ES.

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + \lambda^3 z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) \leq 3$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda^3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A|B) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2).$$

$r(A|B) = 4 \iff \det(A|B) \neq 0 \iff (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0 \iff \lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$.

- $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$: $r(A|B) = 4 \neq r(A) \Rightarrow$ il sistema non è compatibile

- $\lambda = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ poiché $A^1 = A^3$ ed A^1 e A^2 non sono multipli.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 3 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A|B) = 3$

Quindi $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B) \Rightarrow$ il sistema è incompatibile.

- $\lambda = -2$.

- $\lambda = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ 1 & \\ 1 & 1 \quad -8 \\ 1 & 1 \quad 1 \end{pmatrix}$$

$\det M = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det M' = 1 - 2 - 1 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A|B) = 0 \Rightarrow r(A|B) < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow r(A|B) = 3$

Il sistema è compatibile.

Poiché $r(A) = r(A|B) = 3$, eliminiamo la 3° equazione:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A = -3$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (1-1)}{-3} = 0$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot (1)}{-3} = -\frac{1}{3}$$

ES.

$$\begin{cases} x + y + (\lambda - 1) z = 1 \\ 2x + \lambda y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + 2(\lambda - 1) y + 2z = 4 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\det A = -\lambda(\lambda-2)^2 \neq 0 \iff \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 2 \iff r(A) = 3$$

- $\underline{\lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 2}$: $r(A) = 3$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2(\lambda-1) & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{r(A|B) = 3}}$$

Il sistema è compatibile:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 4-\lambda & 2(\lambda-1) & 2 \end{pmatrix}}{-\lambda(\lambda-2)^2} \qquad z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2(\lambda-1) & 4-\lambda \end{pmatrix}}{-\lambda(\lambda-2)^2}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 4-\lambda & 2 \end{pmatrix}}{-\lambda(\lambda-2)^2}$$

- $\underline{\lambda = 0}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

$A^2 = -A^3$ ed A^1 non è proporzionale ad $A^2 \Rightarrow r(A) = 2$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det M = 0 \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det M' = (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot (4+2) = -12 \neq 0 \Rightarrow r(A|B) = 3$$

Il sistema non è compatibile.

- $\underline{\lambda = 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A|B) = 1$$

Il sistema è compatibile e avrà ∞^{3-1} soluzioni $\equiv \infty^{2}$ soluz.

$$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y.$$

$$S = \{ (x, y, 1 - x - y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

ES. $\begin{cases} x + \lambda y + z = 2 \\ x + 2y - \lambda z = -1 \\ x - \lambda y + z = 0 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq -1 \Rightarrow \quad x = 1 - \dfrac{2}{\lambda} \; ; \quad y = \dfrac{1}{\lambda} \; ; \quad z = \dfrac{2}{\lambda}$

- $\lambda = 0 \Rightarrow$ sist. incompatibile.
- $\lambda = -1 \Rightarrow \quad S = \{ (x, -1, 1-x) \mid x \in \mathbb{R} \}$

TRASFORMAZIONI LINEARI

ES. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x, y, z) \mapsto 2x + 3y - z$ $\qquad X = (x, y, z) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$f(X) = A X^t$$

OSS. Sia S un insieme e sia $V = \mathbb{F}$-sp. vett. Sia inoltre

$$\mathcal{F} = \{ f : S \to V \mid f \text{ applicazione} \}$$

$\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale definendo:

$(+)$: $\forall f, g \in \mathcal{F}$, $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $\forall t \in S$

$(\cdot)$: $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall \alpha \in F$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $\forall t \in S$

OSS: $id : A \to A$ applicazione identica se $id(a) = a$ $\forall a \in A$.

$0 : A \to A$ applicazione nulla se $0(a) = 0_A$, $\forall a \in A$.

DEF. Siano V e W due F-spazi vettoriali, allora una applicazione $f : V \to W$ è detta <u>omomorfismo di spazi vettoriali</u> (trasformazione lineare, applicazione lineare) se:

1) $\forall v_1, v_2 \in V$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

2) $\forall v \in V$ e $\forall \alpha \in F$, $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

ES. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x, y, z) = (x, y)$

1) $\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$f(v_1+v_2) = f\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) =$$

$$= (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

2) $\forall\, v \in \mathbb{R}$, $v = (x, y, z)$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha v) = f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha y) = \alpha \overbrace{(x, y)}^{f(v)} =$$

$$= \alpha f(v)$$

ES. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $f(X) = AX^t$ dove $X = (x, y, z)$ e $A = (1, 2, -1)$

$$\Downarrow$$

$$f(x, y, z) = x + 2y - z$$

1) $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$, $f(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2)^t = A(X_1^t + X_2^t) = AX_1^t + AX_2^t =$
$= f(X_1) + f(X_2)$

2) $\forall X \in \mathbb{R}^3$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha X) = A(\alpha X)^t = A(\alpha X^t) = \alpha AX^t = \alpha f(X)$

ES. Sia V = F-sp. vett. e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è base di V su F. Allora $f : V \to F^n$ t.c. $f(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dove $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ é un omomorfismo di sp. vett.

