Campo elétrico

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

4 de Julho de 2022

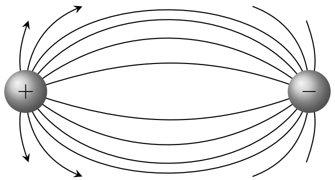
Sumário

O conceito de campo elétrico

⍫ Se a interação elestrostática ocorre a distância, como uma carga elétrica percebe a presença de outra?

Corollary

- ✓ *A presença de uma carga elétrica Q em uma região do espaço produz um campo de interação chamado de campo elétrico que funciona como intermédio entre as cargas elétricas.*
- ✓ *A existência desse campo é verificado através da força exercida em uma carga de prova quando colocada nesta região.*

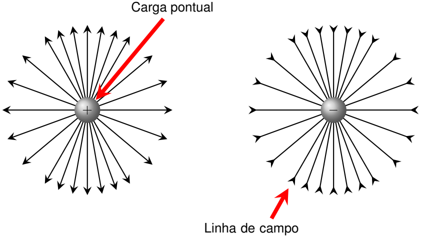


Linhas de força entre duas cargas.

O que são linhas de força?

Carga de prova

Partícula carregada cuja carga é pequena quanto possível para que seu campo não interfira nas demais cargas.



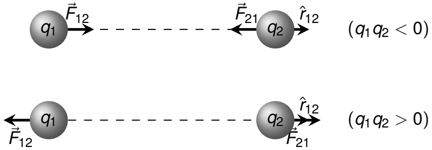
Linhas de força de cargas pontuais.

- ✓ Michael Faraday utilizou o artifício para mostrar como ocorre a intermediação entre as cargas elétricas.
- ✓ As linhas de força de um carga positiva divergem para fora enquanto que na carga negativa convergem para dentro.

Campo elétrico à partir da Lei de Coulomb

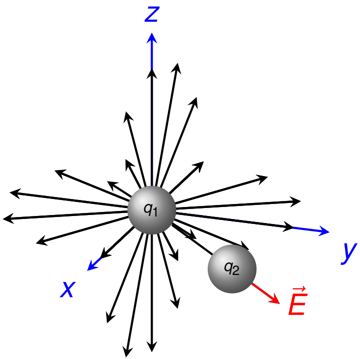
A força que uma partícula com carga Q atua na carga de prova q é dado pela lei de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$



Sentido da força em relação ao sinal das cargas.

Campo elétrico como grandeza vetorial



Linhas de força da carga Q no espaço.

$$\vec{F}_{12} = \left[k \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \right] q_2$$

$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1 \left(r \right) q_2$$

Campo elétrico de uma carga puntiforme

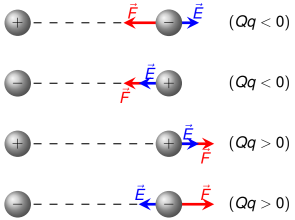
$$\vec{E}_1 \left(r \right) = k \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

Características do campo elétrico

Corollary

A direção e o sentido do vetor $\vec{E}$ são dados pela direção e pelo sentido da força que atua na carga de prova positiva, ou seja,

- ✓ *Se q>0, o campo elétrico $\vec{E}$ e a força $\vec{F}$ tem o mesmo sentido;*
- ✓ *Se q<0, o campo elétrico $\vec{E}$ e a força $\vec{F}$ tem sentidos opostos.*



Sentido da força e campo elétrico em relação ao sinal das cargas.

Corollary

A unidade de medida do campo elétrico no SI é Newton/Coulomb.

