INVERSA di UNA MATRICE: Se $A \in GL_n(F)$, allora $A^{-1} = (x_{ij})_{i,j}$ tali che

$$x_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det A_{ij}}{\det A},$$

dove A_{ij} è ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

OSS. Poniamo $a_{ij}' = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ e lo chiamiamo cofattore o complemento algebrico di a_{ij}. Allora per la regola precedente, se $A' = (a_{ij}')$ risulta che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {A'}^{t}$$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 2 \cdot (-4-3) = 1 - 14 = -13 \neq 0. \Rightarrow A \in GL_n(F).$$

$$a'_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \ ; \quad a'_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$a'_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -7 \ ; \quad a'_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$a'_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5 \ ; \quad a'_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$a'_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 ; \quad a'_{32} = (-1)^{3+2} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$a'_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')^t = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/13 & -4/13 & 2/13 \\ -2/13 & 5/13 & 4/13 \\ 7/13 & 2/13 & -1/13 \end{pmatrix}$$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{calcolare } A^{-1} \text{ con i 2 metodi}$$

DEF. Sia $A \in M_{m \times n}(F)$. Si chiama minore di ordine p una sotto-matrice quadrata $p \times p$ di A.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ sono}$$

due esempi di minori di ordine 2.

DEF. Un minore M della matrice A è detto nullo se $\det M = 0$, altrimenti è detto non nullo.

TEOREMA: $A \in M_{m \times n}(F)$, allora $r(A) =$ massimo ordine dei minori non nulli di A.

TEOREMA degli ORLATI di KRONACKER: Sia $A \in M_{m \times n}(F)$

Se esiste un minore M non nullo di A di ordine r e se tutti i minori che contengono M ($\equiv$ che orlano M) sono nulli, allora $r(A) = r$.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}} \\ 1 & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_1 = 0 \quad NO!$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det M_2 = 0 \quad NO!$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det M_3 = -1 + 4 - 2 - 1 = 0 \quad NO!$$

Non esistono minori 3×3 non nulli $\Rightarrow r(A) \neq 3$.

$$M_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i minori di ordine 2 non nulli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \det M_1' = 2+1 = 3 \neq 0$$

Per il Teor. degli Orlati, $r(A) = 2$.

ES. $\begin{cases} 2x - y + 7z = 1 \\ 3x - 3y + 10z = 0 \\ 4x - 5y + 13z = 7 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & -3 & 10 \\ 4 & -5 & 13 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2\cdot(-3)\cdot 13 + (-1)\cdot 10\cdot 4 + 7\cdot 3\cdot(-5) - 7(-3)4 - 10\cdot(-5)\cdot 2$$
$$- 13\cdot(-1)\cdot 3 = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$$

Ma $r(A) = 2$ poiché $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ è un minore non nullo 2×2 ($\det M = -3 \neq 0$) e orlando M otteniamo solo A che ha determinante nullo.

$$A_3 = 2A_2 - A_1.$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 10 & 0 \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{pmatrix} \qquad r(A|B) = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det M_1 = 3 \neq 0$$

$$\overline{M_1} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -3 & 10 & 0 \\ -5 & 13 & 7 \end{pmatrix}, \quad \det \overline{M_1} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -39+50+7(-10+21) = -39+50+77 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $r(A|B) = 3 \neq 2 = r(A)$ $\Rightarrow$ il sistema non è compatibile.

$$\begin{cases} 4x + y + z + w = 1 \\ x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + 3z + 5w = 0 \\ x + y - z - w = 2 \end{cases}$$

$\det A = 48 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 4$ massimo

poiché il rango è massimo e $A \in M_4(F)$, $r(A|B) = 4 \Rightarrow$

il sistema è compatibile ed esiste una unica soluzione.

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{14}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 + R_1(-4)]{R_3 + R_1(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7/2 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 + R_2(3)]{R_3\left(\frac{2}{7}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1/2 & 8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + R_3\left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 48/7 & -25/7 \end{array}\right)$$

$$\frac{3}{7} - 4$$

$$\xrightarrow{R_4\left(\frac{7}{48}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -25/48 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ y - \frac{3}{2} z + w = 1 \\ z + \frac{16}{7} w = -\frac{6}{7} \\ w = -\frac{25}{48} \end{cases}$$

ES.

$$\begin{cases} x + 2z = 4 \\ -x + y = -1 \\ y + z = 2 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A \underset{\uparrow}{=} (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Laplace su A^4

Il sistema è compatibile e ammette unica soluzione

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{(-1)^{4+4} \cdot 1 \left(\cancel{4} - 2 - \cancel{4}\right)}{-1} = 2$$

$$\begin{cases} 2 + 2z = 4 \\ -2 + y = -1 \\ y + z = 2 \\ 2 + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$