

# Ondas eletromagnéticas

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

21 de Abril de 2021

# Sumário

- 1 Transporte de energia
- 2 Polarização da luz
- 3 Fenômenos ópticos e a luz
- 4 Apêndice

## Energia transportada em um onda eletromagnética

O vetor de Poynting  $S$  é definido como a energia transportada pela onda por tempo e área,

$$S = \left( \frac{\text{energia/tempo}}{\text{área}} \right).$$

Porém, energia/área = potência, assim

$$S = \left( \frac{\text{potência}}{\text{área}} \right).$$

A partir do vetor de Poynting podemos encontrar a intensidade de uma onda ele-

tromagnética. Da energia elétrica em um capacitor e em um indutor encontramos as expressões que definem a densidade de energia elétrica  $u_E$  e magnética  $u_B$  em função dos campos elétrico  $E$  e magnético  $B$ ,

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

## Densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética

Portanto, a energia total  $u$  transportada por volume da onda eletromagnética pode ser definido como

$$u = u_E + u_B,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(x, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(x, t)^2,$$

onde, pelas equações de Maxwell descobrimos que para uma onda se propa-

gando na direção  $x$  teremos

$$E(x, t) = E_m \cos(kx - \omega t),$$

$$B(x, t) = B_m \cos(kx - \omega t).$$

Substituindo na expressão da energia resulta em

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 [E_m \cos(kx - \omega t)]^2 + \frac{1}{2\mu_0} [B_m \cos(kx - \omega t)]^2.$$

## Densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética (continuação)

Simplificando a expressão anterior obteremos

$$u = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E_m^2 + \frac{1}{\mu_0} B_m^2 \right) \cos^2(kx - \omega t).$$

Contudo, sabemos a partir das equações de Maxwell que  $B_m = \frac{E_m}{c}$ , substituindo

$$u = \frac{E_m^2}{2} \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(kx - \omega t).$$

Pelas equações de Maxwell também sabemos que  $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ , substituímos encontramos

$$u = \frac{E_m^2}{2} \left( \frac{1}{\mu_0 c^2} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(kx - \omega t),$$

$$u = \frac{E_m^2}{2} \left( \frac{2}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(kx - \omega t),$$

$$u(x, t) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(kx - \omega t).$$

## Vetor de Poyting

Podemos perceber que

$$\left( \frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}} \right) = \left( \frac{\text{energia}}{\text{volume}} \times \text{velocidade} \right).$$

Portanto, no caso de uma onda monocromática se propagando no vácuo, podemos dizer que

$$S = u \times c,$$

ou seja, o vetor de Poyting é justamente a densidade de energia multiplicado pela

velocidade da luz. Substituindo  $u(x, t)$  teremos

$$S = \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t),$$

Sabendo que  $E(x, t) = E_m \cos(kx - \omega t)$ , representamos  $S$  na forma compacta

$$S(x, t) = \frac{1}{c\mu_0} E(x, t)^2.$$

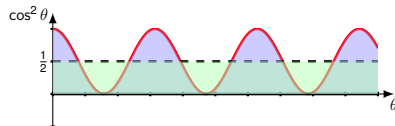
## Valor médio do vetor de Poynting

Entretando, do ponto de vista prático é mais conveniente obter informações a respeito do valor médio de uma grandeza ao invés de seu valor instantâneo. Dessa maneira definimos a intensidade  $I$  como

$$I = \langle S(x, t) \rangle = \left\langle \frac{1}{c\mu_0} E(x, t)^2 \right\rangle.$$

Sabendo que  $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$  teremos

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2.$$



Valor médio de  $\cos^2 \theta$  vezes  $\theta$  (área verde). Área de  $\cos^2 \theta$  (área azul).

