TEOREMA della DIMENSIONE: Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di sp. vett. e sia $\dim_F V = n < +\infty$. Allora risulta che

$$\dim_F V = \dim_F \operatorname{Ker} f + \dim_F \operatorname{Im} f.$$

DIM: Se $f = 0$ non c'è nulla da dimostrare perché in tal caso

$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = V$ e $\operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V\} = \{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \dim_F V = \underbrace{\dim_F \operatorname{Ker} f}_{\substack{\parallel \\ n}} + \underbrace{\dim_F \operatorname{Im} f}_{\substack{\parallel \\ 0}}.$$

Pertanto sia $f \neq 0 \Rightarrow \dim_F \operatorname{Ker} f = t < n$. Sia allora

$B_{\operatorname{Ker} f} = \{v_1, .., v_t\}$ una base di $\operatorname{Ker} f$ su F. Se dimostriamo che $\dim_F \operatorname{Im} f = n - t$ abbiamo finito.

Completiamo $B_{\operatorname{Ker} f}$ ad una base di $V \Rightarrow B_V = \{v_1, .., v_t, e_1, .., e_{n-t}\}$ base di V su F. Vogliamo dimostrare che $\{f(e_1), .., f(e_{n-t})\}$ é una base di $\operatorname{Im} f$.

1) <u>$f(e_1), .., f(e_{n-t})$ sono lin. indip</u>: si consideri la combinazione lineare $\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_{n-t}) = 0$ e dim. che $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha$

Ma $\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_{m-t} f(e_{m-t}) = 0 \Rightarrow f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t}) = 0$

$\uparrow$ f lineare

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t} \in \operatorname{Ker} f$, pertanto tale vettore può essere scritto come comb. lin. dei vettori di $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in F$ tali che: $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-t} e_{m-t} - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_t v_t = 0$ questa è una comb. lin. nulla di vettori di $\mathcal{B}_V$ che sono dunque lin. indip.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{m-t} = \lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0.$

2) <u>$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), \dots, f(e_{m-t}) \rangle$:</u>

- $\langle f(e_1), \dots, f(e_{m-t}) \rangle \subseteq \operatorname{Im} f$ ovvia.

- $\mathrm{Im} f \subseteq \langle f(e_1), \dots, f(e_{m-t}) \rangle$: $\forall\, v \in \mathrm{Im} f$, $\exists\, w \in V$ t.c. $v = f(w)$.

Ma w si puó scrivere come comb. lin. dei vettori di B_V $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{m-t} e_{m-t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = f(w) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{m-t} e_{m-t}) \underset{\uparrow f \text{ lineare}}{=}$$

$$= \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \dots + \alpha_t \underbrace{f(v_t)}_{=0} + \beta_1 f(e_1) + \dots + \beta_{m-t} f(e_{m-t}) \underset{\uparrow v_1, \dots, v_t \in \mathrm{Ker} f}{=}$$

$$= \beta_1 f(e_1) + \dots + \beta_{m-t} f(e_{m-t}) \Rightarrow v \in \langle f(e_1), \dots, f(e_{m-t}) \rangle$$

DEF: Un omomorfismo di sp. vett. $f: V \to W$ é detto isomorfismo se f é biunivoco, $V \cong W$.

TEOREMA: $V \cong W \iff \dim_F V = \dim_F W$.

DIM: $(\Rightarrow)$ Ip: $V \cong W$; Tesi: $\dim_F V = \dim_F W$.

Esiste un isomorfismo $f: V \to W \Rightarrow f$ é iniettivo e surgettivo.

Poiché f è iniettivo $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0$ e $\dim_F \operatorname{Ker} f = 0$. Inoltre f é surgettivo $\Rightarrow \operatorname{Im} f = W \Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F W$.

Per il Teorema precedente, $\dim_F V = \underbrace{\dim_F \operatorname{Ker} f}_{= 0} + \dim_F \operatorname{Im} f =$

$= \dim_F W$.

$(\Leftarrow)$ Ip: $\dim_F V = \dim_F W$; Tesi: $V \cong W$.

Se $\dim_F V = \dim_F W = n$ allora una base di V contiene lo stesso numero di elementi di una base di $W \Rightarrow$

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \quad , \quad \mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Per un teorema precedente, $\exists !\ f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett. tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Ma allora $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = \langle w_1, \dots, w_n \rangle = W$

$\Rightarrow f$ è surgettiva.

$w_1, \dots, w_n$ formano una base di W.

