Quantização da energia e dualidade onda-partícula

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

16 de Junho de 2022

Sumário

A antiga teoria quântica

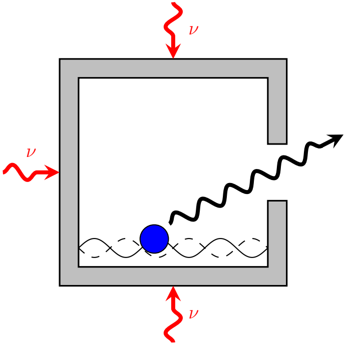
- ✓ *Numa reunião da sociedade alemã de física em 1900, Max Planck apresentou o seu artigo "Sobre a teoria da lei de distribuição de energia do espectro normal". Esse dia marca o nascimento da física quântica.*
- ✓ *Até o surgimento da equação de Schroedinger, diversos estudos foram desenvolvidos demonstrando falhas na física clássica. Esses estudos, chamados de antiga teoria quântica, marcam os fundamentos da física quântica atual.*
- ✓ *Assim como a teoria da relatividade, a física quântica representa uma generalização da física clássica, que inclui as leis clássicas como casos especiais.*

Corollary

Os fenômenos ligados a física quântica abrangem todas as áreas da física clássica: mecânica, termodinâmica, ondas, mecânica estatística e eletromagnetismo.

O que é um corpo negro?

O corpo negro é um objeto que absorve toda a radiação que incide sobre ele. Sabendo que a radiação transporta energia por área e tempo, é de se esperar que os elétrons do material absorva a radiação, adquirindo energia cinética e aumentando assim a temperatura do objeto. Pela teoria do eletromagnetismo, cargas em movimento emitem radiação com a mesma frequência que elas oscilam. Portanto, a radiação observada poderá ser reconhecida como aquela emitida pelo corpo negro que se encontra a temperatura T.



Radiação emitida pelo corpo negro.

Lei de Stefan-Boltzman

- ✓ *A radiação (intensidade) incidente aumenta a vibração dos átomos, aumentando a temperatura do corpo negro;*
- ✓ *A radiação emitida somente depende da temperatura do corpo negro;*
- ✓ *De acordo com a teoria clássica, a radiação aumenta indefinidamente com a frequência da radiação emitida.*

Chegando a lei de Stefan-Boltzman que relaciona a radiação emitida por um objeto com a sua temperatura T,

$$R(T) = \sigma T^4.$$

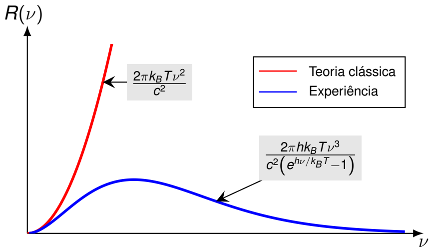
onde $\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K}$ *Utilize a animação para ver como a área abaixo da curva da densidade de radiação aumenta com a temperatura.*

Catástrofe do ultravioleta

A catástrofe do ultravioleta representa a enorme discrepância entre a teoria clássica e os resultados experimentais, medidas para a radiação do corpo negro. Resumindo

- ✓ *Para baixas frequências a teoria clássica se aproxima do resultado experimental;*
- ✓ *Para frequências maiores, a teoria clássica se afasta do resultado experimental.*

Utilize a animação para ver o máximo de radiância atingida e também o seu valor tendendo a zero para comprimentos de onda maiores.



Comparação entre radiância calculada pela teoria clássica e os dados experimentais.

Radiância e radiação emitida pelo material

Pela teoria do eletromagnetismo, a radiância, ou seja, radiação emitida por cada onda de frequência ν ($R(\nu)$), que sai da cavidade de um corpo negro é dado por

$$R(\nu) = \frac{c}{4}u(\nu),$$

onde $u(\nu)$ é a energia da radiação emitida por volume. Neste caso, a densidade de energia na faixa de radiação com frequências entre ν e $\nu + d\nu$ vale $u(\nu)d\nu$. Portanto, a quantidade de radiação dR neste intervalo vale

$$dR = R(\nu)d\nu,$$
$$dR = \frac{c}{4}u(\nu)d\nu.$$

Para determinar a radiação total emitida pelo corpo negro, integramos a equação acima,

