ES. $V = F^3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F\}$ sp. vett.

$U = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in F\}$ sottosp. di V

$W = \{(0, \beta_1, \beta_2) \mid \beta_1, \beta_2 \in F\}$ sottosp. di V

$U \cap W = ?$ $\quad \forall v \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v \in U & \Rightarrow \quad v = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \\ v \in W & \Rightarrow \quad v = (0, \beta_1, \beta_2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad v = (0, x, 0) \Rightarrow U \cap W = \{(0, x, 0) \mid x \in F\}$

OSS. In genere $U \cup W$ non è uno sp. vettoriale, ad esempio

$U \cup W = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 = 0$ oppure $\alpha_3 = 0\} \Rightarrow$

$v = (0, 1, 1) \in U \cup W$

$w = (1, 1, 0) \in U \cup W$

$\Rightarrow \quad v + w = (0,1,1) + (1,1,0) = (1, 2, 1) \notin U \cup W.$

DEF: Siano V = F-sp. vett. e U e W due F-sottosp. vettoriali di V, allora la somma tra U e W è definita:

$$U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}.$$

ES. $U + W = \{ (\alpha_1, \alpha_2, 0) + (0, \beta_1, \beta_2) \mid \alpha_i, \beta_i \in F \} =$

$$= \{ (\underbrace{\alpha_1}_{\lambda_1}, \underbrace{\alpha_2 + \beta_1}_{\lambda_2}, \underbrace{\beta_2}_{\lambda_3}) \mid \alpha_i, \beta_i \in F \} = \{ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_i \in F \} = F^3$$

TEOREMA: Siano V = F-sp. vett. e U e W due sottospazi di V. Allora $U + W$ è un sottosp. vett. di V.

DIM: Dobbiamo dimostrare che 1) $\forall\ x_1, x_2 \in U + W \Rightarrow x_1 + x_2 \in U + W$

2) $\forall\ x \in U + W$ e $\forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in U + W$.

1) $\forall\ x_1, x_2 \in U + W \Rightarrow \exists\ u_1, u_2 \in U$ e $\exists\ w_1, w_2 \in W$ t.c. $\begin{cases} x_1 = u_1 + w_1 \\ x_2 = u_2 + w_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \overset{\text{commutativa di } +}{=} \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\substack{\| \\ u' \in U}} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\substack{\| \\ w' \in W}} = u' + w' \in U + W$$

perché U e W sono sp. vettoriali

2) $\forall\ x \in U + W,\ \exists\ u \in U$ e $\exists\ w \in W$ t.c. $x = u + w$. $\forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x =$

$$= \alpha(u_1 + w_1) \underset{\text{distributiva}}{=} \overbrace{\alpha u_1}^{\in U} + \overbrace{\alpha w_1}^{\in W} \in U + W$$

in quanto sp. vett.

DEF: Siano $V = F$-sp. vett. e U e W due sottosp. vett. di V, allora U e W si dicono in somma diretta se $U \cap W = \{0\}$, in tal caso scriveremo $U \oplus W$. Inoltre diremo che U e W sono supplementari in V se

$$V = U \oplus W.$$

ES. $U \cap W = \{(0, x, 0) \mid x \in F\} \neq \{(0,0,0)\} \Rightarrow U$ e W non sono in somma diretta.

ES. $V = F^3$; $U = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in F\}$ e $W = \{(0, \beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in F\}$

- $U \cap W = ?$ $\forall x \in U \cap W \Rightarrow x \in U \Rightarrow x = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in F$. Ma $x \in W \Rightarrow x = (0, \beta, \gamma)$, $\beta, \gamma \in F \Rightarrow (\alpha, 0, 0) = (0, \beta, \gamma)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \beta \\ 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow x = (0,0,0) \Rightarrow \mathcal{U} \cap W = \{(0,0,0)\} \Rightarrow \mathcal{U} \text{ e } W \text{ sono}$$

in somma diretta.

- $\mathcal{U} \oplus W = \{(\alpha,0,0) + (0,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in F\} = \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in F\} = V$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ e W sono supplementari in V.

