ES.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ 6x + y = 1 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{5} \qquad y = -\frac{1}{5}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_1(-6)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2(5)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+R_1(-1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+R_2(5)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \qquad\qquad 0 = 1 \ ↯$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$GL_n(F) = \{ A \in M_n(F) \mid A \text{ è invertibile} \}$

INVERSA di UNA MATRICE 1: Usando le operazioni fondamentali sulle righe, dobbiamo trovare la matrice inversa A^{-1} (laddove possibile) giustapponendo A con I_n e cercando di ottenere una nuova matrice in cui I_n compaia a sinistra.

$$\left(A \; I_n\right) \in M_{n \times 2n}(F) \xrightarrow[\text{fondamentali}]{\text{operazioni}} \left(I_n \; B\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = B.$$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 + R_1(-2)]{R_2 + R_1(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_3(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_2 \left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ES. Trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, $AX = 0$, dove $A \in M_{m \times n}(F)$, è un sottospazio vettoriale di F^n.

DIM: Sia $W = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \mid AX_i = 0\}$ tale insieme.

1) $\forall X_1, X_2 \in W$ dobbiamo dimostrare che $X_1 + X_2 \in W$.

Ma se $X_1, X_2 \in W \Rightarrow AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$, pertanto $A(X_1 + X_2) =$

$$= \underbrace{AX_1}_{=0} + \underbrace{AX_2}_{=0} = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in W.$$

2) $\forall X \in W$ e $\forall \alpha \in F$ dobbiamo dimostrare che $\alpha X \in W$.

Ma se $X \in W \Rightarrow AX = 0$, pertanto $A(\alpha X) = \alpha \underbrace{(AX)}_{=0} = \alpha \cdot 0 = 0$

DEF: Sia $V = F$-sp. vett e siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di V. Si definisce **rango** di $v_1, \dots, v_n$ il numero massimo di vettori lin. indip. e si indica con $r(v_1, \dots, v_n)$.

OSS. $r(v_1, \dots, v_n) = \dim_F \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

ES. $V = F^4$ $\qquad W = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1,0,1,0);\ (1,2,0,1);\ (0,2,-1,1)\}$

$r(W) = 2$

$$\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = (0,0,0,0) \qquad w_1 = w_2 - w_3$$

w_1, w_2, w_3 sono lin. dip $\Rightarrow r(W) < 3 \Rightarrow r(W) = \begin{cases} 1 & \text{NO!} \\ 2 \end{cases}$

DEF: Sia $A \in M_{n\times m}(F)$, $\begin{cases} A = (A_1\ A_2\ \cdots\ A_n), & A_i \in F^m, \\ A = (A^1\ A^2\ \cdots\ A^m), & A^j \in F^n \end{cases}$

allora si definiscono:

1) <u>rango per riga di A</u> come il rango di $A_1, \dots, A_n$

$$r_R(A) = r(A_1, \dots, A_m)$$

2) <u>rango per colonna di A</u> come il rango di $A^1, \dots, A^m$

$$r_C(A) = r(A^1, \dots, A^m).$$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(F)$

$$r_R(A) = r\big((1\ 0\ 1), (0\ 1\ 1)\big) = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{array}$$

$$r_C(A) = r\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} \right) = \begin{cases} 1 & \text{No!} \\ 2 & \\ 3 & \text{No! } A^3 = A^1 + A^2 \end{cases} \Rightarrow \underline{r_C(A) = 2}$$

PROPRIETÀ:

1) Sia $A \in M_{m \times n}(F)$, allora $r_R(A) = r_C(A)$

2) $A \in M_n(F)$, allora $r(A) = r(A^t)$

3) se $A = 0 \Rightarrow r(A) = 0$

4) se $A = I_n \Rightarrow r(I_n) = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F^3 \qquad 3$$

OSS. Dato che $r_R(A) = r_C(A)$, allora chiamiamo rango di A il numero massimo di righe o di colonne lin. indip., $r(A)$.

ES.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(F)$$

$r(M) \neq 4 \Rightarrow r(M) = $ 1 / 2 No! / 3 No!

$M_2 = 2M_1$

$M_3 = -M_1$

PROPOSIZIONE: Se $A \in M_{m\times n}(F)$ e $B = M_{n\times p}(F)$ allora

$\longrightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

COROLLARIO: Se $A \in GL_m(F)$ e $B \in M_{m\times p}(F)$ allora $r(AB) = r(B)$

TEOREMA: Sia $A \in M_n(F)$. Allora $A \in GL_n(F) \Leftrightarrow r(A) = n$ (è massimo).

DIM: $(\Rightarrow)$ Ip: $A \in GL_n(F)$; Th: $r(A) = n$.