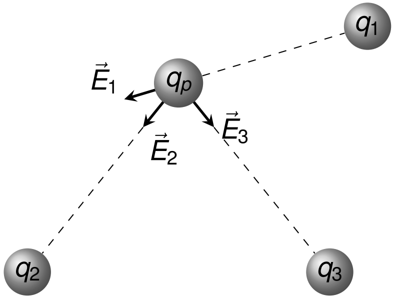
Distribuição discreta de cargas puntiformes

Sabendo que $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, e que $\vec{F}_p = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \cdots$, podemos afirmar que para uma distribuição de cargas teremos

$$\frac{\vec{E}_\mathrm{p}}{q_\mathrm{prova}} = \frac{\vec{F}_{p1}}{q_1} + \frac{\vec{F}_{p2}}{q_2} + \frac{\vec{F}_{p3}}{q_3} + \cdots$$

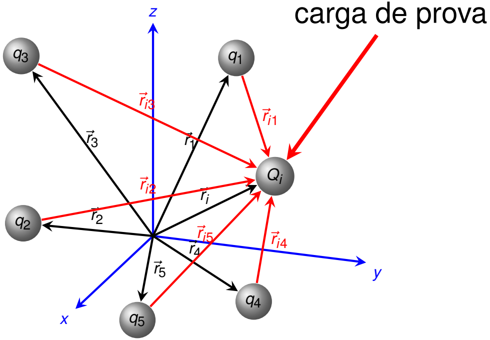
O campo elétrico $\vec{E}$, existente no ponto p, é dado pela resultante dos campos $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$,..., produzidos separadamente pelas cargas q_1, q_2, ...,

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots .$$



Campos elétricos $\vec{E}$ no ponto p.

Campo de várias cargas pontuais



Distância relativa entre cargas q_j e a carga q_i.

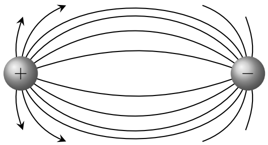
$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|}$$

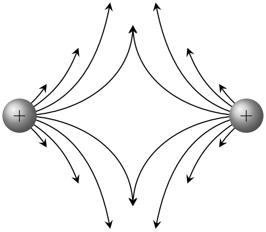
Campo elétrico de uma distribuição puntiforme

$$\vec{E}_i = k \sum_{j \neq i} \frac{Q_i}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$$

Linhas de força de duas cargas pontuais



Cargas com sinais contrários



Cargas com sinais iguais

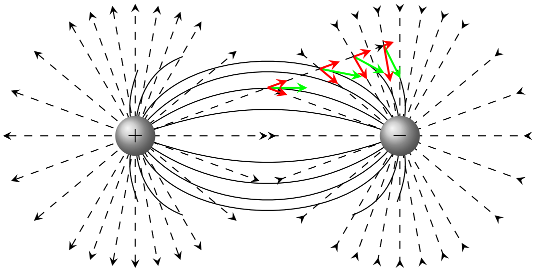
Corollary

As linhas de força nunca se cruzam, pois isso representaria a existência de dois valores possíveis para o campo elétrico no mesmo ponto!

Campo elétrico de um dipolo elétrico

Corollary

- ✓ *Um dipolo elétrico é constituído por duas cargas de mesma intensidade mas com sinais contrários separadas a uma certa distância uma da outra;*
- ✓ *O vetor campo elétrico resultante num ponto qualquer é sempre tangente a linha de campo que passa por esse ponto.*



Vetor campo elétrico resultante de um dipolo elétrico.

Campo elétrico de um dipolo elétrico (continuação)

Na figura ao lado, o campo elétrico resultante em um ponto P é dado por

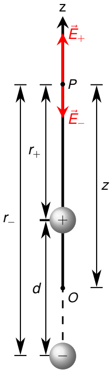
$$E = E_{+} + E_{-},$$

$$E = K\frac{(+q)}{r_{+}^{2}} + K\frac{(-q)}{r_{-}^{2}},$$

onde podemos perceber que

$$r_{+} = z - \frac{d}{2},$$

$$r_{-} = z + \frac{d}{2}.$$



Dipolo elétrico.