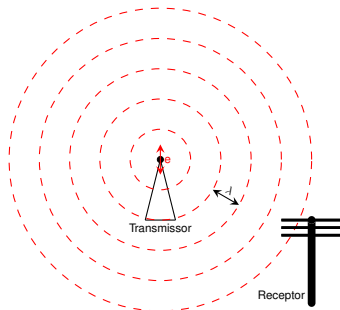
## Relação entre intensidade e potência

Pela definição de intensidade temos

$$\text{Intensidade} = \left( \frac{\text{energia}}{\text{área} \times \text{tempo}} \right).$$

Porém, sabemos que potência = energia por tempo, o que nos fornece

$$\text{Intensidade} = \left( \frac{\text{potência}}{\text{área}} \right).$$

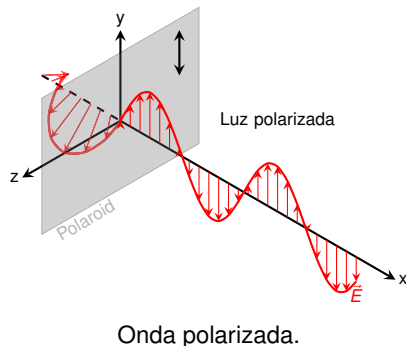


Intensidade da onda de rádio (esféricas) diminuindo com o quadrado da distância.



## Polarização da Luz

Diferentemente de ondas transmitidas por uma antena de rádio ou TV, as ondas emitidas pelo sol tem a direção do campo elétrico mudando aleatoriamente ao longo do tempo. Uma maneira de filtrar a luz do sol é a utilização de um filtro polarizador, que permite passar somente as ondas cuja direção do campo elétrico é paralelo a direção de orientação dos átomos que compõem o material. Demais campos elétricos são absorvidos devido a polarização dos elétrons no material.



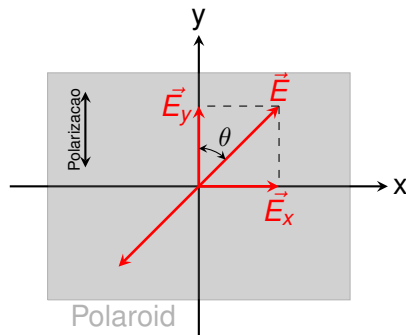
## Polarização da Luz

Sabemos que a intensidade da onda depende do quadrado do campo elétrico  $E$ . Podemos decompor  $E$  em suas componentes horizontal e vertical. Sabendo que somente a componente  $\vec{E}_y$  é atravessado temos

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_y^2 = \overbrace{\frac{1}{2c\mu_0} E_m^2}^{I_0} \cos^2 \theta,$$

$I = I_0 \cos^2 \theta.$

onde  $I_0$  é a intensidade da onda incidente.



Polarização da luz à partir do vetor campo elétrico  $\vec{E}$ .

## Polarização da luz incidente não polarizada

Se onda for não polarizada, ou seja, teremos frentes de onda cuja direção do campo elétrico assume todos os valores entre  $\theta = 0^\circ$  a  $\theta = 360^\circ$ . Sabendo que  $E_m^2 = E_{m,x}^2 + E_{m,y}^2$  teremos

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2,$$

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_{m,x}^2 + \frac{1}{2c\mu_0} E_{m,y}^2.$$

A soma das componentes em y e a mesma de z, portanto

$$I = 2 \left( \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2 \right).$$

Entretanto, as componentes na direção do eixo x não atravessam, pois  $\theta = 90^\circ$ . Portanto, a intensidade será a metade da onda incidente,

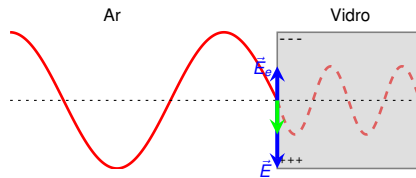
$$I = \frac{1}{2} I_0.$$

onde  $I_0$  é a intensidade da onda não polarizada.

