Equações de Maxwell

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

18 de Abril de 2021

Sumário

Equações de Maxwell

As principais equações do eletromagnetismo são

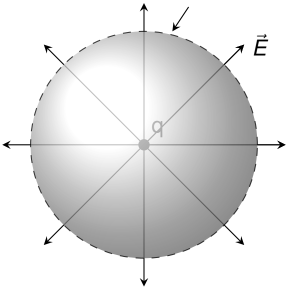
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad \text{(Lei de Gauss)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \qquad \text{(Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \text{(Lei de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i, \qquad \text{(Lei de Ampère)}$$

Lei de Gauss



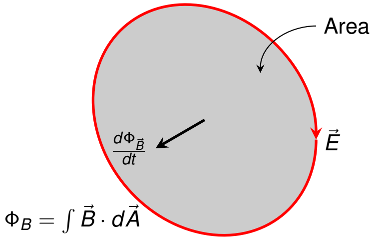
Fluxo do campo elétrico $\vec{E}$ devido a carga q.

Lei de Gauss

A variação do fluxo do campo magnético que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo elétrico induzido ao redor dessa espira,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Lei de Faraday



Φ_B: B por area perpendicular a espira

Fluxo do campo magnético $\vec{B}$.

Lei de Faraday

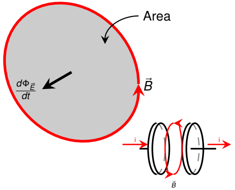
A variação do fluxo do campo magnético que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo elétrico induzido ao redor dessa espira,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Simetria entre campo elétrico e magnético

Simetria dos fenômenos elétricos e magnéticos

Maxwell, usando a idéia de simetria, sugeriu que assim como a variação de um campo magnético no espaço pode induzir um campo elétrico, a variação do campo elétrico também pode induzir um campo magnético.

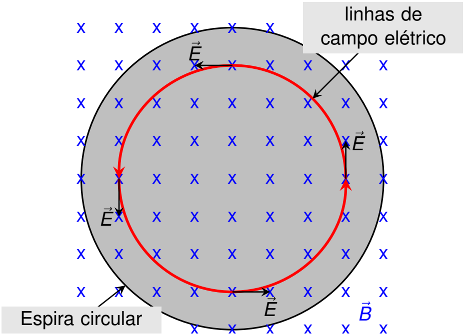


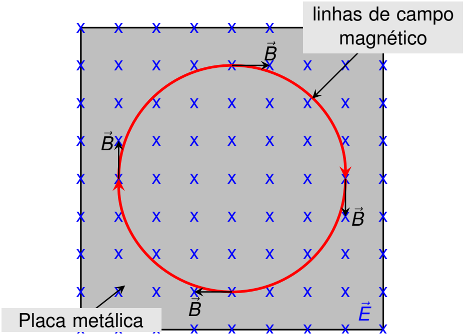
Variação do fluxo elétrico $\frac{d\Phi_E}{dt}$.

Lei de Maxwell

A variação do fluxo do campo elétrico que atravessa uma espira fechada faz aparecer um campo magnético induzido ao redor dessa espira.

Campo magnético induzido devido a variação do campo elétrico





Linhas de campo elétrico $\vec{E}$ circular devido a variação do campo magnético $\vec{B}$.

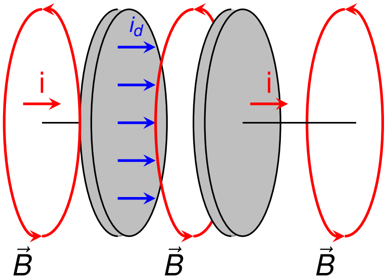
Linhas de campo magnético $\vec{B}$ circular devido a variação do campo elétrico $\vec{E}$.

Corrente de deslocamento

Analisando a lei de Ampere, podemos perceber que o lado direito da equação obrigatoriamente deve possuir unidades de $\mu_0 i$. Na verdade, em regiões onde não há corrente elétrica, a variação do fluxo deve ser multiplicado por uma constante, de modo a satisfazer a seguinte equação

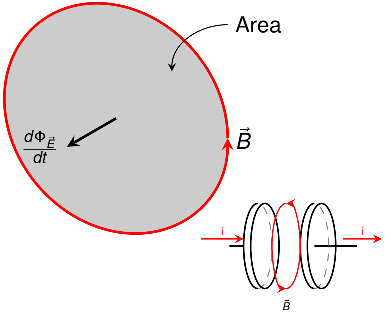
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 i_d.$$

i_d é chamado corrente de deslocamento e o campo magnético $\vec{B}$ induzido por ele é idêntico ao campo criado pela corrente real i.



