Hidrodinâmica

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

28 de Fevereiro de 2020

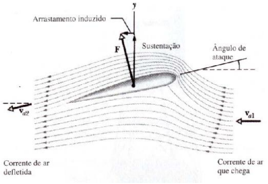
Sumário

1. **Introdução**
2. **Vazão ou fluxo**
3. **Lei de conservação da massa**
   - Equação da continuidade
4. **Equação de Bernoulli**
5. **Aplicações**
6. **Apêndice**

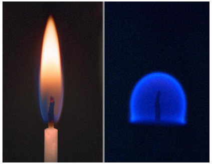
O que é hidrodinâmica?

Dinâmica dos fluidos

Estudo dos fluidos em movimento



Sustentação da aeronave devido ao empuxo.



Chama de uma vela.

Escoamento laminar.

Viscosidade e escoamento

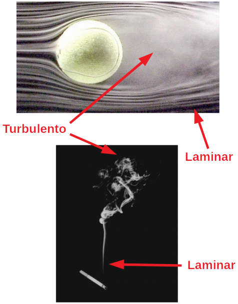
Escoamento

Do ponto de vista da dificuldade de escoamento do fluido, podemos citar os escoamentos

- Laminar: A velocidade das partículas em cada ponto não muda com o tempo.
- Turbulento: A velocidade das partículas em cada ponto varia com o tempo.

Viscosidade

Dificuldade de escoamento do fluido



Exemplos de escoamentos laminar e turbulento.

Definição de vazão ou fluxo

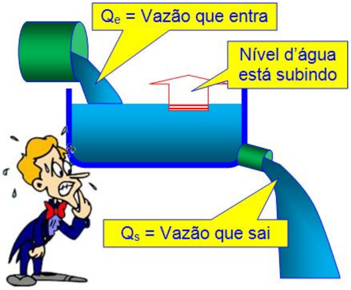
Fluxo

Volume de fluido que atravessa uma seção transversal do tubo de corrente por unidade de tempo.

$$Z = \frac{Volume}{\Delta t}.$$

Corollary

Pela definição de fluxo, percebe-se que a sua unidade no SI é metro cúbico por segundo (m^3/s).



Fluxo ou vazão de um fluido.

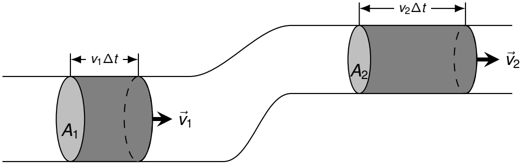
Equação da continuidade baseada na Lei da conservação da matéria

Supondo uma quantidade de fluido que percorre uma distância S_1 de área A_1 no intervalo de tempo Δt, o volume ocupado por esse fluido é

$$V = \Delta S_1 A_1 .$$

Mas sabendo que $\Delta S_1 = v_1 \Delta t$, onde v_1 é a velocidade das moléculas do fluido que percorre esse espaço, temos

$$V = v_1 A_1 \Delta t.$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluxo que atravessa duas seções transversais.

Equação da continuidade como Lei da conservação da matéria (continuação)

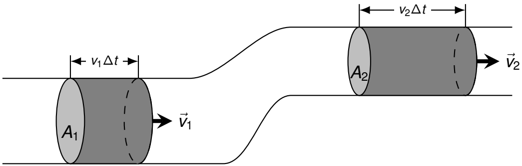
O mesmo raciocínio vale se ele atravessar a área A_2 no mesmo intervalo de tempo Δt,

$$V = v_2 A_2 \Delta t.$$

Supondo um fluido incompressível a massa é conservada e o volume se mantém. Sabendo que $V = Z\Delta t$ temos

$$Z\cancel{\Delta t} = v_1 A_1 \cancel{\Delta t} = v_2 A_2 \cancel{\Delta t},$$

$$\boxed{Z = v_1 A_1 = v_2 A_2.}$$



$$V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

Fluido que atravessa um volume V no tempo Δt.

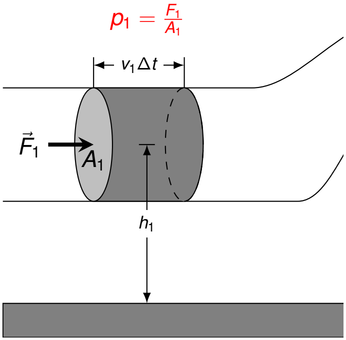
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Supondo um fluido de volume V e massa m que atravessa a região 1 no intervalo de tempo Δt. O trabalho necessário para deslocá-lo a uma distância s_1 é dado por

$$\tau_1 = \overbrace{F_1}^{p_1 A_1} \overbrace{v_1 \Delta t}^{s_1},$$

$$\tau_1 = p_1 \underbrace{A_1 s_1}_{V}.$$

$$\boxed{\tau_1 = p_1 V.}$$



Fluxo que atravessa a região 1.

