Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Investigação Operacional

Parte 2
LEI - Universidade do Minho

Abril de 2023

Flávia Araújo - A96587
Inês Marques - A100606
Margarida Pimenta - A100830
Margarida Lopes - A100834

0. Considerações Iniciais

Neste problema, é pretendido minimizar os custos da atividade do modelo de empresa apresentado. Essa minimização de custos pode ser alcançada ao atribuir equipas a clientes com base na distribuição geográfica e horários de serviço requisitados, configurando assim um problema de escalonamento de equipas para cobrir tarefas em datas fixas, também conhecido como problema de *fixed scheduling*.

Uma equipa encontra-se habilitada a prestar serviços a um cliente caso seja possível a sua presença no local antes ou no horário previsto para o serviço ao cliente. Numa forma mais formal, se respeitar:

$$aj \leq di + tij$$

aj: começo do serviço;
di: duração do serviço do cliente i (¼hora para cada cliente);
tij: tempo de deslocação entre os clientes i e j.

Após terminar os serviços, as equipas regressam à sede e essa deslocação leva um acréscimo no custo fixo de 1 U.M.

Tendo em conta que o nosso maior número de aluno é 100834, o quadro das horas de serviço dos clientes fica definido do seguinte modo:

j	Cliente	a*j* (¼hora)	a*j* (hora do serviço)
1	Ana	1	09:15
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	-	-
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	9	11:15
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Com base na análise do quadro, seleciona-se os caminhos que as equipas podem realizar, respeitando a restrição temporal mencionada acima. Dessa seleção originou-se o seguinte grafo de compatibilidades que exemplifica as deslocações possíveis entre os clientes:

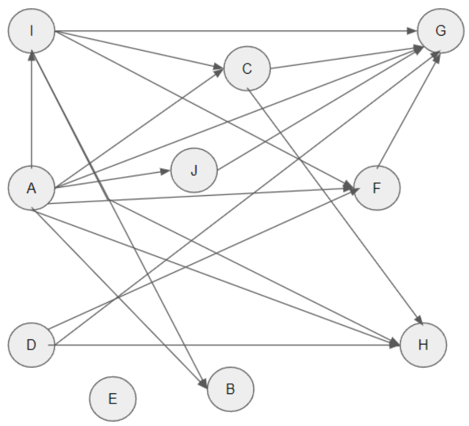

Figura 1 - Modelo inicial do projeto.

O vértice E, que representa ao cliente 5, encontra-se isolado dos demais vértices pois encontra-se sem qualquer serviço marcado no quadro de clientes.

1. Formulação e Modelo do Problema

A estratégia usada na resolução deste problema passa por encontrar o fluxo de custo mínimo da rede definida anteriormente. Desta forma, obtém-se uma melhor atribuição dos clientes pelas equipas, reduzindo os custos da atividade.

Além de encontrar o fluxo mínimo da rede, é necessário garantir que todos os vértices (clientes) sejam percorridos pelas equipas. Com tal objetivo, fragmenta-se os vértices em dois, sendo um fragmento nomeado de vértice-origem e o outro de vértice-destino. Desta forma, todas as arestas que partem de um vértice-origem chegam a um vértice-destino, salvaguardando a passagem das equipas pelos diversos clientes.