TEOREMA: siano $V = F$-sp. vett. e $\mathcal{U}$ e W due sottosp. vett. di V in somma diretta. Allora $\forall v \in \mathcal{U} \oplus W$, v si scrive in modo unico come somma di un elemento di $\mathcal{U}$ e uno di W.

DIM. Per assurdo, supponiamo che $\exists\, v \in U \oplus W$ tale che $v = u_1 + w_1 =$

$= u_2 + w_2$, dove $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $u_1 \neq u_2$ e $w_1 \neq w_2$.

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = -w_1 + w_2 \in W \cap U = \{0\}$$

U e W sono in somma diretta

$\Rightarrow w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$ $\lightning$.

ES. $V = M_2(F)$ $\quad S = \{ A \in M_2(F) \mid A^t = A \}$

$$\mathcal{A} = \{ A \in M_2(F) \mid A^t = -A \}$$

$\forall A \in S$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cancel{a = a} \\ c = b \\ \cancel{b = c} \\ \cancel{d = d} \end{cases} \Rightarrow c = b \Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in F \right\}$$

$\forall A \in \mathcal{A}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ \cancel{b = -c} \\ d = -d \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ \boxed{c = -b} \\ d = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b \in F \right\}$$

- S è sottosp. vett. di V: 1) $\forall A, B \in S$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S$$

2) $\forall A \in S$ e $\forall \alpha \in F$, $\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix} \in S$

- $\mathcal{A}$ è sottosp. vett. di V: 1) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & 0 \end{pmatrix}$$

• Intersezione: $A \in S \cap \mathcal{A} \iff \begin{cases} A \in S \\ A \in \mathcal{A} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = x \\ b = -x \\ d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ x = -x \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S \cap \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow S$ ed $\mathcal{A}$ sono in somma diretta.

- <u>Somma tra $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$</u>: $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\} = M_2(F) = V$

$\forall A \in M_2(F)$, A si scrive come somma di una matrice di $\mathcal{S}$ più una matrice di $\mathcal{A}$: $\quad A = \frac{1}{2}\left(A + A^t + A - A^t \right) = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\in \mathcal{A}}$

$\frac{1}{2}\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right)$

ES. $V = M_2(F)$, $S = \{ A \in M_2(F) \mid A^t = A \}$

$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in F \right\}$

ES. $V = M_2(F)$, $S = \{ A \in M_2(F) \mid A^t = A \}$

$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$

1) dim. che S e $\mathcal{T}$ sono sottosp. vett.

2) $S \cap \mathcal{T} = ?$

3) $S + \mathcal{T} = ?$

ES. U e W sono due F-sp. vettoriali e sia

$U \times W = \{(u, w) \mid u \in U, w \in W\}$ è F-sp. vett. definendo:

$(+)$: $(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$

$(\cdot)$: $\alpha (u_1, w_1) = (\alpha u_1, \alpha w_1)$

Siano $U' = \{(u, 0) \mid u \in U\} \subseteq U \times W$

$W' = \{(0, w) \mid w \in W\} \subseteq U \times W$

1) U' e W' sono sottosp. vett. di $U \times W$.

2) $U' \cap W' = \{(0, 0)\} \Rightarrow U'$ e W' sono in somma diretta.

3) $U \times W = U' \oplus W'$: Dobbiamo dimostrare che $\begin{cases} U' \oplus W' \subseteq U \times W \\ U \times W \subseteq U' \oplus W' \end{cases}$

Ma $U' \oplus W' \subseteq U \times W$ poiché U' e W' sono sottosp. vett. di $U \times W$.

Inoltre $\forall v \in U \times W \Rightarrow \exists u \in U$ e $\exists w \in W$ t.c. $v = (u, w) =$

$$= \underbrace{(u, 0)}_{\in U'} + \underbrace{(0, w)}_{\in W'} \in U' \oplus W'$$

Pertanto $U \times W = U' \oplus W'$.