## Propagação da onda na matéria

A onda eletromagnética ao atravessar um meio dielétrico, induz um movimento de elétrons do material, o qual faz surgir um campo elétrico com sentido contrário ao campo elétrico da onda. Como resultado, a onda transmitida no material terá um campo elétrico efetivo  $\vec{E}_\kappa$ , devido a diferença do campo  $\vec{E}$  da onda no ar com o campo elétrico produzido pela polarização das cargas  $\vec{E}_p$ ,

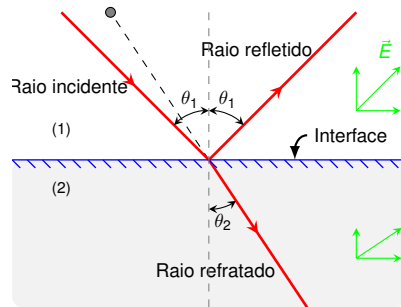
$$E_\kappa = E - E_p.$$



Onda atravessando um meio material.

## Desvio da direção de propagação da onda ao atravessar a matéria

Considere um raio de luz incidindo em um material dielétrico com a inclinação de  $\theta_1$  graus em relação ao eixo normal a superfície. Podemos decompor o vetor campo elétrico em suas componentes horizontal e vertical. Ao atravessar o meio refrigente, a componente vertical de  $\vec{E}$  causa uma polarização da matéria, diminuindo assim a amplitude vertical do campo elétrico. Entretanto, horizontalmente o campo elétrico não se altera, pois não há polarização nessa direção. Isso por sua vez altera a direção do campo elétrico  $\vec{E}$ , alterando assim a direção de propagação da onda.



Reflexão e refração dos raios de luz.

## Redução da velocidade da onda ao atravessar a matéria

Considere uma onda atravessando um meio dielétrico neutro e na ausência de corrente elétrica, nesse caso as equações de Maxwell no vácuo ainda são válidas, com a pequena modificação, que o campo elétrico da onda deverá ser reduzido por uma quantidade  $\kappa$ , onde  $\kappa$  é a constante dielétrica do meio, ou seja,

$$\vec{E}_\kappa = \frac{\vec{E}}{\kappa}, \quad (\kappa > 1).$$

Assim, a partir da lei de Ampère-Maxwell

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\kappa E_\kappa)}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial E_\kappa}{\partial t} &= -\frac{1}{\kappa \epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}. \end{aligned}$$

Da lei de Faraday-Lenz temos a equação da luz no vácuo, onde a variação no tempo de  $\vec{B}$  induz um campo  $\vec{E}$  circular,

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

## Redução da velocidade da onda ao atravessar a matéria (continuação)

Considerando que os campos elétrico e magnético admitem soluções do tipo

$A(x, t) = A_m \cos(kx - \omega t)$  teremos

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial x} = -E_{\kappa m} k \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B_m \omega \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial t} = E_{\kappa m} \omega \sin(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -B_m k \sin(kx - \omega t)$$

Substituindo nas equações anteriores teremos

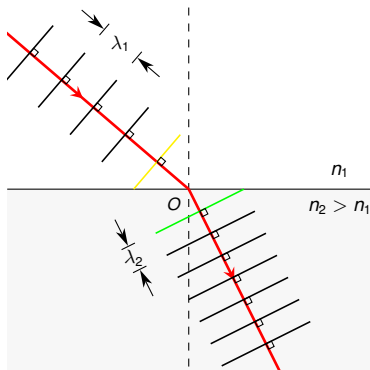
$$\frac{E_{\kappa m}}{B_m} = \frac{\omega}{k} = v,$$

$$\frac{E_{\kappa m}}{B_m} = \frac{k}{\omega \kappa \epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{v \kappa \epsilon_0 \mu_0}.$$

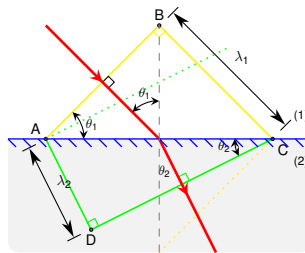
Sabendo que  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$  teremos

$$v = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}.$$

## Variação do comprimento de onda com a refração



$\lambda$  diminui quando a luz é refratada.



Frentes de onda na interface.



