Sistema de partículas

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

4 de novembro de 2022

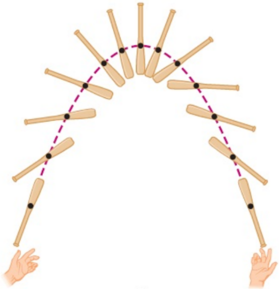
Sumário

Centro de massa

O centro de massa de um sistema de partículas ou objeto rígido é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.

Corollary

Á partir do centro de massa podemos determinar com mais facilidade o movimento do sistema.



Representação do centro de massa de um bastão [1].

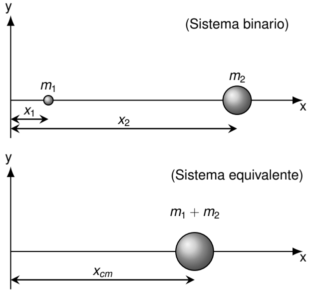
Sistema de duas partículas

Considere um sitema binário (contendo duas partículas) ao longo do eixo x, podemos substituir o conjunto por outro equivalente onde toda a massa está concentrada no seu centro de massa,

$$(m_1 + m_2)x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2,$$

$$\boxed{x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},}$$

onde x_{cm} é a localização da massa total do sistema.



Centro de massa das partículas de massa m_1 e m_2.

Sistema de várias partículas

Para um sistema contendo N partículas, podemos generalizar a idéia anterior na forma

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N)x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_N x_N,$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N},$$

$$\boxed{x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i,}$$

onde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N$, é a massa total do sistema.

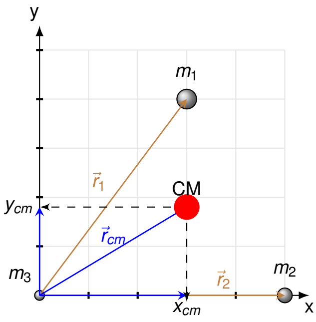
Sistema de partículas em duas ou três dimensões

No caso de um sistema de N partículas distribuídas no espaço, podemos determinar o centro de massa de cada coordenada separadamente,

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i,$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i,$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i.$$



Vetor posição $\vec{r}_{cm}$ do centro de massa (CM) de um conjunto de três partículas.

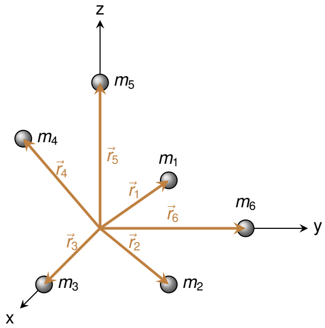
Sistema de partículas em duas ou três dimensões (continuação)

Usando a linguagem vetorial, podemos definir as coordenadas do centro de massa na forma abaixo

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\widehat{i} + y_{cm}\widehat{j} + z_{cm}\widehat{k},$$

ou de maneira equivalente

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i.}$$



Sistema de partículas.

Objetos maciços

No caso de um objeto rígido com uma distribuição contínua de massa, a somatória se transforma em uma integral, resultando em

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x dm, \quad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm, \quad z_{cm} = \frac{1}{M}\int z dm.$$

No caso de objetos homogêneos, onde a densidade ρ é constante, temos $\rho = \frac{M}{V}$, onde V é o volume do objeto. Substituindo na equação acima temos

$$x_{cm} = \frac{1}{\cancel{\rho} V}\int x \cancel{\rho} dV, \quad y_{cm} = \frac{1}{\cancel{\rho} V}\int y \cancel{\rho} dV, \quad z_{cm} = \frac{1}{\cancel{\rho} V}\int z \cancel{\rho} dV,$$

$$\boxed{x_{cm} = \frac{1}{V}\int x(V) dV, \quad y_{cm} = \frac{1}{V}\int y(V) dV, \quad z_{cm} = \frac{1}{V}\int z(V) dV.}$$

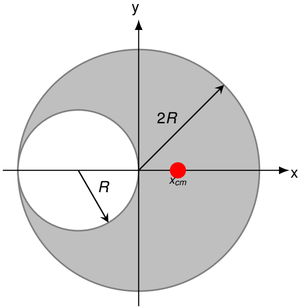
Outras considerações importantes a respeito do centro de massa

