Vetores

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná
Campus Irati

20 de Abril de 2021

Sumário

A física e os vetores

A física inteira é representada por grandezas escalares e vetoriais. Do ponto de vista matemático, as grandezas escalares são representadas por escalares enquanto que as grandezas vetoriais por vetores.

Exemplos de grandezas escalares e vetoriais

- ✓ Grandezas escalares: Massa, pressão, energia, trabalho,...
- ✓ Grandezas vetoriais: Força, deslocamento, velocidade, aceleração, torque,...

Corollary

Independente se a massa do bloco permanece a mesma, podemos observar que o fenômeno físico observado (seu deslocamento) muda se o empurrarmos da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda.

Definição de um vetor

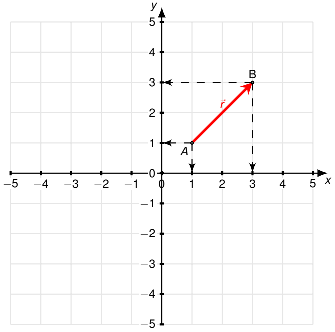
Vetor

Entidade matemática dotada de:

- ✓ Módulo ou intensidade:
- ✓ Direção:
- ✓ Sentido:

Na figura ao lado, as propriedades do vetor $\vec{r}$ são dados por:

- ✓ Módulo: $2\sqrt{2}$ unidades;
- ✓ Direção: 45° em relação ao eixo x;
- ✓ Sentido: De A para B.



Representação de um vetor no plano cartesiano.

Coordenadas vetoriais

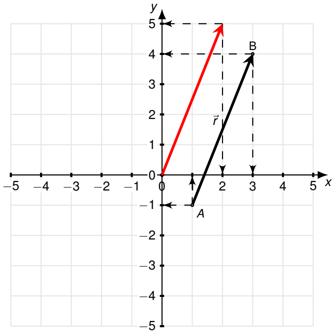
Na figura ao lado, o vetor $\vec{r}$ é dado por

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overline{AB},\\ &= B - A,\\ &= (3,4) - (1,-1),\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r} = (2,5).}$$

Corollary

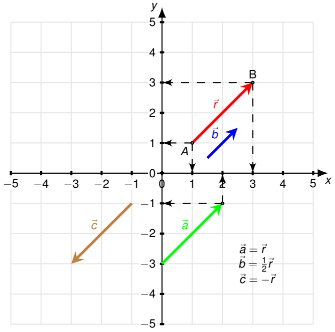
Um vetor pode ser obtido pela diferença entre duas coordenadas no espaço.



Representação de um vetor no plano cartesiano.

Multiplicação de um vetor por um escalar

- ✓ Na multiplicação de um vetor por um escalar, a direção e sentido não se varia, alterando apenas o seu módulo;
- ✓ Vetores com a mesma orientação (direção e sentido) e mesmo módulo são idênticos, não importando a sua representação no espaço;
- ✓ O módulo de um vetor é medido pelo seu comprimento do segmento de reta que o representa.



Paralelismo de vetores no plano cartesiano.

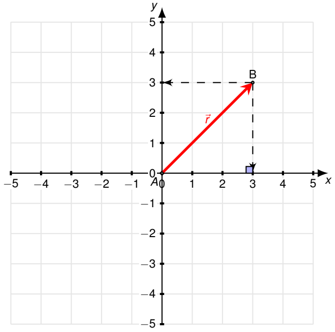
Módulo de um vetor

Usando relações trigonométricas temos

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2,$$
$$r^2 = 3^2 + 3^2,$$
$$\boxed{r = 3\sqrt{2}.}$$

Versor ($\hat{r}$)

Vetor que possui módulo igual a um.

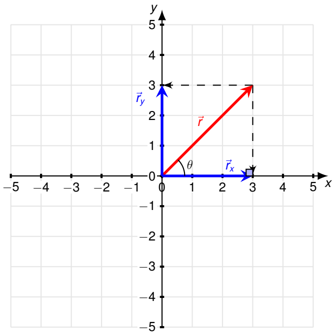


Representação de um vetor no plano cartesiano.

