Movimento em duas e três dimensões

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

25 de abril de 2025

Sumário

Vetor posição e deslocamento

O vetor posição pode ser definido como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

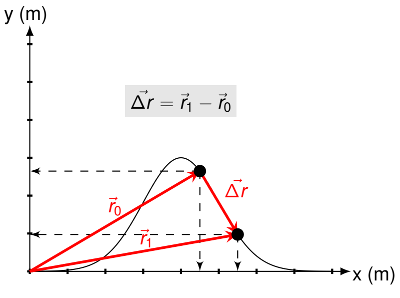
O deslocamento da partícula da posição $\vec{r}_0$ para $\vec{r}_1$ é dado por,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0,$$

$$\Delta\vec{r} = (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) - (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}),$$

$$\Delta\vec{r} = (x_1 - x_0)\hat{i} + (y_1 - y_0)\hat{j} + (z_1 - z_0)\hat{k},$$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.}$$



Deslocamento no plano xy.

Velocidade média

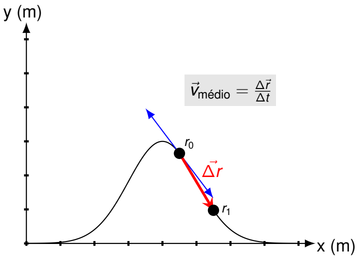
Sabemos que

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}}.$$

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, a velocidade média é dado por

$$\vec{v}_{\text{médio}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

$$\vec{v}_{\text{médio}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\widehat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\widehat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\widehat{k}.$$



Tangente da trajetória da partícula na posição $\vec{r}_0$.

Velocidade instantânea

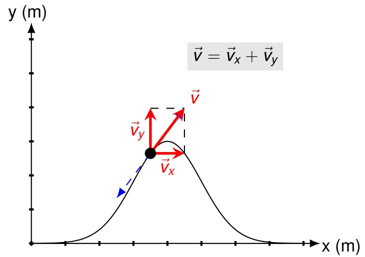
Reduzindo o intervalo de tempo Δt a um valor infinitesimal, $\Delta t \to 0$, temos

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

Concluimos assim que

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.}$$



Velocidade $\vec{v}$ de uma partícula e suas componentes vetoriais.

Aceleração média

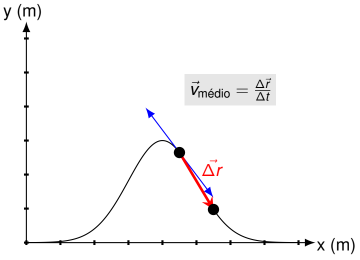
Sabemos que

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação da velocidade}}{\text{intervalo de tempo}}.$$

Se uma partícula sofre uma variação $\Delta\vec{v}$ da sua velocidade em um intervalo de tempo Δt, a aceleração média é dado por

$$\vec{a}_{\text{médio}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

$$\vec{a}_{\text{médio}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k}.$$



Cálculo da v_{med} a partir de x(t).

Aceleração instantânea

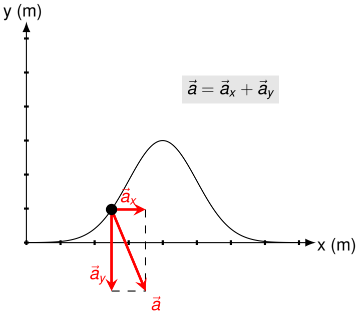
Reduzindo o intervalo de tempo Δt a um valor infinitesimal, $\Delta t \to 0$, temos

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}.$$

Concluimos assim que

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}.}$$



Gráficos da posição e velocidade.

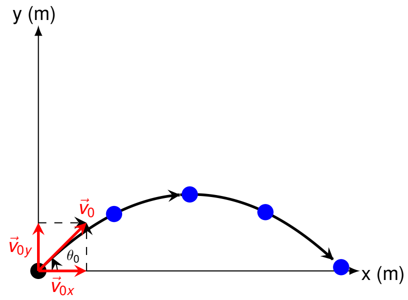
Movimento balístico

A velocidade inicial $\vec{v}_0$ de um projétil que faz um ângulo θ_0 com o eixo x pode ser decomposta em suas componentes horizontal e vertical,

$$\vec{v}_0 = v_0 cos\theta_0 \widehat{i} + v_0 sen\theta_0 \widehat{j}.$$

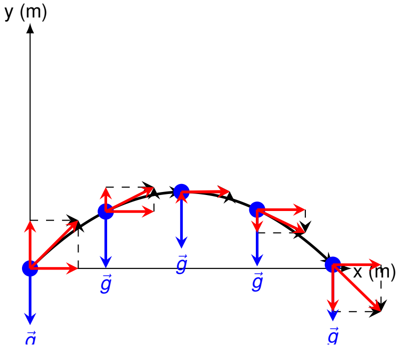
Corollary

No movimento balístico, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, e um não interfere no outro.

