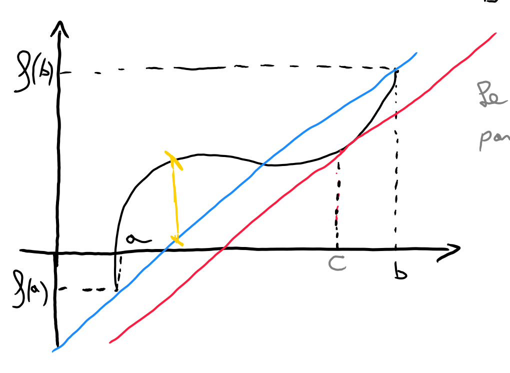
TEOREMA DI LAGRANGE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a,b]$

f derivabile in $]a,b[$

$\Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\;/\; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Le due rette sono parallele

$y = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ — retta tangente per i punti $(a, f(a)), (b, f(b))$

$y = f(c) + f'(c)(x-c)$ — retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo una funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

$g(x)$ rappresenta la distanza verticale "con segno" tra il grafico di f e la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ $\boxed{\text{VEDI SOPRA}}$

g è continua in $[a,b]$ (IN QUANTO DIFFERENZA DI UNA FUNZIONE CONTINUA)

g è derivabile in $]a,b[$

$g(a) = 0 = g(b)$

INOLTRE

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Pertanto dimostrare che esiste $c \in]a,b[$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

equivale a dimostrare che esiste $c \in]a,b[$ tale che

$g'(c) = 0$

Poiché g è continua in $[a,b]$, per il Teorema di Weierstrass g è dotata di minimo m e massimo M assoluti

* Se m ed M sono assunti in a e b rispettivamente poiché

$g(a) = g(b) = 0 \Rightarrow m = M = 0$

$\Rightarrow g(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

** Almeno uno tra m ed M è un valore assunto dalla funzione g in un punto $c \in]a,b[$. Per il Teorema di Fermat $g'(c) = 0$

TEOREMA DI ROLLE

(corollario del Teorema di Lagrange)

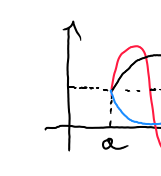
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a,b]$

f derivabile in $]a,b[$

$f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\;/\; f'(c) = 0$



POSSIBILI GRAFICI

es

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

Per il Teorema di Lagrange applicato a f in $[a,b]$ segniamo che:

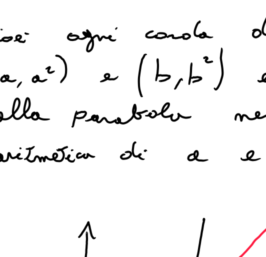
$\exists\, c \in]a,b[\;|\; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\exists\, c \in]a,b[\;|\; 2c = \dfrac{b^2-a^2}{b-a} = b+a$

$\Downarrow$

$c = \dfrac{b+a}{2}$

cioè ogni corda della parabola $y = x^2$ di estremi (a, a^2) e (b, b^2) è parallela alla retta tangente alla parabola nel punto di ascissa pari alla media aritmetica di a e b, cioè: $c = \dfrac{a+b}{2}$



es

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ (IPERBOLE), $x \neq 0$

Una prima conseguenza notevole del Teor. di Lagrange è il Teorema di caratterizzazione delle funzioni monotone negli intervalli.

TEOREMA

f continua in $[a,b]$

f derivabile in $]a,b[$

1) f crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

2) f decrescente $\iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

3) f costante $\iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$

DIMOSTRAZIONE

1)

$\Rightarrow$

Supponiamo che f sia crescente e dimostriamo che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Per assurdo

$\exists\, x_0 \in]a,b[\;|\; f'(x_0) < 0$,

ovvero

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < 0$$

Per il Teorema della permanenza del segno

$\exists\, \delta > 0 \;|\; \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < 0$ se $-\delta < h < \delta$, $h \neq 0$

