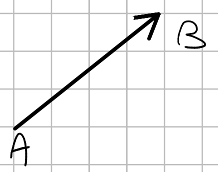
SPAZI VETTORIALI

Vettore :



$\overline{AB}$ segmento orientato che possiede $\begin{cases} \text{punto di applicazione} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \\ \text{modulo} \end{cases}$

Consideriamo

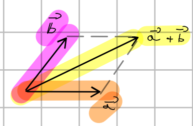
$$V_0 = \{ \text{vettori aventi origine in } O \}$$

possiamo definire due operazioni

1) SOMMA TRA VETTORI

$$(+) : \quad V_0 \times V_0 \to V_0$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$



PROPRIETÀ CHE DEFINISCONO L'OPERAZIONE DI SOMMA

è un operazione interna

1) proprietà commutativa :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

2) proprietà associativa

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

3) esistenza elemento neutro

$$\exists\ \vec{o} \in V_0 \ \text{t.c.} \ \vec{o} + \vec{a} = \vec{a} \ , \ \forall \vec{a} \in V_0$$

4) esistenza elementi opposti

$$\forall \vec{a} \in V_0 \ , \ \exists\ \vec{b} \in V_0 \ \text{t.c.} \ \vec{a} + \vec{b} = 0$$

$$(\vec{b} = -\vec{a})$$

2) PRODOTTO PER SCALARE:

$$(\cdot) : \mathbb{R} \times V_0 \to V_0$$
$$(\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$$

$$\alpha \cdot \vec{v} = \begin{cases} \text{direzione di } \vec{v} \\ \text{verso} \begin{cases} \text{stesso di } \vec{v} & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{opposto di } \vec{v} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \\ \text{modulo} = |\alpha| \cdot \text{modulo di } \vec{v} \end{cases}$$

PROPRIETÀ CHE DEFINISCONO IL PRODOTTO

operazione interna a V_0

5) associativa

$$(\alpha \beta) \cdot \vec{v} = \alpha (\beta \cdot \vec{v})$$

! $(\alpha \beta)$ → prodotto nel campo dei scalari
$(\beta \cdot \vec{v})$ → il prodotto che è stato definito sopra

6) distributiva in $\mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$$

7) distributiva in V_0

$$\alpha (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{w}$$

8) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V_0$

DEFINIZIONE DI GRUPPO

Un insieme G dotato di un operazione interna

$$* \quad G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto g * h$$

è detto gruppo se:

1) 2) associativa:

$$\forall g, h, l \in G, \quad (g * h) * l = g * (h * l)$$

2) 3) esistenza elemento neutro:

$$\exists \; 1_G \in G \text{ t.c. } \forall g \in G, \quad 1_g * g = g * 1_g = g$$

3) 4) esistenza del simmetrico

$$\forall g \in G, \; \exists h \in G \text{ t.c. } g * h = 1_G$$

Se inoltre $*$ è commutativa

$$\forall g, h \in G, \ g * h = h * g$$

allora G è detto gruppo abeliano

ESEMPI DI GRUPPI ABELIANI

$(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{R}, +)$

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$

$(\mathbb{Q}, +)$

$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

$(\mathbb{N}, +)$

$(\mathbb{N}^*, \cdot)$

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

$$*: G \times G \to G \text{ t.c. } (a,b) * (c,d) = (ac, ad + b)$$

G è un gruppo non abeliano

1) associativa

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in G$ devo dimostrare che

$$((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (a,b) * ((c,d) * (e,f))$$

$$(ac, ad + b) * (e,f) = (a,b) * (ce, cf + d)$$

$$(ace, acf + ad + b) = (ace, acf + ad + b)$$

2) Elemento neutro

$\exists ? (x,y) \in G$ T.c. $\forall (a,b) \in G, \ (a,b) * (x,y) = (x,y) * (a,b) = (a,b)$

$$(a,b) * (1,0) = (a, a \cdot 0 + b) = (a,b)$$

$$(1,0) * (a,b) = (a, b + 0) = (a,b)$$

$1_G \ (1,0)$

3) Esistenza del simmetrico

$\forall (a,b) \in G, \ \exists ? (c,d) \in G$ t.c. $(a,b) * (c,d) = (1,0)$

$$(a,b) * \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \overset{?}{=} (1,0)$$

