Teor. di continuità di una funzione composta

$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(X) \subseteq Y$

$x_0 \in X$

f continua in x_0, g continua in $f(x_0) \in Y$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ continua in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

es:

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{y\to 0} \sin y = 0$$

$$y = \frac{x}{2}$$

es:

$$y = 3x-1$$

$$\lim_{x\to 0} e^{3x-1} = \lim_{y\to -1} e^{y} = e^{-1}$$

es:

$$\lim_{x \to +\infty} x \, \mathrm{tg} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, y}{y} = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

es:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2+1}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{\to 1} = 1$$

$$\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1}$$

Negli ultimi due casi abbiamo il seguente

<u>Teor</u> del limite di una funzione composta

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(X) \subseteq Y$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \neq y_0 \ \forall x \in X$,

$\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Downarrow$$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$ -

Alcuni limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{0} = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Consideriamo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

e passiamo al logaritmo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log e = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

Se $y = \frac{1}{x}$:

$$\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1}$$

Più in generale, se $a>0$, $a\neq 1$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \log_a e$$

es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

es:

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \frac{\log\left(1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\right)}{\frac{x+1}{x-1}-1}\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\log\left(1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\right)}{\frac{x+1}{x-1}-1}}_{\to 1} \underbrace{\frac{2x}{x-1}}_{\to 1} =$$

$$= 2$$

In alternativa:

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x =$$

$$= \log e^2 = 2,$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}}_{\to e^2}\Bigg]^{\overbrace{\frac{x}{x-1}}^{\to 1}} = e^2$$

In alternativa:

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x \log(x+1) - x \log(x-1)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x \log\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - x \log\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\cancel{x \log x} + x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \cancel{x \log x} + \right.$$

$$\left. - x \log\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} + \frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} \right] =$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(2 - \cos x)}{\sin^2 x}.$$

Torniamo a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Poniamo $x = e^y - 1$:

$$1 = \lim_{y\to 0} \frac{\log(\cancel{1} + e^y - \cancel{1})}{e^y - 1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1}$$

cioè:
$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Più in generale, se $a > 0$, a

$$\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a}$$

es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - e^{x^2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1 - e^{x^2}}{x^2}}_{\to -1} = -\frac{3}{2}$$

es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{(e^x)} - 1}{x}.$$

Torniamo al

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e poniamo $x = (1+y)^\alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(\cancel{1}+(1+y)^\alpha \cancel{-1})}{(1+y)^\alpha - 1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \alpha \cdot \frac{\log(1+y)}{y} \cdot \frac{y}{(1+y)^{\alpha}-1} = 1$$

$$\frac{\log(1+y)}{y} \to 1$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha} \lim_{y\to 0} \frac{y}{(1+y)^{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{se } \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{\alpha}-1}{y} = \alpha}$$

es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\sin x}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

eg:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{tg} x} =$$

es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} \quad 1 \text{, poiché}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

poiché siamo intorno a 0!

es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$$

es:

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 1$$

es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\underbrace{2^x}_{\to 1} \overbrace{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right)}^{\to \log\frac{3}{2}}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \, x} = \log\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

es:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+1)}{(2x-1)\operatorname{arctg} x} =$$

$\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+1)}{2x-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)}{2x-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{2x-1} =$$

$\log\left(1+\frac{1}{e^x}\right) \to 0$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}.$$

es:

$$\lim_{x\to+\infty} x-(\sin^2 x)(\log x).$$

es:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{3^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}{3^x\left(1-\frac{1}{3^x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \frac{1+\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{3^x}} = 0.$$

es:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 x+1}{\log_3 x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\log_3 x}{\log_3 2} + 1}{\log_3 x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\log_3 x}\left(\dfrac{1}{\log_3 2} + \cancel{\dfrac{1}{\log_3 x}}^{\,0}\right)}{\cancel{\log_3 x}\left(1 - \underbrace{\cancel{\dfrac{1}{\log_3 x}}}_{0}\right)}$$

$$= \frac{1}{\log_3 2}$$

TEOREMI DELLE FUNZIONI CONTINUE

* Ricordiamo la definizione di max e min di una funzione

$f: x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $x_0 \in X$ è un punto di minimo se:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in X$$

e $f(x_0) = \min_X f \implies$ min di f

Ricordiamo che il minimo e il massimo di una funzione se esiste è unico. I punti di minimo e i punti di massimo possono essere infiniti.

