Movimento harmônico simples

Flaviano Williams Fernandes

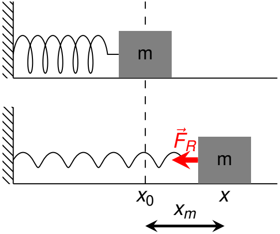
Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

20 de Abril de 2021

Sumário

Sistema massa-mola

Robert Hooke.

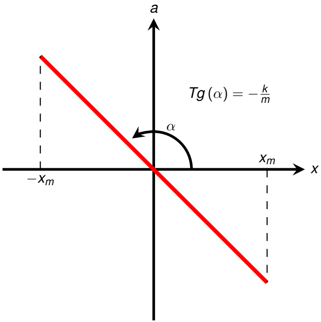


Sistema massa-mola.

Força restauradora ($\vec{F}_R$)

Obriga o sistema retornar para a posição de equilíbrio.

Lei de Hooke



Aceleração a em função do deslocamento x.

k: constante elástica (depende das propriedades do material);

Se $x_0 = 0$, pela Lei de Hooke $\vec{F} = -k\vec{x}$.

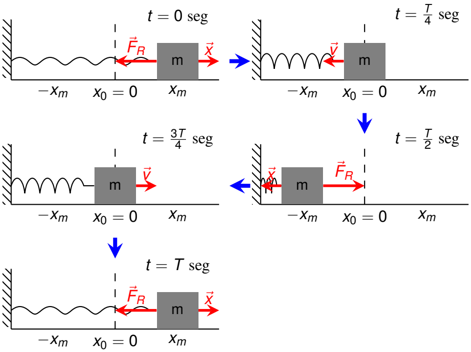
$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}.$$

Corollary

A aceleração do objeto e a força restauradora possuem sentidos contrários ao deslocamento.

Movimento harmônico simples (MHS)



Quatro etapas de um ciclo completo do MHS.

Amplitude (x_m): Máximo deslocamento da mola;

Período (T): Tempo de cada ciclo;

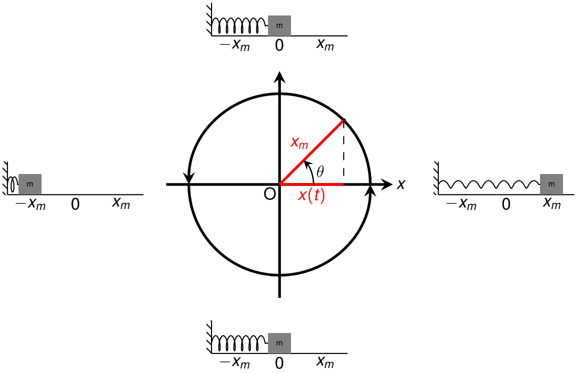
Frequência (f): Núm. de ciclos por segundo.

Corollary

Na ausência de atrito, o objeto realiza por tempo infinito um Movimento Harmônico Simples (MHS) a uma frequência de f ciclos por unidade de tempo,

$$f = \frac{1}{T}.$$

Sistema massa-mola e movimento circular uniforme (MCU)



Representação das quatro etapas do MHS no MCU.

Se $\theta = \omega t$, onde ω é a velocidade angular, a projeção de x(t) no eixo x é dado por

$$x(t) = x_m cos\,(\theta)\,,$$
$$x(t) = x_m cos\,(\omega t)\,.$$

Onde pelo MCU sabemos que

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.}$$

Defasagem

content...

Solução do MHS a partir da segunda lei de Newton

Aplicando a segunda lei de Newton para o sistema massa-mola onde $x_0 = 0$

$$F = -kx,$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

Vemos que uma solução para a equação acima seria uma função do tipo $x(t) = x_m\cos(\omega t + \phi)$, onde ϕ é a defasagem,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\sin(\omega t + \phi),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m\cos(\omega t + \phi),$$

Substituindo teremos

$$-m\omega^2\cancel{x_m\cos(\omega t + \phi)} = -\cancel{x_m}k\cancel{\cos(\omega t + \phi)}.$$

Vemos que a equação acima é verdadeira somente se

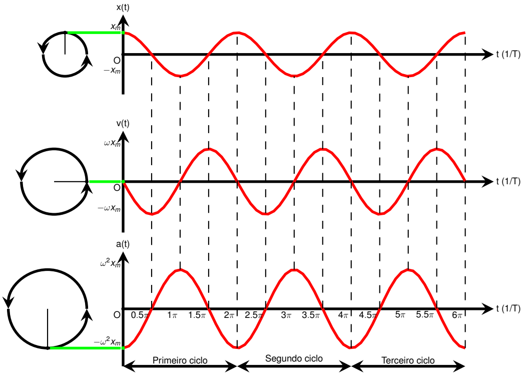
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

Funções horárias do MHS

Derivando $x(t)$ teremos

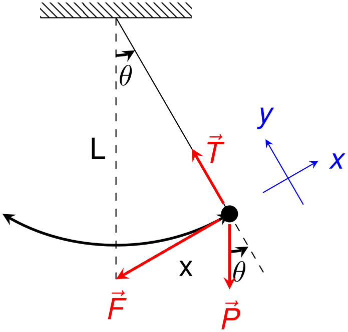
$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi), \\ \frac{dx}{dt} &= v(t) = v_m \sin(\omega t + \phi), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= a(t) = a_m \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Comparando as amplitudes das funções seno e cosseno com os valores obtidos das derivadas, podemos concluir que $v_m = \omega x_m$ e $a_m = \omega^2 x_m$.