- ✓ O centro de massa de um objeto não precisa estar necessariamente no interior desse objeto;
- ✓ Em um objeto heterogêneo, o centro de massa possui a tendência de estar mais próximo da região que possui maior distribuição de massa;
- ✓ Em objetos que possuem simetria, o centro de massa se torna mais simples, pois nesse caso ele se encontra no ponto, na linha ou plano de simetria. Exemplo: Em uma esfera homogênea, o centro de massa se encontra no centro da esfera, em um cilindro homogêneo, o centro de massa se encontra no eixo do cilindro;
- ✓ Em um objeto homogêneo, o centro de massa se encontra no centro geométrico desse objeto.

Centro de massa de objetos opacos

Como exemplo, considere um disco circular homogêneo contendo um orifício também circular como mostra a figura ao lado. Do ponto de vista matemático, podemos dizer que a distribuição de massa é equivalente a soma da massa de um círculo maciço com outro disco de massa negativa. Para calcular o centro de massa do conjunto, concentramos toda a massa em dois pontos de massa m_1 e m_2,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{(m_1 + m_2)}.$$



Centro de massa de um disco circular vazado.

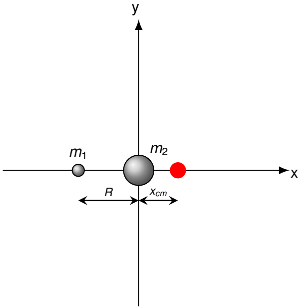
Centro de massa de objetos opacos (continuação)

Porém, pela simetria do conjunto, percebe-se que o centro de massa encontra-se no eixo x que representa a linha de simetria do problema, portanto

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)}.$$

Como os discos são homogêneos, podemos dizer que $m = \rho \pi r^2$, onde ρ é a densidade e r o raio do disco,

$$x_{cm} = \frac{-\rho\pi R^2(-R) + \rho\pi(2R)^2(0)}{-\rho\pi R^2 + \rho\pi(2R)^2} = \boxed{\frac{R}{3}.}$$



Centro de massa de um disco circular vazado.

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

Sabemos que

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N,$$

onde M é a massa total. Derivando duas vezes temos

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_1\vec{a}_2 + \cdots + m_N\vec{a}_N.$$

Identificando os termos do lado direito com a segunda Lei de Newton temos

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N.$$

Sabendo que a força resultante atuando no conjunto é soma vetorial das forças externas atuando em cada partícula e identificando o termo do lado esquerdo com a segunda Lei de Newton, podemos dizer que a força resultante é dado por

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N,$$

$$\boxed{\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM}.}$$

Momento linear de um sistema de partícula

Sabemos que

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N,$$

onde M é a massa total. Derivando temos

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_1\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N,$$

Podemos definir quantitativamente a quantidade de movimento de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ como

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.}$$

Temos assim

$$M\vec{v}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{v}_N.$$

Dessa maneira, a quantidade de movimento $\vec{P}$ do centro de massa pode ser definido como

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}.}$$

Impulso como variação da quantidade de movimento

Derivando a equação anterior temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt},$$
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}.$$

Sabendo que $\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM}$ temos

$$\boxed{\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}.}$$

Aplicando a regra diferencial temos

$$d\vec{P} = \vec{F}_{res}dt.$$

Integrando durante um intervalo de tempo Δt, onde $\Delta t = t_f - t_i$ temos

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{res}dt,$$

onde $\vec{J}$ é chamado impulso e é igual a variação do momento $\Delta\vec{P}$.