In particolare se $0 < h < \delta$ (h positivo), otteniamo che

$f(x_0+h) - f(x_0) < 0$

$f(x_0+h) < f(x_0)$ $\lightning$ poiché $h > 0$
$\Rightarrow x_0 + h > x_0$
$\Rightarrow f(x_0+h) > f(x_0)$
essendo f crescente

$\Leftarrow$

Supponiamo che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ e dimostriamo che f è crescente:

$x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Applichiamo il Teor. di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$. Allora esiste $c \in]x_1, x_2[$ tali che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Per ipotesi $f'(c) \geq 0 \iff \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ poiché $x_2 - x_1 > 0$

cioè $f(x_1) \leq f(x_2)$

2) PER CASA

3) Basta osservare che

f costante $\iff$ f crescente e decrescente contemporaneamente

$\iff f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ contemporaneamente

$\iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$ #

OSS

f strett. crescente $\overset{?}{\iff} f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$\not\Rightarrow$ es: $f(x) = x^3$

f strett. crescente, ma $f'(0) = 0$

$\Leftarrow$ VERO

Analogamente per le funzioni strettamente decrescenti

OSS

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} > 0$, ma f non è globalmente crescente!!

A questo punto possiamo enunciare la seguente

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER GLI ESTREMI RELATIVI

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, f derivabile in I

$\exists\, \delta > 0 \;|\;$ f ~~crescente~~ $f' \geq 0$ in $]x_0 - \delta, x_0[$

f ~~decrescente~~ $f' \leq 0$ in $]x_0, x_0 + \delta[$

$\Rightarrow x_0$ pt. di max relativo

$\exists\, \delta > 0 \;|\;$ f ~~decrescente~~ $f' \leq 0$ in $]x_0 - \delta, x_0[$

f ~~crescente~~ $f' \geq 0$ in $]x_0, x_0 + \delta[$

$\Rightarrow x_0$ pt. di min relativo

Come determinare gli estremi relativi e assoluti di una funzione?

1) Determinare l'insieme di definizione di f

2) Valutare il comportamento di f agli estremi dell'insieme di definizione calcolando limiti o valori speciali di f

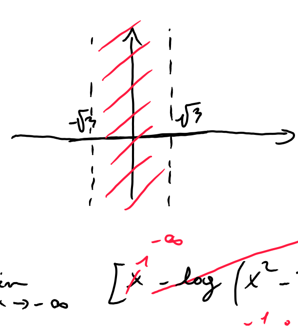
3) Calcolare $f'(x)$ e studiare il segno di f'!!

4) Vedere cosa succede in punti in cui f non è derivabile

es

$f(x) = x - \log(x^2 - 3)$

1) $x^2 - 3 > 0 \iff x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$



2)

$\lim_{x \to -\infty} [x - \log(x^2-3)] = -\infty \Rightarrow \inf f = -\infty$

$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} [x - \log(x^2-3)] = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} [x - \log(x^2-3)] = +\infty$ — 1:21:00

$\lim_{x \to +\infty} [x - \log(x^2-3)] = +\infty$

$x = -\sqrt{3}$ è un asintoto verticale da sinistra verso l'alto

$x = \sqrt{3}$ è un asintoto verticale da destra verso l'alto

f non è limitata né inferiormente né superiormente

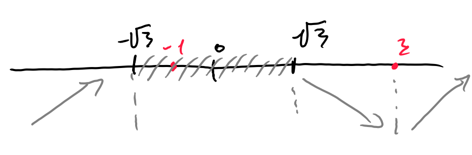
3)

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2-3} = \frac{x^2 - 3 - 2x}{x^2-3} \geq 0$$

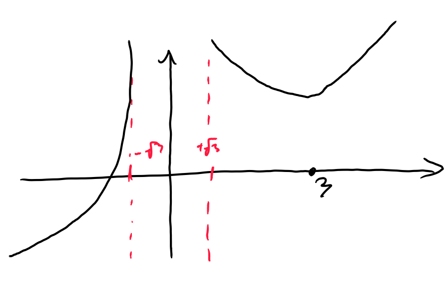
$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$ (poiché sappiamo che $x^2 - 3 > 0$)

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$

1:25:00 !!



È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO



es per casa

$f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$