Per il Teorema precedente,

$$\cancel{n} = \dim_F V = \dim_F \operatorname{Ker} f + \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F \operatorname{Ker} f + \dim_F W =$$

$$= \dim_F \operatorname{Ker} f + \cancel{n} \Rightarrow \dim_F \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow$$

f è iniettivo.

f è biunivoco $\Rightarrow$ f è isomorfismo, $V \cong W$.

ES. $M_2(F) \cong F^4$, $M_n(F) \cong F^{n^2}$

$F_2[x] \cong F^3$ $\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2)$

MATRICE ASSOCIATA ad un OMOMORF. di SP. VETT.

$f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett. Siano $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W.

Calcoliamo le immagini di $v_1, \dots, v_n$ rispetto ad f e scriviamo tali immagini come comb. lin. dei vettori $w_1, \dots, w_m$.

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

Costruiamo la matrice M_f mettendo per colonna le componenti di ogni $f(v_i)$.

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(F)$$

DEF. M_f è detta matrice associata ad f rispetto alle basi B_V e B_W.

OSS. M_f NON è unica!

ES. $f : F^3 \to F^2$ t.c. $f(x, y, z) = (x+y+z,\ x-y+z)$

1) Det. M_f rispetto alle basi canoniche di F^3 e di F^2

2) Det. $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$

3) Det. $\overline{M}_f$ rispetto alle basi $\overline{B}_{F^3} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ e $\overline{B}_{F^2} = \{(1,1), (0,-1)\}$.

Sol: 1) $B_{F^3} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

$B_{F^2} = \{(1,0),\ (0,1)\}$

$$f(1,0,0) = (1,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1)$$

$$f(0,1,0) = (1,-1) = 1\cdot(1,0) - 1\cdot(0,1)$$

$$f(0,0,1) = (1,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1)$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in F^3 \mid (x+y+z,\ x-y+z) = (0,0)\}$

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2z = 0 & \leftarrow \text{sommando} \\ 2y = 0 & \uparrow \text{sottraendo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \{(x,0,-x) \mid x \in F\}$, $\dim_F \operatorname{Ker} f = 1$ e $B_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,0,-1)\}$

$\dim_F F^3 = \dim_F \operatorname{Ker} f + \dim_F \operatorname{Im} f$

$3 = 1 + \dim_F \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f = 2 = \dim_F F^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = F^2 \Rightarrow f$ è surgettiva.

DOMANDA: È possibile costruire un omomorfismo di sp. vett. iniettivo tra F^3 ed F^2? Supponiamo che $f: F^3 \to F^2$ sia iniettivo:

$$3 = \dim_F F^3 = \underbrace{\dim_F \operatorname{Ker} f}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F \operatorname{Im} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim_F \operatorname{Im} f = 3 \quad \text{\Large$\lightning$} \quad \text{poiché} \quad \dim_F \operatorname{Im} f \leq \dim_F F^2 = 2.$$

3) $f(1,1,1) = (3,1) = 3\cdot(1,1) + 2\cdot(0,-1)$

$f(1,1,0) = (2,0) = 2\cdot(1,1) + 2\cdot(0,-1)$

$f(1,0,0) = (1,1) = 1\cdot(1,1) + 0\cdot(0,-1)$

$$\overline{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE: Siano V e W due sp. vett. e sia $f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett. Siano $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V e W. Allora se $\forall\, v \in V$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $x_i \in F$ allora risulta che $f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$ con

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y = M_f X$$

ES. $f: F^3 \to F^2 \qquad f(x, y, z) = (x+y+z,\ x-y+z)$

$B_{F^3}, \ B_{F^2} \longrightarrow \qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\overline{B}_{F^3}, \ \overline{B}_{F^2} \longrightarrow \qquad \overline{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$v = (1 \ 2 \ 3) \qquad f(v) = y_1(1,0) + y_2(0,1)$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$$

$$f(1,2,3) = 6\cdot(1,0) + 2\cdot(0,1) = (6,0) + (0,2) = \underline{\underline{(6,2)}} \leftarrow$$

$$v = (1,2,3) = \underset{x_1}{3}\cdot(1,1,1) - \underset{x_2}{1}\cdot(1,1,0) - \underset{x_3}{1}\cdot(1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \neq f(v)$$

$$f(v) = f(1,2,3) = 6\cdot(1,1) + 4\cdot(0,-1) = (6,6) + (0,-4) =$$

$$= \underline{\underline{(6,2)}}$$

$$\overline{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1), (0,-1)\}$$