OSS. $W \subseteq V$ sottospazio $\Rightarrow$ $\dim_F W \leq \dim_F V$

ES. $V = M_2(F)$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in F \right\} ; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in F \right\}$$

- $\dim_F U = 2$; $\dim_F W = 2$; $\dim_F M_2(F) = 4$

- $U \cap W = \{ A \in V \mid A \in U \text{ e } A \in W \}$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ \cancel{y = 0} \\ x = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ x = d \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in U \cap W \Rightarrow U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in F \right\}$$

$$\dim_F (U \cap W) = 1 \qquad B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} ; \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $U + W = \{ A + B \mid A \in U, B \in W \}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y \\ y & x+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = x + a \\ a_{12} = y \\ a_{21} = y \\ a_{22} = x + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = x + a \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = x + d \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{22} \in F \right\}$$

$$\dim_F (U+W) = 3 \qquad B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim_F V = 4$ $\qquad$ $\dim_F U \cap W = 1$

$\dim_F U = 2$ $\qquad$ $\dim_F (U+W) = 3$ $\qquad$ $3 = 2 + 2 - 1$

$\dim_F W = 2$

RELAZIONE di GRASSMANN: Siano $V = F$-sp. vett. e U, W sottospazi di V. Allora:

$$\dim_F (U+W) = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U \cap W)$$

DIM. Sia $\dim_F(U \cap W) = t$ e sia $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{z_1, \dots, z_t\}$. Poiché $U \cap W$ è un sottosp. vett. sia di U che di W, possiamo completare $\mathcal{B}_{U\cap W}$ ad una base di U e ad una base di W.

$$\mathcal{B}_U = \{z_1, \dots, z_t, u_1, \dots, u_r\} \text{ base di } U$$

$$\mathcal{B}_W = \{z_1, \dots, z_t, w_1, \dots, w_s\} \text{ base di } W$$

$\dim_F U = t + r$ e $\dim_F W = t + s$

$$\dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U \cap W) = t + r + \cancel{t} + s - \cancel{t} = t + r + s.$$

Dobbiamo dimostrare che $\dim_F (U + W) = t + r + s$, ossia dobbiamo dimostrare che $\mathcal{B}_{U+W} = \{z_1, \dots, z_t, u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$.

1) <u>B_{U+W} genera $U+W$</u>: $\forall\, v \in U+W$, $\exists\, u \in U$ ed $\exists\, w \in W$ tali che $v = u + w$. Ma B_U è una base di $U \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_r \in F$ t.c. $u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i$.

Inoltre, B_W è una base di $W \Rightarrow \exists\, \delta_1, \dots, \delta_t, \gamma_1, \dots, \gamma_s \in F$ tali che $w = \sum_{i=1}^{t} \delta_i z_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i$.

$$v = u + w = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{t} \delta_i z_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} (\alpha_i + \delta_i) z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i \Rightarrow B_{U+W} \text{ generano } U+W.$$

2) <u>B_{U+W} è lin. ind.</u>: Si consideri la comb. lin.

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i = 0$$

dobbiamo dimostrare che $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 \quad \forall i$.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i}_{\in W} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{t} \alpha_i z_i - \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i}_{\in U} \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i \in U \cap W$$

ma $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{z_1, \dots, z_t\}$ è una base di $U \cap W \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in F$ tali che

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i z_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \gamma_i w_i - \sum_{i=1}^{t} \lambda_i z_i = 0$$

Questa è una comb. lin. nulla dei vettori $z_1, \dots, z_t, u_1, \dots, u_r$ che formano una base di $U \Rightarrow$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$

OSS: Se U e W sono in somma diretta $\Rightarrow U \cap W = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_F (U \cap W) = 0$. Per la Relazione di Grassmann:

$$\dim_F (U \oplus W) = \dim_F U + \dim_F W.$$

ES. $V = F_2[x]$ $\qquad U = \langle 1-x, \ x, \ 1+x \rangle$

$$W = \langle 1+x^2, \ 1+x+x^2 \rangle$$

- $\dim_F U =$

Noto che $1+x = 1 \cdot (1-x) + 2 \cdot x \Rightarrow 1+x$ è lin. dip. da $1-x$ e x

$\Rightarrow \mathcal{U} = \langle 1-x, x \rangle$ inoltre $1-x$ ed x sono lin. indip. in quanto nessuno è multiplo dell'altro. $B_U = \{1-x, x\}$

- $1+x^2$ e $1+x+x^2$ sono lin. indip. $\Rightarrow \dim_F W = 2$ e $B_W = \{1+x^2, 1+x+x^2\}$.

