Movimento harmônico simples

Flaviano Williams Fernandes

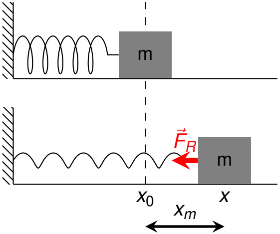
Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

25 de Outubro de 2021

Sumário

Sistema massa-mola

Robert Hooke.

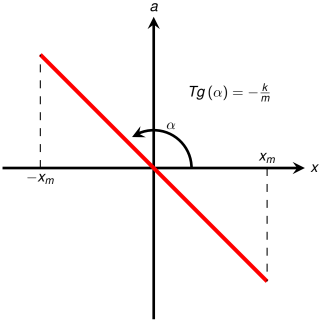


Sistema massa-mola.

Força restauradora ($\vec{F}_R$)

Obriga o sistema retornar para a posição de equilíbrio.

Lei de Hooke



Aceleração a em função do deslocamento x.

k: constante elástica (depende das propriedades do material);

Se $x_0 = 0$, pela Lei de Hooke $\vec{F} = -k\vec{x}$.

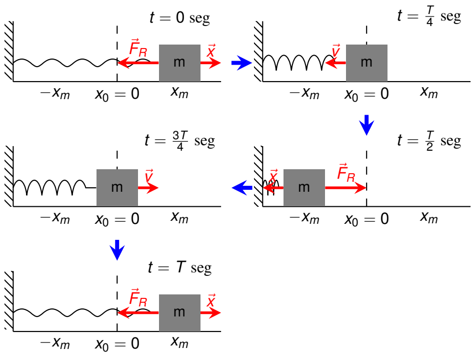
$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}.$$

Corollary

A aceleração do objeto e a força restauradora possuem sentidos contrários ao deslocamento.

Movimento harmônico simples (MHS)



Quatro etapas de um ciclo completo do MHS.

Amplitude (x_m): Máximo deslocamento da mola;

Período (T): Tempo de cada ciclo;

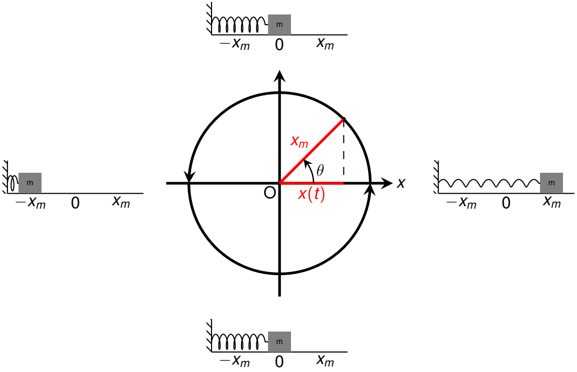
Frequência (f): Núm. de ciclos por segundo.

Corollary

Na ausência de atrito, o objeto realiza por tempo infinito um Movimento Harmônico Simples (MHS) a uma frequência de f ciclos por unidade de tempo,

$$f = \frac{1}{T}.$$

Sistema massa-mola e movimento circular uniforme (MCU)



Representação das quatro etapas do MHS no MCU.

Se $\theta = \omega t$, onde ω é a velocidade angular, a projeção de x(t) no eixo x é dado por

$$x(t) = x_m cos\,(\theta)\,,$$
$$x(t) = x_m cos\,(\omega t)\,.$$

Onde pelo MCU sabemos que

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.}$$

Solução do MHS a partir da segunda lei de Newton

Aplicando a segunda lei de Newton para o sistema massa-mola onde $x_0 = 0$,

$$F = -kx,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

Uma possível solução para a equação acima, usando a analogia com o MCU seria uma função do tipo $x(t) = x_m \cos(\omega t)$,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin(\omega t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t),$$

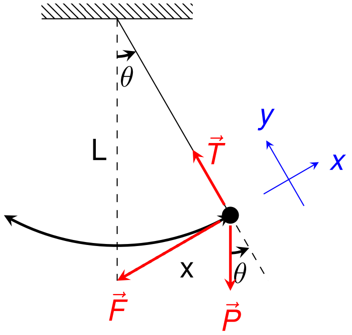
Substituindo teremos

$$-m\omega^2 \cancel{x_m} \cancel{\cos(\omega t)} = -\cancel{x_m} k \cancel{\cos(\omega t)}.$$

Vemos que a equação acima é verdadeira somente se

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

Pêndulo simples



Pêndulo simples.

