

# Movimento harmônico simples

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

23 de Abril de 2022

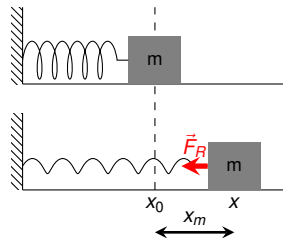
# Sumário

- 1 Oscilador harmônico
- 2 Casos específicos
- 3 Funções horárias do MHS
- 4 Energia do MHS
- 5 Oscilações forçadas e ressonância
- 6 Apêndice

## Sistema massa-mola



Robert Hooke.

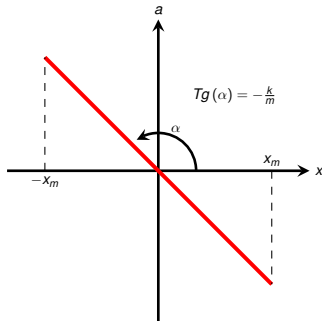


Sistema massa-mola.

### Força restauradora ( $\vec{F}_R$ )

Obriga o sistema retornar para a posição de equilíbrio.

## Lei de Hooke



Aceleração  $a$  em função do deslocamento  $x$ .

$k$ : constante elástica (depende das propriedades do material);

Se  $x_0 = 0$ , pela Lei de Hooke  $\vec{F} = -k\vec{x}$ .

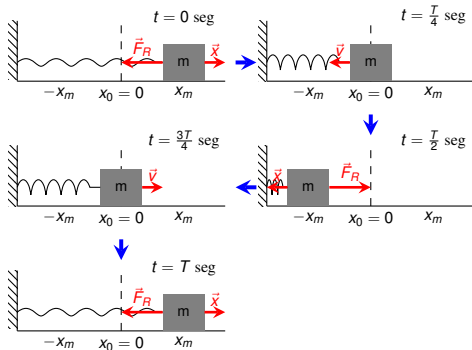
$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}.$$

### Corollary

*A aceleração do objeto e a força restauradora possuem sentidos contrários ao deslocamento.*

## Movimento harmônico simples (MHS)



Quatro etapas de um ciclo completo do MHS.

Amplitude ( $x_m$ ): Máximo deslocamento da mola;

Período (T): Tempo de cada ciclo;

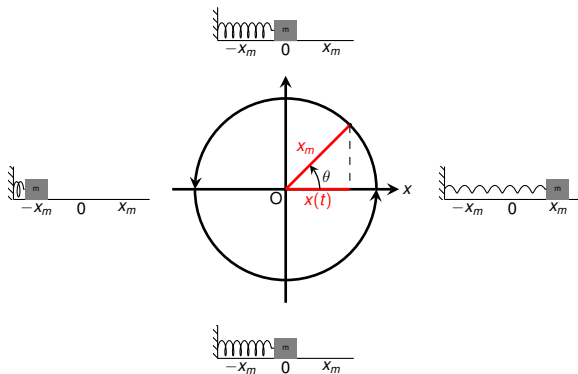
Frequência (f): Núm. de ciclos por segundo.

### Corollary

*Na ausência de atrito, o objeto realiza por tempo infinito um **Movimento Harmônico Simples** (MHS) a uma frequência de  $f$  ciclos por unidade de tempo,*

$$f = \frac{1}{T}.$$

## Sistema massa-mola e movimento circular uniforme (MCU)



Representação das quatro etapas do MHS no MCU.