- $\forall\, p(x) \in \mathcal{U}$, $p(x) = \alpha(1-x) + \beta x = \alpha + (\beta - \alpha)x$

$$\mathcal{U} = \{ \underbrace{\alpha}_{\lambda_0} + \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\lambda_1} x \mid \alpha, \beta \in F \} = \{ \lambda_0 + \lambda_1 x \mid \lambda_0, \lambda_1 \in F \} = F_1[x]$$

$\forall f(x) \in W, \quad f(x) = \alpha(1+x^2) + \beta(1+x+x^2) = (\alpha+\beta) + \beta x + (\alpha+\beta)x^2$

$W = \{ \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma_0} + \underbrace{\beta}_{\gamma_1} x + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma_0} x^2 \mid \alpha, \beta \in F \} = \{ \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_0 x^2 \mid \gamma_0, \gamma_1 \in F \}$

- $\underline{U \cap W = ?}$ $g(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_0 x^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_0 = \gamma_0 \\ \lambda_1 = \gamma_1 \\ 0 = \gamma_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 = \gamma_1 \end{cases} \qquad g(x) = \gamma_1 x$$

$U \cap W = \{ ax \mid a \in F \}, \quad \dim_F U \cap W = 1, \quad \mathcal{B}_{U \cap W} = \{ x \}$

Per Grassmann:

$$\dim_F (U+W) = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3 =$$
$$= \dim_F V = \dim_F F_2[x]$$

$U + W \subseteq V$ per costruzione ma $\dim_F (U+W) = \dim_F V$

$$\Downarrow$$

$$U + W = V = F_2[x].$$

CAMBIAMENTO di BASE.

NOTAZIONE: $V = F$-sp. vett. $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base $\Rightarrow \forall v \in V$

$\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono dette componenti di v rispetto a $\mathcal{B}$.

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V su F. Scriviamo:

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ $\qquad v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$\Updownarrow$?

$\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ $\qquad v = \alpha_1' e_1' + \dots + \alpha_n' e_n'$

Si costruisce la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$:

per colonna gli scalari della comb. lin. che permettono di scrivere ogni $e_i \in B$ della vecchia base come, appunto, comb. lin. dei vettori $e_i' \in B'$ della nuova base:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j' \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow M_{B \to B'} = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

in questo modo se $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = M_{B \to B'} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

ES.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ES. $V = F_2[x]$, $\dim_F V = 3$ Si considerino le basi

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \qquad \mathcal{B}' = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$$

$\forall p(x) \in V$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow$ le componenti di $p(x)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Costruiamo $M_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = ($

- componenti di 1 rispetto a $\mathcal{B}'$: $1 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2)$

$$1 = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)x + (\beta+\gamma)x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

- Componenti di x rispetto a B': $x = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2)$

$$x = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)x + (\beta+\gamma)x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 1 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -2\beta = 1 \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

- Componenti di x^2 rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$x^2 = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)x + (\beta+\gamma)x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ -2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \\ \gamma = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Componenti di $p(x)$ rispetto a B':

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 - a_2 \\ a_0 - a_1 + a_2 \\ -a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_0 + a_1 - a_2}{2} \\ \dfrac{a_0 - a_1 + a_2}{2} \\ \dfrac{-a_0 + a_1 + a_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2} \cdot (1+x) + \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2} (1+x^2) + \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2}$$

$q(x) = 2 - x + 3x^2$ cercare le componenti di $q(x)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

ES. $V = M_2(F)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cerchiamo le componenti di A rispetto a $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma+\delta \\ \gamma-\delta & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \gamma+\delta \\ c = \gamma-\delta \\ d = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ b+c = 2\gamma \\ \beta = d \end{cases}$$

sommare 2° e 3° equazione

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = d \\ \gamma = \frac{b+c}{2} \\ \delta = \frac{b-c}{2} \end{cases}$$

le componenti sono $\begin{pmatrix} a \\ d \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \end{pmatrix}$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+\gamma+\delta & \alpha+\delta \\ \beta+\gamma & \beta+\gamma+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma+\delta = 0 \\ \alpha+\delta = 1 \\ \beta+\gamma = 1 \\ \beta+\gamma+\delta = 0 \end{cases}$$

sostituisco la 2° nella 1° e la 3° nell

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \gamma + 1 = 0 \\ \alpha + \delta = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \\ 1 + \delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \delta = -1 \end{cases} \qquad \alpha = 2, \ \beta = 2, \ \gamma = -1, \ \delta = -1$$

- Componenti di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B':

Noto che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = -1$

$\delta = 1$

$$M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Componenti di A reispetto a B'

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d+b+c \\ -a+b+c \\ a-\frac{b+c}{2}-\frac{b-c}{2} \\ d-\frac{b+c}{2}+\frac{b-c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c-d \\ -a+b+c \\ a-b \\ d-c \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{ES}$. $V = F^4$

$U = \langle (1,1,0,2), (1,0,0,1), (3,1,0,4) \rangle$

$W = \langle (1,0,1,0), (3,-1,3,-1), (0,1,0,1) \rangle$

- $\dim U = ?$ $\dim W = ?$ Caratterizzare gli elementi di U e W
- $\underline{U \cap W = ?}$
- $\underline{U + W = ?}$ dim, base, caratterizzazione.

$\underline{ES}$. $V = F^3$; $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,2,0), (0,0,1)\}$

$\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,2)\}$

scrivere le componenti di (a, b, c) rispetto a B, costruire $M_{B \to B'}$ e scrivere le componenti rispetto a B'.