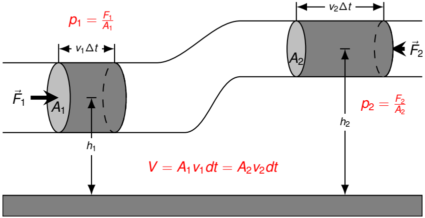
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

O fluido a direita empurra o restante no sentido contrário impedindo o seu deslocamento, isso produz um trabalho negativo, ou seja,

$$\tau_2 = -\overbrace{F_2}^{p_2 A_2}\ \overbrace{v_2 \Delta t}^{s_2},$$

$$\tau_2 = -p_2\, \underbrace{A_2 s_2}_{V}\ .$$

$$\boxed{\tau_2 = -p_2 V.}$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

Corollary

A mesma quantidade de fluido irá atravessar as regiões 1 e 2 nos intervalos Δt.

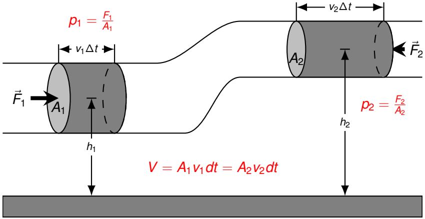
Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

A força da gravidade é conservativa, de modo que as energias potenciais do fluido nas regiões 1 e 2,

$$E_{p_1} = mgh_1$$
$$E_{p_2} = mgh_2.$$

As energias cinéticas que estão associadas ao movimento nas regiões 1 e 2 são

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$E_{c_2} = \frac{1}{2}mv_2^2.$$



Fluxo que atravessa as regiões 1 e 2.

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Se não houver perdas de energia, a energia mecânica do fluido permanece inalterada, de modo que o trabalho total realizado deve ser igual a variação das energias cinéticas e potenciais,

$$\tau_1 + \tau_2 = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1,$$

portanto

$$\tau_1 + \tau_2 = \overbrace{\left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right)}^{\Delta E_c} + \overbrace{(mgh_2 - mgh_1)}^{\Delta E_p},$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1,$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1\right).$$

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Separando os termos da região 1 da região 2 temos a equação

$$\tau_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -\tau_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \\ + mgh_2.$$

Mas mostramos que

$$\tau_1 = p_1 V,$$
$$\tau_2 = -p_2 V.$$

Substituindo na equação acima temos

$$p_1 V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = -(-p_2 V) + \\ + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2,$$

mas sabemos que $V = \frac{m}{\rho}$,

$$p_1 \frac{\cancel{m}}{\rho} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh_1 = p_2 \frac{\cancel{m}}{\rho} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 + \cancel{m}gh_2,$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Pressão, velocidade e altura de um fluido em duas regiões distintas (continuação)

Equação de Bernoulli

Para um fluido não viscoso com escoamento laminar a soma das parcelas hidrostáticas e hidrodinâmicas é a mesma em cada ponto do fluido, no qual vale a equação

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = \cdots,$$
$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{constante}.$$

Corollary

A equação de Bernoulli corresponde na hidrodinâmica à Lei de conservação da energia na mecânica.

Analisando os termos da equação de Bernoulli

Supondo a densidade constante ao longo de todo o fluido, podemos multiplicar todos os termos da equação por ρ e obter a relação

$$\underbrace{\cancel{\rho}\frac{p}{\cancel{\rho}} + \rho g h}_{\text{Lei de Stevin}} + \rho\frac{v^2}{2} = \text{constante.}$$

Corollary

Parcela hidrostática $(p + \rho g h)$*: Corresponde a pressão hidrostática no fluido;*

Parcela fluidodinâmica $\left(\rho\frac{v^2}{2}\right)$*: Corresponde a pressão hidrodinâmica;*

Se o fluido está em repouso $\frac{\rho v^2}{2} = 0$ *temos a Lei de Stevin.*

Venturímetro

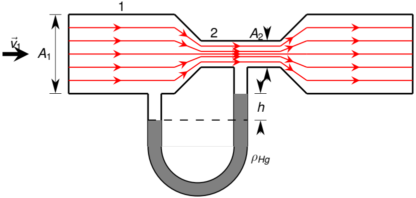
Supondo um escoamento horizontal ($h_1 = h_2$) temos pela equação de Bernoulli

$$p_1 + \cancel{\rho g h_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \cancel{\rho g h_2} + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Pela Lei de Stevin podemos dizer que a variação de pressão entre as regiões 1 e 2 vale

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g h$$



Tubo de Venturi.

