

# Radiação de corpo negro e a quantização da energia

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

22 de março de 2024

# Sumário

1 **Quantização da energia**

2 **Apêndice**

## A antiga teoria quântica

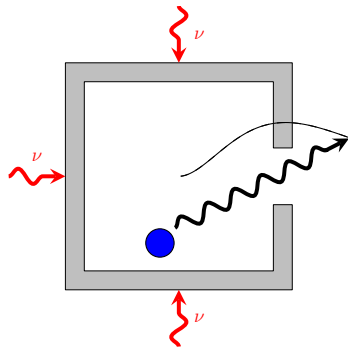
- ✓ *Numa reunião da sociedade alemã de física em 1900, Max Planck apresentou o seu artigo "Sobre a teoria da lei de distribuição de energia do espectro normal". **Esse dia marca o nascimento da física quântica.***
- ✓ *Até o surgimento da equação de Schroedinger, diversos estudos foram desenvolvidos demonstrando falhas na física clássica. Esses estudos, **chamados de antiga teoria quântica**, marcam os fundamentos da física quântica atual.*
- ✓ *Assim como a teoria da relatividade, a física quântica representa uma generalização da física clássica, que inclui as leis clássicas como casos especiais.*

### Corollary

*Os fenômenos ligados a física quântica abrangem todas as áreas da física clássica: mecânica, termodinâmica, ondas, mecânica estatística e eletromagnetismo.*

## O que é um corpo negro?

O corpo negro é um objeto que absorve toda a radiação que incide sobre ele. Sabendo que a radiação transporta energia por área e tempo, é de se esperar que os elétrons do material absorva a radiação, adquirindo energia cinética e aumentando assim a temperatura do objeto. Pela teoria do eletromagnetismo, cargas em movimento emitem radiação com a mesma frequência que elas oscilam. Portanto, a radiação observada poderá ser reconhecida como aquela emitida pelo corpo negro que se encontra a temperatura  $T$ .



Radiação emitida pelo corpo negro.

## Lei de Stefan-Boltzman

- ✓ A radiação (*intensidade*) incidente aumenta a vibração dos átomos, aumentando a temperatura do corpo negro;
- ✓ A radiação emitida somente depende da temperatura do corpo negro;
- ✓ De acordo com a teoria clássica, a radiação aumenta indefinidamente com a frequência da radiação emitida.

Chegando a lei de Stefan-Boltzman que relaciona a radiação emitida por um objeto com a sua temperatura  $T$ ,

$$R(T) = \sigma T^4.$$

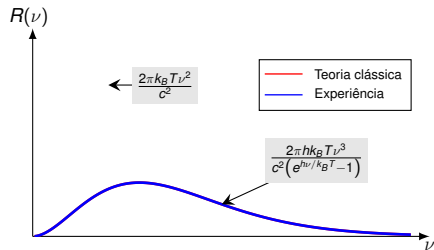
onde  $\sigma = 5,6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}$  *Utilize a animação para ver como a área abaixo da curva da densidade de radiação aumenta com a temperatura.*

## Catástrofe do ultravioleta

A catástrofe do ultravioleta representa a enorme discrepância entre a teoria clássica e os resultados experimentais, medidas para a radiação do corpo negro. Resumindo

- ✓ Para baixas frequências a teoria clássica se aproxima do resultado experimental;
- ✓ Para frequências maiores, a teoria clássica se afasta do resultado experimental.

*Utilize a animação para ver o máximo de radiância atingida e também o seu valor tendendo a zero para comprimentos de onda maiores.*



Comparação entre radiância calculada pela teoria clássica e os dados experimentais.