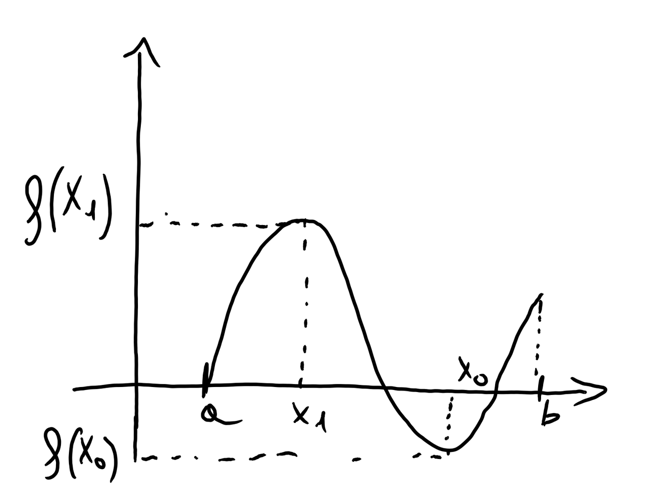
TEOREMA DI WEISTRASS

$f [a, b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a, b]$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, x_0, x_1 \in [a, b] \mid \min f = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = \max f \quad \forall x \in [a, b]$$



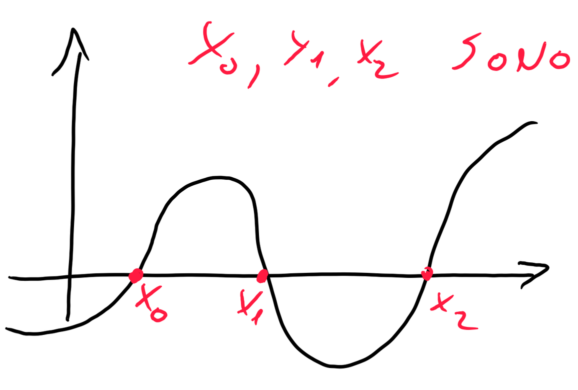
$f(x_0) = \min f$
$f(x_1) = \max f$

Il Teorema degli zeri è utile per risolvere le equazioni del tipo

$$f(x) = 0$$

x_0 tale che $f(x_0) = 0$ è detto ZERO di f

x_0, x_1, x_2 SONO ZERI DELLA FUNZIONE

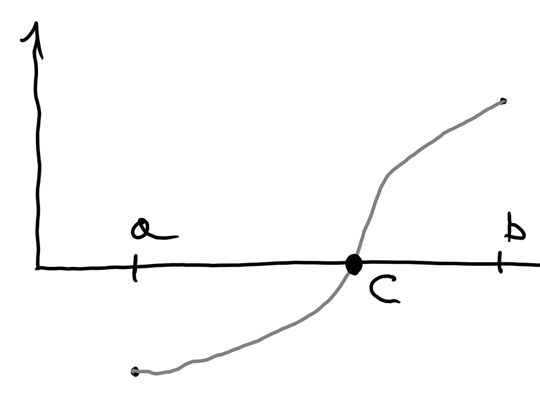


TEOREMA DEGLI ZERI

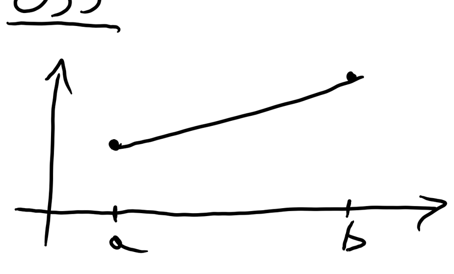
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

f è continua in $[a, b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0$!! CIÒ SIGNIFICA CHE $f(a)$ e $f(b)$ sono DISCORDI