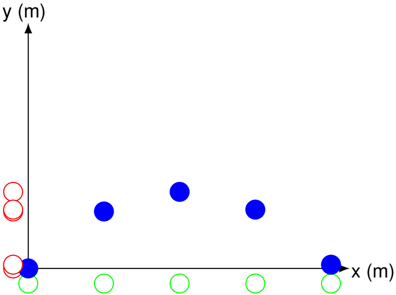


Trajetória parabólica de um projétil.

Movimentos horizontal e vertical na trajetória balística



Trajetória da partícula.



Movimentos horizontal e vertical.

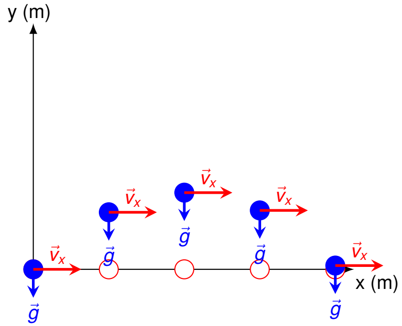
Movimento horizontal

No movimento horizontal temos que a aceleração é zero (pois a única aceleração é a da gravidade que está orientada na direção do eixo y), portanto

$$x = x_0 + v_{0x} t.$$

Sabendo que $v_{0x} = v_0 cos\theta_0$, temos

$$x(t) = x_0 + v_0 cos\theta_0 t,$$
$$v(t) = v_0 cos\theta_0.$$



Movimento horizontal da partícula.

Movimento vertical

No movimento vertical a aceleração é constante, onde

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Portanto é válido as fórmulas do movimento retilíneo uniformemente variado. Sabendo que

$$v_y = vsen\theta,$$

temos as equações do movimento vertical,

Movimento vertical.

Definição	Equação
Velocidade	$v_y(t) = v_0 sen\theta_0 - gt$
Torricelli	$v_y^2 = (v_0 sen\theta_0)^2 - 2g\Delta y$
Posição	$y(t) = y_0 + v_0 sen\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Posição	$y(t) = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 sen\theta + v_y)\, t$
Posição	$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}gt^2$

Equação da trajetória

Podemos determinar o tempo na equação $x = x_0 + v_0 cos\theta_0 t$ no movimento horizontal, na forma

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 cos\theta_0}.$$

Sabendo que o tempo registrado nos dois movimentos (horizontal e vertical) são os mesmos e considerando que $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, podemos assim substituir t em $y(t)$,

$$y = y_0 + v_0 sen\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$y = 0 + \cancel{v_0} sen\theta_0 \left(\frac{x - 0}{\cancel{v_0} cos\theta_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - 0}{v_0 cos\theta_0} \right)^2,$$

$$\boxed{y(x) = tan\theta_0 x - \frac{g x^2}{2(v_0 cos\theta_0)^2}.}$$

Alcance horizontal

Para determinar a distância horizontal R percorrida pelo projétil ($R = \Delta x$), substituímos R em

$$R = v_0 cos\theta_0 t.$$

O trecho R corresponde as posições inicial e final onde $y_{\text{final}} = y_0$, portanto

$$\Delta y = v_0 sen\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Eliminando t na primeira equação e substituindo na segunda temos

$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g} sen 2\theta_0.}$$

Corollary

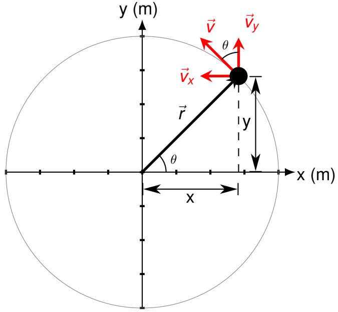
O alcance horizontal R é máximo para um ângulo de lançamento igual a 45°.

Movimento circular uniforme

Considerando a trajetória circular de uma partícula, a velocidade $\vec{v}$ é sempre tangente a trajetória. Como o movimento é bidimensional, decompomos em duas componentes, nas direções x e y,

$$\vec{v} = v_x \widehat{i} + v_y \widehat{j},$$

$$\vec{v} = -v sen\theta \widehat{i} + v cos\theta \widehat{j}.$$



Velocidade $\vec{v}$ tangencial a trajetória circular.