## Radiância e radiação emitida pelo material

Pela teoria do eletromagnetismo, a **radiância**, ou seja, radiação emitida por cada onda de frequência  $\nu$  ( $R(\nu)$ ), que sai da cavidade de um corpo negro é dado por

$$R(\nu) = \frac{c}{4} u(\nu),$$

onde  $u(\nu)$  é a energia armazenada na cavidade por volume. Neste caso, a quantidade de energia na faixa de radiação com frequências entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  vale  $u(\nu)d\nu$ . Portanto, a quantidade de radiação  $dR$

emitida neste intervalo vale

$$dR = R(\nu)d\nu = \frac{c}{4} u(\nu)d\nu.$$

Para determinar a radiação total emitida pelo corpo negro, integramos a equação acima (**o que deve estar condizente com a lei de Stefan-Boltzman**),

$$R = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu)d\nu.$$

## Relação entre energia e temperatura

Pela termodinâmica, a energia de agitação dos elétrons por volume está associado estatisticamente com o valor médio da energia  $E$  multiplicado pelo número de cargas elétricas oscilantes,

$$u(\nu) = \langle E \rangle n(\nu),$$

No caso acima, podemos dizer que cada elétron ao oscilar emite uma onda eletromagnética de frequência  $\nu$ . Essa onda eletromagnética confinada em uma cavidade se comporta como uma onda

estacionária contendo um modo normal de vibração específico. Portanto, a onda eletromagnética produzida pelas cargas oscilantes podem escapar da cavidade, sendo em seguida captada pelo sensor como a radiância  $R(\nu)$ . É possível mostrar que a quantidade de modos de vibração por volume e por frequência é dado por (veja o apêndice D)

$$n(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}.$$



## Valor médio da energia para uma distribuição contínua de energia

Para determinar o valor médio da energia  $\langle E \rangle$ , usamos a expressão abaixo

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E f(E) dE}{\int_0^\infty f(E) dE},$$
$$f(E) = A e^{-E/k_B T}.$$

onde  $f(E)$  é conhecida como distribuição de Boltzmann e  $k_B$  é chamado constante de Boltzmann. Substituindo na ex-

pressão teremos

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty A E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty A e^{-E/k_B T} dE},$$
$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE}.$$

É possível provar que o resultado da equação acima equivale a

$$\boxed{\langle E \rangle = k_B T.}$$

## A equação de Rayleigh-Jeans

Considerando uma distribuição contínua de energia para a radiação emitida pelo corpo negro, teremos que a densidade de energia  $u(\nu)$  é dado por

$$u(\nu) = \langle E \rangle n(\nu);$$

$$u(\nu) = (k_B T) \left( \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right).$$

Substituindo na fórmula da radiação,

$$R = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu.$$

$$R = \frac{c}{4} \int_0^\infty \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu,$$

$$R = \frac{8\pi k_B T}{c^2} \int_0^\infty \nu^2 d\nu,$$

$$R = \frac{8\pi k_B T}{3c^2} \nu^3 \Big|_0^\infty = \infty.$$

Vemos que se considerarmos uma distribuição contínua de energia para  $u(\nu)$ , quando  $\nu \rightarrow \infty$  teremos  $R \rightarrow \infty$ , o que resulta na catástrofe do ultravioleta.

## A lei de Planck e o nascimento da física quântica

Para explicar a catástrofe do ultravioleta, duas causas são possíveis

- ✓ *Contagem errada do número de estados  $n(\nu)$ ;*
- ✓ *Valor da energia para cada modo vibracional está errado.*

### Hipótese de Planck

Como opção, Planck sugeriu que a energia das cargas oscilantes, e consequentemente a radiância emitida por ela, ao invés de assumir qualquer valor, ela deverá ter valores discretos bem definidos, e deve também ser proporcional a frequência da radiação emitida,

$$E_n = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$h$  é conhecido como a **constante de Planck**.

## Valor médio da energia para uma distribuição discreta de energia

O valor médio da energia  $\langle E \rangle$  para uma distribuição discreta de energias é dado por

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E (A e^{-E/k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} (A e^{-E/k_B T})},$$
$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E e^{-E/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E/k_B T}}.$$

Como temos valores discretos de energia, a integral é substituída por uma soma de valores de energia  $E_n$ . É possível provar que o resultado equivale a

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.$$

Substituindo em  $u(\nu)$  teremos

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}.$$

O resultado acima em  $R(\nu)$  reproduz perfeitamente os dados experimentais.