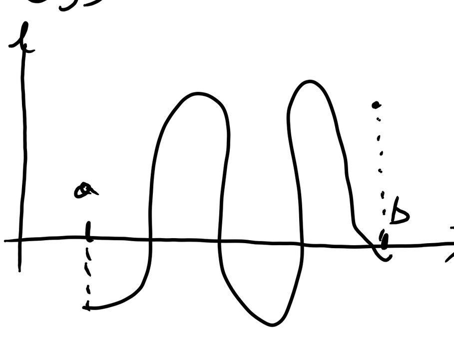


OSS



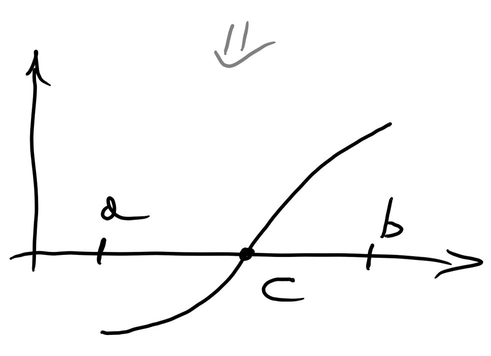
MANCA IPOTESI $f(a) \cdot f(b) < 0$

OSS



$\Rightarrow$ SE AGGIUNGIAMO COME IPOTESI CHE f SIA STRETTAMENTE MONOTONA ALLORA LO ZERO SARÀ UNICO

$$\Downarrow$$



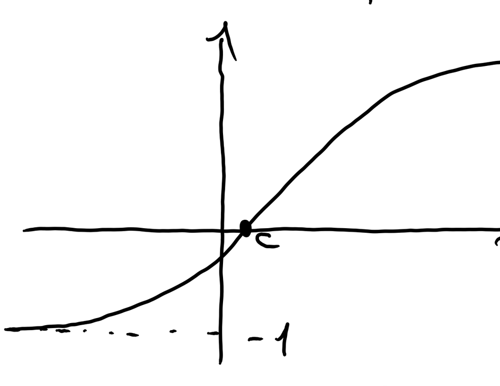
OSS

$f:]a, b[\to \mathbb{R}$
f continua in $[a, b]$

$$\left(\lim_{x \to a^+} f(x)\right)\left(\lim_{x \to b^-} f(x)\right) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, c \in]a, b[\mid f(c) = 0$$



Da questo ricaviamo che un polinomio di grado dispari ammette almeno una radice reale;

* $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ (Se il coefficiente della potenza di ordine massimo è positivo)

+ $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

* e * C'È ALMENO UNO ZERO

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

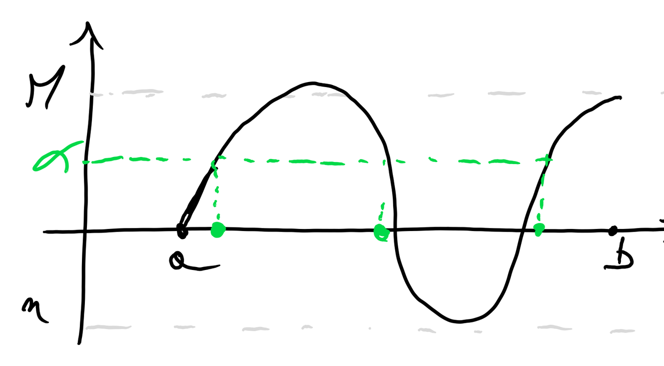
$f [a, b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a, b]$

$m = \min f \quad , \quad M = \max f$ (che esistono per il Teorema di WEISTRASS)

$$\Downarrow$$

$$\forall \alpha \in]m, M[\quad \exists\, c \in [a, b] \mid f(c) = \alpha$$



CIOÈ f assume tutti i valori compresi tra $\underline{m}$ e $\underline{M}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Siano x_0 e x_1 un punto di minimo e un punto di massimo per f, supponiamo che $x_0 < x_1$

Fissiamo $\alpha \in]m, M[$ e consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \alpha \quad , \quad x \in [x_0, x_1]$$

g soddisfa tutte le ipotesi del TEOREMA DEGLI 0.