Considere uma partícula presa ao teto por um fio de comprimento L, se $\theta \ll 1$ temos $sen(\theta) \approx \theta$. Pela figura identificamos $\sin\theta = \frac{x}{L}$, portanto

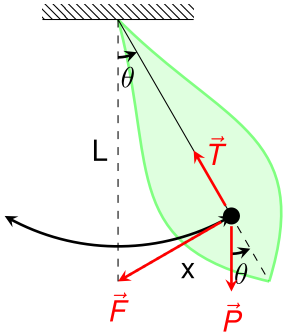
$$F = -mgsen(\theta)$$

$$\cancel{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -\cancel{m}\frac{g}{L}x$$

Resolvendo a equação de maneira análoga ao sistema massa-mola teremos

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Pêndulo físico



Objeto rígido de massa m girando em torno de um ponto fixo.

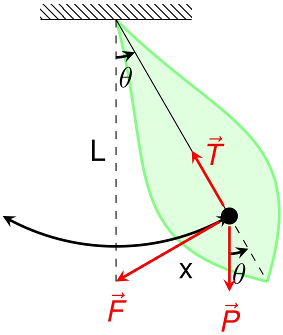
Considere um objeto cujo centro de massa está localizado a uma distância r do eixo de rotação, o torque atuando nele é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P},$$
$$\tau = -rP \sin\theta.$$

Se $\theta \ll 1$ podemos dizer que $\sin\theta \approx \theta$, ou seja,

$$\tau = -mgr \sin\theta,$$
$$\tau \approx -mgr\theta.$$

Pêndulo físico (continuação)



Objeto rígido de massa m girando em torno de um ponto fixo.

Porém, sabemos também que o torque é dado por $\tau = I\alpha$, onde I é o momento de inércia do objeto. Temos assim

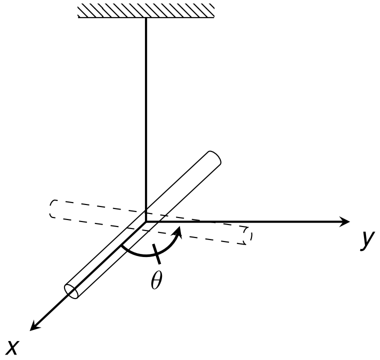
$$I\alpha = -mgr\theta,$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgr\theta.$$

Temos assim uma equação idêntica ao sistema massa-mola, na variável θ, onde teremos

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}}.}$$

Pêndulo de torção



Pêndulo de torção.

Considere um disco circular de momento de inércia I, torcendo o disco por um ângulo θ o torque atuando no disco será dado por $\tau = I\alpha$. De maneira análoga ao sistema massa-mola, teremos

$$\tau = -\kappa\theta,$$

onde κ é a constante de torção do disco. Similarmente ao sistema massa-mola, a frequência angular equivale a

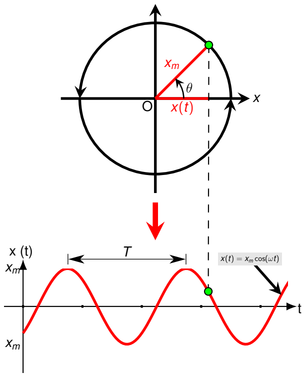
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}.}$$

Função horária do MHS

Assim, seguindo a analogia com o movimento circular, podemos imaginar que a função horária da posição do MHS pode ser dado por $x(t) = x_m \cos \omega t$. Essa expressão é válida em situações onde, no caso do sistema massa-mola, o bloco se localiza na amplitude no instante inicial t = 0, ou de maneira equivalente podemos dizer que o tempo foi contabilizado a partir de um instante inicial $t_0 \neq 0$, assim