Se  $\theta = \omega t$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular, a projeção de  $x(t)$  no eixo  $x$  é dado por

$$x(t) = x_m \cos(\theta),$$
$$x(t) = x_m \cos(\omega t).$$

Onde pelo MCU sabemos que

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

## Solução do MHS a partir da segunda lei de Newton

Aplicando a segunda lei de Newton para o sistema massa-mola onde  $x_0 = 0$ ,

$$F = -kx,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

Uma possível solução para a equação acima, usando a analogia com o MCU seria uma função do tipo  $x(t) = x_m \cos(\omega t)$ ,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin(\omega t),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t),$$

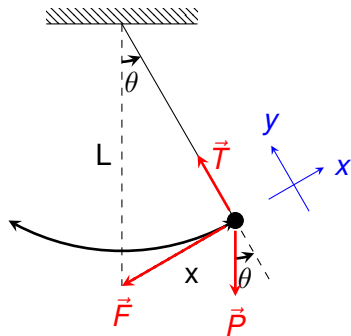
Substituindo teremos

$$-m\omega^2 \cancel{x_m \cos(\omega t)} = -\cancel{x_m} k \cos(\omega t).$$

Vemos que a equação acima é verdadeira somente se

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

## Pêndulo simples



Pêndulo simples.

Considere uma partícula presa ao teto por um fio de comprimento  $L$ , se  $\theta \ll 1$  temos  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ . Pela figura identificamos  $\sin \theta = \frac{x}{L}$ , portanto

$$F = -mg \text{sen}(\theta)$$

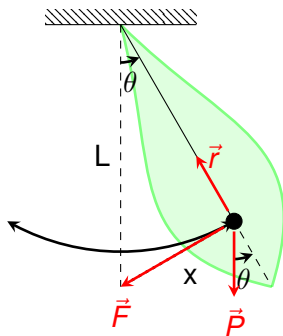
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{g}{L} x$$

Resolvendo a equação de maneira análoga ao sistema massa-mola teremos

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$



## Pêndulo físico



Objeto rígido de massa  $m$  girando em torno de um ponto fixo.

Considere um objeto cujo centro de massa está localizado a uma distância  $r$  do eixo de rotação, o torque atuando nele é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P},$$

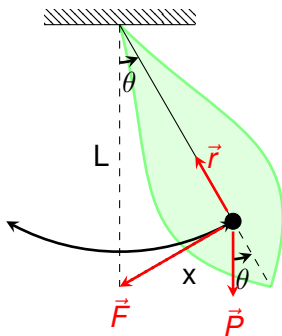
$$\tau = -rP \sin \theta.$$

Se  $\theta \ll 1$  podemos dizer que  $\sin \theta \approx \theta$ , ou seja,

$$\tau = -mgr \sin \theta,$$

$$\tau \approx -mgr\theta.$$

## Pêndulo físico (continuação)



Objeto rígido de massa  $m$  girando em torno de um ponto fixo.

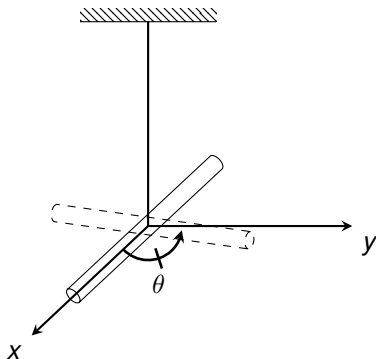
Porém, sabemos também que o torque é dado por  $\tau = I\alpha$ , onde  $I$  é o momento de inércia do objeto. Temos assim

$$I\alpha = -mgr\theta,$$
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgr\theta.$$

Temos assim uma equação idêntica ao sistema massa-mola, na variável  $\theta$ , onde teremos

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}}.$$

## Pêndulo de torção



Pêndulo de torção.

Considere um disco circular de momento de inércia  $I$ , torcendo o disco por um ângulo  $\theta$  o torque atuando no disco será dado por  $\tau = I\alpha$ . De maneira análoga ao sistema massa-mola, teremos

$$\tau = -\kappa\theta,$$

onde  $\kappa$  é a constante de torção do disco. Similarmente ao sistema massa-mola, a frequência angular equivale a