$$R = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu)d\nu.$$

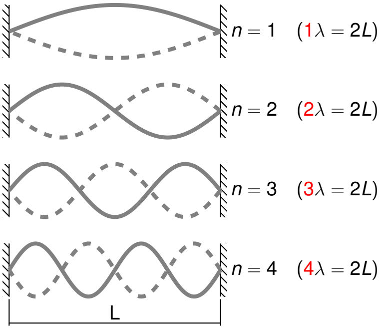
Relação entre energia e temperatura

Pela termodinâmica, a energia de agitação dos elétrons por volume está associado estatisticamente com o valor médio da energia E multiplicado pelo número de elétrons,

$$u(\nu) = \langle E \rangle \, n(\nu),$$

No caso acima, cada elétron assume um modo normal de vibração $n(\nu)$. É possível demonstrar que para uma caixa cúbica de volume V teremos

$$\boxed{n(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}.}$$



Modos normais de vibração.

Valor médio da energia para uma distribuição contínua de energia

Para determinar o valor médio da energia $\langle E\rangle$, usamos a expressão abaixo

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty Ef(E)}{\int_0^\infty f(E)}dE,$$
$$P(E) = Ae^{-E/k_BT}.$$

onde $P(E)$ é conhecida como distribuição de Boltzmann e k_B é chamado constante de Boltzmann. Substituindo na expressão teremos

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty \cancel{A}Ee^{-E/k_BT}dE}{\int_0^\infty \cancel{A}e^{-E/k_BT}dE},$$
$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty Ee^{-E/k_BT}dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_BT}dE}.$$

É possível provar que o resultado da equação acima equivale a

$$\boxed{\langle E\rangle = k_BT.}$$

A equação de Rayleigh-Jeans

Considerando uma distribuição contínua de energia para a radiação emitida pelo corpo negro, teremos que a densidade de energia $u(\nu)$ é dado por

$$u(\nu) = \langle E \rangle \, n(\nu);$$

$$u(\nu) = (k_B T)\left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right).$$

Substituindo na fórmula da radiação,

$$R = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\nu) d\nu.$$

$$R = \frac{\cancel{c}}{4}\int_0^\infty \frac{8\pi k_B T}{\cancel{c}^3}\nu^2 d\nu,$$

$$R = \frac{8\pi k_B T}{c^2}\int_0^\infty \nu^2 d\nu,$$

$$R = \frac{8\pi k_B T}{3c^2}\nu^3\Big|_0^\infty = \infty.$$

Vemos que se considerarmos uma distribuição contínua de energia para $u(\nu)$, quando $\nu \to \infty$ teremos $R \to \infty$, o que resulta na catástrofe do ultravioleta.

A lei de Planck e o nascimento da física quântica

Para explicar a catástrofe do ultravioleta, duas causas são possíveis

- ✓ *Contagem errada do número de estados n*(ν)*;*
- ✓ *Valor da energia para cada modo vibracional está errado.*

Hipótese de Planck

Como opção, Planck sugeriu que a energia das cargas oscilantes ao invés de assumir qualquer valor, ela deverá ter valores discretos bem definidos, e também deverá ser proporcional a frequência da radiação emitida,

$$E_n = nh\nu, \;\; n = 0, 1, 2, \cdots$$

h é conhecido como a constante de Planck.

Valor médio da energia para uma distribuição discreta de energia

O valor médio da energia $\langle E \rangle$ para uma distrição discreta de energias é dado por

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E \left(\cancel{A} e^{-E/k_B T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\cancel{A} e^{-E/k_B T}\right)},$$

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E e^{-E/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E/k_B T}}.$$

Como temos valores discretos de energia, a integral é substituída por uma somatória de valores de energia E_n. É possível provar que o resultado equivale a

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.}$$

Substituindo em $u(\nu)$ teremos

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 \left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)}.}$$

O resultado acima em $R(\nu)$ reproduz perfeitamente os dados experimentais.

