Rotação

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

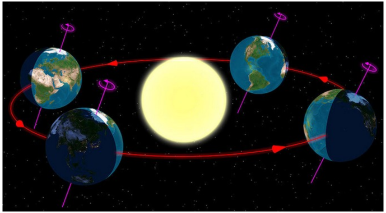
26 de Junho de 2020

Sumário

Introdução

Na mecânica podemos dizer que existem dois tipos de movimentos distintos:

- ✓ Translação ou retilíneo: Os objetos se movem ao longo de linhas retas ou curvas;
- ✓ Rotação: Os objetos giram em torno de um eixo.



Movimentos de rotação e translação da Terra.

Corollary

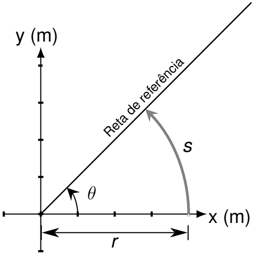
O movimento mais geral de um corpo rígido se compõe de uma translação e uma rotação.

Posição angular

A posição angular de uma reta é o ângulo que a reta faz com uma direção fixa, em relação a posição angular zero. Na figura ao lado, a posição angular θ é medida em relação ao eixo x. De acordo com a figura podemos ver que

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r},}$$

onde s é o comprimento de um arco de raio r.



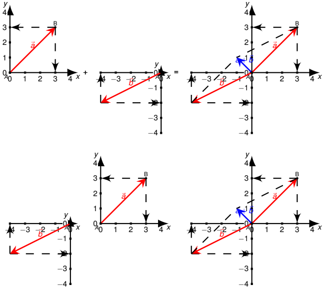
Rotação em torno do eixo z.

Corollary

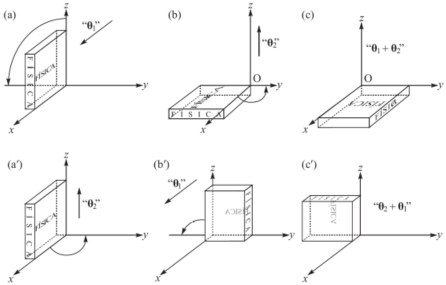
A unidade de medida da posição angular é o radiano (rad).

Posição angular e sua relação com grandezas vetoriais

A posição angular não pode ser considerada grandeza vetorial pois não obedece a propriedade vetorial de comutatividade, ou seja, $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$.



Propriedade comutativa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Violação da propriedade comutativa em rotações.

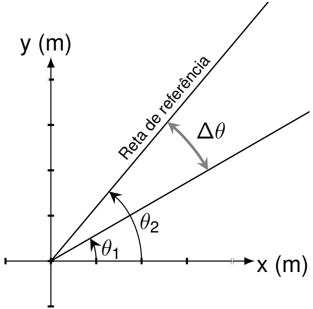
Deslocamento angular

Se o corpo gira em torno do eixo de rotação variando o seu ângulo de θ_1 para θ_2 nos instante t_1 e t_2 respectivamente, o corpo sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$, dado por

$$\boxed{\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.}$$

Corollary

Por convenção adotamos que um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo, e um deslocamento no sentido horário é negativo.



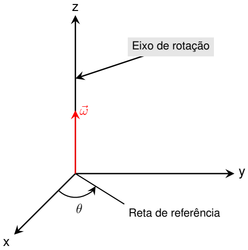
Deslocamento angular em torno do eixo de rotação z.

Velocidade angular

Considerando que o deslocamento ocorre em um intervalo infitesimal ($\Delta t \to dt$), temos após aplicar a definição de derivada

$$\boxed{\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta(t)}{dt}.}$$

Se conhecemos a função que determina a posição angular, podemos calcular a velocidade angular por derivação.



Vetor velocidade angular.

Corollary

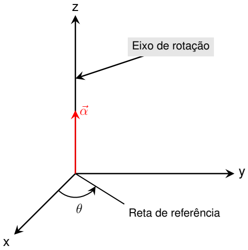
A unidade de medida da velocidade angular é radiano o por segundo (rad/s).

Aceleração angular

Assim como no movimento linear, se a velocidade angular do objeto em rotação não for constante, esse objeto possui uma aceleração angular α dado por

$$\boxed{\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega(t)}{dt}.}$$

Assim como na velocidade angular, se conhecemos a função que determina a velocidade angular podemos calcular a aceleração angular por derivação.



Vetor aceleração angular.

Corollary

A unidade de medida da aceleração angular é o radiano por segundo ao quadrado.

Correspondência entre os movimentos de translação e rotação

Em rotações, no caso onde a aceleração angular α for constante, podemos escrever as funções horárias do movimento angular de maneira análoga ao movimento retilíneo.

Equações de movimento para aceleração linear constante e angular também constante.