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}.$$

## Função horária do MHS

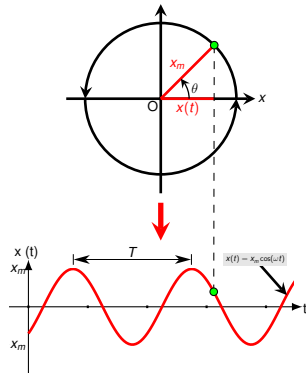
Assim, seguindo a analogia com o movimento circular, podemos imaginar que a função horária da posição do MHS pode ser dado por  $x(t) = x_m \cos \omega t$ . Essa expressão é válida em situações onde, no caso do sistema massa-mola, o bloco se localiza na amplitude no instante inicial  $t = 0$ , ou de maneira equivalente podemos dizer que o tempo foi contabilizado a partir de um instante inicial  $t_0 \neq 0$ , assim

$$x(t) = x_m \cos(\omega(t - t_0)),$$

$$x(t) = x_m \cos(\omega t - \omega t_0),$$

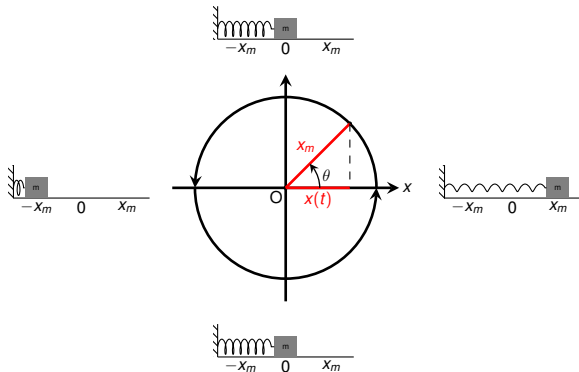
$$x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi).$$

$\phi$  é chamado de constante de fase.

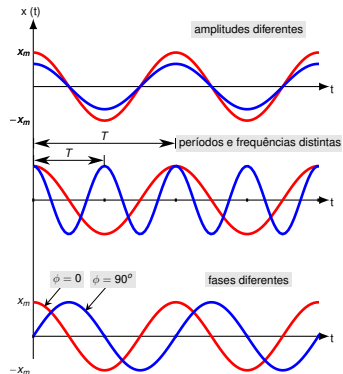


Função horária do MHS.

## Função horária do MHS (continuação)



Representação das quatro etapas do MHS no MCU.



Comparações entre MHS diferentes.

## Funções horárias do MHS

Derivando  $x(t)$  teremos

Comparando as amplitudes das funções seno e cosseno com os valores obtidos das derivadas, podemos concluir que  $v_m = -\omega x_m$  e  $a_m = -\omega^2 x_m$ .

## Energia potencial no MHS

Sabendo que a força é conservativa

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x \overbrace{F(x)}^{-kx} dx$$

$$U(x) - U(x_0) = k \int_{x_0}^x x dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}$$

Se  $x_0 = 0 \Rightarrow U(0) = 0$ , portanto

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

### Energia potencial elástica do MHS

$$U(t) = \frac{kx_m^2}{2} \cos^2(\omega t)$$

## Energia cinética no MHS

Substituindo a expressão da velocidade

$$v(t) = -x_m \omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

na energia cinética

$$K(t) = \frac{mv^2}{2}$$

$$K(t) = \frac{m(x_m \omega \operatorname{sen}(\omega t))^2}{2}$$

$$K(t) = \frac{mx_m^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)}{2}$$

$$\text{mas } \omega^2 = \frac{k}{m},$$

$$K(t) = \frac{mx_m^2 \left(\frac{k}{m}\right) \operatorname{sen}^2(\omega t)}{2}$$

### Energia cinética do MHS

$$K(t) = \frac{kx_m^2}{2} \operatorname{sen}^2(\omega t)$$



## Energia total no MHS

Sabendo que a energia total é

$$E = K + U.$$

Substituindo K e U,

$$E = \frac{kx_m^2}{2} \sin^2(\omega t) + \frac{kx_m^2}{2} \cos^2(\omega t)$$

$$E = \frac{kx_m^2}{2} \left[ \underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_1 \right]$$