Campo elétrico de um dipolo elétrico (continuação)

Temos assim

$$E = Kq\left[\frac{1}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}\right],$$

$$= Kq\left[\frac{1}{\left[\frac{z^2}{z^2}\left(z-\frac{d}{2}\right)\right]^2} - \frac{1}{\left[\frac{z^2}{z^2}\left(z+\frac{d}{2}\right)\right]^2}\right],$$

$$= \frac{kq}{z^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{\cancel{z}}{\cancel{z}}-\frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\cancel{z}}{\cancel{z}}+\frac{d}{2z}\right)^2}\right],$$

$$= \frac{kq}{z^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{d}{2z}\right)^2}\right],$$

$$= \frac{kq}{z^2}\frac{\left[\left(1+\frac{d}{2z}\right)^2 - \left(1-\frac{d}{2z}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2},$$

$$= \frac{kq}{z^2}\frac{\left[\cancel{1}+\frac{d}{z}+\cancel{\left(\frac{d}{2z}\right)^2}-\cancel{1}+\frac{d}{z}-\cancel{\left(\frac{d}{2z}\right)^2}\right]}{\left[1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2}.$$

Campo elétrico de um dipolo elétrico (continuação)

O campo elétrico resultante torna-se

$$E = \frac{kq}{z^2}\frac{\frac{2d}{z}}{\left[1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2},$$

$$E = \frac{2k}{z^3}\frac{qd}{\left[1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2},$$

$qd = p$

$$E = \frac{2k}{z^3}\frac{p}{\left[1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2}.$$

$\vec{p}$ é definido como momento dipolar elétrico, onde $\vec{p} = q\vec{d}$. Para distâncias relativamente grandes onde $z >> d$ podemos considerar $\frac{d}{2z} \approx 0$, ou seja,

$$E = 2K\frac{p}{z^3}.$$

Campo elétrico de um dipolo

$$\vec{E}(0,0,z) = 2K\frac{\vec{p}}{z^3}.$$

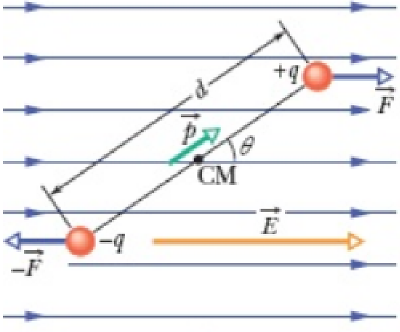
Torque em um dipolo elétrico

Usando a definição de torque, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, no esquema ao lado temos

$$\tau = Fxsen\theta + F(d - x)sen\theta,$$
$$\tau = Fdsen\theta.$$

Sabemos que $p = qd$ e $E = \frac{F}{q}$, substituímos na equação acima,

$$\tau = pEsen\theta,$$
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.}$$



Dipolo elétrico inserido em um campo $\vec{E}$ uniforme.

Energia potencial de um dipolo elétrico

Sabemos que a força $\vec{F}$ é conservativa, portanto podemos encontrar a energia potencial através do trabalho realizado pelo torque. Supondo $\theta = 180 - \theta'$ e $\sin(180 - \theta') = -\sin\theta'$ temos

$$\Delta U = -W,$$

$$\Delta U = -\int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta', \quad \xrightarrow{\tau = -pEsen\theta'}$$

$$\Delta U = \int_{90^\circ}^{\theta} pEsen\theta' d\theta'.$$

Supondo $\vec{E}$ e $\vec{p}$ constantes resolvemos a integral, temos

$$\Delta U = \left[-pEcos\theta'\right]_{90^\circ}^{\theta},$$

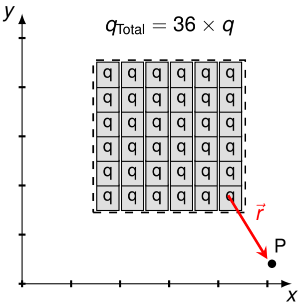
$$U(\theta) = -pEcos\theta.$$

Podemos generalizar para a forma vetorial e escrever

$$\boxed{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}.}$$

Campo elétrico de uma distribuição contínua de cargas

Para um objeto extenso carregado eletricamente, cada pedaço dv desse objeto possui uma quantidade de carga dq, que produz campo elétrico idêntico a uma partícula pontual,portanto cada pedaço irá produzir um campo $d\vec{E}$ no espaço.