Funções horárias no MHS.

Pêndulo simples



Pêndulo simples.

Considere uma partícula presa ao teto por um fio de comprimento L, se $\theta \ll 1$ temos $sen(\theta) \approx \theta$. Pela figura identificamos $\sin\theta = \frac{x}{L}$, portanto

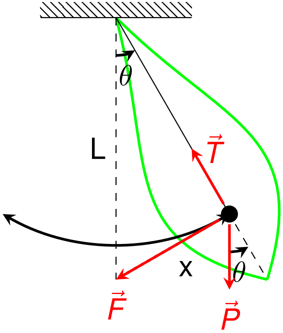
$$F = -mgsen(\theta)$$

$$\cancel{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -\cancel{m}\frac{g}{L}x$$

Resolvendo a equação de maneira análoga ao sistema massa-mola teremos

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Pêndulo físico



Corpo rígido de massa m girando em torno de um ponto fixo.

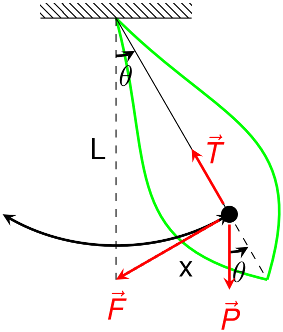
Considere um objeto cujo centro de massa está localizado a uma distância r do eixo de rotação, o torque atuando nele é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P},$$
$$\tau = -rP \sin\theta.$$

Se $\theta \ll 1$ podemos dizer que $\sin\theta \approx \theta$, ou seja,

$$\tau = -mgr \sin\theta,$$
$$\tau \approx -mgr\theta.$$

Pêndulo físico (continuação)



Pêndulo simples.

Porém, sabemos também que o torque é dado por $\tau = I\alpha$, onde I é o momento de inércia do objeto. Temos assim

$$I\alpha = -mgr\theta,$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgr\theta.$$

Temos assim uma equação idêntica ao sistema massa-mola, na variável θ, onde teremos

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}}.}$$

Pêndulo de torção

Pêndulo de torção.

Considere um disco circular de momento de inércia I, torcendo o disco por um ângulo θ o torque atuando no disco será dado por $\tau = I\alpha$. De maneira análoga ao sistema massa-mola, teremos

$$\tau = -\kappa\theta,$$

onde κ é a constante de torção do disco. Similarmente ao sistema massa-mola, a frequência angular equivale a

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}.}$$

Energia potencial no MHS

Sabendo que a força é conservativa

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} \overbrace{F(x)}^{-kx}\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = k\int_{x_0}^{x} x dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}$$

Se $x_0 = 0 \Rightarrow U(0) = 0$, portanto

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencial elástica do MHS

$$U(t) = \frac{kx_m^2}{2} cos^2\left(\omega t\right)$$

Energia cinética no MHS

Substituindo a expressão da velocidade

$$v(t) = -x_m\omega sen(\omega t)$$

na energia cinética

$$K(t) = \frac{mv^2}{2}$$

$$K(t) = \frac{m\left(x_m\omega sen(\omega t)\right)^2}{2}$$

$$K(t) = \frac{mx_m^2\omega^2 sen^2(\omega t)}{2}$$

mas $\omega^2 = \frac{k}{m}$,

$$K(t) = \frac{mx_m^2\left(\frac{k}{m}\right) sen^2(\omega t)}{2}$$

Energia cinética do MHS

$$K(t) = \frac{kx_m^2}{2} sen^2(\omega t)$$

Energia total no MHS

Sabendo que a energia total é

$$E = K + U.$$

Substituindo K e U,

$$E = \frac{kx_m^2}{2} sen^2(\omega t) + \frac{kx_m^2}{2} cos^2(\omega t)$$

$$E = \frac{kx_m^2}{2} \left[\underbrace{sen^2(\omega t) + cos^2(\omega t)}_{1} \right]$$

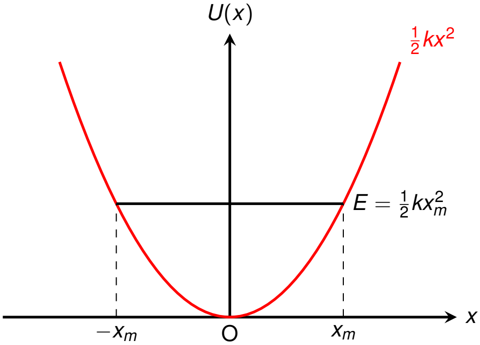
Energia total no MHS

$$E = \frac{kx_m^2}{2}$$

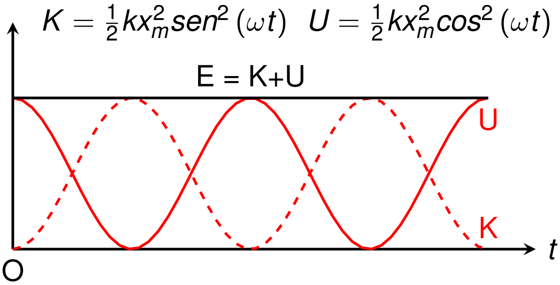
Corollary

A energia total do MHS é invariante no tempo, dependendo apenas da constante elástica e da amplitude de oscilação.

Energia total no MHS



Energia em função do deslocamento.



Energia em função do tempo.

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)