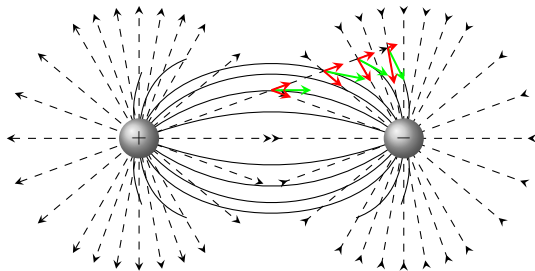
Corollary

As linhas de força nunca se cruzam, pois isso representaria a existência de dois valores possíveis para o campo elétrico no mesmo ponto!

Campo elétrico de um dipolo elétrico

Corollary

- ✓ *Um dipolo elétrico é constituído por duas cargas de mesma intensidade mas com sinais contrários separadas a uma certa distância uma da outra;*
- ✓ *O vetor campo elétrico resultante num ponto qualquer é sempre tangente a linha de campo que passa por esse ponto.*



Vetor campo elétrico resultante de um dipolo elétrico.

Campo elétrico de um dipolo elétrico (continuação)

Na figura ao lado, o campo elétrico resultante em um ponto P é dado por

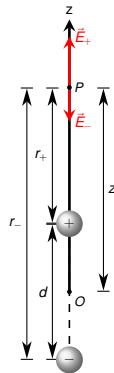
$$E = E_+ + E_- ,$$

$$E = K \frac{(+q)}{r_+^2} + K \frac{(-q)}{r_-^2} ,$$

onde podemos perceber que

$$r_+ = z - \frac{d}{2} ,$$

$$r_- = z + \frac{d}{2} .$$



Dipolo elétrico.

Campo elétrico de um dipolo elétrico (continuação)

Temos assim

$$\begin{aligned} E &= Kq \left[\frac{1}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \right], \\ &= Kq \left[\frac{1}{\left[\frac{z^2}{z^2} \left(z - \frac{d}{2}\right)\right]^2} - \frac{1}{\left[\frac{z^2}{z^2} \left(z + \frac{d}{2}\right)\right]^2} \right], \\ &= \frac{kq}{z^2} \left[\frac{1}{\left(\cancel{\frac{z}{z}} - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(\cancel{\frac{z}{z}} + \frac{d}{2z}\right)^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{kq}{z^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2} \right], \\ &= \frac{kq}{z^2} \frac{\left[\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2 - \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2}, \\ &= \frac{kq}{z^2} \frac{\left[\cancel{1} + \frac{d}{z} + \cancel{\left(\frac{d}{2z}\right)^2} - \cancel{1} + \frac{d}{z} - \cancel{\left(\frac{d}{2z}\right)^2}\right]}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2}. \end{aligned}$$

Campo elétrico de um dipolo elétrico (continuação)

O campo elétrico resultante torna-se

$$E = \frac{kq}{z^2} \frac{\frac{2d}{z}}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2},$$
$$E = \frac{2k}{z^3} \frac{qd}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2},$$
$$E = \frac{2k}{z^3} \frac{p}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2}.$$

$qd = p$

\vec{p} é definido como momento dipolar elétrico, onde $\vec{p} = q\vec{d}$. Para distâncias relativamente grandes onde $z \gg d$ podemos considerar $\frac{d}{2z} \approx 0$, ou seja,

$$E = 2K \frac{p}{z^3}.$$

Campo elétrico de um dipolo

$$\vec{E}(0, 0, z) = 2K \frac{\vec{p}}{z^3}.$$

Torque em um dipolo elétrico

Usando a definição de torque, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$,
no esquema ao lado temos

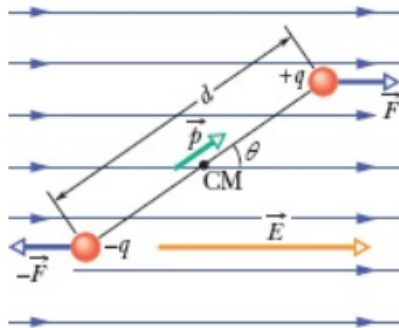
$$\tau = Fx \sin\theta + F(d - x) \sin\theta,$$

$$\tau = Fd \sin\theta.$$

Sabemos que $p = qd$ e $E = \frac{F}{q}$, substituí-
mos na equação acima,

$$\tau = pE \sin\theta,$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.}$$



Dipolo elétrico inserido em um campo \vec{E} uniforme.

