

# Vetores

Flaviano Williams Fernandes

Instituto Federal do Paraná  
Campus Irati

20 de Abril de 2021

# Sumário

- 1 **Introdução**
- 2 **Vetores na base ortonormal**
- 3 **Soma de vetores**
- 4 **Multiplicação de vetores (1)**
- 5 **Multiplicação de vetores (2)**
- 6 **Apêndice**

## A física e os vetores

A física inteira é representada por grandezas escalares e vetoriais. Do ponto de vista matemático, as grandezas escalares são representadas por escalares enquanto que as grandezas vetoriais por vetores.

### Exemplos de grandezas escalares e vetoriais

- ✓ Grandezas escalares: Massa, pressão, energia, trabalho,...
- ✓ Grandezas vetoriais: Força, deslocamento, velocidade, aceleração, torque,...

### Corollary

*Independente se a massa do bloco permanece a mesma, podemos observar que o fenômeno físico observado (seu deslocamento) muda se o empurrarmos da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda.*

## Definição de um vetor

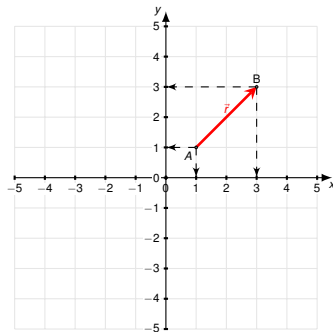
### Vetor

Entidade matemática dotada de:

- ✓ Módulo ou intensidade:
- ✓ Direção:
- ✓ Sentido:

Na figura ao lado, as propriedades do vetor  $\vec{r}$  são dados por:

- ✓ Módulo:  $2\sqrt{2}$  unidades;
- ✓ Direção:  $45^\circ$  em relação ao eixo x;
- ✓ Sentido: De A para B.



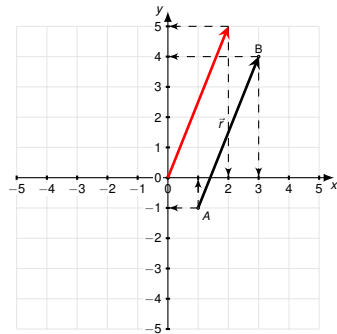
Representação de um vetor no plano cartesiano.

## Coordenadas vetoriais

Na figura ao lado, o vetor  $\vec{r}$  é dado por

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overline{AB}, \\ &= B - A, \\ &= (3, 4) - (1, -1),\end{aligned}$$

$$\vec{r} = (2, 5).$$



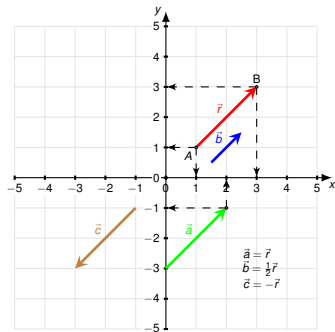
### Corollary

*Um vetor pode ser obtido pela diferença entre duas coordenadas no espaço.*

Representação de um vetor no plano cartesiano.

## Multiplicação de um vetor por um escalar

- ✓ Na multiplicação de um vetor por um escalar, a direção e sentido não se varia, alterando apenas o seu módulo;
- ✓ Vetores com a mesma orientação (direção e sentido) e mesmo módulo são idênticos, não importando a sua representação no espaço;
- ✓ O módulo de um vetor é medido pelo seu comprimento do segmento de reta que o representa.



Paralelismo de vetores no plano cartesiano.

## Módulo de um vetor

Usando relações trigonométricas temos

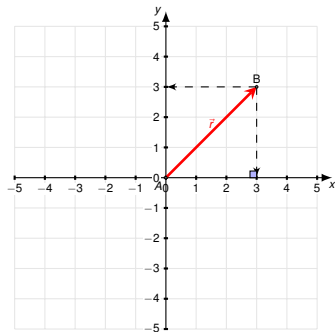
$$r^2 = r_x^2 + r_y^2,$$

$$r^2 = 3^2 + 3^2,$$

$$r = 3\sqrt{2}.$$

### Versor ( $\hat{r}$ )

Vetor que possui módulo igual a um.