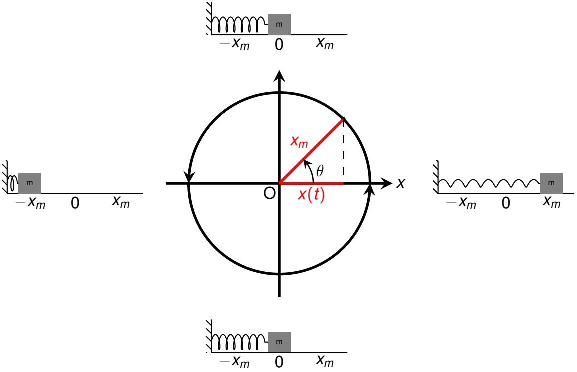
$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_m \cos(\omega(t - t_0)),\\
x(t) &= x_m \cos(\omega t - \omega t_0),\\
x(t) &= x_m \cos(\omega t - \phi).
\end{aligned}
$$

ϕ é chamado de constante de fase.

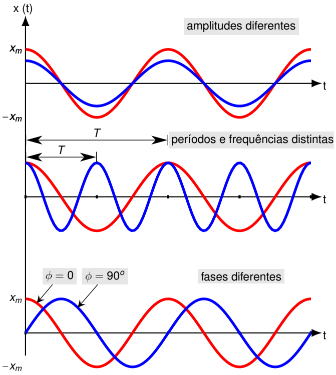


Função horária do MHS.

Função horária do MHS (continuação)



Representação das quatro etapas do MHS no MCU.



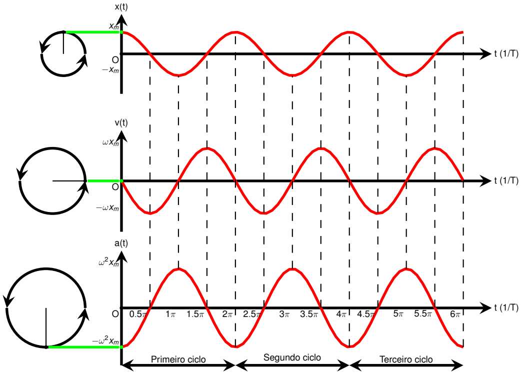
Comparações entre MHS diferentes.

Funções horárias do MHS

Derivando $x(t)$ teremos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$
$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_m \sin(\omega t + \phi),$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = a_m \cos(\omega t + \phi).$$

Comparando as amplitudes das funções seno e cosseno com os valores obtidos das derivadas, podemos concluir que $v_m = \omega x_m$ e $a_m = \omega^2 x_m$.



Funções horárias no MHS.

Energia potencial no MHS

Sabendo que a força é conservativa

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} \overbrace{F(x)}^{-kx} dx$$

$$U(x) - U(x_0) = k \int_{x_0}^{x} x dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}$$

Se $x_0 = 0 \Rightarrow U(0) = 0$, portanto

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencial elástica do MHS

$$U(t) = \frac{kx_m^2}{2} cos^2(\omega t)$$

Energia cinética no MHS

Substituindo a expressão da velocidade

$$v(t) = -x_m \omega sen(\omega t)$$

na energia cinética

$$K(t) = \frac{mv^2}{2}$$

$$K(t) = \frac{m(x_m \omega sen(\omega t))^2}{2}$$

$$K(t) = \frac{m x_m^2 \omega^2 sen^2(\omega t)}{2}$$

mas $\omega^2 = \frac{k}{m}$,

$$K(t) = \frac{\color{red}{m} x_m^2 \left(\frac{k}{\color{red}{m}}\right) sen^2(\omega t)}{2}$$

Energia cinética do MHS

$$K(t) = \frac{k x_m^2}{2} sen^2(\omega t)$$

Energia total no MHS

Sabendo que a energia total é

$$E = K + U.$$

Substituindo K e U,

$$E = \frac{kx_m^2}{2} sen^2(\omega t) + \frac{kx_m^2}{2} cos^2(\omega t)$$

$$E = \frac{kx_m^2}{2}\left[\underbrace{sen^2(\omega t) + cos^2(\omega t)}_{1}\right]$$

