ES. Det. tutte le matrici di $M_2(F)$ che commutano con la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\forall A \in M_2(F)$ t.c. $AB = BA$. Se $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x = x} \\ 0 = y \\ 0 = z \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a casa. $\qquad A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

DEF. Il determinante di una matrice quadrata 2×2 è una applicazione $\det : M_2(F) \to F$ tale che $\forall\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} .$$

OSS. Se $A \in M_1(F) \Rightarrow A = a \in F$ allora $\det A = a$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$

PROPRIETÀ: 1) det è lineare sulle righe di A:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} + a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

b) $\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

2) det è lineare sulle colonne di A.

3) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, $A \in M_n(F)$.

4) Se A possiede almeno una riga (colonna) nulla, allora $\det A = 0$.

5) Se A' si ottiene da A scambiando due righe (due colonne), allora $\det A' = -\det A$.

6) $\det(I_n) = 1$

7) Se A' si ottiene da A sommando ad una riga (ad una colonna) un multiplo di un'altra riga (risp. colonna), allora $\det A' = \det A$.

8) Se A possiede due righe (colonne) uguali o proporzionali, allora $\det A = 0$.

9) $\det(A^t) = \det A$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -3$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A' = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3$

$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det A'' = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 3$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = -3$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_1 \leftarrow A_1 + 2A_2$$

$$\det A' = 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 = -5 + 2 = -3$$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\det A = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 0$

REGOLA di SARRUS: Sia $A \in M_3(F)$, allora per calcolare $\det A$ facciamo come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$
$$- a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

VALE SOLO per MATRICI 3×3.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\det A = 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 3 + 2\cdot(-2)\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 0\cdot 2 - 0\cdot(-2)\cdot 1$$

$$= -13$$

REGOLA di LAPLACE: Se $A \in M_n(F)$ e sia $A_{ij} \in M_{n-1}(F)$ la matrice ottenuta di A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna. Allora:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1}\cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}).$$

sviluppo sulla i-esima riga

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{j+2} a_{2j} \det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A_{nj})$$

sviluppo sulla j-esima colonna.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ secondo la 1° riga:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) + 1 \cdot 2 \, (-2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) =$$

$$= 1 + 2 \cdot (-7) = 1 - 14 = -13.$$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sviluppiamo $\det A$ con Laplace sulla 4° colonna.

$$\det A = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\left[(-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -\left[2(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (-1) \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)) \right] =$$

$$= -\left[2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 \right] = -(-9) = 9.$$

OSS. $\det(A+B) \neq \det A + \det B$, infatti ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \qquad \det B = -1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\det A + \det B = 1 + 1 = 2.$$

Ma $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = 0$

TEOREMA di BINET: Se $A, B \in M_n(F)$ allora

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

OSS. Se $A \in GL_n(F)$, allora $\exists\, A^{-1} \in GL_n(F)$ t.c. $AA^{-1} = I_n$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. 6)}}}{1 =} \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binet}}}{=} \det A \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow$$

$$\det A \neq 0 \quad \text{e} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

SISTEMI LINEARI

DEF. Un sistema lineare in n indeterminate ed m equazioni è del tipo:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se tale sistema ammette almeno una soluzione, allora è detto compatibile.

OSS. Dato $(*)$ e posti $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ e

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, allora $(*)$ può essere scritto in forma matriciale:

$$\underset{m \times n}{A}\ \underset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{B}.$$

A è detta matrice incompleta. La matrice ottenuta giustapponendo A e B è detta matrice completa:

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

DEF: Se $B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, allora il sistema è detto omogeneo.

OSS: Un sistema omogeneo $AX = 0$ è sempre compatibile, perché $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ è sempre soluzione del sistema.

DEF. Due sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ sono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni.

METODO di RIDUZIONE di GAUSS:

Sia $AX = B$. Le operazioni fondamentali sulle righe di $A|B$ sono:

1) Scambiare due righe: R_{ij} ≡ scambio la riga i-esima con la riga j-esima.

2) Moltiplicare una riga per $\alpha \in F$: $R_i(\alpha)$ ≡ moltiplico la riga i-esima per α.

3) Sostituire una riga con la somma per un multiplo di $\alpha \in F$:

$R_i + R_j(\alpha)$ ≡ sostituisco la i-esima riga con la somma di R_i con R_j moltiplicata per $\alpha \in F$.

$$A|B \xrightarrow{\text{operazioni}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & * & \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & 1 \end{array}\right)$$ e poi risolvere.

ES.

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\left(-\frac{1}{9}\right)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_1(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2(3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\left(\frac{3}{2}\right)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + \frac{8}{9} z = \frac{2}{9} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 \cdot 1 = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$x = -\frac{2}{3} \qquad y = -\frac{2}{3} \qquad z = 1.$$

ES.

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2(-4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 29 & -10 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\left(\frac{1}{29}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + R_1(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + R_3(11)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & 0 & 0 & 64/29 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\left(\frac{29}{64}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 7z = 3 \\ z = -\frac{10}{29} \\ 0 = 1 \quad \lightning \end{cases}$$

Il sistema non è compatibile

<u>ES</u>.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ 6x + y = 1 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{5} \qquad y = -\frac{1}{5}$$