Representação de um vetor no plano cartesiano.

## Representação de um vetor numa base ortonormal

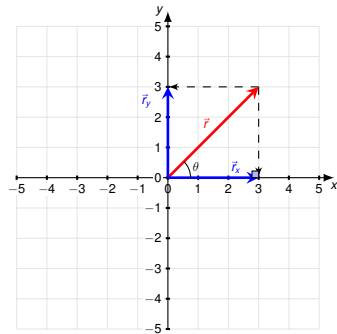
Considere o vetor  $\vec{r}$ . Desde que a base representada pelo sistema de coordenadas cartesiana seja ortogonal, podemos utilizar relações trigonométricas, e dizer que

$$r_x = r \cos \theta,$$

$$r_y = r \sin \theta,$$

$$\tan \theta = \frac{r_y}{r_x},$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}.$$



Componentes de um vetor no plano cartesiano.



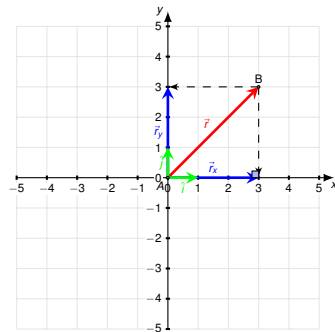
## Representação de um vetor numa base ortonormal (continuação)

De certa forma, podemos representar  $\vec{r}$  como a combinação linear de  $\vec{r}_x$  e  $\vec{r}_y$ ,

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y.$$

Considerando que  $\vec{r}_x$  e  $\vec{r}_y$  podem ser obtidos pelo produto de escalares com os versores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , podemos dizer que

$$\vec{r} = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}.$$



Componentes de um vetor no plano cartesiano.

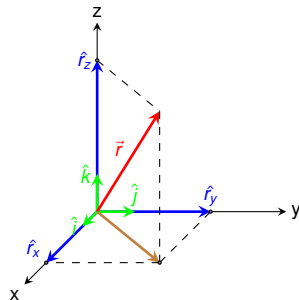
## Vetores no espaço tridimensional

A representação do vetor  $\vec{r}$  no espaço de três dimensões pode ser dado por

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}.$$

### Base ortonormal

Base construída à partir dos versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , que são ortogonais entre si.



Representação de um vetor no espaço.

## Soma de vetores e vetor resultante

Considere a equação abaixo

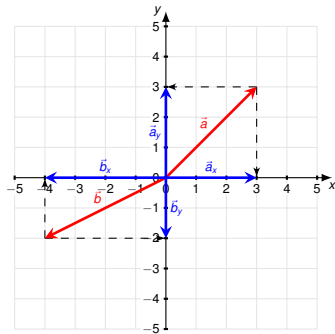
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b},$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor resultante. Representando  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  em suas componentes temos

$$\vec{r} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) + (b_x \hat{i} + b_y \hat{j}),$$

$$\vec{r} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{r_x} \hat{i} + \underbrace{(a_y + b_y)}_{r_y} \hat{j},$$

$$\boxed{\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}.}$$

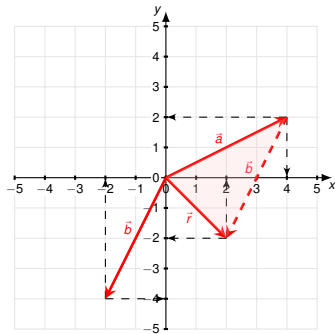


Vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e suas componentes.

## Vetor resultante a partir da representação gráfica

Graficamente, podemos obter o vetor resultante combinando todos os vetores de modo a representar um polígono fechado. O lado do polígono que estiver com sentido contrário será o vetor resultante. No exemplo ao lado temos o vetor  $\vec{r}$  resultante da soma dos vetores  $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$  e  $\vec{b} = -2\hat{i} - 4\hat{j}$ , onde

$$\vec{r} = 2\hat{i} - 2\hat{j}.$$



Vetor resultante  $\vec{r}$  da soma  $\vec{a} + \vec{b}$ .