$A \in GL_n(F) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL_n(F)$ t.c. $AA^{-1} = I_n \Rightarrow n = r(I_n) = r(AA^{-1})$

$\underset{\uparrow \text{corollario}}{=} r(A)$

$(\Leftarrow)$ Ip: $r(A) = n$; Th: $A \in GL_n(F)$.

Se $r(A) = n \Rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}$ sono lin. indip. $\Rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}$ è una base di F^n. Sia $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base canonica di F^n, cioè

$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esima}}}{1}, 0, \dots, 0)$

Costruiamo la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) = b_{11} A_1 + b_{12} A_2 + \dots + b_{1n} A_n =$$

$$= \left(b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} + \dots + b_{1n} a_{n1}, \dots, b_{11} a_{1n} + b_{12} a_{2n} + \dots + b_{1n} a_{nn} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1) =$$

Pertanto:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{B}} \cdot A$$

$$BA = I_n \Rightarrow A^{-1} = B \Rightarrow A \in GL_n(F).$$

TEOREMA: Sia $A \in M_n(F)$. Allora $\det A \neq 0 \iff r(A) = n$

DIM: $(\Leftarrow)$ Ip: $r(A) = n$; Th: $\det A \neq 0$.

Se $r(A) = n \Rightarrow$ per il Teorema precedente, $A \in GL_n(F) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL_n(F)$

t.c. $AA^{-1} = I_n$. Ma allora $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teor. di Binet}}}{=} \det A \cdot \det(A^{-1})$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ e $\det A \neq 0$.

$(\Rightarrow)$ Ip: $\det A \neq 0$; Th: $r(A) = n$.

Per assurdo sia $r(A) < n$ ossia le righe sono lin. dip. Poiché il determinante non cambia scambiando le righe, possiamo supporre che sia A_1 scritta come comb. lin. delle altre:

$$A_1 = c_2 A_2 + \ldots + c_n A_n, \quad c_i \in F.$$

$$\det A = \det(A_1\ A_2\ \cdots\ A_n) = \det(c_2A_2 + \ldots + c_nA_n\ \ A_2\ \cdots\ A_n) =$$

$$= c_2 \overbrace{\det(A_2\ A_2\ \cdots\ A_n)}^{=0} + c_3 \overbrace{\det(A_3\ A_2\ A_3 \cdots A_n)}^{=0} + \ldots + c_n \overbrace{\det(A_n\ A_2 \cdots A_n)}^{=0}$$

proprietà determinante

$$= 0 \quad \lightning$$

proprietà determinante.

CRITERIO di INVERTIBILITÀ: $A \in GL_n(F) \iff \det A \neq 0$.

OSS. $GL_n(F) = \{ A \in M_n(F) \mid \det A \neq 0 \}$.

TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI: Sia $AX = B$ un sistema lineare con $A \in M_{m \times n}(F)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Allora $AX = B$ è compatibile $\iff r(A|B) = r(A)$.

DIM: Sia $r = r(A)$. Allora

$$r(A|B) = \begin{cases} r \\ \text{oppure} \\ r+1 \end{cases}$$ poiché al più aggiungo una colonna (ossia B).

$AX = B$ è compatibile $\Longleftrightarrow \exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ tale che soddisfa il sistema $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = B \Longleftrightarrow B$ è comb. lineare delle colonne $A^1, A^2, \dots, A^n \Longleftrightarrow \langle A^1, A^2, \dots, A^n, B \rangle = \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle$

$\Longleftrightarrow \dim_F \langle A^1, \dots, A^n, B \rangle = \dim_F \langle A^1, \dots, A^n \rangle \Longleftrightarrow$

$r(A|B) = r(A)$.

OSS. $AX = B$, $A \in M_{m \times n}(F)$ e supponiamo il sistema compatibile ($r(A|B) = r(A)$). Allora:

$$r(A) = \begin{cases} n \Rightarrow \exists! \text{ soluzione} \\ r < n \Rightarrow \exists\ \infty^{n-r} \text{ soluzioni.} \end{cases}$$

ES.
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$r(A|B) = r(A)$ poiché $B = A^2$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile.

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{No! perché } A^1 \text{ e } A^2 \text{ non sono multiple} \\ 2 \\ 3 & \text{No! } A^3 = -A^2 \end{cases} \Rightarrow r(A) = r(A|B) = 2$$

esistono $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{23}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + (y - z) = 1 \\ \qquad (y - z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x + \cancel{1} = \cancel{1} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y - 1 \end{cases} \qquad S = \{ (0, y, y-1) \mid y \in F \} \quad \infty^1 \text{ soluzioni.}$$

$$(y = z + 1) \qquad\qquad (0, z+1, z) \mid z \in F$$