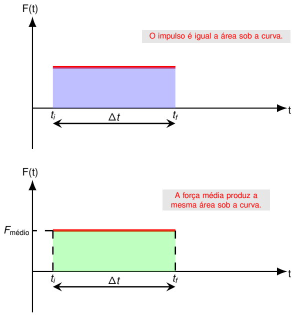
Impulso à partir do gráfico Força versus Tempo

Se $\vec{F}(t)$ é uma função contínua, o impulso sobre a partícula é igual a área abaixo da curva em um gráfico força versus tempo. Além do mais, à partir do teorema do valor médio, o impulso pode ser calculado sabendo o valor médio da força,

$$J = F_{\text{médio}}\Delta t,$$

onde essa expressão é útil para determinar a força média causada pela colisão de N partículas idênticas em um alvo fixo, dado por

$$\boxed{F_{\text{médio}} = N\Delta p/\Delta t.}$$



Cálculo do módulo do impulso à partir do gráfico Força versus tempo.

Conservação do momento linear

Em um sistema isolado não há forças externas atuando sobre ele ($F_{res} = 0$), portanto

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0},$$

ou seja,

$$\boxed{P = \text{constante.}}$$

Em outras palavras, o momento linear total do sistema permanece invariante sob translação do seu centro de massa.

Lei da conservação do momento linear

Se um sistema de partículas não está submetido a forças externas (como no caso de um sistema isolado), o momento linear total desse sistema não pode mudar.

Demais considerações a respeito da Lei da conservação do momento linear

- ✓ Se uma das componentes da força **externa** aplicada a um sistema isolado é nula, a componente do momento linear do sistema em questão em relação ao mesmo eixo não pode variar.
- ✓ Se não houver forças externas atuando no sistema teremos

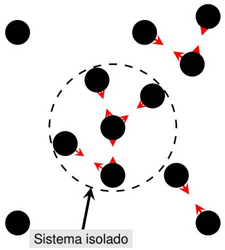
$$\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM} = \vec{0},$$

ou seja, o momento linear do centro de massa permanece invariante sob translação no espaço,

$$\boxed{P_{\mathrm{CM}} = \text{constante.}}$$

Momento e energia cinética em colisões

- ✓ Em um sistema isolado, na ausência de forças dissipativas a energia mecânica é conservada. Considerando que as interações ocorrem apenas por colisão, podemos dizer que a energia cinética é conservada. Esse tipo de colisão é chamado de elástica.
- ✓ Colisões onde parte da energia cinética é convertida em outras formas de energia, chama-se inelásticas (colisões que ocorrem no cotidiano).
- ✓ A perda máxima de energia cinética ocorre quando os corpos permanecem juntos após a colisão. Esse tipo de colisão é chamado perfeitamente inelástico.



Colisões em um sistema isolado de partículas.

Colisões inelásticas em uma dimensão

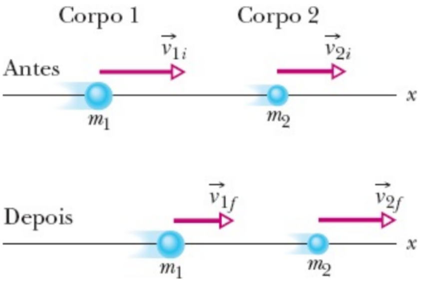
Sabemos que

$$\left(\frac{\text{momento total } \vec{P}_i}{\text{antes da colisão}}\right) = \left(\frac{\text{momento total } \vec{P}_f}{\text{antes da colisão}}\right).$$

Considerando um sistema de duas partículas 1 e 2 temos

$$\vec{p}_{(1,i)} + \vec{p}_{(2,i)} = \vec{p}_{(1,f)} + \vec{p}_{(2,f)},$$

$$\boxed{m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}.}$$



Representação de uma colisão inelástica entre dois objetos.

Energia cinética em um sistema de partículas

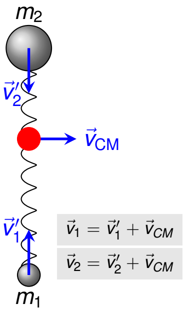
A energia cinética K de um sistema de N partículas vale

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_N v_N^2.$$

Porém, podemos determinar o movimento do conjunto como a combinação do movimento do centro de massa ($M\vec{v}_{\mathrm{CM}}$) com o movimento de cada partícula em relação ao seu centro de massa ($m\vec{v}'$).

$$K = \frac{1}{2}m_1 \left|\vec{v}_1' + \vec{v}_{\mathrm{CM}}\right|^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_1 \left|\vec{v}_N' + \vec{v}_{\mathrm{CM}}\right|^2.$$

onde $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$.