Equação	Variável que falta	Equação	Variável que falta
$v = v_0 + at$	Δx	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$\Delta\theta$
$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	ω
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$	t
$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t$	a	$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\,t$	α
$\Delta x = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	$\Delta\theta = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	ω_0

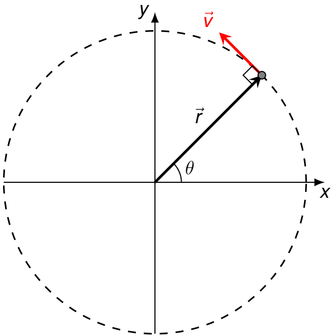
Relações entre as variáveis lineares e angulares

Sabemos que uma partícula girando em torno de um eixo com raio r realiza um arco s dado por $s = \theta r$. Se ela realiza um movimento circular, onde $r = cte$, derivando no tempo temos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt},$$
$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Pela figura podemos ver que $\frac{ds}{dt} = v$, portanto

$$\boxed{v = \omega r.}$$



Velocidade tangencial $\vec{v}$ no MCU.

Período de revolução

Se $\omega = cte$, podemos dizer que o período de revolução T (definido como o tempo gasto para a partícula percorrer uma volta completa) é dado pelo caminho percorrido pela partícula (que corresponde exatamente o comprimento s da circunferência de raio r). Portanto

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

v é conhecido como a velocidade tangencial realizado pela partícula.

Sabendo que $v = \omega r$, temos

$$\boxed{T = \frac{2\pi \cancel{r}}{\omega \cancel{r}} = \frac{2\pi}{\omega}.}$$

Definindo a frequência ν como o número de voltas por tempo, temos que

$$\nu = \frac{1}{T},$$

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}.}$$

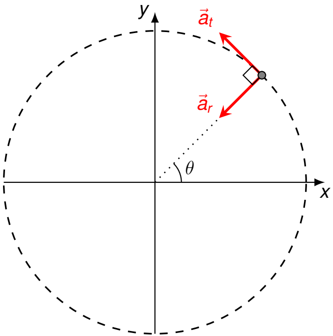
Acelerações radial e tangencial

Derivando a função $v = \omega r$ encontramos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega r}{dt},$$
$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt},$$
$$\boxed{a_t = \alpha r.}$$

Sabendo que a aceleração radial a_r corresponde a aceleração centrípeta a_{cpt}, temos portanto

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.}$$



Acelerações radial $\vec{a}_r$ e tangencial $\vec{a}_t$.

Energia cinética de rotação

Considere uma partículas girando em torno de um eixo, mantendo a sua distância r até o eixo constante ao longo do tempo. Sua energia cinética é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, onde $\vec{v}$ é a sua velocidade tangencial. Sabendo que $v = \omega r$ temos

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$
$$K = \frac{1}{2}m(\omega r)^2,$$

Definimos $I = mr^2$ como o momento de inércia da partícula, onde para um conjunto de N partículas girando em torno de um eixo comum teremos

$$\boxed{I = \sum_i^N m_i r_i^2.}$$

Podemos dizer que a energia cinética de rotação desse conjunto equivale a

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2.}$$

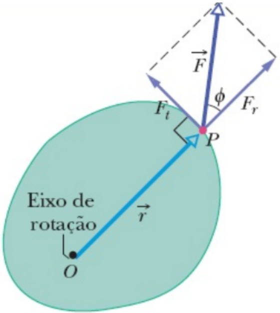
Torque

Considere uma força $\vec{F}$ no ponto P de um objeto à uma distância r do ponto onde esse objeto irá girar. Essa força será responsável por fazê-lo girar em torno do eixo de rotação nessas condições. No entanto podemos decompô-la em

- ✓ $\vec{F}_r$ na direção do raio de giro;
- ✓ $\vec{F}_t$ perpendicular ao raio de giro.

Percebe-se que somente $\vec{F}_t$ irá contribuir para a rotação, onde

$$F_t = F \sin \phi.$$



Rotação no ponto P devido a força $\vec{F}_t$.

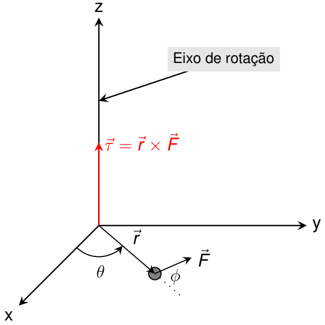
Representação vetorial do torque

A capacidade de $\vec{F}$ de fazer o objeto girar não depende apenas de $\vec{F}_t$, mas também da distância entre o ponto de aplicação P e o ponto O. Para levar em conta os dois fatores definimos uma grandeza chamada torque τ, onde

$$\tau = (r)(F \sin\phi).$$

Porém, o torque é uma grandeza vetorial, pois a força aplicada em sentido contrário, ou se o ponto O estiver do lado oposto, o objeto poderá girar no sentido horário ou anti-horário. Portanto, é conveniente definir o torque na forma

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.}$$



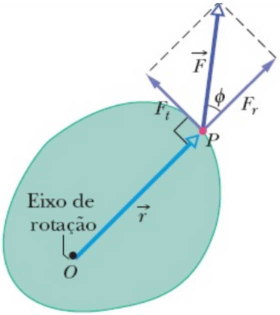
Representação do torque $\vec{\tau}$.