Movimento circular uniforme (continuação)

Usando trigonometria podemos substituir *senθ* por y/r e *cosθ* por x/r, ou seja,

$$\vec{v} = \left(-\frac{yv}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{xv}{r}\right)\hat{j}.$$

Considerando v e r constantes, podemos determinar a aceleração $\vec{a}$ derivando $\vec{v}$ em relação ao tempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v}{r}\overbrace{\frac{dy}{dt}}^{v_y}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v_x}\right)\hat{j},$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v\,v_y}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{v\,v_x}{r}\right)\hat{j}.$$

Mas $v_x = -vsen\theta$ e $v_y = vcos\theta$,

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}cos\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}sen\theta\right)\hat{j}.}$$

Movimento circular uniforme (continuação)

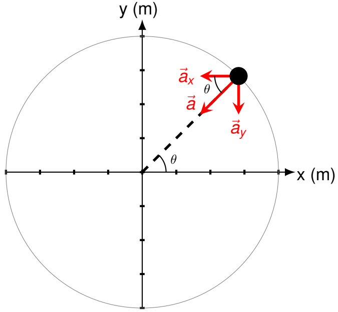
A partir da aceleração $\vec{a}$, demostrado anteriormente, calculamos o seu módulo

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

$$a^2 = \left(-\frac{v^2}{r}cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{v^2}{r}sen\theta\right)^2,$$

$$a^2 = \left(-\frac{v^2}{r}\right)^2 \underbrace{\left(cos^2\theta + sen^2\theta\right)}_{1},$$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}.}$$



Direção radial da aceleração $\vec{a}$.

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: *Escrever o número incluindo a vírgula.*

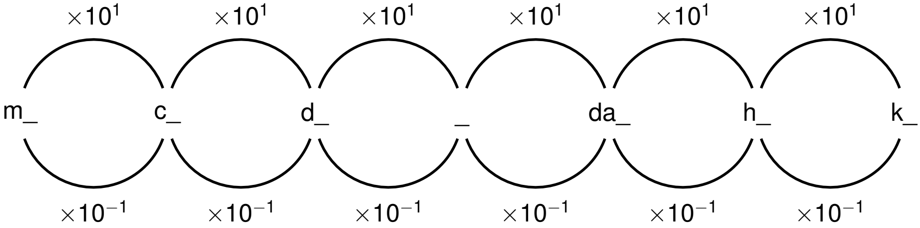
Passo 2: *Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.*

Passo 3: *Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar"com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6{,}59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

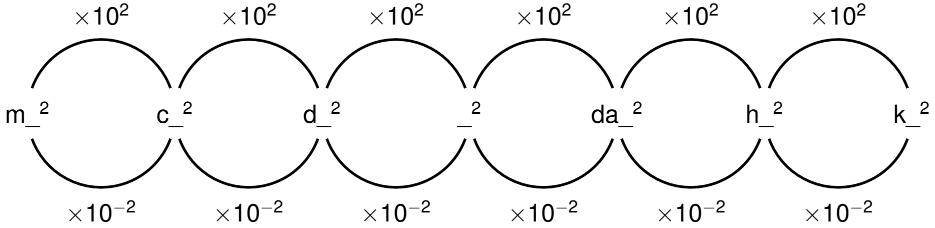


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1)\times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ kg} = 2,5 \times 10^{(1)\times 6} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^{6} \text{ mg}$$

$$10 \text{ ms} = 10 \times 10^{(-1)\times 3} \text{ s} \rightarrow 10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Conversão de unidades em duas dimensões

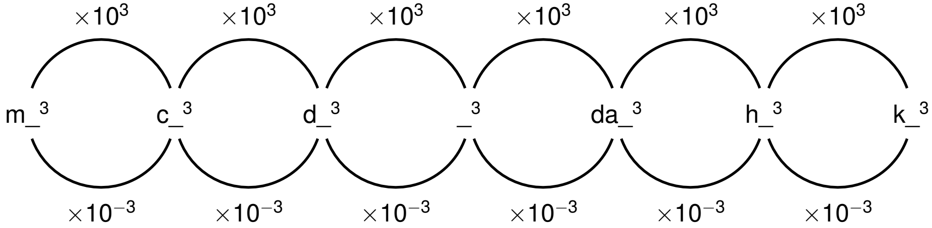


$$1\ \mathrm{mm}^2 = 1 \times 10^{(-2)\times 2}\ \mathrm{dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4}\ \mathrm{dm}^2$$

$$2,5\ \mathrm{m}^2 = 2,5 \times 10^{(2)\times 3}\ \mathrm{mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^{6}\ \mathrm{mm}^2$$

$$10\ \mathrm{ms}^2 = 10 \times 10^{(-2)\times 3}\ \mathrm{s}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões



$$1\ \text{mm}^3 = 1 \times 10^{(-3)\times 2}\ \text{dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6}\ \text{dm}^3$$

$$2,5\ \text{m}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 3}\ \text{mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{9}\ \text{mm}^3$$

$$2,5\ \text{km}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 6}\ \text{mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{18}\ \text{mm}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsílon	E	ϵ,ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ,φ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)