Campo magnético circular $\vec{B}$ devido a corrente de deslocamento i_d.

Lei de Ampère-Maxwell



Variação do fluxo elétrico $\frac{d\Phi_E}{dt}$ induzindo um campo magnético circular $\vec{B}$.

Aplicando a idéia de simetria, podemos concluir que a seguinte relação deve acontecer

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \; \alpha \; \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

No entanto, para estar de acordo com a lei de Ampere, o lado direito deve ter unidades de $\mu_0 i$, chegando assim na lei de Maxwell,

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.}$$

Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são formadas pela combinação das quatro equações do eletromagnetismo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad \text{(Lei de Gauss)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \qquad \text{(Lei de Gauss do magnetismo)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad \text{(Lei de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \text{(Lei de Ampère-Maxwell)}$$

Equações de Maxwell no vácuo

No vácuo temos ausência de cargas elétricas, o que resulta q=0 e i=0,

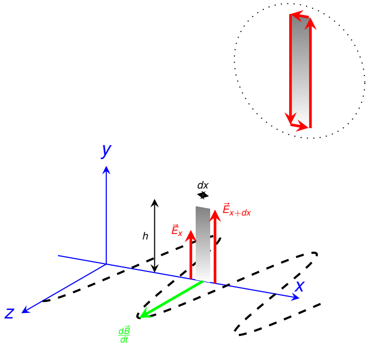
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0,$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0,$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Lei de Faraday-Lenz na ausência de matéria



Campo elétrico na direção do eixo y.

Supondo um campo magnético na direção z cuja amplitude varia no tempo. Pela Lei de Faraday

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint \vec{E}\cdot d\vec{s},$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\left[\overbrace{Edx}^{\vec{E}\cdot d\vec{l}=0} + \overbrace{Edx}^{\vec{E}\cdot d\vec{l}=0} - hE_x + \underbrace{hE_{x+dx}}_{h(E_x+dE)}\right],$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -hdE.$$

Equação da onda à partir da lei de Faraday-Lenz

O fluxo do campo magnético é dado por

$$\Phi_B = (B)(\underbrace{hdx}_{cte}),$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_B = hdx\frac{dB}{dt}$$

Sabendo que $\frac{d\Phi_B}{dt} = -hdE$ temos

$$hdE = -hdx\frac{dB}{dt},$$

$$dE = -\left[\frac{dB}{dt}\right]dx.$$

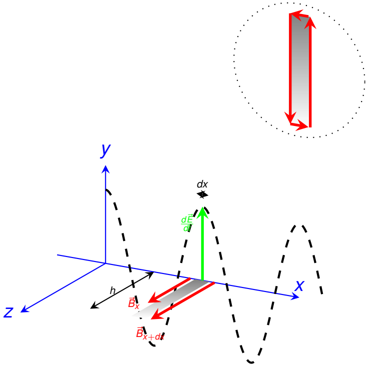
Usando a regra de diferencial

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

A única função para $E(x,t)$ e $B(x,t)$ que satisfaz a equação acima seria

$$E(x,t) = E_m cos\left(kx - \omega t\right),$$
$$B(x,t) = B_m cos\left(kx - \omega t\right)$$

Lei de Ampère-Maxwell na ausência de matéria



Campo magnético na direção z.

Sabemos que o campo elétrico varia no tempo ao longo da direção y. Pela Lei de Àmpere-Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \left[\overbrace{Bdx}^{\vec{B}\cdot d\vec{l}=0} + \overbrace{Bdx}^{\vec{B}\cdot d\vec{l}=0} + hB_x - \underbrace{hB_{x+dx}}_{h(B_x+dB)} \right],$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} hdB.$$

Equação da onda à partir da lei de Ampère-Maxwell

O fluxo do campo elétrico é dado por

$$\Phi_E = (E)(\underbrace{hdx}_{cte}),$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = hdx\frac{dE}{dt}.$$

Sabendo que $\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}hdB$ temos

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\cancel{h}dB = -\cancel{h}\left[\frac{dE}{dt}\right]dx,$$

Usando a regra de diferencial

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}.}$$

Corollary

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Amplitude dos campos elétrico e magnético

Supondo uma solução que satisfaz a equação anterior, Retornar ao slide anterior

$$E(x,t) = E_m cos\,(kx - \omega t)\,,$$
$$B(x,t) = B_m cos\,(kx - \omega t)$$

Usando a equação $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ e derivando

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -E_m k sen\,(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = B_m \omega sen\,(kx - \omega t)$$

O que resulta

$$B_m \omega = E_m k$$

mas $\frac{\omega}{k} = c$,

$$\boxed{B_m = \frac{E_m}{c}}$$

Corollary

A intensidade do campo elétrico é muito maior que a do campo magnético.