Trabalho em rotações

A expressão do trabalho dW realizado por uma força $\vec{F}$ ao longo do caminho infinitesimal ds é dado por $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$. No entanto, no caso do movimento de rotação, percebemos que somente a componente $\vec{F}_t$ realiza efetivamente algum trabalho sobre a partícula, portanto temos um percurso ao longo do caminho c

$$W = \int_c F_t \cos\theta ds,$$

$$W = \int_c F \sin\phi ds.$$



Rotação no ponto P devido a força $\vec{F}_t$.

Trabalho e potência em rotações (continuação)

Sabemos que o comprimento de um arco s é dado por $s = r\theta$. Considerando que o caminho infinitesimal ds percorrido pela partícula, temos que $ds = rd\theta$. Fazendo uma substituição de variáveis

$$dW = F \sin\phi r d\theta.$$

Porém, pela definição de torque $\tau = rF \sin\phi$, portanto

$$dW = \tau d\theta.$$

Integrando ao longo do caminho c temos

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta.}$$

A potência pode ser determinada através da expressão $P = \frac{dW}{dt}$. Considerando uma rotação onde $\tau = cte$ teremos

$$\boxed{P = \frac{\tau d\theta}{dt} = \tau\omega.}$$

Momento angular

No movimento linear, temos de acordo com a segunda lei de Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Substituindo na definição do torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

No entanto, podemos perceber pela propriedade do produto vetorial

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p},$$

onde

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}.$$

Substituindo na expressão do torque

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \overbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}^{v} \times \vec{p},$$

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \vec{v} \times m\vec{v}.$$

onde sabemos que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$.

Momento angular (continuação)

Porém, pela regra do produto vetorial, temos que $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$, pois o produto de dois vetores com a mesma orientação é igual a zero no produto vetorial, portanto

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0},$$

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt},$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}.$$

A equação acima nos fornece uma nova grandeza física associado a rotação chamado momento angular $\vec{l}$, onde

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Considerando um movimento circular onde $r = cte$, o módulo de $\vec{l}$ é dado por $l = mrv$, porém $v = \omega r$, substituindo

$$l = mr\overbrace{v}^{\omega r} = mr^2\omega = I\omega,$$

$$\boxed{\vec{l} = I\vec{\omega}.}$$

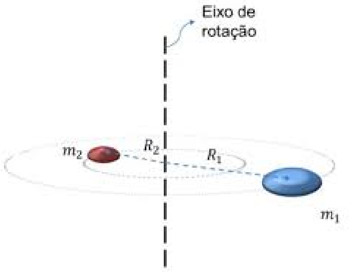
Momento angular total de um sistema de partículas

Considerando um sistema de partículas, o momento angular total $\vec{L}$ é a soma vetorial dos momentos angulares $\vec{l}$ de cada partícula do sistema,

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i.$$

Derivando no tempo temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{l}_i}{dt}.$$



Sistema de duas partículas girando em torno do eixo z.

Conservação do momento angular

Aplicando a definição de torque teremos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{l}_i}{dt},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{\text{res}}.$$

No caso especial onde o torque externo resultante atuando sobre as partículas for zero, o momento angular total $\vec{L}$ do sistema é conservado,

$$\boxed{\vec{L} = \text{constante.}}$$

Lei da conservação do momento angular

Se a somatória dos torques externos atuando sobre um sistema de partículas é zero, o momento angular total desse sistema não pode variar.

Resumo

Correspondência entre os movimentos de translação e rotação.

Translação		Rotação	
Grandeza	Fórmula	Grandeza	Fórmula
Deslocamento	Δx	Deslocamento angular	$\Delta\theta$
Velocidade	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Velocidade angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleração	$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Massa	m	Momento de inércia	$I = mr^2$
Momento linear	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$
Força	$\vec{F} = m\vec{a}$	Torque	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Trabalho	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Trabalho	$W = \int \tau d\theta$
Lei de conservação	$\vec{P} = \text{cte se } \vec{F}_{\text{res}} = 0$	Lei de conservação	$\vec{L} = \text{cte se } \vec{\tau}_{\text{res}} = 0$

Referências e observações[1]

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.