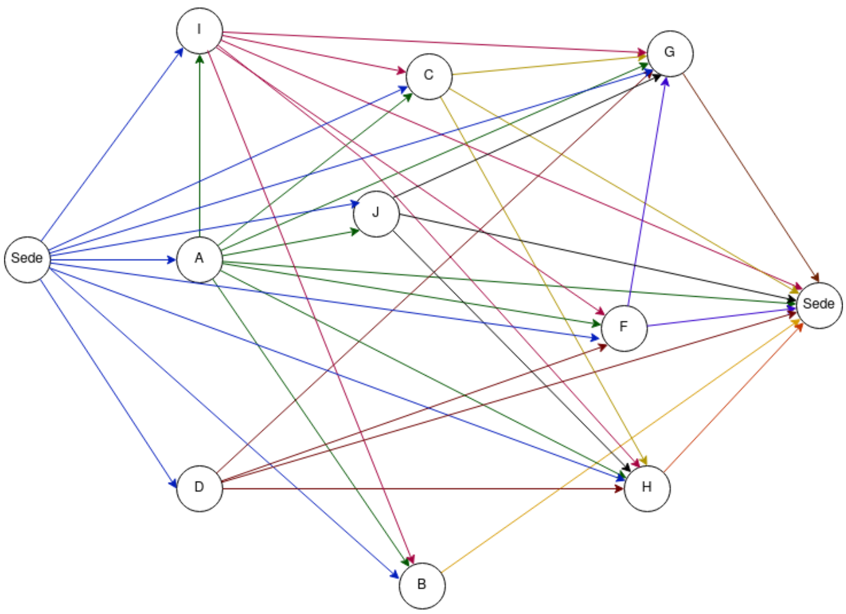

Figura 2 - Modelo final do projeto, representado pelo grafo G'.

Usando linguagem matemática, podemos reescrever o nosso grafo G = (V, A), A ⊆ V ×V como sendo:

$$\min: \sum_{(i,j)\in A} cijxij$$

$$\text{suj. a} \quad -\sum_{(i,j)\in A} xij + \sum_{(j,i)\in A} xij = bj,\ \forall j \in V$$

$$0 \leq xij \leq uij,\ \forall (i,j) \in A$$

<u>Variáveis de Decisão:</u>

- *xij:* fluxo no arco orientado *(i,j),* ∀ *(i, j)* ∈ *A;*

<u>Dados:</u>

- *cij:* custo unitário de transporte no arco orientado *(i,j)*, ∀ *(i, j)* ∈ *A;*
- *uij*: capacidade do arco orientado *(i,j)*, ∀ *(i, j)* ∈ *A;*
- *bj:* oferta ou consumo no vértice *j*, ∀ *j* ∈ *V.*

2. *Input* no *Relax4*

Utilizaremos os seguintes valores como base para começar o ficheiro de *input* para introduzir no *Relax4:*

a → 1 10 Ana	*g* → 6 15 Gonçalo
b → 2 11 Beatriz	*h* → 7 16 Helena
c → 3 12 Carlos	*i* → 8 17 Inês
d → 4 13 Diogo	*j* → 9 18 José
f → 5 14 Francisca	sede (*k*) → 19

Convertendo este modelo compatível com o *Relax4*, obtemos o seguinte ficheiro de *input:*

```
19
38
19 10 1 1
1 19 2 1
19 11 15 1
2 19 16 1
19 12 2 1
3 19 3 1
19 13 4 1
4 19 5 1
19 14 11 1
5 19 12 1
19 15 9 1
6 19 10 1
19 16 9 1
7 19 10 1
19 17 9 1
8 19 10 1
19 18 10 1
9 19 11 1
1 11 13 1
1 12 5 1
1 14 10 1
1 15 7 1
1 16 5 1
1 17 0 1
1 18 7 1
3 15 6 1
3 16 0 1
4 14 8 1
4 15 8 1
4 16 8 1
5 15 5 1
8 11 13 1
8 12 5 1
8 14 10 1
8 15 7 1
8 16 5 1
9 15 5 1
9 16 6 1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
0

```

Figura 3 - Ficheiro usado como input no Relax4.

3. *Output* no *Relax4*

Depois de introduzir o ficheiro correspondente ao nosso modelo no *Relax4* (versão *web* disponível em *https://neos-server.org/neos/solvers/lno:RELAX4/RELAX4.html*), obtemos uma aparente solução ótima.

