

# Hidrodinâmica

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

21 de março de 2025

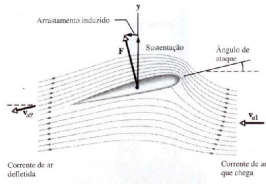
# Sumário

- 1 **Introdução**
- 2 **Vazão ou fluxo**
- 3 **Lei de conservação da massa**
  - Equação da continuidade
- 4 **Equação de Bernoulli**
- 5 **Aplicações**
- 6 **Apêndice**

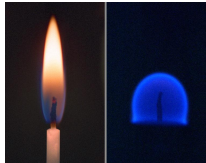
# O que é hidrodinâmica?

## Dinâmica dos fluidos

Estudo dos fluidos em movimento



Sustentação da aeronave  
devido ao empuxo.



Chama de uma vela.



Escoamento laminar.

## Viscosidade e escoamento

### Escoamento

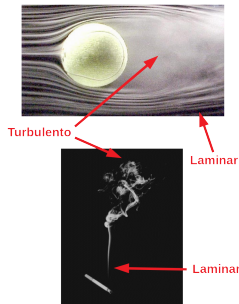
Do ponto de vista da dificuldade de escoamento do fluido, podemos citar os escoamentos

Laminar: A velocidade das partículas em cada ponto não muda com o tempo.

Turbulento: A velocidade das partículas em cada ponto varia com o tempo.

### Viscosidade

Dificuldade de escoamento do fluido



Exemplos de escoamentos laminar e turbulento.

## Definição de vazão ou fluxo

### Fluxo

Volume de fluido que atravessa uma seção transversal do tubo de corrente por unidade de tempo.

$$Z = \frac{\text{Volume}}{\Delta t}.$$

### Corollary

*Pela definição de fluxo, percebe-se que a sua unidade no SI é metro cúbico por segundo ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).*



Vazão de um fluido que sai da abertura de um cano e enche uma piscina.

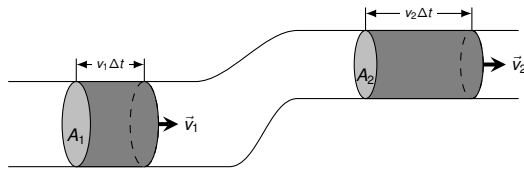
## Equação da continuidade baseada na Lei da conservação da matéria

Supondo uma quantidade de fluido que percorre uma distância  $S_1$  de área  $A_1$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ , o volume ocupado por esse fluido é

$$V = \Delta S_1 A_1.$$

Mas sabendo que  $\Delta S_1 = v_1 \Delta t$ , onde  $v_1$  é a velocidade das moléculas do fluido que percorre esse espaço, temos

$$V = v_1 A_1 \Delta t.$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluxo que atravessa duas seções transversais.

## Equação da continuidade como Lei da conservação da matéria (continuação)

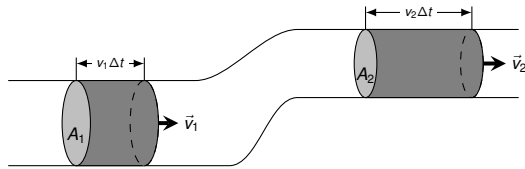
O mesmo raciocínio vale se ele atravessar a área  $A_2$  no mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ ,

$$V = v_2 A_2 \Delta t.$$

Supondo um fluido incompressível a massa é conservada e o volume se mantém. Sabendo que  $V = Z \Delta t$  temos

$$\cancel{Z \Delta t} = v_1 A_1 \cancel{\Delta t} = v_2 A_2 \cancel{\Delta t},$$

$$\boxed{Z = v_1 A_1 = v_2 A_2.}$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

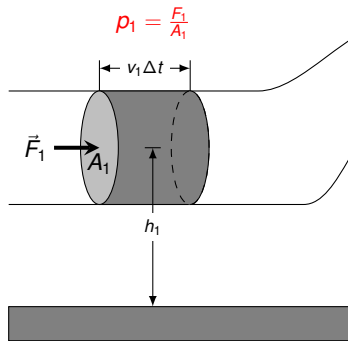
Fluido que atravessa um volume  $V$  no tempo  $\Delta t$ .

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Supondo um fluido de volume  $V$  e massa  $m$  que atravessa a região 1 no intervalo de tempo  $\Delta t$ . O trabalho necessário para deslocá-lo a uma distância  $s_1$  é dado por

$$\tau_1 = \overbrace{F_1}^{p_1 A_1} \overbrace{v_1 \Delta t}^{s_1},$$
$$\tau_1 = p_1 \underbrace{A_1 s_1}_V.$$

$$\boxed{\tau_1 = p_1 V.}$$



Fluxo que atravessa a região 1.