Energia potencial de um dipolo elétrico

Sabemos que a força \vec{F} é conservativa, portanto podemos encontrar a energia potencial através do trabalho realizado pelo torque. Supondo $\theta = 180 - \theta'$ e $\sin(180 - \theta') = -\sin \theta'$ temos

$$\Delta U = -W,$$

$$\Delta U = - \int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta', \quad \tau = -pE \sin \theta'$$

$$\Delta U = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin \theta' d\theta'.$$

Supondo \vec{E} e \vec{p} constantes resolvemos a integral, temos

$$\Delta U = [-pE \cos \theta']_{90^\circ}^{\theta},$$

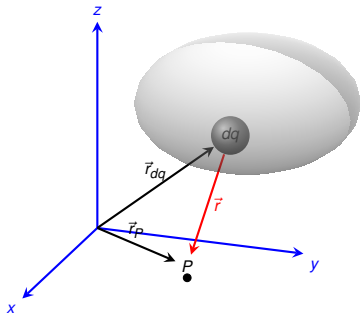
$$U(\theta) = -pE \cos \theta.$$

Podemos generalizar para a forma vetorial e escrever

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Campo elétrico de uma distribuição contínua de cargas

Para um objeto extenso carregado eletricamente, cada pedaço dv desse objeto possui uma quantidade de carga dq , que produz campo elétrico idêntico a uma partícula pontual, portanto cada pedaço irá produzir um campo $d\vec{E}$ no espaço.



$$d\vec{E} = K \frac{\hat{r}}{r^2} dq$$

Campo elétrico de uma distribuição contínua de cargas

$$\vec{E} = k \int \frac{\hat{r}}{r^2} dq$$

Campo elétrico de um anel circular

Considere um anel carregado eletricamente com uma densidade linear de carga λ . Temos que cada pedaço ds do anel terá uma carga dq , onde

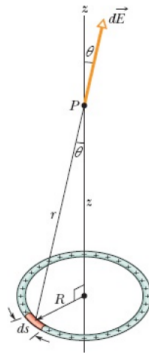
$$dq = \lambda ds.$$

Portanto, o campo $d\vec{E}$ será dado por

$$d\vec{E} = K \frac{\hat{r}}{r^2} \lambda ds.$$

ou na forma das componentes vetoriais,

$$d\vec{E} = dE_x \hat{x} + dE_y \hat{y} + dE_z \hat{z}.$$



Anel de carga positiva.

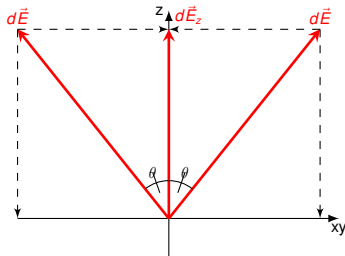
Campo elétrico de um anel circular (continuação)

Porém, é possível perceber que as componentes E_x e E_y de cada elemento ds se cancelam mutuamente, restando apenas a componente na direção z . Pela figura, podemos dizer que

$$dE_z = dE \cos \theta.$$

Pela figura, também podemos perceber que

$$r^2 = z^2 + R^2,$$
$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}.$$



Componentes do campo elétrico.

Campo elétrico de um anel circular (continuação)

Sabendo que $dE = \frac{K\lambda ds}{r^2}$, substituímos na expressão anterior

$$dE_z = K \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta ds,$$
$$dE_z = K \frac{\lambda}{z^2 + R^2} \cos\theta ds.$$

$r^2 = z^2 + R^2$

Integrando ao longo de todo o anel de comprimento $2\pi R$ temos

$$E_z = \int_0^{2\pi R} K \frac{\lambda}{z^2 + R^2} \cos\theta ds,$$

$$E_z = K \frac{\lambda}{z^2 + R^2} \cos\theta \int_0^{2\pi R} ds,$$

$$E_z = K \frac{\lambda}{z^2 + R^2} \cos\theta 2\pi R.$$

Substituímos o termo $\cos\theta = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$,

$$E_z = K \left[\frac{\lambda}{z^2 + R^2} \right] \left[\frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] [2\pi R],$$

$$E_z = K \frac{\lambda 2\pi R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Campo elétrico de um anel circular (continuação)

No entanto, é conveniente definir a solução em termos da carga total ao invés da densidade de carga. Sabemos que $dq = \lambda ds$, integrando ao longo de todo o anel temos

$$dq = \lambda ds,$$

$$q = \int_0^{2\pi R} \lambda ds,$$

$$q = \lambda 2\pi R.$$

Substituindo na expressão de E_z temos o campo elétrico a uma distância z do centro de um anel circular,

$$E_z = K \frac{qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Se $z \gg R$ teremos $z^2 + R^2 \approx z^2$, ou seja,

$$E_z = K \frac{q}{z^2}.$$

Campo elétrico de um disco circular

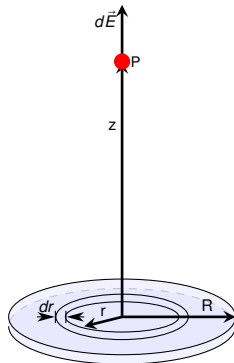
Considere um disco carregado eletricamente com uma densidade superficial de carga σ . Podemos considerar que o disco é formado por vários anéis de espessura dr e raio r contendo cargas dq , onde

$$dq = \sigma dA,$$

$$dq = \sigma 2\pi r dr.$$

sendo dA a área do anel. A carga total do disco é obtida integrando dq de cada anel, ou seja,

$$q = \int dq = \int_0^R \sigma dA = \sigma \pi R^2.$$



Disco circular com distribuição uniforme de carga.