## Propriedades de adição vetorial

Uma grandeza vetorial deve obedecer as seguintes propriedades de adição:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad (\text{equação vetorial}),$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{lei comutativa}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{lei associativa}),$$

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (\text{subtração de vetores}).$$

### Corollary

*A ordem dos vetores na soma não afeta o resultado.*

## Tipos de multiplicação em cálculo vetorial

- ✓ Multiplicação entre um vetor e um escalar  $\Rightarrow$  O resultado será outro vetor:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{Segunda Lei de Newton}),$$

- ✓ Produto escalar  $\Rightarrow$  O resultado será um escalar:

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Trabalho}),$$

- ✓ Produto vetorial  $\Rightarrow$  O resultado será outro vetor diferente dos anteriores:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{Torque}).$$

### Corollary

*Todas as três maneiras são diferentes entre si e nenhuma é igual à multiplicação algébrica.*

## Produto escalar

Usamos o produto escalar quando desejamos que o resultado da multiplicação entre dois vetores seja um escalar. Para isso, impomos as seguintes condições

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1.$$

Dessa maneira temos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}),$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = & a_x b_x \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{i})}_1 + a_x b_y \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{j})}_0 + a_x b_z \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{k})}_0 + \\ & + a_y b_x \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{i})}_0 + a_y b_y \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{j})}_1 + a_y b_z \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{k})}_0 + \\ & + a_z b_x \underbrace{(\hat{k} \cdot \hat{i})}_0 + a_z b_y \underbrace{(\hat{k} \cdot \hat{j})}_0 + a_z b_z \underbrace{(\hat{k} \cdot \hat{k})}_1. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

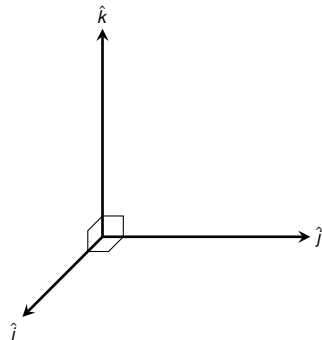
## Produto escalar (continuação)

Vemos que a condição anterior é satisfeita se

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \cos\theta = 0,$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = \cos\theta = 1,$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . Como a base é ortogonal, ou seja,  $\theta = 90^\circ$ , vemos que a condição é satisfeita.



Ângulo entre os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ .

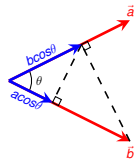


## Produto escalar a partir da representação gráfica

De maneira geral podemos dizer que o produto escalar entre dois vetores quaisquer pode ser definido como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = abc \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre esses vetores.



Projeção de a em b e vice-versa.

### Corollary

*O produto escalar também obedece a propriedade comutativa,*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

## Módulo de um vetor resultante

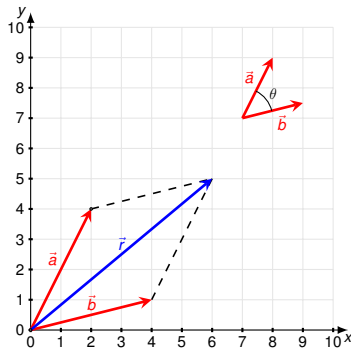
O módulo da soma vetorial  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$  pode ser calculada à partir do produto escalar  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ ,

$$r^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}),$$

$$r^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Mas  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , portanto

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta.$$



Representação de um vetor no plano cartesiano.