Representação de um vetor numa base ortonormal

Considere o vetor $\vec{r}$. Desde que a base representada pelo sistema de coordenadas cartesiana seja ortogonal, podemos utilizar relações trigonométricas, e dizer que

$$r_x = rcos\theta,$$
$$r_y = rsen\theta,$$
$$tan\theta = \frac{r_y}{r_x},$$
$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}.$$



Componentes de um vetor no plano cartesiano.

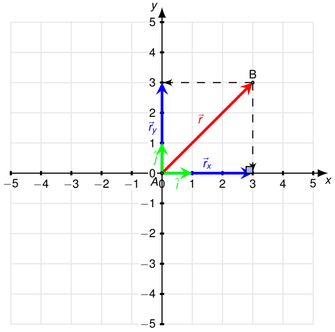
Representação de um vetor numa base ortonormal (continuação)

De certa forma, podemos representar $\vec{r}$ como a combinação linear de $\vec{r}_x$ e $\vec{r}_y$,

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y.$$

Considerando que $\vec{r}_x$ e $\vec{r}_y$ podem ser obtidos pelo produto de escalares com os versores $\hat{i}$ e $\hat{j}$, podemos dizer que

$$\boxed{\vec{r} = rcos\theta\hat{i} + rsen\theta\hat{j}.}$$



Componentes de um vetor no plano cartesiano.

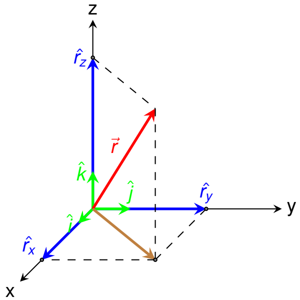
Vetores no espaço tridimensional

A representação do vetor $\vec{r}$ no espaço de três dimensões pode ser dado por

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}.$$

Base ortonormal

Base construída à partir dos versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, que são ortogonais entre si.



Representação de um vetor no espaço.

Soma de vetores e vetor resultante

Considere a equação abaixo

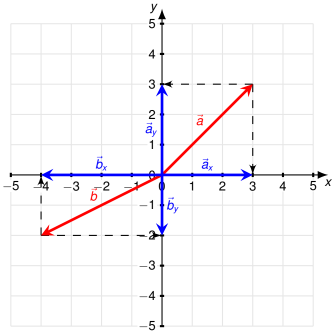
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b},$$

onde $\vec{r}$ é o vetor resultante. Representando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em suas componentes temos

$$\vec{r} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}),$$

$$\vec{r} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{r_x}\hat{i} + \underbrace{(a_y + b_y)}_{r_y}\hat{j},$$

$$\boxed{\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j}.}$$

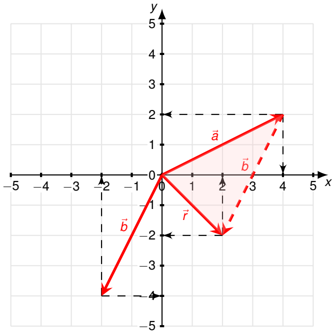


Vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e suas componentes.

Vetor resultante a partir da representação gráfica

Graficamente, podemos obter o vetor resultante combinando todos os vetores de modo a representar um polígono fechado. O lado do polígono que estiver com sentido contrário será o vetor resultante. No exemplo ao lado temos o vetor $\vec{r}$ resultante da soma dos vetores $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} - 4\hat{j}$, onde

$$\vec{r} = 2\hat{i} - 2\hat{j}.$$



Vetor resultante $\vec{r}$ da soma $\vec{a} + \vec{b}$.

Propriedades de adição vetorial

Uma grandeza vetorial deve obedecer as seguintes propriedades de adição:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{(equação vetorial)},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(lei comutativa)},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(lei associativa)},$$

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad \text{(subtração de vetores)}.$$

Corollary

A ordem dos vetores na soma não afeta o resultado.