$$d\vec{E} = K\frac{\hat{r}}{r^2}dq$$

Campo elétrico de uma distribuição contínua de cargas

$$\vec{E} = k\int\frac{\hat{r}}{r^2}dq$$

Campo elétrico de um anel circular

Considere um anel carregado eletricamente com uma densidade linear de carga λ. Temos que cada pedaço *ds* do anel terá uma carga *dq*, onde

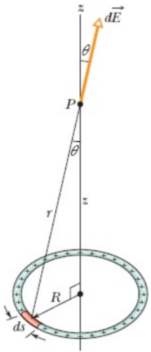
$$dq = \lambda ds.$$

Portanto, o campo $d\vec{E}$ será dado por

$$d\vec{E} = K\frac{\hat{r}}{r^2}\lambda ds.$$

ou na forma das componentes vetoriais,

$$d\vec{E} = dE_x\hat{x} + dE_y\hat{y} + dE_z\hat{z}.$$



Anel de carga positiva.

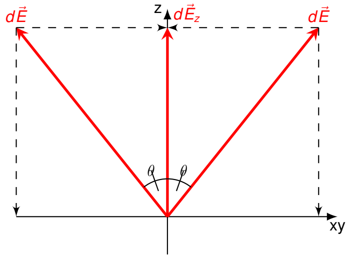
Campo elétrico de um anel circular (continuação)

Porém, é possível perceber que as componentes E_x e E_y de cada elemento ds se cancelam mutuamente, restando apenas a componente na direção z. Pela figura, podemos dizer que

$$dE_z = dE cos\theta.$$

Pela figura, também podemos perceber que

$$r^2 = z^2 + R^2,$$
$$cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}.$$



Componentes do campo elétrico.

Campo elétrico de um anel circular (continuação)

Sabendo que $dE = \frac{K\lambda ds}{r^2}$, substituímos na expressão anterior

$$dE_z = K\frac{\lambda}{r^2}cos\theta ds,$$

$$r^2 = z^2 + R^2$$

$$dE_z = K\frac{\lambda}{z^2 + R^2}cos\theta ds.$$

Integrando ao longo de todo o anel de comprimento $2\pi R$ temos

$$E_z = \int_0^{2\pi R} K\frac{\lambda}{z^2 + R^2}cos\theta ds,$$

$$E_z = K\frac{\lambda}{z^2 + R^2}cos\theta \int_0^{2\pi R} ds,$$

$$E_z = K\frac{\lambda}{z^2 + R^2}cos\theta 2\pi R.$$

Substituímos o termo $cos\theta = \frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$,

$$E_z = K\left[\frac{\lambda}{z^2 + R^2}\right]\left[\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right][2\pi R],$$

$$E_z = K\frac{\lambda 2\pi R z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Campo elétrico de um anel circular (continuação)

No entanto, é conveniente definir a solução em termos da carga total ao invés da densidade de carga. Sabemos que $dq = \lambda ds$, integrando ao longo de todo o anel temos

$$dq = \lambda ds,$$

$$q = \int_0^{2\pi R} \lambda ds,$$

$$\boxed{q = \lambda 2\pi R.}$$

Substituindo na expressão de E_z temos o campo elétrico a uma distância z do centro de um anel circular,

$$\boxed{E_z = K \frac{qz}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.}$$

Se $z >> R$ teremos $z^2 + R^2 \approx z^2$, ou seja,

$$\boxed{E_z = K \frac{q}{z^2}.}$$

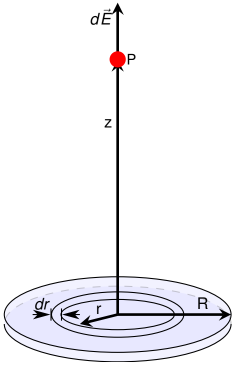
Campo elétrico de um disco circular

Considere um disco carregado eletricamente com uma densidade superficial de carga σ. Podemos considerar que o disco é formado por vários anéis de espessura *dr* e raio *r* contendo cargas *dq*, onde

$$dq = \sigma dA,$$
$$dq = \sigma 2\pi r dr.$$

sendo *dA* a área do anel. A carga total do disco é obtida integrando *dq* de cada anel, ou seja,

$$q = \int dq = \int_0^R \sigma dA = \sigma \pi R^2.$$



Disco circular com distribuição uniforme de carga.