## Lei de Planck para baixas frequências

Pela teoria clássica temos que a teoria se aproxima do resultado experimental quando  $\nu \ll 1$ , usando a expansão

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2} \left( \frac{h\nu}{k_B T} \right)^2 + \dots,$$

podemos dizer que  $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1$  se  $h\nu \ll k_B T$ . Substituindo em  $u(\nu)$  resulta em

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi k_B T \nu^3}{c^3 \left( 1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1 \right)},$$
$$u(\nu) \approx \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3},$$

o que corresponde a lei de Rayleigh-Jeans da teoria clássica da radiação.

### Corollary

*Para  $h\nu/k_B T \ll 1$  a equação de Planck se resume na lei de Rayleigh-Jeans.*

## Lei de Planck para frequências elevadas

Considerando a emissão de radiação de altas frequências, onde  $h\nu \gg kT$ . Isso faz com que  $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \gg 1$ , portanto podemos desprezar o valor 1 do denominador de  $u(\nu)$ . Temos assim

$$u(\nu) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 e^{\frac{h\nu}{k_B T}}} \Rightarrow \left( \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right) e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}.$$

Pela definição de radiância, onde  $R(\nu) = cu(\nu)/4$  temos

$$R(\nu) = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}.$$

Sabendo que  $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \rightarrow 0$  para  $h\nu \gg kT$ , podemos dizer que  $R(\nu \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , concordando com o resultado experimental.

### Corollary

*Para  $h\nu/k_B T \gg 1$  a equação de Planck se resume ao limite de Wien, onde  $R(\nu \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .*

## Apêndice A - Observações<sup>1</sup>

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup> Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Apêndice B - Demonstração do valor $kT$ para a energia média

Considere a energia média  $\langle E \rangle$  onde definimos  $\beta = 1/kT$ ,

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-\beta E} dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}$$

Podemos ver que  $-\frac{d}{d\beta} e^{-\beta E} = E e^{-\beta E}$ ,

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty \left( -\frac{d}{d\beta} e^{-\beta E} \right) dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}$$

$$\langle E \rangle = \frac{-\frac{d}{d\beta} \left( \int_0^\infty e^{-\beta E} dE \right)}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}.$$

Definindo  $F(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta E} dE$  teremos

$$\langle E \rangle = -\frac{\frac{dF(\beta)}{d\beta}}{F(\beta)},$$

Assim poderemos obter  $\langle E \rangle$  sem a necessidade de resolver a integral.



## Apêndice B - Demonstração do valor $kT$ para a energia média

Pela propriedade do logaritmo e empregando a regra da cadeia, temos que a sua derivada é dada por

$$\frac{d \ln [1/F(\beta)]}{d\beta} = \left( \frac{d \ln(1/F)}{dF} \right) \left( \frac{dF}{d\beta} \right)$$

Porém, sabemos que  $\frac{d \ln F}{dF} = 1/F$ , portanto

$$\frac{d \ln [F(\beta)]}{d\beta} = \left( \frac{1}{F} \right) \left( \frac{dF}{d\beta} \right)$$

Assim podemos ver que

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{d}{d\beta} \ln[F(\beta)], \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \left( \int_0^\infty e^{-\beta E} dE \right). \end{aligned}$$

Resolvendo a integral teremos

$$\langle E \rangle = \frac{d \ln(\beta)}{d\beta} = 1/\beta,$$

$$\boxed{\langle E \rangle = kT.}$$

## Apêndice C - Demonstração do valor médio da energia segundo Planck

Segundo Planck, para o cálculo da energia média, devemos adotar a somatória ao invés de uma integral, assim

$$\langle E \rangle = -\frac{d}{d\beta} \ln \left( \sum e^{-\beta E} \right),$$

Levando em consideração que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E} = \frac{1}{e^{\beta E} - 1}$$

teremos

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{d}{d\beta} \ln \left( e^{\beta E} - 1 \right), \\ &= \frac{d}{dx} \ln x \left( \frac{dx}{d\beta} \right), \\ &= \frac{E}{e^{\beta E} - 1}. \end{aligned}$$

