OSS. Dato uno sp. vett. V, esso possiede più basi differenti, di fatti ad esempio se $V = F^3 \Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sono basi di V su F.

TEOREMA di CARATTERIZZAZIONE delle BASI: Sia V = F-sp. vett.

1) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ è un sistema massimale di vettori lin. indip.

2) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ è un sistema minimale di generatori di V

3) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V$, $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ unici tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

DIM: 1) ($\Rightarrow$) $\forall v \in V$, poiché B è una base di V su F, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \underbrace{v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_n v_n}_{\text{comb. lin. nulla con scalari non tutti nulli}} = 0 \Rightarrow v, v_1, \dots, v_n \text{ sono}$$

lin. dip. $\Rightarrow$ B è un insieme massimale di vett. lin indip.

($\Leftarrow$) Poiché B è un sistema max di vettori lin. ind., pertanto per dimostrare che essi formano una base, resta da verificare solo che sono dei generatori di V. $\quad V \overset{?}{=} \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Ma se per assurdo $\exists v \in V$ t.c. $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow$ i vettori

$v, v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. ↯ perché $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme massimale di vettori lin. indip.

2) $(\Rightarrow)$ Dobb. dim. che $\mathcal{B}$ è un sistema minimale di generatori.

Per assurdo, si supponga che $V = \langle v_2, \dots, v_n \rangle \Rightarrow v_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ t.c. $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$ sono lin. dip. ↯ perché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base.

$(\Leftarrow)$ Poiché $\mathcal{B}$ è un sistema minimale di generatori di V, allora essi generano $V \Rightarrow$ per essere una base dobbiamo dimostrare che essi sono lin. indip. Per assurdo supponiamo che non lo siano $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

Supponiamo che $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_1^{-1} \in F \Rightarrow \alpha_1^{-1}\alpha_1 v_1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1}\alpha_n v_n = 0$

$v_1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1}\alpha_n v_n = 0 \Rightarrow v_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1}\alpha_n v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ ⚡ perché $\{v_1, \dots, v_n\}$ é un sistema minimale di generatori.

3) $(\Rightarrow)$ Per assurdo sia $v \in V$ t.c. $v = \underline{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n}$

$\alpha_i, \beta_i \in F \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$. Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ formano una base, $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

$\Rightarrow$ gli scalari sono unici.

$(\Leftarrow)$ $\forall v \in V, \exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$\Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \Rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$ generano V.

Inoltre, se in particolare $v = 0$ per ipotesi $\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ t.c.

$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$. Ma sicuramente, $0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_m$. Per l'unicità degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, deve risultare $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip.

<u>ES.</u> Verificare che $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ è una base di F^3 ed esprimere $v = (1,2,3)$ come loro combinazione lineare.

Sol. 1) Sono lin. indip: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$

$(\alpha, \alpha, 0)+(\beta, 0, \beta)+(0, \gamma, \gamma)=(0,0,0)$

$(\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-\alpha \\ \gamma=-\alpha \\ -\alpha-\alpha=0 \end{cases} \quad -\cancel{2}\alpha=0$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Rightarrow u_1, u_2, u_3 \text{ sono lin. indip.}$$

?

2) Generano F^3: $\forall (a,b,c) \in F^3$, $\exists \alpha, \beta, \gamma \in F$ t.c. $(a,b,c)=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$

$$(a, b, c) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$$

$$(a, b, c) = (\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\gamma) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha+\gamma = b \\ \beta+\gamma = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = a - \alpha \\ \gamma = b - \alpha \\ a - \alpha + b - \alpha = c \end{cases}$$

$$a + b - 2\alpha = c \Rightarrow \alpha = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\beta = a - \alpha = a - \frac{a+b-c}{2} = \frac{a-b+c}{2}$$

$$\gamma = b - \alpha = b - \frac{a+b-c}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$$

$$(a, b, c) = \frac{a+b-c}{2} \cdot u_1 + \frac{a-b+c}{2} \cdot u_2 + \frac{-a+b+c}{2} u_3 .$$

Pertanto u_1, u_2 e u_3 sono generatori di F^3.

3) $\underset{\substack{\shortparallel \\ a}}{1}, \underset{\substack{\shortparallel \\ b}}{2}, \underset{\substack{\shortparallel \\ c}}{3}$

$$(1, 2, 3) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 u_3$$

ES. $V = M_2(F)$ $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid d = 2a - 2b - c \right\}$ sottosp. di $M_2(F)$.

1) Dim. che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di W

2) Scrivere $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ come loro comb. lineare.

TEOREMA della DIMENSIONE: Sia $V = F$-sp. vett. e siano $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V, allora $n = m$.