Campo elétrico de um disco circular (continuação)

Através do campo elétrico dE_z produzido pelo anel temos

$$dE_z = K \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dq,$$

$$dE_z = \left[K \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right] [2\pi\sigma r dr].$$

Integrando temos

$$E_z = k\pi\sigma z \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr$$

Para resolver a integral fazemos a substituição $X = z^2 + r^2$ e $dX = 2r dr$,

$$E_z = k\pi\sigma z \int X^{-3/2} dX,$$

$$E_z = k \frac{q/R^2}{\pi\sigma} z \left[\frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R.$$

Chegamos assim na solução final,

$$E_z = 2k \frac{q}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right).$$

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.

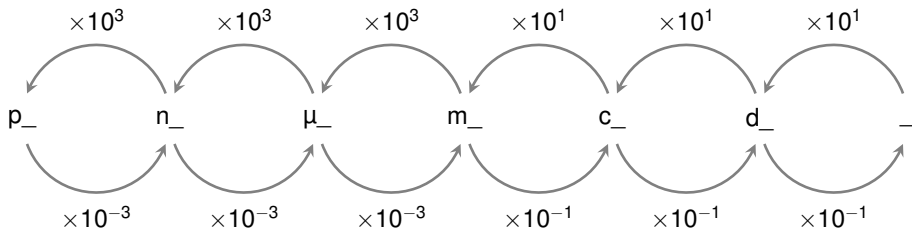
Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.

Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.

Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6,59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

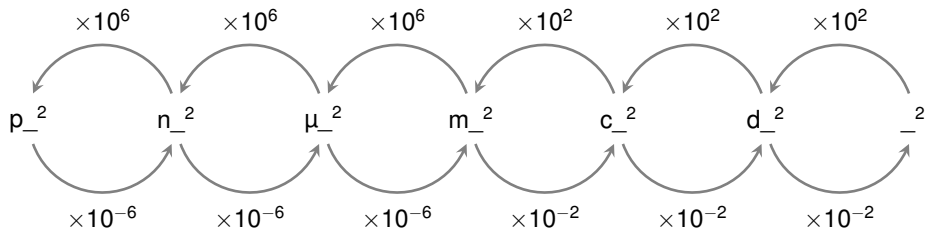


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1) \times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ g} = 2,5 \times 10^{(1) \times 3} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^3 \text{ mg}$$

$$10 \mu\text{C} = 10 \times 10^{[(-3) \times 1 + (-1) \times 3]} \text{ C} \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Conversão de unidades em duas dimensões

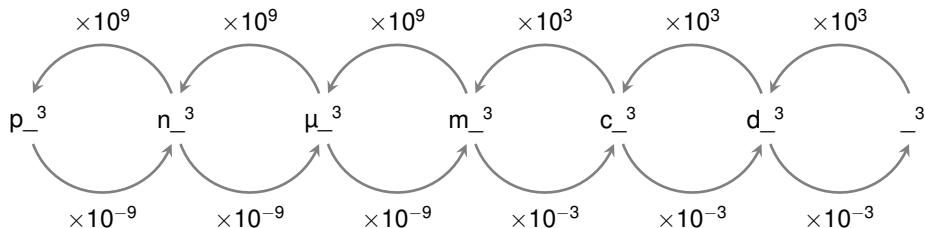


$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2) \times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2) \times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$10 \mu\text{m}^2 = 10 \times 10^{[(-6) \times 1 + (-2) \times 3]} \text{ m}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-12} \text{ m}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões



$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3) \times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3) \times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^9 \text{ mm}^3$$




$$10 \mu\text{m}^3 = 10 \times 10^{[(-9) \times 1 + (-3) \times 3]} \text{ m}^3 \rightarrow 10 \times 10^{-18} \text{ m}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsílon	E	ϵ, ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Teta	Θ	θ
Iota	I	ι
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mi	M	μ

Ni	N	ν
Csi	Ξ	ξ
ômicon	O	o
Pi	Π	π
Rô	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ípsilon	Υ	υ
Fi	Φ	ϕ, φ
Qui	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Ômega	Ω	ω

Referências e observações¹

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)

Esta apresentação está disponível para download no endereço
<https://flavianowilliams.github.io/education>

¹ Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.