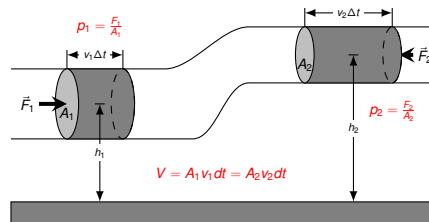
## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

O fluido à direita empurra o restante no sentido contrário impedindo o seu deslocamento, isso produz um trabalho negativo, ou seja,

$$\tau_2 = - \overbrace{p_2 A_2}^{p_2 A_2} \overbrace{v_2 \Delta t}^{s_2},$$

$$\tau_2 = -p_2 \underbrace{A_2 s_2}_V.$$

$$\boxed{\tau_2 = -p_2 V.}$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

### Corollary

*A mesma quantidade de fluido irá atravessar as regiões 1 e 2 nos intervalos  $\Delta t$ .*

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

A força da gravidade é conservativa, de modo que as energias potenciais do fluido nas regiões 1 e 2,

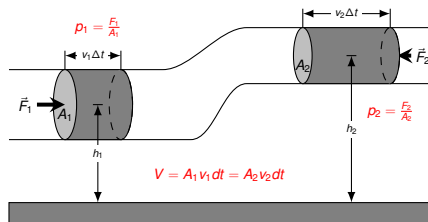
$$E_{p_1} = mgh_1$$

$$E_{p_2} = mgh_2.$$

As energias cinéticas que estão associadas ao movimento nas regiões 1 e 2 são

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Se não houver perdas de energia, a energia mecânica do fluido permanece inalterada, de modo que o trabalho total realizado deve ser igual a variação das energias cinéticas e potenciais,

$$\tau_1 + \tau_2 = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1,$$

Substituindo  $\Delta E_m$  e  $\Delta E_p$  chegaremos na equação abaixo, onde podemos perceber que a soma dos termos abaixo é invariante para qualquer região do tubo. A dedução abaixo exige muita dedução algébrica, portanto deixaremos a sua dedução no Apêndice B.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

## Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

### Equação de Bernoulli

Para um fluido não viscoso com escoamento laminar a soma das parcelas hidrostáticas e hidrodinâmicas é a mesma em cada ponto do fluido, no qual vale a equação

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = \dots ,$$
$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{constante}.$$

### Corollary

*A equação de Bernoulli corresponde na hidrodinâmica à Lei de conservação da energia na mecânica.*

## Analizando os termos da equação de Bernoulli

Supondo a densidade constante ao longo de todo o fluido, podemos multiplicar todos os termos da equação por  $\rho$  e obter a relação

$$\underbrace{\cancel{\rho} \frac{\rho}{\cancel{\rho}} + \rho gh}_{\text{Lei de Stevin}} + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constante.}$$

### Corollary

*Parcela hidrostática ( $\rho + \rho gh$ ): Corresponde a pressão hidrostática no fluido;*

*Parcela fluidodinâmica ( $\rho \frac{v^2}{2}$ ): Corresponde a pressão hidrodinâmica;*

*Se o fluido está em repouso  $\frac{\rho v^2}{2} = 0$  temos a Lei de Stevin.*

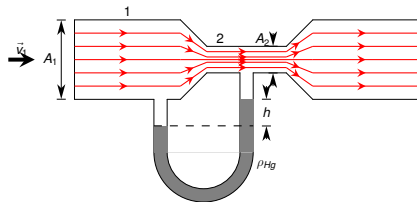
## Venturímetro

Supondo um escoamento horizontal ( $h_1 = h_2$ ) temos pela equação de Bernoulli

$$p_1 + \cancel{\rho gh_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \cancel{\rho gh_2} + \frac{\rho v_2^2}{2},$$
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Pela Lei de Stevin podemos dizer que a variação de pressão entre as regiões 1 e 2 vale

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg}gh$$



Tubo de Venturi.

## Venturímetro (continuação)

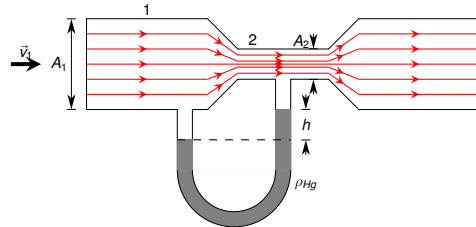
Pela equação da continuidade temos

$$v_2 = \left( \frac{A_1}{A_2} \right) v_1.$$

Substituindo temos

$$\overbrace{p_1 - p_2}^{\rho Hg g h} = \frac{\rho}{2} \overbrace{v_2^2}^{\frac{A_1}{A_2} v_1} - \frac{\rho v_1^2}{2},$$

$$v_1^2 = 2gh \frac{\rho Hg}{\rho} \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}.$$



Tubo de Venturi.

## Apêndice A. Alfabeto grego

Alfa	$A$	$\alpha$	Ni	$N$	$\nu$
Beta	$B$	$\beta$	Csi	$\Xi$	$\xi$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$	ômicon	$O$	$o$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Pi	$\Pi$	$\pi$
Epsílon	$E$	$\epsilon, \varepsilon$	Rô	$P$	$\rho$
Zeta	$Z$	$\zeta$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Eta	$H$	$\eta$	Tau	$T$	$\tau$
Teta	$\Theta$	$\theta$	Ípsilon	$\Upsilon$	$v$
Iota	$I$	$\iota$	Fi	$\Phi$	$\phi, \varphi$
Capa	$K$	$\kappa$	Qui	$X$	$\chi$
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Mi	$M$	$\mu$	Ômega	$\Omega$	$\omega$



## Apêndice B. Dedução da equação de Bernoulli

Substituindo  $\Delta E_c$  e  $\Delta E_p$  e separando os termos da região 1 da região 2 temos a equação

$$\tau_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -\tau_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Mas mostramos que

$$\tau_1 = p_1 V,$$

$$\tau_2 = -p_2 V.$$

Substituindo na equação acima temos

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -(-p_2 V) + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

mas sabemos que  $V = \frac{m}{\rho}$ ,

$$p_1 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = p_2 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

## Referências e observações<sup>1</sup>

 A. Máximo, B. Alvarenga, C. Guimarães, Física. Contexto e aplicações, v.1, 2.ed., São Paulo, Scipione (2016)

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.