Lei de Planck para baixas frequências

Pela teoria clássica temos que a teoria se aproxima do resultado experimental quando $\nu << 1$, usando a expansão

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 + \cdots,$$

podemos dizer que $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1$ se $h\nu << k_B T$. Substituindo em $u(\nu)$ resulta em

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi \cancel{h}\nu^{\cancel{3}}}{c^3\left(\cancel{1} + \frac{\cancel{h}\cancel{\nu}}{k_B T} - \cancel{1}\right)},$$

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3},$$

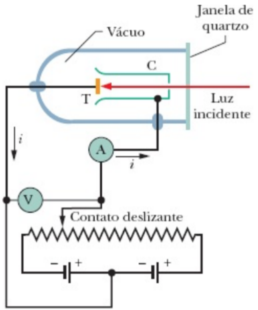
o que corresponde a lei de Rayleigh-Jeans da teoria clássica da radiação.

Corollary

Para $h\nu / k_B T << 1$ a equação de Planck se resume na lei de Rayleigh-Jeans.

Efeito fotoelétrico

Vamos considerar um equipamento por onde incide uma luz de determinada frequência no alvo T de um metal específico. A experiência mostra que os elétrons são ejetados do material gerando uma corrente i que pode ser registrada pelo amperímetro A.
Uma diferença de potencial V é ajustada entre os terminais do aparelho com a intenção de frear os elétrons até pararem, registrando assim uma corrente zero no amperímetro. Dessa maneira, a energia cinética máxima K deve ser igual a eV_F.



Montagem usada para o estudo do efeito fotoelétrico.

O que era esperado pela teoria clássica

De acordo com a teoria do eletromagnetismo, a intensidade da onda I eletromagnética é dado por $I = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}$, ou seja, depende somente da amplitude do campo elétrico E_m e não da frequência da luz. Além do mais, como a intensidade é potência por área, era de se esperar que o metal absorvesse cada vez ao longo do tempo. Assim o elétron teria energia cinética o suficiente para escapar do material. Portanto, era de se esperar que

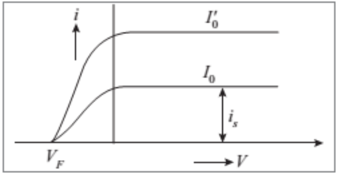
- ✓ *a energia cinética dos elétrons deveria depender da intensidade da onda;*
- ✓ *o efeito fotoelétrico deveria ocorrer com a luz de qualquer frequência;*
- ✓ *deveria haver um retardo de tempo, de modo que o elétron absorvesse energia do feixe continuamente.*

O que foi observado experimentalmente

Foi observado que a energia cinética K, onde

$$K = eV_F,$$

independe da luz incidente. Aumentando a intensidade, apenas aumenta a corrente no circuito, mas o potencial de corte V_F permanece o mesmo.



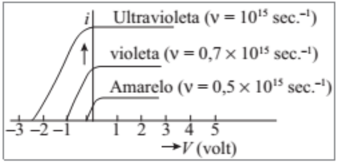
Variação da corrente com o potencial.

Corollary

O efeito fotoelétrico independe da intensidade da luz incidente.

O que foi observado experimentalmente

Foi observado que para cada material existe um limiar de frequência ν_0. Caso a frequência da luz incidente for menor que ν_0, o efeito fotoelétrico não ocorre para aquele material. A figura apresenta um metal alcalino, onde para cada luz incidente, existe um potencial de corte. Nesse caso, o efeito fotoelétrico deixaria de ocorrer para a luz vermelha, que possui frequência menor que a amarela ($\nu_{verm} = 0{,}4 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$).



Variação da corrente para diversos valores da frequência da luz.

Corollary

Para frequências menores que ν_0 o efeito fotoelétrico não ocorre, qualquer que seja a intensidade da iluminação.

Hipótese de Einstein

Para explicar as divergências observadas no efeito fotoelétrico, Einstein propôs que a luz é constituídas por pacotes de energia chamada fóton, onde cada fóton carrega a quantidade de energia

$$\boxed{E = h\nu.}$$

Assim, a energia cinética K dos elétrons que saem do material é dado por

$$K = eV_F = h\nu - \phi.$$

ϕ é denominado função trabalho, que representa a energia necessária para remover o elétron do material.