## Produto vetorial

Usamos o produto vetorial quando desejamos que o resultado da multiplicação entre dois vetores seja um vetor. Para isso, impomos as seguintes condições

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \hat{j} &= \hat{j} \times \hat{k} = \hat{k} \times \hat{i} = 1, \\ \hat{j} \times \hat{i} &= \hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \times \hat{k} = -1, \\ \hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0.\end{aligned}$$

Dessa maneira temos

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}),$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + \\ &+ (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}.\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c}, \\ c_x &= a_y b_z - b_y a_z, \\ c_y &= a_z b_x - b_z a_x, \\ c_z &= a_x b_y - b_x a_y.\end{aligned}$$

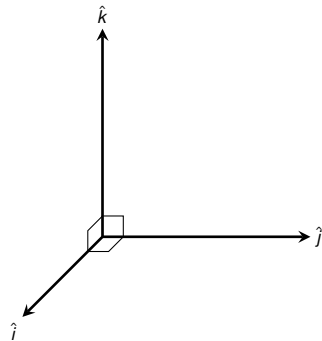
## Produto vetorial (continuação)

Vemos que a condição anterior é satisfeita se

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{j} \times \hat{k} = \hat{k} \times \hat{i} = \text{sen}\theta = 1,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \text{sen}\theta = 0.$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . Como a base é ortogonal, ou seja,  $\theta = 90^\circ$ , vemos que a condição é satisfeita.



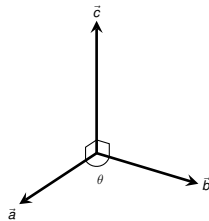
Ângulo entre os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ .

## Produto vetorial a partir da representação gráfica

De maneira geral podemos dizer que o produto vetorial entre dois vetores quaisquer pode ser definido como

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{absen}\theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre esses vetores.



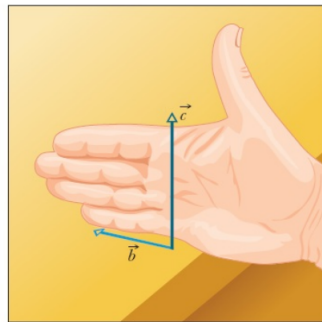
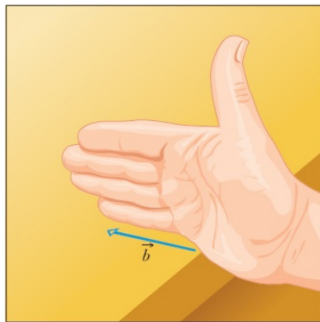
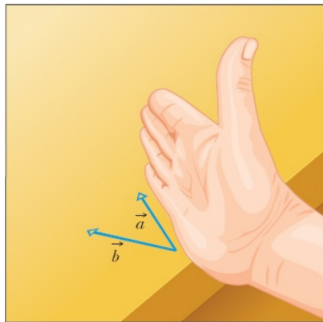
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

### Corollary

*O produto vetorial não obedece a propriedade comutativa,*

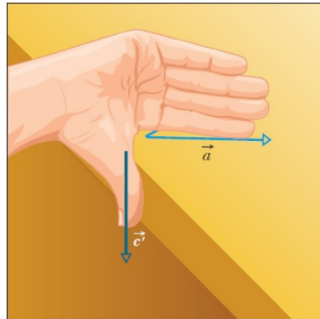
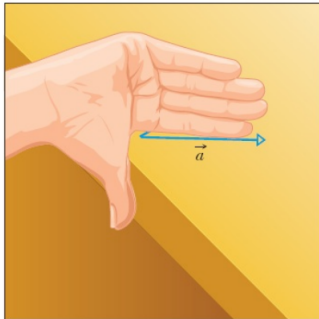
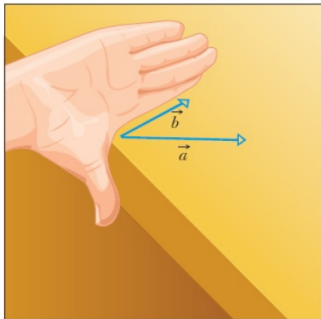
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

## A regra da mão direita



Regra da mão direita,  $(\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b})$ .

## A regra da mão direita (continuação)



Regra da mão direita, ( $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$ ).