INFATTI:

$g: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$

g continua in $[x_0, x_1]$

$g(x_0) = f(x_0) - \alpha = m - \alpha < 0$

$g(x_1) = f(x_1) - \alpha = M - \alpha > 0$

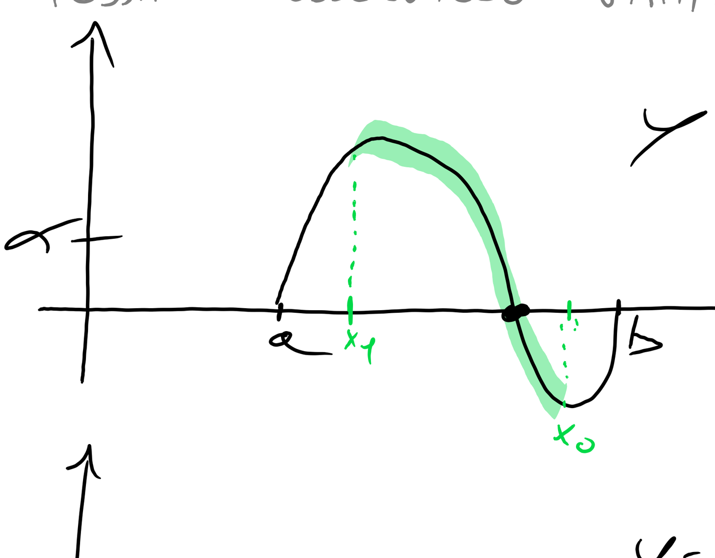
$$\exists\, c \in]x_0, x_1[\mid g(c) = 0$$