Tipos de multiplicação em cálculo vetorial

✓ Multiplicação entre um vetor e um escalar $\Rightarrow$ O resultado será outro vetor:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(Segunda Lei de Newton)},$$

✓ Produto escalar $\Rightarrow$ O resultado será um escalar:

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{(Trabalho)},$$

✓ Produto vetorial $\Rightarrow$ O resultado será outro vetor diferente dos anteriores:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(Torque)}.$$

Corollary

Todas as três maneiras são diferentes entre si e nenhuma é igual à multiplicação algébrica.

Produto escalar

Usamos o produto escalar quando desejamos que o resultado da multiplicação entre dois vetores seja um escalar. Para isso, impomos as seguintes condições

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=\hat{\imath}\cdot\hat{k}=\hat{\jmath}\cdot\hat{k}=0,$$
$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1.$$

Dessa maneira temos

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}),$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} = {} & a_xb_x\underbrace{(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath})}_{1}+a_xb_y\underbrace{(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath})}_{0}+a_xb_z\underbrace{(\hat{\imath}\cdot\hat{k})}_{0}+\\ & +a_yb_x\underbrace{(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath})}_{0}+a_yb_y\underbrace{(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath})}_{1}+a_yb_z\underbrace{(\hat{\jmath}\cdot\hat{k})}_{0}+\\ & +a_zb_x\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{\imath})}_{0}+a_zb_y\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{\jmath})}_{0}+a_zb_z\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{k})}_{1}.\end{aligned}$$

Portanto, temos

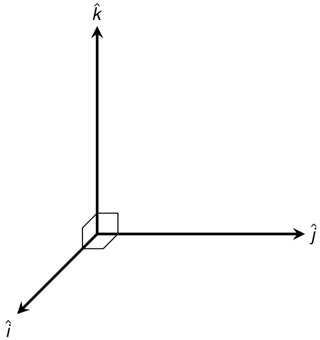
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.}$$

Produto escalar (continuação)

Vemos que a condição anterior é satisfeita se

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = cos\theta = 0,$$
$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = cos\theta = 1,$$

onde θ é o ângulo formado entre os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Como a base é ortogonal, ou seja, $\theta = 90°$, vemos que a condição é satisfeita.



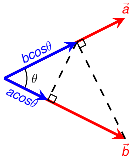
Ângulo entre os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

Produto escalar a partir da representação gráfica

De maneira geral podemos dizer que o produto escalar entre dois vetores quaisquer pode ser definido como

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = abcos\theta,}$$

onde θ é o ângulo entre esses vetores.



Projeção de a em b e vice-versa.

Corollary

O produto escalar também obedece a propriedade comutativa,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

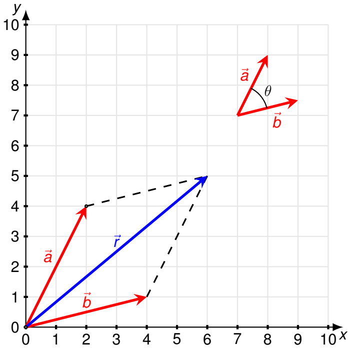
Módulo de um vetor resultante

O módulo da soma vetorial $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ pode ser calculada à partir do produto escalar $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$,

$$r^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}),$$
$$r^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Mas $\vec{a} \cdot \vec{b} = abcos\theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, portanto

$$\boxed{r^2 = a^2 + b^2 + 2abcos\theta.}$$



Representação de um vetor no plano cartesiano.