Campo elétrico de um disco circular (continuação)

Através do campo elétrico dE_z produzido pelo anel temos

$$dE_z = K\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}dq,$$

$$dE_z = \left[K\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\right][2\pi\sigma r dr]\,.$$

Integrando temos

$$E_z = k\pi\sigma z\int_0^R \left(z^2+r^2\right)^{-3/2}(2r)dr$$

Para resolver a integral fazemos a substituição $X = z^2 + r^2$ e $dX = 2rdr$,

$$E_z = k\pi\sigma z\int X^{-3/2}dX,$$

$$E_z = k\,\overbrace{\pi\sigma}^{q/R^2}\,z\left[\frac{\left(z^2+r^2\right)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R.$$

Chegamos assim na solução final,

$$\boxed{E_z = 2k\frac{q}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right).}$$

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: *Escrever o número incluindo a vírgula.*

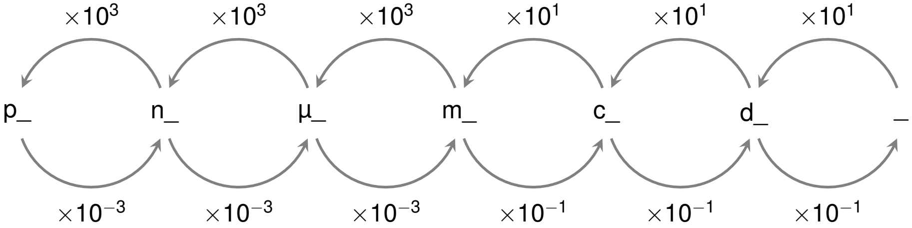
Passo 2: *Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.*

Passo 3: *Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar"com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6{,}59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

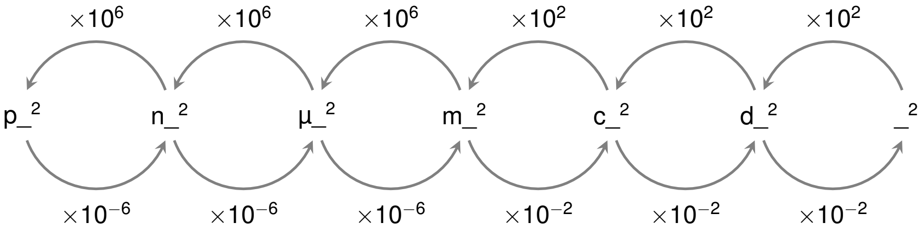


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1)\times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ g} = 2,5 \times 10^{(1)\times 3} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^{3} \text{ mg}$$

$$10 \ \mu\text{C} = 10 \times 10^{[(-3)\times 1 + (-1)\times 3]} \text{ C} \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Conversão de unidades em duas dimensões



$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2)\times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2)\times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^{6} \text{ mm}^2$$

$$10 \ \mu\text{m}^2 = 10 \times 10^{[(-6)\times 1+(-2)\times 3]} \text{ m}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-12} \text{ m}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
p\_^{3} \arrow[r, bend right, "\times 10^{-9}"'] & n\_^{3} \arrow[l, bend right, "\times 10^{9}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-9}"'] & \mu\_^{3} \arrow[l, bend right, "\times 10^{9}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-9}"'] & m\_^{3} \arrow[l, bend right, "\times 10^{9}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & c\_^{3} \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & d\_^{3} \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \_^{3} \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"']
\end{tikzcd}
$$

$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3)\times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{9} \text{ mm}^3$$

$$10 \ \mu\text{m}^3 = 10 \times 10^{[(-9)\times 1 + (-3)\times 3]} \text{ m}^3 \rightarrow 10 \times 10^{-18} \text{ m}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsílon	E	ϵ,ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ,φ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Referências e observações[1]

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.3, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.