Venturímetro (continuação)

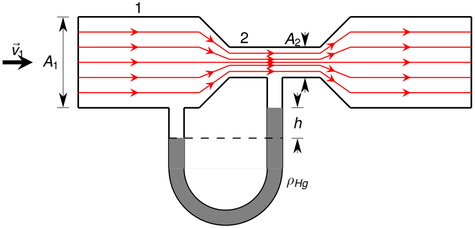
Pela equação da continuidade temos

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) v_1 .$$

Substituindo temos

$$\overbrace{p_1 - p_2}^{\rho_{Hg} g h} = \frac{\rho \overbrace{v_2^2}^{\frac{A_1}{A_2} v_1}}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2},$$

$$\boxed{v_1^2 = 2gh \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}.}$$



Tubo de Venturi.

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: *Escrever o número incluindo a vírgula.*

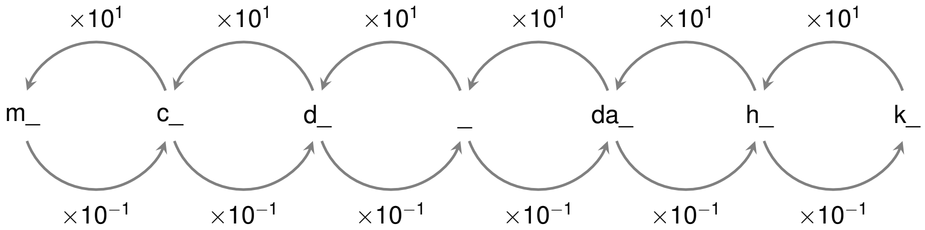
Passo 2: *Andar com a vírgula até que somente reste um número diferente de zero no lado esquerdo.*

Passo 3: *Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar"com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6{,}59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

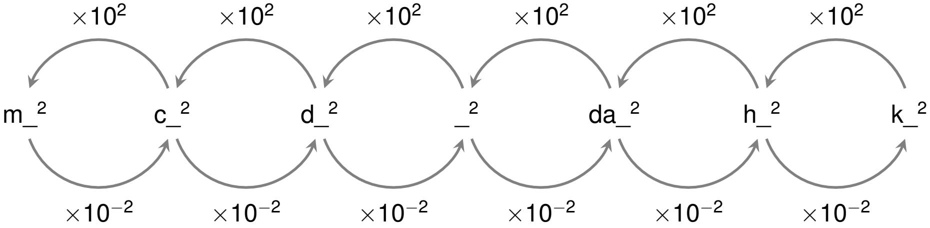


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1)\times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ kg} = 2,5 \times 10^{(1)\times 6} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^{6} \text{ mg}$$

$$10 \text{ ms} = 10 \times 10^{(-1)\times 3} \text{ s} \rightarrow 10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Conversão de unidades em duas dimensões

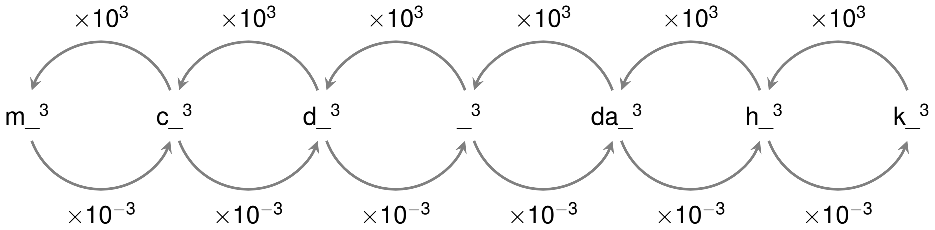


$$1\ \text{mm}^2 = 1 \times 10^{(-2)\times 2}\ \text{dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4}\ \text{dm}^2$$

$$2,5\ \text{m}^2 = 2,5 \times 10^{(2)\times 3}\ \text{mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^{6}\ \text{mm}^2$$

$$10\ \text{ms}^2 = 10 \times 10^{(-2)\times 3}\ \text{s}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-6}\ \text{s}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões



$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3)\times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{9} \text{ mm}^3$$

$$2,5 \text{ km}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 6} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{18} \text{ mm}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsílon	E	ϵ, ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ, φ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Referências e observações[1]

A. Máximo, B. Alvarenga, C. Guimarães, Física. Contexto e aplicações, v.1, 2.ed., São Paulo, Scipione (2016)

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.