Produto vetorial

Usamos o produto vetorial quando desejamos que o resultado da multiplicação entre dois vetores seja um vetor. Para isso, impomos as seguintes condições

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{j}\times\hat{k}=\hat{k}\times\hat{i}=1,$$
$$\hat{j}\times\hat{i}=\hat{k}\times\hat{j}=\hat{i}\times\hat{k}=-1,$$
$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0.$$

Dessa maneira temos

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}),$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(a_yb_z-b_ya_z)\hat{i}+$$
$$+(a_zb_x-b_za_x)\hat{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\hat{k}.$$

Portanto, temos

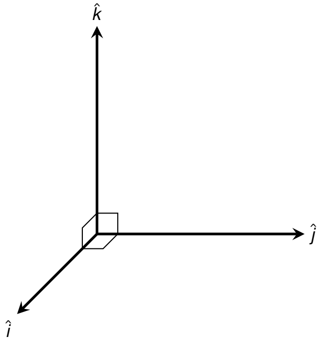
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c},$$
$$c_x=a_yb_z-b_ya_z,$$
$$c_y=a_zb_x-b_za_x,$$
$$c_z=a_xb_y-b_xa_y.$$

Produto vetorial (continuação)

Vemos que a condição anterior é satisfeita se

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{j} \times \hat{k} = \hat{k} \times \hat{i} = sen\theta = 1,$$
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = sen\theta = 0.$$

onde θ é o ângulo formado entre os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Como a base é ortogonal, ou seja, $\theta = 90°$, vemos que a condição é satisfeita.



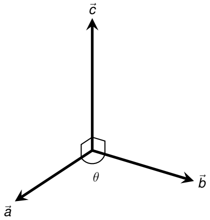
Ângulo entre os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

Produto vetorial a partir da representação gráfica

De maneira geral podemos dizer que o produto vetorial entre dois vetores quaisquer pode ser definido como

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = absen\theta,}$$

onde θ é o ângulo entre esses vetores.



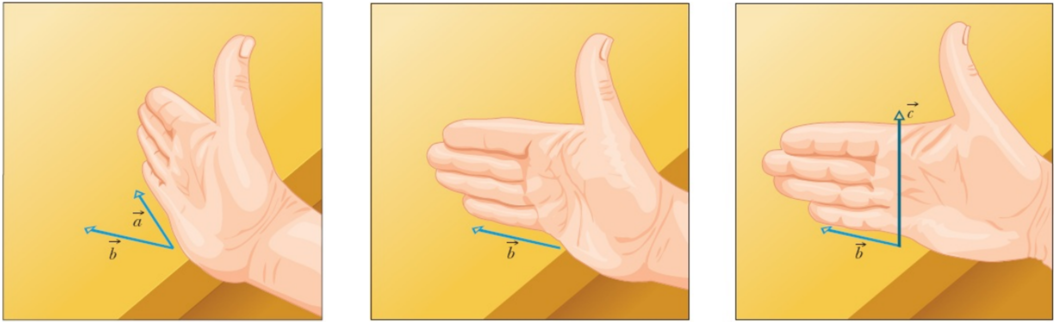
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Corollary

O produto vetorial não obedece a propriedade comutativa,

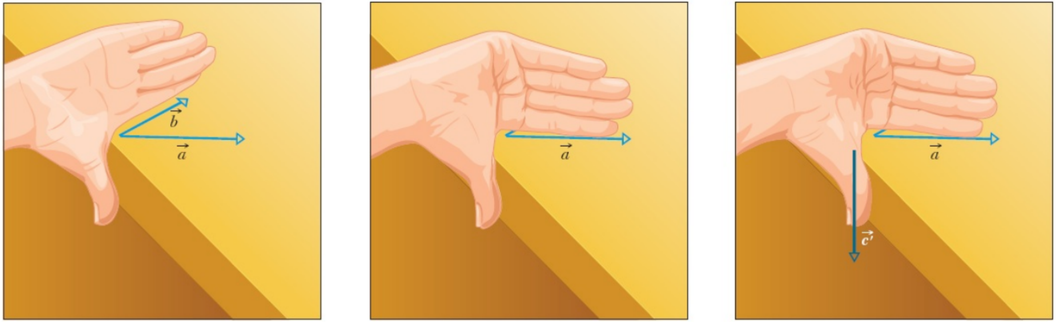
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

A regra da mão direita



Regra da mão direita, ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$) [1].