1) $\forall\, v_1, v_2 \in V$, $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $\quad v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \Rightarrow$

$$f(v_1 + v_2) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = \underbrace{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}_{f(v_1)} + \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_n)}_{f(v_2)} = f(v_1) + f(v_2)$$

2) $\forall v \in V$ e $\forall \gamma \in F$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $f(\gamma v) = f\left(\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) =$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) e_i\right) = (\gamma \alpha_1, \dots, \gamma \alpha_n) = \gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \gamma f(v)$$

OSS. $id : V \to V$ t.c. $id(v) = v, \ \forall v \in V$
$0 : V \to W$ t.c. $0(v) = 0_W, \ \forall v \in V$ } omomorfismi di sp. vett.

OSS. Sia $\mathcal{L}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f$ è omomorfismo di sp. vett. $\}$. Allora $\mathcal{L}(V, W)$ è uno sp. vett. rispetto alle operazioni:

$(+)$: $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$
$(\cdot)$: $(\alpha \cdot f)(v) = \alpha f(v)$. $\qquad \forall v \in V$

DIM che $f + g$ e $\alpha \cdot f$ sono ancora omomorfismi.

TEOREMA: Siano V e W due F-sp. vett. e siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $w_1, \dots, w_n$ vettori arbitrari di W. Allora esiste un unico omomorfismo $f: V \to W$ t.c $f(v_i) = w_i$. Inoltre se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ allora

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n.$$

DEF. Sia $f: V \to W$ omomorfismo di sp. vett. allora si definiscono:

1) nucleo di f, $\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

2) immagine di f, $\operatorname{Im} f = f(V) = \{ f(v) \mid v \in V \}$

OSS. 1) Ker f è sottosp. vett. di V :

a) $\forall\, v_1, v_2 \in \text{Ker} f$, dimostriamo che $v_1 + v_2 \in \text{Ker} f$. Ma se $v_1, v_2 \in \text{Ker} f$ allora $f(v_1) = f(v_2) = 0$. Inoltre,

$$f(v_1 + v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è lineare}}}{=} f(v_1) + f(v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ v_1, v_2 \in \text{Ker} f}}{=} 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker} f$.

b) $\forall\, v \in \text{Ker} f$ e $\forall\, \alpha \in F$, dimostriamo che $\alpha v \in \text{Ker} f$. Ma se $v \in \text{Ker} f$, allora $f(v) = 0$. Quindi

$$f(\alpha v) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{=} \alpha f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ v \in \text{Ker} f}}{=} \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha v \in \text{Ker} f$.

2) Im f è sottosp. vett. di W:

a) $\forall\, v_1, v_2 \in \mathrm{Im} f$, dimostriamo che $v_1 + v_2 \in \mathrm{Im} f$. Ma se $v_1, v_2 \in \mathrm{Im} f$ $\Rightarrow \exists\, w_1, w_2 \in V$ t.c. $v_1 = f(w_1)$ e $v_2 = f(w_2)$. Pertanto $v_1 + v_2 =$

$$= f(w_1) + f(w_2) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{=} f(w_1 + w_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathrm{Im} f.$$

b) $\forall\, v \in \mathrm{Im} f$ e $\forall\, \alpha \in F$, dimostriamo che $\alpha v \in \mathrm{Im} f$. Ma se $v \in \mathrm{Im} f$, $\exists\, w \in V$ t.c. $v = f(w)$, quindi $\alpha v = \alpha f(w) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è lineare}}}{=} f(\alpha w)$

$\Rightarrow \alpha v \in \mathrm{Im} f$.

TEOREMA: Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di sp. vettoriali. Sia inoltre $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V su F. Allora:

$$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$$

DIM:

- $\langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle \subseteq \operatorname{Im} f$ ovvio!
- $\operatorname{Im} f \subseteq \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$: $\forall\, v \in \operatorname{Im} f$, $\exists\, w \in V$ t.c. $v = f(w)$.

Ma $w \in V$ quindi w si può scrivere come comb. lin. dei vettori della base di V, ossia $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ t.c. $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Pertanto $v = f(w) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{=} \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$

$\Rightarrow v \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$

ES. $f : F^4 \to F^4$ t.c. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, 0, 0)$ applicaz. lineare.

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \mid (x_1, x_2, 0, 0) = (0,0,0,0)\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \mid x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0\} =$$

$$= \{(0, 0, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in F\}.$$

$\dim_F \operatorname{Ker} f = 2 \qquad B_{\operatorname{Ker} f} = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 \} =$$

$$= \{ (x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in F \}$$

$\dim_F \mathrm{Im}\, f = 2$, $\quad B_{\mathrm{Im}\, f} = \{ (1, 0, 0, 0), \ (0, 1, 0, 0) \}$

$\mathrm{Im}\, f = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4) \rangle$ dove $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di F^4 su F.

Scegliamo la base canonica:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ v_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ v_4 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

$f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$; $f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$

$f(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$; $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$