Es. $V = F_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

$U = \{ a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

$W = \{ a_0 + a_0 x + a_1 x^2 \mid a_i \in F \}$

- U e W sono sottosp. vett. di V : 1) $\forall\, u_1(x), u_2(x) \in U$, $u_1(x) = a_1 x + a_2 x^2$

$u_2(x) = b_1 x + b_2 x^2 \Rightarrow u_1(x) + u_2(x) = (a_1 x + a_2 x^2) + (b_1 x + b_2 x^2) =$

$= (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 \in U$

2) $\forall\, u(x) \in U$, $\forall\, \alpha \in F$, $\alpha u(x) = \alpha (a_1 x + a_2 x^2) = (\alpha a_1) x + (\alpha a_2) x^2 \in$

$\in U$

- $\underline{U \cap W = ?}$: $U \cap W = \{ p(x) \in V \mid p(x) \in U \text{ e } p(x) \in W \} =$

$= \{ p(x) \in V \mid p(x) = a_1 x + a_2 x^2 = b_0 + b_0 x + b_1 x^2 \}$

$$\begin{cases} 0 = b_0 \\ a_1 = b_0 \\ a_2 = b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = b_1 \end{cases} \qquad p(x) = \cancel{a_1 x} + a_2 x^2$$

$U \cap W = \{ p(x) \in V \mid p(x) = a_2 x^2,\ a_2 \in F \} \neq 0$

- $\mathcal{U} + W = V$?

$\mathcal{U} + W \subseteq V$ come prima.

$\forall\, p(x) \in V$ esistono $u(x) \in \mathcal{U}$ e $w(x) \in W$ t.c. $p(x) = u(x) + w(x)$?

se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \overset{?}{=} (b_1 x + b_2 x^2) + (c_0 + c_0 x + c_1 x^2)$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = c_0 + (b_1 + c_0) x + (b_2 + c_1) x^2$$

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ b_1 + c_0 = a_1 \\ b_2 + c_1 = a_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - a_0 \\ b_2 = a_2 - c_1 \end{cases}$$

$$\underset{\in V}{p(x)} = \underbrace{\left((a_1 - a_0)x + (a_2 - c_1)x^2\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(a_0 + a_0 x + c_1 x^2\right)}_{\in W} \in U + W$$

ES. $V = F_2[x]$

1) $U = \{ a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

$W = \{ a_0 + a_0 x + a_0 x^2 \mid a_0 \in F \}$

2) $U = \{ a_1 x \mid a_1 \in F \}$

$W = \{ a_0 + a_0 x \mid a_0 \in F \}$

3) $U = \{ a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in F \}$

$W = \{ a_2 x^2 \mid a_2 \in F \}$

— × —

$V = F$ - sp. vett. $v_1, \dots, v_m \in V$ allora

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid \alpha_i \in F \}.$$

<u>TEOREMA:</u> lo spazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_m$ é il più piccolo sottospazio vett. di V contenente $v_1, \dots, v_m$:

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \bigcap_i U_i$$

dove U_i contiene $v_1, \dots, v_m$, $\forall i$.

ES. $V = M_2(F)$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$.

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = S$

DEF: Sia $V = F$-sp. vett. e siano $v_1, \dots, v_k \in V$. Allora $v_1, \dots, v_k$ si dicono linearmente dipendenti se $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ non tutti nulli t.c. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.

Si diranno lineamente indipendenti se la combinazione lineare $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

ES. $V = F^3$, $B = \{ \underset{u_1}{(1,1,1)}, \underset{u_2}{(1,1,0)}, \underset{u_3}{(0,0,1)} \}$

u_1, u_2 e u_3 sono lin. ind. ?

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$(\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) = (0,0,0)$

$(\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha + \gamma) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \cancel{\alpha+\beta = 0} \\ \alpha+\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha u_1 - \alpha u_2 - \alpha u_3 = 0 \quad \forall \alpha \in F.$$

In particolare posso scegliere $\alpha = 1 \Rightarrow u_1 - u_2 - u_3 = 0$

$\Rightarrow u_1, u_2$ ed u_3 sono lin. dip. $\qquad u_1 = u_2 + u_3$

ES. $V = F^3$; $\mathcal{B} = \{ \underset{w_1}{(1,1,1)}, \underset{w_2}{(1,1,0)}, \underset{w_3}{(1,0,0)} \}$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F, \quad \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0$

$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$

$(\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (\gamma,0,0) = (0,0,0)$