Velocidade da onda eletromagnética

Usando a equação $\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}$ e derivando

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_m\omega sen\,(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} = -B_m k sen\,(kx - \omega t)$$

O que resulta

$$E_m\omega = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}kB_m,$$
$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{k}{\omega}$$

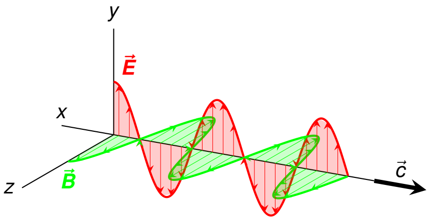
mas $\frac{E_m}{B_m} = c$ e numa onda $c = \frac{\omega}{k}$, teremos

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.}$$

Corollary

Os campos elétrico e magnético propagam no vácuo a uma velocidade c.

Onda eletromagnética



Representação de uma onda eletromagnética.

Função da onda eletromagnética

$$\vec{E}(x,t) = E_m cos\,(kx - \omega t)\,\hat{y}$$
$$\vec{B}(x,t) = B_m cos\,(kx - \omega t)\,\hat{z}$$

Corollary

As equações de Maxwell nos fornece com solução duas ondas transversais que se propagam no espaço na mesma direção e com a mesma velocidade c.

A luz como onda eletromagnética

Maxwell percebeu que a velocidade c obtida à partir do eletromagnetismo é exatamente idêntica a velocidade da luz, já bem conhecida ná época através de diversas técnicas de medição.

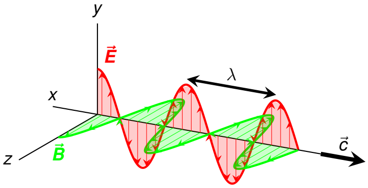
"A velocidade das ondas transversais em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos electromagnéticos dos Srs. Kohrausch e Weber, concorda tão exactamente com a velocidade da luz, calculada pelos experimentos óticos do Sr. Fizeau, que é difícil evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos eléctricos e magnéticos."

Corollary

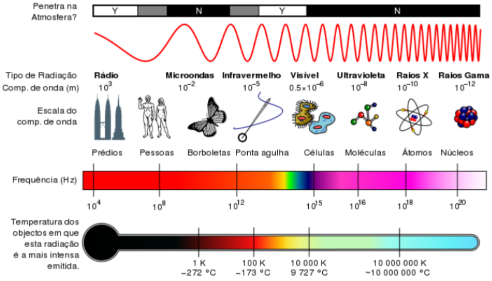
A luz é uma onda eletromagnética capaz de se propagar no vácuo com a velocidade de aproximadamente $3 \times 10^8\ m/s$.

Espectro eletromagnético

Identificamos uma onda eletromagnética à partir da sua assinatura energética (energia transportada por área e tempo), no qual depende da sua frequência.

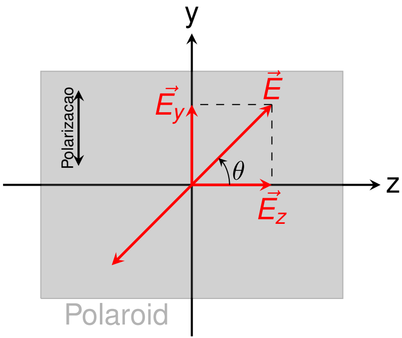


Onda eletromagnética



Espectro eletromagnético

Polarização da Luz



Polarização da luz à partir do vetor campo elétrico $\vec{E}$.

A componente polarizada na direção y é dado por

$$E_y = Ecos\left(\theta\right)$$

Sabendo que a intensidade da Luz é dado por $I \approx E_m^2$,

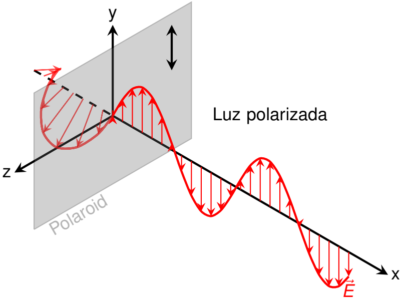
$$I_{\text{pol.}} = I_{\text{pol.}} cos^2\left(\theta\right)$$

mas $cos^2\left(\theta\right) \leq 1$, portanto

Corollary

Intensidade da onda polarizada é sempre menor ou igual a intensidade da onda não-polarizada.