A regra da mão direita (continuação)



Regra da mão direita, ($\vec{c'} = \vec{b} \times \vec{a}$) [1].

Transformar um número em notação científica

Corollary

Passo 1: *Escrever o número incluindo a vírgula.*

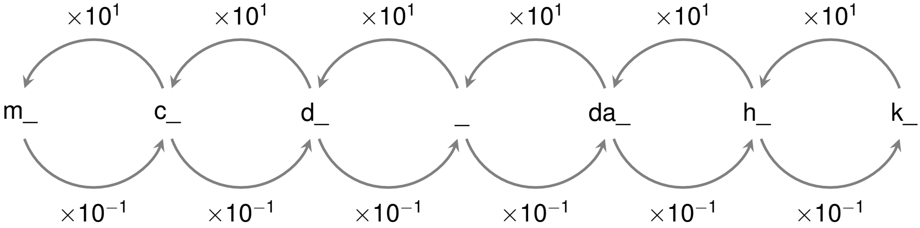
Passo 2: *Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.*

Passo 3: *Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar"com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

Exemplo

$$6\ 590\ 000\ 000\ 000\ 000,0 = 6{,}59 \times 10^{15}$$

Conversão de unidades em uma dimensão

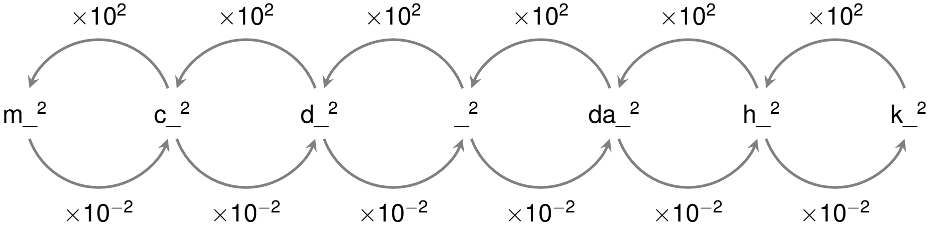


$$1\ \text{mm} = 1 \times 10^{(-1)\times 2}\ \text{dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2}\ \text{dm}$$

$$2,5\ \text{kg} = 2,5 \times 10^{(1)\times 6}\ \text{mg} \rightarrow 2,5 \times 10^{6}\ \text{mg}$$

$$10\ \text{ms} = 10 \times 10^{(-1)\times 3}\ \text{s} \rightarrow 10 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

Conversão de unidades em duas dimensões



$$1\ \mathrm{mm}^2 = 1 \times 10^{(-2)\times 2}\ \mathrm{dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4}\ \mathrm{dm}^2$$

$$2,5\ \mathrm{m}^2 = 2,5 \times 10^{(2)\times 3}\ \mathrm{mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^{6}\ \mathrm{mm}^2$$

$$10\ \mathrm{ms}^2 = 10 \times 10^{(-2)\times 3}\ \mathrm{s}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^2$$

Conversão de unidades em três dimensões

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{m\_}^3 \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{c\_}^3 \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{d\_}^3 \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{\_}^3 \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{da\_}^3 \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{h\_}^3 \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"'] \arrow[r, bend right, "\times 10^{-3}"'] & \mathrm{k\_}^3 \arrow[l, bend right, "\times 10^{3}"']
\end{tikzcd}
$$

$$1 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^{(-3)\times 2} \text{ dm}^3 \rightarrow 1 \times 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 3} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{9} \text{ mm}^3$$

$$2,5 \text{ km}^3 = 2,5 \times 10^{(3)\times 6} \text{ mm}^3 \rightarrow 2,5 \times 10^{18} \text{ mm}^3$$

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsílon	E	ϵ,ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ,φ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Observações[1]

Esta apresentação está disponível para download no endereço
https://flavianowilliams.github.io/education

[1] Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

Referências

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
- R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.1, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
- H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Mecânica, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)