Definindo  $E = h\nu$  e  $\beta = 1/k_B T$  teremos

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

## Apêndice D - Contagem dos modos normais de vibração em uma cavidade

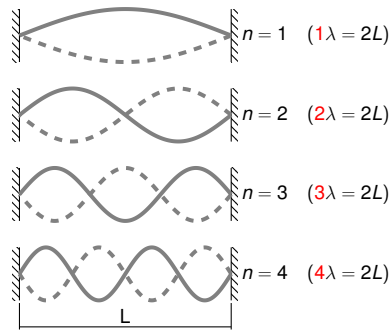
Considere ondas eletromagnéticas polarizadas e confinadas em uma cavidade de comprimento  $L$ . Uma onda confinada apresenta o comportamento de ondas estacionárias de função

$$E(x, t) = E_m \sin(kx) \sin(\omega t),$$

onde temos

$$\nu = \frac{nc}{2L},$$

e  $n$  representa os modos normais de vibração.



Modos normais de vibração.

## Apêndice D - Contagem dos modos normais de vibração em uma cavidade

Para uma cavidade cúbica devemos considerar modos normais de vibração nas direções x, y e z, e os valores possíveis para n podem ser representados em um gráfico como mostra a figura ao lado. Assim, para um dado valor n poderemos ter N modos de vibração diferentes, ou seja,

conteúdo...

$$N(n) = \frac{4\pi n^2}{8},$$

onde n é um número inteiro positivo e

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2.$$

## Apêndice D - Contagem dos modos normais de vibração em uma cavidade

Sabendo que

$$n = \frac{2L}{c}\nu,$$
$$\Delta n = \frac{2L}{c}\Delta\nu.$$

podemos dizer que a cada intervalo de frequência  $\Delta\nu$  teremos a seguinte quantidade de modos normais

$$N(\nu)\Delta\nu = \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \left(\frac{2L\Delta\nu}{c}\right).$$

$$N(\nu)\Delta\nu = \frac{4\pi L^3 \nu^2}{c^3} \Delta\nu.$$

Esse valor representa a quantidade de modos de vibração em um intervalo  $\Delta\nu$ , para saber a quantidade por volume devemos dividir por  $L^3$ , e considerando o caso mais geral de uma onda não-polarizada devemos multiplicar por 2,

$$n(\nu)\Delta\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Delta\nu.$$

## Apêndice E - A hipótese de Planck e a lei de Stefan-Boltzman

Utilizando a expansão em série da função  $1/(e^x + 1)$  teremos

$$\frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}$$

Substituindo na fórmula de  $u(\nu)$  segundo Planck teremos

$$R = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu.$$

$$R = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^3 \sum e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} d\nu,$$
$$R = \frac{2\pi h}{c^2} \sum \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} d\nu.$$

Resolvendo a integral através do método de integração por partes chegamos a

$$R = \left( \frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3} \sum 1/n^4 \right) T^4,$$
$$R = \sigma T^4.$$

## Apêndice F - A hipótese de Planck e o deslocamento de Wien

Considere a expressão da radiância de acordo com a hipótese de Planck. Considerando  $c = \lambda\nu$ , podemos expressá-la em função de comprimento de onda da radiação,

$$R(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)} d\lambda.$$

Considerando a situação onde  $hc/k_B T$ , podemos dizer que  $e^{hc/k_B T} \gg 1$ . Portanto podemos fazer a aproximação

$$R(\lambda) \approx 2\pi hc^2 \lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{\lambda k_B T}}.$$




O comprimento de onda da máxima radiação é obtida através de  $\frac{dR}{d\lambda} = 0$ ,

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{2\pi hce^{-\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda^5} \left( -5\lambda^{-1} + \frac{hc}{\lambda^2 k_B T} \right) = 0$$

Isolando  $\lambda$  na equação teremos

$$\lambda T = \frac{hc}{5k_B} = 2,89 \times 10^6 \text{ nm} \cdot \text{K}.$$

## Referências

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.4, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.4, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)