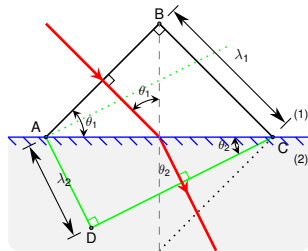
## Aplicando a trigonometria para definir a relação entre $\theta$ e $\lambda$

Na figura ao lado vemos que o triângulo ABC é retângulo, onde o ângulo do vértice BÂC é igual ao ângulo de incidência. Usando a lei dos senos encontramos

$$\overline{BC} = \lambda_1 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_1).$$

Da mesma maneira, o triângulo ADC também é retângulo, onde

$$\overline{AD} = \lambda_2 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_2).$$



Frentes de onda na interface.

## Lei de Snell

Temos assim

$$\lambda_1 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_1),$$

$$\lambda_2 = \overline{AC} \text{sen}(\theta_2).$$

Dividindo os dois lados da equação temos

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}.$$

Sabemos que na onda a relação entre comprimento de onda e velocidade

é dado por  $v = \lambda f$ , onde  $f$  é a frequência que não se altera quando a onda atravessa de um meio ao outro, portanto

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}.$$

Se o meio 1 for o vácuo ou ar temos  $v_1 = c$ , ou seja,

$$\boxed{\frac{c}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{sen}(\theta_{ar})}{\text{sen}(\theta_2)}}.$$

## Índice de refração

No caso da luz atravessando do ar para um meio mais refrigente temos a relação

$$\frac{c}{v} = \frac{\text{sen}(\theta_{ar})}{\text{sen}(\theta)}.$$

Se definirmos  $n = \sqrt{\kappa}$  teremos  $n = c/v$  como a fração da velocidade da luz que diminui ao atravessar o meio, assim

$$n = \frac{\text{sen}(\theta_{ar})}{\text{sen}(\theta_2)}.$$

Para uma onda que atravessa dois meios

com índices de refração diferentes temos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)},$$
$$\left(\frac{c}{v_2}\right) = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)},$$
$$\left(\frac{c}{v_1}\right) = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)},$$

$\times \frac{c}{c}$

### Lei de Snell

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)}, \quad (n > 1).$$

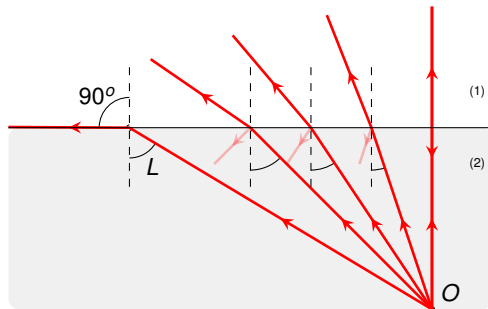
## Reflexão total

Aplicando a Lei de Snell temos

$$n_2 \operatorname{sen}(L) = n_1 \overbrace{\operatorname{sen}(90^\circ)}^1,$$
$$\operatorname{sen}(L) = \frac{n_1}{n_2}.$$

### Ângulo de reflexão total da luz

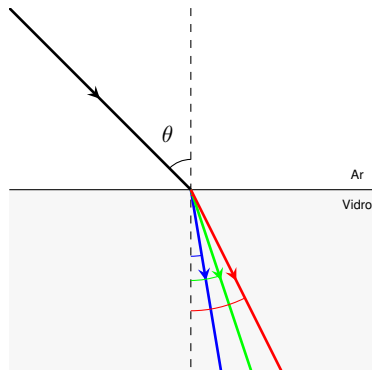
$$L = \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \right), \quad (n_2 > n_1).$$



Reflexão total da luz.

## Relação entre o índice de refração e a cor da luz

- ✓ Cada cor no espectro de luz visível é caracterizada por uma frequência em um comprimento de onda específico;
- ✓ A luz branca é a combinação de várias cores com comprimentos de onda diferentes;
- ✓ Cada cor terá velocidades diferentes após a refração, o que faz com que elas também tenham ângulos de refração diferentes.



Dispersão dos raios de luz.




## Observações<sup>1</sup>

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Referências

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Eletromagnetismo, v.4, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.3, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Eletromagnetismo, v.4, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)