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 19, NUMBER OF ARCS = 38
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
***********************************
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
  19 10  1.
  2 19  1.
  19 12  1.
  3 19  1.
  19 13  1.
  6 19  1.
  7 19  1.
  19 18  1.
  1 17  1.
  4 14  1.
  5 15  1.
  8 11  1.
  9 16  1.
OPTIMAL COST =   84.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 32
NUMBER OF ITERATIONS =  4
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  0
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  0
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  0
***********************************
```

Figura 4 - Output no Relax4.

4. Interpretação da Solução Ótima

Prossigamos à análise da solução ótima. O *output* apresenta uma lista de arcos, cada um com três valores - o nodo da origem do arco, o nodo do destino do arco e o custo do arco, respetivamente. A lista de arcos apresentada no *output* indica as conexões entre os clientes e a sede da empresa.

Cada uma das quatro equipas é responsável por atender um conjunto específico de clientes, sendo que as tarefas atribuídas a cada equipa são indicadas pelos arcos que conectam as diferentes sequências de clientes entre si, formando os caminhos ótimos.

Equipa 1: Sede→Ana→Inês→Beatriz→Sede
Equipa 2: Sede→Carlos→Sede

Equipa 3: Sede→Diogo→Francisca→Gonçalo→Sede
Equipa 4: Sede→José→Helena→Sede

O custo total da solução ótima é de 84 U.M., como indicado no *output*. Esse valor representa a soma dos custos associados às deslocações e ao custo fixo de cada equipa.

Utilizando a matriz dos custos de deslocação presente no enunciado do projeto, sabemos que os custos referentes a cada equipa foram os seguintes:

Equipa 1: 1 + 0 + 13 + 15 = 29 U.M.
Equipa 2: 2 + 2 = 4 U.M.
Equipa 3: 4 + 8 + 5 + 9 = 26 U.M.
Equipa 4: 10 + 6 + 9 = 25 U.M.

De igual modo, os tempos de deslocação referentes a cada uma das equipas foram os seguintes:

Equipa 1: 1 + 0 + 4 + 5 = 10
Equipa 2: 2 + 2 = 4
Equipa 3: 1 + 3 + 2 + 3 = 9
Equipa 4: 4 + 1 + 4 = 9

5. Validação do Modelo

Para podermos comprovar que o modelo fornecido pelo *Relax4* é válido, temos de verificar se as restrições de tempo são satisfeitas, isto é, temos que verificar que a soma do tempo de serviço do cliente *i* com o tempo de deslocação entre o cliente *i* e o cliente *j* não é superior à hora de começo do serviço *j*.

Comecemos pela primeira equipa: o tempo que demora a chegar da sede à Ana são 15 minutos, pelo que a equipa chega a tempo do seu serviço das 09:15. Quinze minutos depois, a equipa segue caminho às 09:30 para a Inês - como o tempo de deslocação é 0, a equipa consegue chegar a tempo do seu serviço das 09:30. Às 9:45 deslocam-se por uma hora para chegar à Beatriz, cujo serviço é exatamente às 10:45. Por conseguinte, podemos concluir que a equipa 1 chega sempre a tempo do começo do serviço.

Quanto à segunda equipa, esta demora 30 minutos a percorrer o caminho entre a sede e o Carlos, chegando às 09:30, meia hora antes do serviço começar. Posto isto, a equipa 2 chega atempadamente ao seu serviço.

Relativamente à terceira equipa, sabemos que os seus serviços são às 09:30, 10:30 e 11:15, respetivamente. Como tal, a equipa sai da sede e demora 15 minutos para chegar ao primeiro serviço, chegando às 09:15. Às 09:30 desloca-se até a Francisca, demorando 45 minutos e chegando às 10:15. Por fim, às 10:30 desloca-se por 30 minutos e chega ao Gonçalo às 11:00. Ou seja, a equipa 3, de igual modo, chegou atempadamente a todos os seus serviços.

Por fim, a quarta equipa tem os seus serviços às 10:15 e 11:15. Começa por sair da sede às 09:00, chegando ao José às 10:00. De seguida, sai às 10:15 e chega à Helena às 10:30. Por outras palavras, a equipa 4 também chegou atempadamente aos serviços a seu encargo.

Em suma, ao analisar os tempos de deslocação, de duração e do começo dos serviços no modelo gerado pelo *Relax4*, confirmamos que se trata de facto de uma solução ótima, pois a restrição foi respeitada e todos os serviços foram efetuados com sucesso.