$$f(c) - \alpha = 0$$

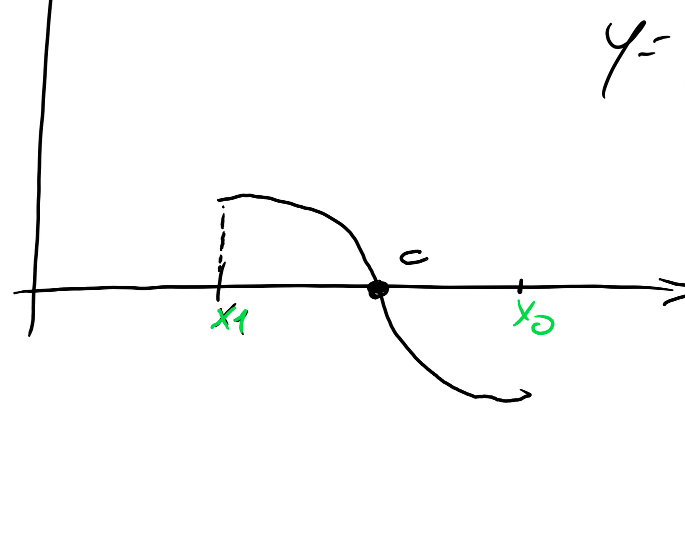
ossia

$$f(c) = \alpha \quad \#$$

POSSIAMO OSSERVARLO GRAFICAMENTE



$y = f(x)$

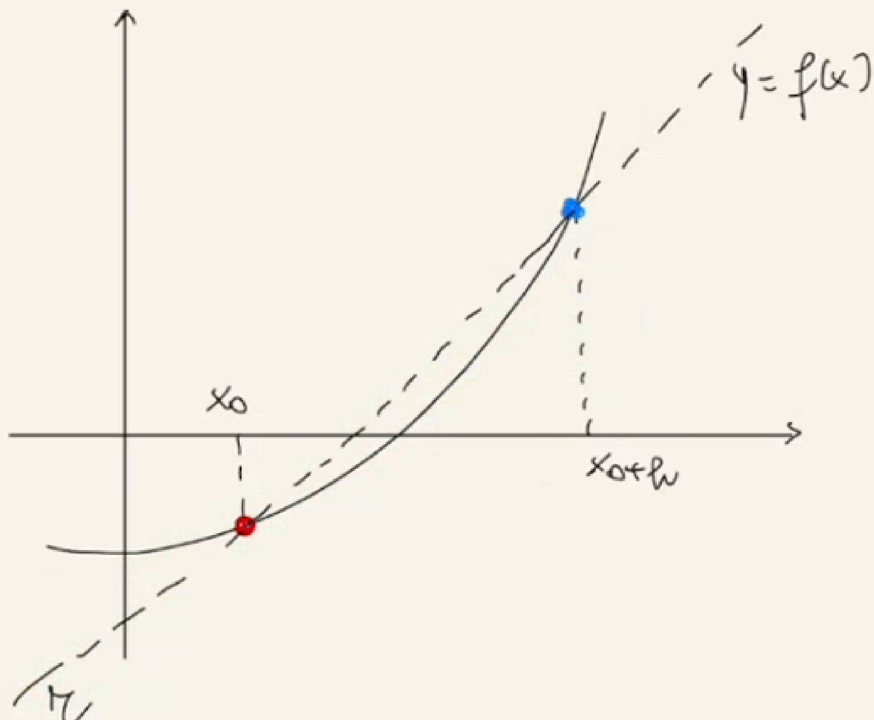


$y = g(x)$

FUNZIONI DERIVABILI

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I intervallo aperto

$x_0 \in I$, $x_0 + h \in I$ h = incremento



Scriviamo l'equazione della retta r passante per i punti

$P_0(x_0, f(x_0))$ e $P_h(x_0+h, f(x_0+h))$:

$P_0(x_0, f(x_0))$ e $P_h(x_0+h, f(x_0+h))$;

$$r: \quad \frac{x - x_0}{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

$$\left(h \neq 0, \quad f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r: \quad y - f(x_0) = \left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{r: \quad y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)}$$

equazione della retta r secante il grafico di f nei punti P_0 e P_h

Il coefficiente angolare di r è

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \; : \; \text{rapporto incrementale di } f$$

Per $h \to 0$, P_h ~~si~~ muove sul grafico di f e la retta r cambia posizione.

Se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R},$$

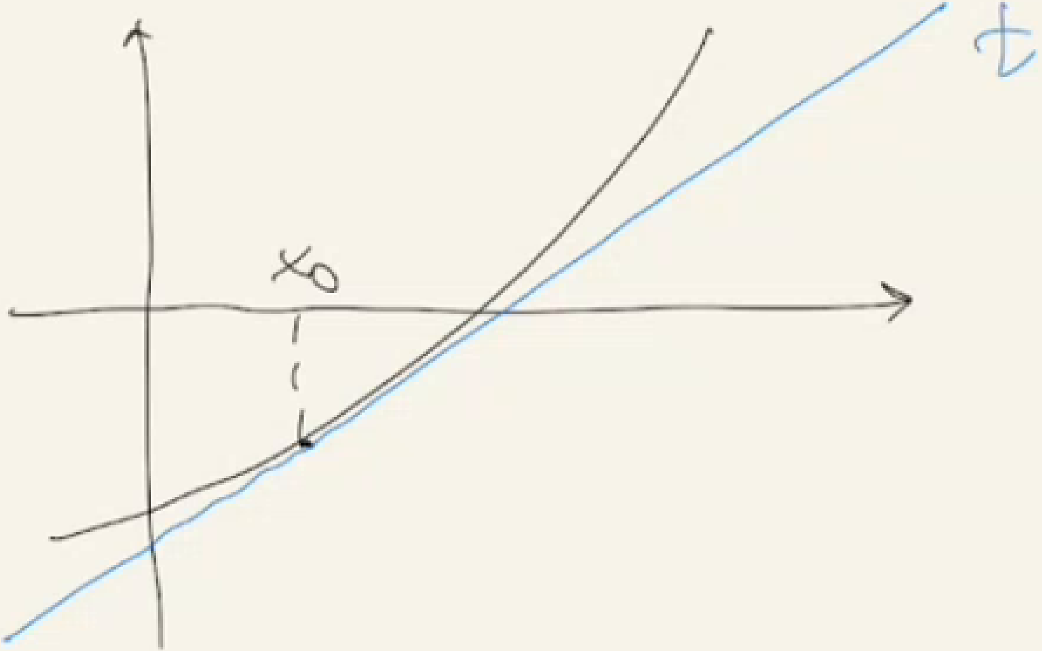
la retta limite di r è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ed è detta retta tangente al grafico di f nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

$f'(x_0)$ = coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto P_0

= DERIVATA di f in x_0.


x_0
t

Diremo che f è derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \,!!$$

Diremo che f è derivabile in I se f è derivabile in tutti i punti di I.