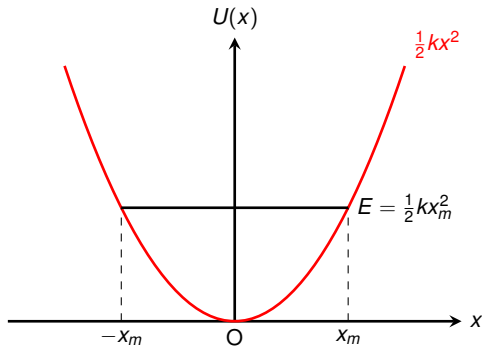
### Energia total no MHS

$$E = \frac{kx_m^2}{2}$$

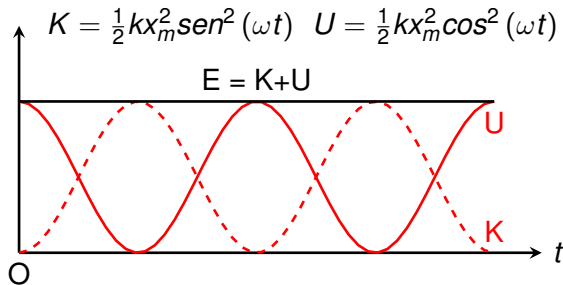
### Corollary

*A energia total do MHS é invariante no tempo, dependendo apenas da constante elástica e da amplitude de oscilação.*

## Representação gráfica da energia no MHS



Energia em função do deslocamento.



Energia em função do tempo.

## Bloco sob a ação de uma força externa de frequência $\omega_0$

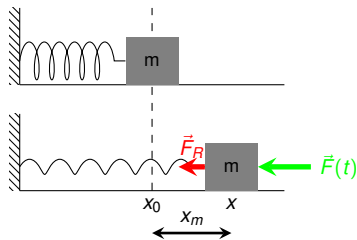
Considere um sistema massa-mola onde além da força restauradora  $\vec{F}_R$  atua sobre ele uma outra força  $F(t)$ , cujo valor depende de uma frequência  $\omega_0$ , onde

$$F(t) = F_m \cos(\omega_0 t).$$

Assim, aplicando a segunda Lei de Newton teremos

$$m \frac{dv}{dt} = -kx + F_m \cos(\omega_0 t),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{F_m}{m} \cos(\omega_0 t).$$



Sistema massa-mola sob ação da força externa  $\vec{F}(t)$ .

## Solução da equação do oscilador harmônico forçado

Para resolver a equação anterior, onde temos explicitamente o termo  $F_m \cos(\omega_0 t)$ , supomos uma solução do tipo

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t) + x'_m \sin(\omega_0 t).$$

Calculando a derivada de ordem 2 e substituindo na equação teremos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - x'_m \omega_0^2 \sin(\omega_0 t).$$

$$\begin{aligned} & -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - x'_m \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + \\ & + \omega^2 (x_m \cos(\omega_0 t) + x'_m \sin(\omega_0 t)) = \\ & = \frac{F_m}{m} \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Reorganizando os termos do lado esquerdo teremos

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega_0^2) x_m \cos(\omega_0 t) + (\omega^2 - \omega_0^2) x'_m \sin(\omega_0 t) \\ & = \frac{F_m}{m} \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

## Ressonância

Para satisfazer a equação anterior devemos impor a condição  $x'_m = 0$ , para que fique apenas o termo dependente de  $\cos(\omega_0 t)$ , assim

$$(\omega^2 - \omega_0^2)x_m \cos(\omega_0 t) = \frac{F_m}{m} \cos(\omega_0 t).$$

Assim podemos afirmar que  $x(t)$  é uma solução para o problema se

$$(\omega^2 - \omega_0^2)x_m = \frac{F_m}{m},$$

ou seja,

$$x_m = \frac{F_m}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Portanto, podemos concluir que a amplitude  $x_m$  da oscilação aumenta à medida que a frequência  $\omega_0$  do oscilador se aproxima gradualmente da frequência  $\omega$  de oscilação do MHS. **Esse efeito é chamado de ressonância da oscilação.** Caso não houver amortecimento temos que  $x_m \rightarrow \infty$  se  $\omega_0 \rightarrow \omega$ .

## Observações<sup>1</sup>

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Referências

 D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)