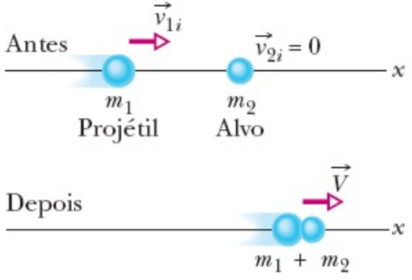


Velocidades relativa $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$ e do centro de massa $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$.

Colisões perfeitamente inelásticas unidimensionais

Para que a energia cinética seja mínima após a colisão, o movimento das partículas em relação ao centro de massa deve ser zero (nota-se que não necessariamente o movimento do centro de massa deve ser zero!!!!). Para isso, elas devem se mover juntos com a mesma velocidade $\vec{V}$. Se considerarmos que uma das partículas possui velocidade zero antes da colisão, teremos

$$m_1 \vec{v}_{(1,i)} = (m_1 + m_2)\vec{V},$$
$$\vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{(1,i)}.$$



Representação de uma colisão perfeitamente inelástica entre dois objetos [1].

Colisões elásticas em uma dimensão

Se durante a colisão a energia cinética total dos objetos envolvidos não é convertida em outra forma de energia, podemos dizer que

$$\left(\frac{\text{Energia cinética total } \vec{P}_i}{\text{antes da colisão}}\right) = \left(\frac{\text{Energia cinética total } \vec{P}_f}{\text{antes da colisão}}\right).$$

Portanto, nas colisões elásticas a energia cinética dos objetos envolvidos na colisão pode mudar, mas a energia cinética total permanece constante. Em suma, podemos dizer que

$$m_1\vec{v}_{(1,i)} + m_2\vec{v}_{(2,i)} = m_1\vec{v}_{(1,f)} + m_2\vec{v}_{(2,f)},$$
$$\frac{1}{2}m_1v^2_{(1,i)} + \frac{1}{2}m_2v^2_{(2,i)} = \frac{1}{2}m_1v^2_{(1,f)} + \frac{1}{2}m_2v^2_{(2,f)}.$$

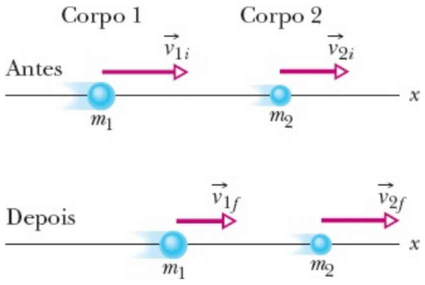
Colisões elásticas em uma dimensão (alvo estacionário)

Considerando a partícula 2 como um alvo estacionário teremos $v_{2,i}$, portanto

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f},$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{(1,i)}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{(1,f)}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{(2,f)}^2.$$

Substituindo $v_{1,i}$ da primeira equação teremos

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i},$$
$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}.$$



Representação de uma colisão inelástica entre dois objetos [1].

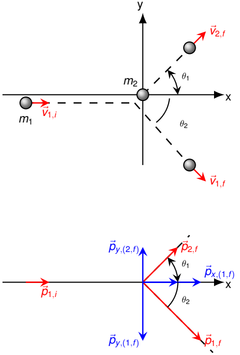
Colisões em duas dimensões

Quando a colisão não é frontal, a Lei de conservação do momento linear ainda continua sendo válida, porém o momento linear é tratado no caso bidimensional. Através da equação

$$m_1 \vec{v}_{(1,i)} + m_2 \vec{v}_{(2,i)} = m_1 \vec{v}_{(1,f)} + m_2 \vec{v}_{(2,f)}$$

e utilizando propriedades trigonométricas temos

$$\begin{aligned} m_1 v_{(1,i)} &= m_1 v_{(1,f)} \cos\theta_1 + m_2 v_{(2,f)} \cos\theta_2, \\ 0 &= m_1 v_{(1,f)} \sin\theta_1 + m_2 v_{(2,f)} \sin\theta_2. \end{aligned}$$



Colisão lateral entre duas partículas.

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)