DIM. Per assurdo sia $m > n$. Si consideri $w_1 \in B'$. Poiché B è base di $V \Rightarrow \exists \underbrace{\alpha_i \in F}_{\text{non tutti nulli}}$ t.c. $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Sia $\alpha_1 \neq 0$

$$\alpha_1^{-1} w_1 = \alpha_1^{-1} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_1^{-1} \alpha_n v_n = v_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1} \alpha_i v_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1} \alpha_i v_i \quad (1) \Rightarrow \quad v_1 \in \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Si consideri ora $w_2 \in B'$. Poiché B è base di V, $\exists \beta_i \in F$ non tutti nulli tali che $w_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$. Sostituisco (1):

$$w_2 = \beta_1 \left(\alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_1^{-1} \alpha_i v_i \right) + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

$$= \beta_1 \alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} \beta_1 \alpha_1^{-1} \alpha_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \beta_i v_i =$$

$$= \underbrace{\beta_1 \alpha_1^{-1}}_{\lambda_1} w_1 + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\left(\beta_i - \beta_1 \alpha_1^{-1} \alpha_i\right)}_{\lambda_i} v_i = \lambda_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

Almeno uno tra $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ è diverso da zero. Poiché se fosse $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow w_2 = \lambda_1 w_1 \Rightarrow w_1$ e w_2 lin. dip. ↯ perché $w_1, w_2 \in B'$ e B' è una base. Supponiamo che $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_2^{-1} w_2 = \lambda_2^{-1} \lambda_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_2^{-1} \lambda_i v_i = \lambda_2^{-1} \lambda_1 w_1 + v_2 + \sum_{i=3}^{n} \lambda_2^{-1} \lambda_i v_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = -\lambda_2^{-1} \lambda_1 w_1 + \lambda_2^{-1} w_2 - \sum_{i=3}^{n} \lambda_2^{-1} \lambda_i v_i \Rightarrow v_2 \in \langle w_1, w_2, v_3, \dots, v_n \rangle$$

Inoltre $v_1 = \alpha_1^{-1} w_1 - \sum_{i=2}^{m} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i = \alpha_1^{-1} w_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \sum_{i=3}^{m} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i =$

$$= \alpha_1^{-1} w_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2 \left(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_m v_m \right) - \sum_{i=3}^{m} \alpha_1^{-1}\alpha_i v_i =$$

$$= \left(\alpha_1^{-1} - \alpha_1^{-1}\alpha_2\gamma_1\right) w_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2\gamma_2 w_2 - \sum_{i=3}^{m} \left(\alpha_1^{-1}\alpha_2\gamma_i + \alpha_1^{-1}\alpha_i\right) v_i$$

$\Rightarrow \boxed{v_1 \in \langle w_1, w_2, v_3, \dots, v_m \rangle}$

Procedendo iterativamente, $\forall i = 1, \dots, n$ $\boxed{v_i \in \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle}$

Ma poiché $m > n$, $w_m \underset{\uparrow}{=} \delta_1 v_1 + \dots + \delta_n v_n \in \langle w_1, \dots, w_n \rangle \Rightarrow$

B è base di V

$\Rightarrow w_m, w_1, \dots, w_n$ sono lin. dip $\lightning$ poiché essi appartengono a B'

che è una base di V.

DEF. Sia V = F-sp. vett. Allora la dimensione di V su F, $\dim_F V$, è uguale al numero di vettori che compongono una base di V su F.

OSS.

$$\dim_F V = \text{il numero} \begin{cases} \text{MAX di vett. lin. indip.} \\ \text{MIN di generatori di } V \end{cases}$$

ES. $V = \{0\} \Rightarrow \dim_F V = 0$

$V = F_2[x] \Rightarrow \dim_F V = 3$

$V = M_2(F) \Rightarrow \dim_F V = 4$

$V = M_{n \times m}(F) \Rightarrow \dim_F V = n \cdot m$

ES. $V = M_2(F)$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$

- W sottosp. vett. di $V \Rightarrow$ voi.
- $\dim_F W = 2$
- $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$

$\qquad a = 1,\ b = 0 \qquad a = 0,\ b = 1$

- I vettori di $\mathcal{B}$ sono lin. indip. perché non sono multipli
- $\langle \mathcal{B} \rangle = W$: difatti $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}$ è una base di W su F.

PROPOSIZIONE: Sia $V =$ F-sp. vett. e sia $\dim_F V = n$. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono lin. indip. $\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é una base di V.

DIM. Per ipotesi $v_1, \dots, v_n$ sono lin. ind. pertanto dobbiamo dimostrare che $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

- $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq V$: per costruzione;
- $V \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle$: $\forall v \in V$, i vettori $\overbrace{v, v_1, \dots, v_n}^{n+1}$ sono lin. dip. poiché $\dim_F V = n \Rightarrow \exists\ \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ non tutti nulli tali che $\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Ma $\alpha \neq 0$ poiché se fosse $\alpha = 0$ allora otterremmo la comb. lin. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ poiche $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. $\lightning$

Pertanto $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha\alpha^{-1}v + \alpha^{-1}\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha^{-1}\alpha_m v_m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v + \alpha^{-1}\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha^{-1}\alpha_m v_m = 0 \Rightarrow v = -\alpha^{-1}\alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha^{-1}\alpha_m v_m$

$\Rightarrow v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \Rightarrow V \subseteq \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$

Pertanto $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

TEOREMA di COMPLETAMENTO A BASE: Sia V = F-sp. vett. t.c. $\dim_F V = n$. Siano $v_1, \ldots, v_k$ sono vett. lin. indip. $(k \leq n)$ allora $\exists\, v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ t.c. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V su F.

DIM. Se $k = n$ OK!

Se $n = k+1$, $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subsetneq V \Rightarrow \exists\, v_{k+1} \in V$ tale che $v_1, \ldots, v_k,$

v_{k+1} sono lin. indip. Ma $\dim_F V = n = k+1 \Rightarrow$ per la proposizione precedente $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ é una base.

Se $n = k+2$ analogo

$\vdots$

ES. $M_2(F)$ $\qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in F \right\}$

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ completiamo B_W ad una base di $M_2(F)$

Mancano 2 vettori. $\qquad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$