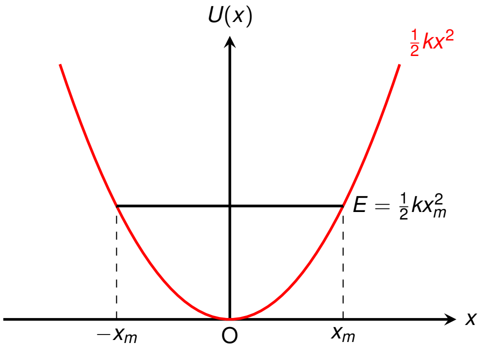
Energia total no MHS

$$E = \frac{kx_m^2}{2}$$

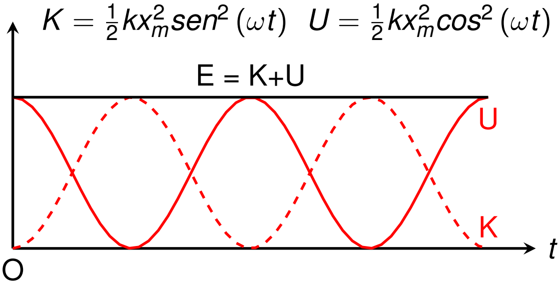
Corollary

A energia total do MHS é invariante no tempo, dependendo apenas da constante elástica e da amplitude de oscilação.

Representação gráfica da energia no MHS



Energia em função do deslocamento.



Energia em função do tempo.

Bloco sob a ação de uma força externa de frequência ω_0

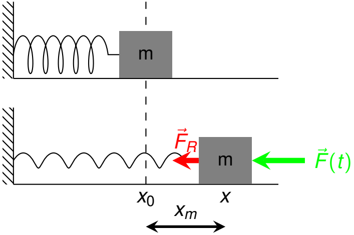
Considere um sistema massa-mola onde além da força restauradora $\vec{F}_R$ atua sobre ele uma outra força $F(t)$, cujo valor depende de uma frequência ω_0, onde

$$F(t) = F_m \cos(\omega t).$$

Assim, aplicando a segunda Lei de Newton teremos

$$m\frac{dv}{dt} = -kx + F_m \cos(\omega_0 t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{F_m}{m}\cos(\omega_0 t).$$



Sistema massa-mola sob ação da força externa $\vec{F}(t)$.

Solução da equação do oscilador harmônico forçado

Para resolver a equação anterior, onde temos explicitamente o termo $F_m \cos(\omega_0 t)$, supomos uma solução do tipo

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t) + x'_m \sin(\omega_0 t).$$

Calculando a derivada de ordem 2 e substituindo na equação teremos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - x'_m\omega_0^2 \sin(\omega_0 t).$$

$$- x_m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - x'_m\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) +$$
$$+ \omega^2(x_m \cos(\omega_0 t) + x'_m \sin(\omega_0 t)) =$$
$$= \frac{F_m}{m} \cos(\omega_0 t).$$

Reorganizando os termos do lado esquerdo teremos

$$(\omega^2 - \omega_0^2)x_m \cos(\omega_0 t) + (\omega^2 - \omega_0^2)x'_m \sin(\omega_0 t)$$
$$= \frac{F_m}{m} \cos(\omega_0 t).$$

Ressonância

Impondo a condição $x'_m = 0$, podemos simplificar a expressão anterior eliminando o termo dependente de $\sin(\omega_0 t)$, assim

$$(\omega^2 - \omega_0^2)x_m \cos(\omega_0 t) = \frac{F_m}{m}\cos(\omega_0 t).$$

Assim podemos afirmar que $x(t)$ é uma solução para o problema se

$$(\omega^2 - \omega_0^2)x_m = \frac{F_m}{m},$$

ou seja,

$$x_m = \frac{F_m}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Portanto, podemos concluir que a amplitude x_m da oscilação aumenta à medida que a frequência ω_0 do oscilador se aproxima gradualmente da frequência ω de oscilação do MHS. Esse efeito é chamado de ressonância da oscilação. Caso não houver amortecimento temos que $x_m \to \infty$ se $\omega_0 \to \omega$.

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)