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}, \ \alpha\left(-\frac{b}{\alpha}\right) + b\right) = (1, 0) = 1_G$$

$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a, b) = (1, 0) = 1_G$$

Verificando 1) 2) 3) posso affermare che G è un gruppo rispetto a $*$

Si consideri

$$(2, 1) * (1, 1) = (2 * 1, \ 2 \cdot 1 + 1) = (2, 3)$$
$$(1, 1) * (2, 1) = (1 * 2, \ 1 \cdot 1 + 1) = (2, 2)$$

quindi

G non è abeliano

GRUPPO ADDITIVO

Un insieme che è gruppo rispetto alla somma

GRUPPO MOLTIPLICATIVO

Un insieme che è gruppo rispetto al prodotto

CAMPO

Un insieme F dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ è detto campo se $(F, +)$ e $(F^*, \cdot)$ sono gruppi abeliani.

ESEMPI

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; $(\mathbb{C}; +; \cdot)$ sono campi.

$(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ Non è un campo perché $\Rightarrow (\mathbb{Z}^*, \cdot)$ non è un gruppo

perché mancano gli inversi in $\mathbb{Z}$

SPAZIO VETTORIALE

Un insieme V si dice spazio vettoriale sul campo F, se esistono due operazioni:

$$(+) : V \times V \to V$$
$$(\cdot) : F \times V \to V$$

tali che

* 1) $(V, +)$ è un gruppo abeliano

2) $1_F \cdot v = v, \quad \forall v \in V$

* 3) $\forall \alpha, \beta \in F, \quad \forall v \in V, \quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

4) $\forall \alpha, \beta \in F, \quad \forall v \in V, \quad (\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$

5) $\forall \alpha \in F, \quad \forall v, w \in V, \quad \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$

* corrispondono con le 4 proprietà che definiscono la somma (vedi sopra)

* corrispondono con le 4 proprietà che definiscono il prodotto (vedi sopra

ESEMPIO

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$(+): (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(\cdot): \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Dimostriamo che è un gruppo abeliano

prop. associativa

$$((a,b) + (c,d)) + (e,f) \overset{?}{=} (a+b) + ((c,d) + (e,f))$$

$$(a+c, b+d) + (e,f) \overset{?}{=} (a+b) + (c+e, d+f)$$

$$(a+c+e, b+d+f) = (a+c+e, b+d+f)$$

elemento neutro

$$(0,0) + (a,b) = (0+a, 0+b) = (a,b)$$

$$(a,b) + (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$$

esistenza opposto

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0,0) = 0_V$$

prop. commutativa

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b)$$

2) $\forall v \in V, \quad 1_F \cdot v = v$?

$$1 \cdot (a, b) = (1a, 1b) = (a, b)$$

3) $\forall \alpha, \beta \in F, \quad \forall v \in V, \quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

4) 5)

! Un qualunque campo è uno spazio vettoriale su se stesso

ESEMPIO

$$V = M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right.$$

$$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$$

$(+)$ $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$ $*$

$(\cdot)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$

$$* \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$(V, +)$ è abeliano

associativa

$\forall A, B, C \in V$

$$(A+B)+C = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} + (c_{ij})_{ij} =$$

$$= ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{ij} \underset{\substack{\text{in } \mathbb{R} \text{ la} \\ \text{somma è associativa}}}{=} (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{ij} =$$

$$= (a_{ij})_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{ij} + ((b_{ij})_{ij} + (c_{ij})_{ij}) =$$

$$= A + (B + C)$$

Somma commutativa

$\forall\ A + B \in V$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} = (b_{ij} + a_{ij})_{i,j} = (b_{ij})_{ij} + (a_{ij})_{i,j} = B + A$