## Transformar um número em notação científica

### Corollary

*Passo 1: Escrever o número incluindo a vírgula.*

*Passo 2: Andar com a vírgula até que reste somente um número diferente de zero no lado esquerdo.*

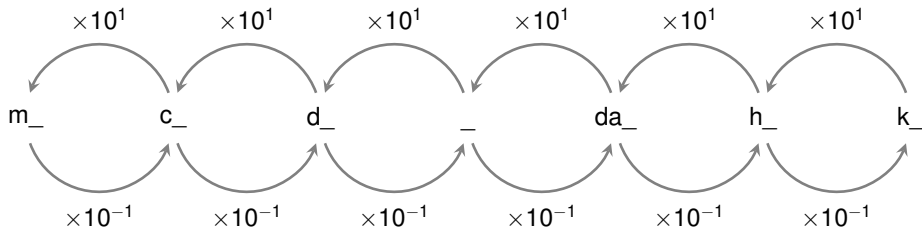
*Passo 3: Colocar no expoente da potência de 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. Se ao andar com a vírgula o valor do número diminuiu, o expoente ficará positivo, se aumentou o expoente ficará negativo.*

### Exemplo

$$6\,590\,000\,000\,000\,000,0 = 6,59 \times 10^{15}$$



## Conversão de unidades em uma dimensão

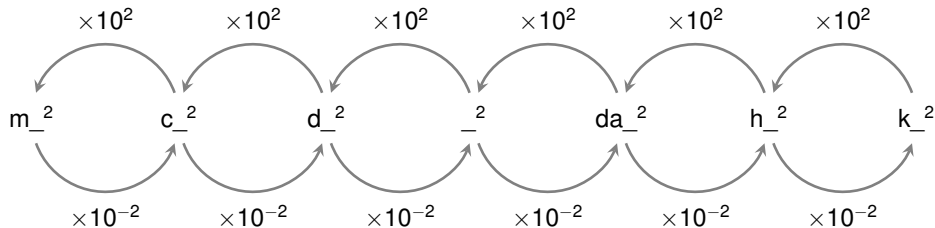


$$1 \text{ mm} = 1 \times 10^{(-1) \times 2} \text{ dm} \rightarrow 1 \times 10^{-2} \text{ dm}$$

$$2,5 \text{ kg} = 2,5 \times 10^{(1) \times 6} \text{ mg} \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mg}$$

$$10 \text{ ms} = 10 \times 10^{(-1) \times 3} \text{ s} \rightarrow 10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

## Conversão de unidades em duas dimensões



$$1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{(-2) \times 2} \text{ dm}^2 \rightarrow 1 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$$

$$2,5 \text{ m}^2 = 2,5 \times 10^{(2) \times 3} \text{ mm}^2 \rightarrow 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$10 \text{ ms}^2 = 10 \times 10^{(-2) \times 3} \text{ s}^2 \rightarrow 10 \times 10^{-6} \text{ s}^2$$



## Alfabeto grego

Alfa	$A$	$\alpha$	Ni	$N$	$\nu$
Beta	$B$	$\beta$	Csi	$\Xi$	$\xi$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$	ômicon	$O$	$o$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Pi	$\Pi$	$\pi$
Epsílon	$E$	$\epsilon, \varepsilon$	Rô	$P$	$\rho$
Zeta	$Z$	$\zeta$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Eta	$H$	$\eta$	Tau	$T$	$\tau$
Teta	$\Theta$	$\theta$	Ípsilon	$\Upsilon$	$v$
Iota	$I$	$\iota$	Fi	$\Phi$	$\phi, \varphi$
Capa	$K$	$\kappa$	Qui	$X$	$\chi$
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Mi	$M$	$\mu$	Ômega	$\Omega$	$\omega$




## Observações<sup>1</sup>

Esta apresentação está disponível para download no endereço  
<https://flavianowilliams.github.io/education>

---

<sup>1</sup>Este material está sujeito a modificações. Recomenda-se acompanhamento permanente.

## Referências

-  D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de física. Mecânica, v.1, 10. ed., Rio de Janeiro, LTC (2016)
-  R. D. Knight, Física: Uma abordagem estratégica, v.1, 2nd ed., Porto Alegre, Bookman (2009)
-  H. M. Nussenzveig, Curso de física básica. Mecânica, v.1, 5. ed., São Paulo, Blucher (2014)