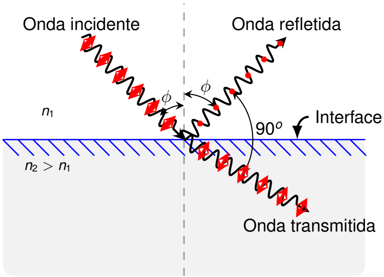
Polarização da Luz



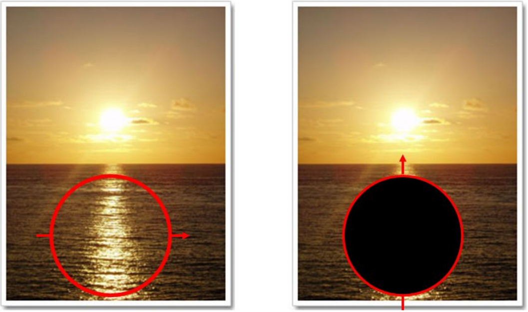
Onda polarizada.

Lente polarizada.

Polarização da Luz por reflexão



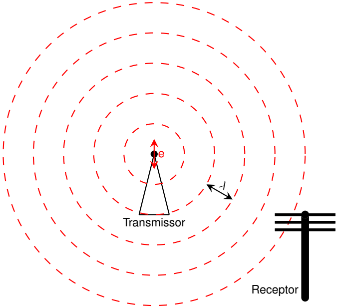
Representação de uma onda refletida.



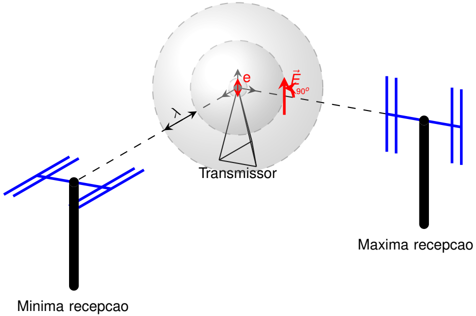
Polarização da luz vista por uma lente polarizada.

Ondas de rádio

Pelas equações de Maxwell, uma carga oscilando no espaço gera um pulso eletromagnético com frequência igual a frequência de oscilação.

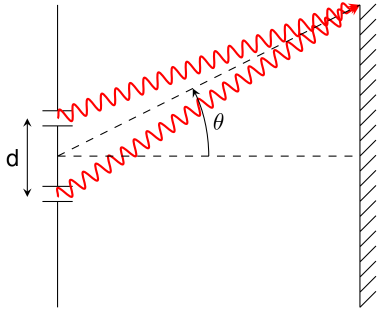


Propação da onda a partir da fonte emissora.



Recepção a partir da direção do campo $\vec{E}$.

Interferência



Interferência entre duas ondas de mesmo comprimento de onda e equidistantes a uma distância d.

Frangas de interferência

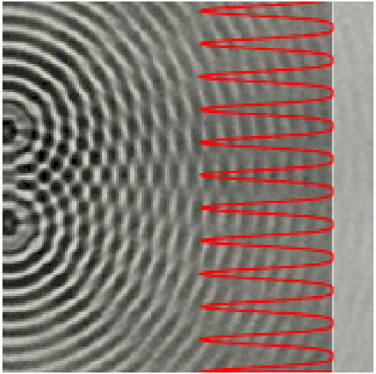
Intensidade máxima:

$$d sen\theta = m\lambda, \ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

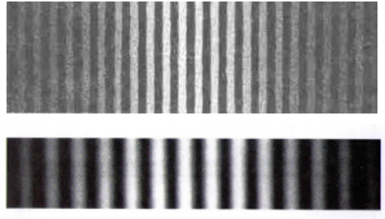
Intensidade mínima:

$$d sen\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

Franjas de interferência



Interferência entre ondas na água



Franjas de interferência

Aplicações de interferência da Luz

Borboleta Morpho

Vista inferior

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)
- https://pt.m.wikipedia.org/wiki/
- https://github.com/josephwright/beamer
- Jacques Crémer, A very minimal introduction to TikZ*, Toulouse School of Economics (2011)