Explicações plausíveis para o efeito fotoelétrico

- ✓ *O efeito fotoelétrico independe da intensidade da luz incidente.* Um aumento na intensidade significa mais fótons com a mesma energia $h\nu$ colidindo com elétrons diferentes, o que justifica o aumento na corrente elétrica. Mas se a energia de cada fóton não equivaler a função trabalho, os elétrons não conseguem escapar do material independente da quantidade fótons.
- ✓ *Para frequências menores que ν_0 o efeito fotoelétrico não ocorre, qualquer que seja a intensidade da iluminação.* Na colisão dos fótons com os elétrons, uma energia equivalente a $h\nu$ é absorvida pelo elétron. Se essa energia não equivaler a função trabalho, o elétron não consegue escapar do material.
- ✓ *Assim que a luz incide no metal, os elétrons são imediatamente removidos, não havendo um retardo de tempo.* Na colisão, a energia dos fótons é imediatamente absorvida, não havendo a necessidade de mais colisões.

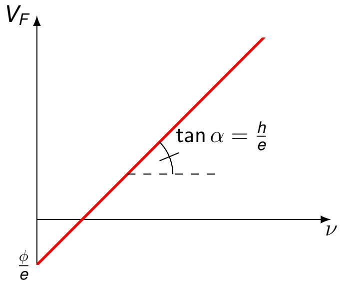
Como obter a constante de Planck e o limiar de frequência?

Isolando o potencial de corte V_F anteriormente teremos

$$eV_F = h\nu - \phi,$$
$$V_F = \frac{h}{e}\nu - \frac{\phi}{e}.$$

Considerando V_F como função da frequência da luz incidente, podemos representá-la em um gráfico V_F versus ν, onde o coeficiente angular da reta representa o valor da constante de Planck,

$$\boxed{h = 6{,}57 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}.}$$

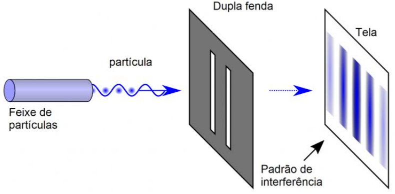


Representação de h a partir do gráfico potencial de corte versus frequência.

Hipótese de de Broglie

Devido a simetria da natureza, o dualismo onda-partícula é um fenômeno absolutamente geral, ou seja, assim como foi observado que a luz possui comportamento corpuscular, é esperado que a partícula também possua comportamento ondulatório. De forma geral, podemos resumir

$$\nu = \frac{E}{h},$$
$$\lambda = \frac{h}{p}.$$



Fenômeno de interferência ondulatória envolvendo um feixe de elétrons.

Apêndice A - Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Apêndice B - Demonstração do valor kT para a energia média.

Considere a energia média $\langle E\rangle$ onde definimos $\beta = 1/kT$,

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty Ee^{-\beta E}dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E}dE}$$

Podemos ver que $-\frac{d}{d\beta}e^{-\beta E} = Ee^{-\beta E}$,

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty \left(-\frac{d}{d\beta}e^{-\beta E}\right)dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E}dE}$$

$$\langle E\rangle = \frac{-\frac{d}{d\beta}\left(\int_0^\infty e^{-\beta E}dE\right)}{\int_0^\infty e^{-\beta E}dE}.$$

Definindo $F(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta E}dE$ teremos

$$\langle E\rangle = -\frac{\frac{dF(\beta)}{d\beta}}{F(\beta)},$$

Assim poderemos obter $\langle E\rangle$ sem a necessidade de resolver a integral.

Apêndice B - Demonstração do valor kT para a energia média.

Pela propriedade do logaritmo e empregando a regra da cadeia, temos que a sua derivada é dada por

$$\frac{d\ln\left[1/F(\beta)\right]}{d\beta} = \left(\frac{d\ln(1/F)}{dF}\right)\left(\frac{dF}{d\beta}\right)$$

Porém, sabemos que $\frac{d\ln(1/F)}{dF} = 1/F$, portanto

$$\frac{d\ln\left[1/F(\beta)\right]}{d\beta} = \left(\frac{1}{F}\right)\left(\frac{dF}{d\beta}\right)$$

Assim podemos ver que

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= -\frac{d}{d\beta}\ln(1/F(\beta)),\\ &= -\frac{d}{d\beta}\ln\left[\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\beta E}dE}\right].\end{aligned}$$

Resolvendo a integral teremos

$$\langle E\rangle = -\frac{d\ln(1/\beta)}{d\beta} = 1/\beta,$$

$$\boxed{\langle E\rangle = kT.}$$

Referências

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.4, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.4, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)