SOMMA È COMMUTATIVA IN $\mathbb{R}$

esistenza elemento neutro

$$\odot = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)_{ij}$$

$\forall\ A \in V \quad A + 0 =$

$= (a_{ij} + 0)_{i,j} = (a_{ij})_{ij} = A$

0 è elemento di + in $\mathbb{R}$

esistenza del reciproco

$\forall A \in V, \quad A = (a_{ij})_{i,j}$

$B = (-a_{ij})_{ij}$

$A + B = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{ij} = (0)_{ij} = \odot$

2) 3) 4)

5) $\forall\ A \in V$

$1_{\mathbb{R}} \cdot A = 1\,(a_{ij})_{ij} = (1\,a_{ij})_{ij} = (a_{ij}) = A$

è elemento neutro in $\mathbb{R}$

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

F = campo

- $F^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$
- $M_{m \times n}(F) \qquad M_n(F)$ quadrata
- $F_1[x] = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in F\}$

(+) $(a_0 + a_1 x) + (b_0 + b_1 x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$

$(\cdot)$ $\alpha(a_0 + a_1 x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x$

- $F_n[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_i \in F\}$

Se fisso il grado del polinomio non si ottiene più uno spazio vettoriale

$\mathbb{Z}$ non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha z \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ l'operazione di prodotto scalare non è interna

PROPRIETÀ SPAZIO VETTORIALE

1) $\forall \alpha \in F, \ \alpha \cdot 0_V = 0_V$

2) $\forall v \in V, \ 0_F \cdot v = 0_V$

3) $\forall v \in V, \ -1_F \cdot v = -v$

4) Se $\alpha v = 0_V$, allora o $\alpha = 0_F$ o $v = 0_V$

DIM 1)

$\forall \alpha \in F \qquad \alpha \cdot 0_V = \alpha(0_V + 0_V) = \alpha 0_V + \alpha 0_V$

0_V è elemento neutro di $+$ in V — prop. distributiva

$w = \alpha \cdot 0_V$

$w = w + w$

$\Rightarrow \underbrace{w + (-w)}_{0_V} = w + \underbrace{w + (-w)}_{0_V}$

$\Rightarrow 0_V = w + 0_V = w$

0_V è l'elemento neutro della somma

quindi

$0_V = \alpha \cdot 0_V$

DIM 2)

0_F è elemento neutro di $+$ in F

$\forall v \in V, \quad 0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F v + 0_F v$

distributiva

Pongo $w = 0_F \cdot v$

$\Rightarrow w = w + w$

$w = 0_V \Rightarrow 0_F v = 0_V$

DIM 3)

$\forall v \in V, \ -1_F \cdot v = -v$

Ma $v + (-1_F \cdot v) \underset{\text{prop 5)}}{=} 1_F \cdot v + (-1_F \cdot v) \underset{\text{prop. distributiva}}{=} \underbrace{(1_F + (-1_F))}_{0_F} \cdot v =$

$= 0_F \cdot v \underset{\text{prop 2)}}{=} 0_V$

$\Rightarrow v + (-1_F \cdot v) = 0_V \Rightarrow -v = -1_F \cdot v$

DIM 4)

1) Se $\alpha = 0_F \Rightarrow 0_F \cdot v = 0_V$ e non c'è nulla da dimostrare

2) Pertanto sia $\alpha \neq 0_F$

$\exists\, \alpha^{-1} \in F \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha) v = \alpha^{-1} \cdot 0_V$

$\alpha\alpha^{-1} = 1_F \rightarrow \;\Rightarrow 1_F \cdot v = 0_V$

$1_F \cdot v = v \rightarrow \;\Rightarrow v = 0_V$