DEF: Sia V = F-sp. vettoriale e sia $W \subseteq V$. Allora W é detto sottospazio vettoriale di V se W é spazio vettoriale su F rispetto alle stesse operazioni di V.

OSS: Sia $W \subseteq V$ sottoinsieme non vuoto di V = F-sp. vettoriale. Allora W é un sottospazio vettoriale di V se:

1) $\forall\, v_1, v_2 \in W, \quad v_1 + v_2 \in W$

2) $\forall\, \alpha \in F, \ \forall\, v \in W, \quad \alpha v \in W.$

1) + 2) $= \ \forall\, \alpha, \beta \in F, \ \forall\, v, w \in W \quad \alpha v + \beta w \in W.$

OSS: Sia W = sottosp. vett. su F di V allora $0_V \in W$, ossia $0_W = 0_V$.

Difatti: per la 2) $\forall\, \alpha \in F$ e $\forall\, v \in W$ risulta $\alpha v \in W$. Se allora scegliamo $\alpha = 0_F \Rightarrow 0_F \cdot v \in W \Rightarrow 0_F \cdot v = 0_V \in W$.

Inoltre, $\forall\, w \in W \Rightarrow -1_F \cdot w \in W \Rightarrow -w \in W \Rightarrow W$ possiede anche gli opposti.

DEF: Sia V = F-spazio vettoriale e sia $v \in V$. Allora il sottospazio vettoriale generato da v, $\langle v \rangle$, è:

$$\langle v \rangle = \{ \alpha v \mid \alpha \in F \}$$

OSS: $\langle v \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V.

DIM: 1) Dobbiamo dimostrare che $\forall\, v_1, v_2 \in \langle v \rangle$, $v_1 + v_2 \in \langle v \rangle$.

Ma $\forall\, v_1, v_2 \in \langle v \rangle$, $\exists\, \alpha, \beta \in F$ t.c. $v_1 = \alpha v$, $v_2 = \beta v \Rightarrow$

$$v_1 + v_2 = \alpha v + \beta v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributiva}}}{=} (\alpha + \beta) v \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma = \alpha + \beta}}{=} \gamma v \in \langle v \rangle$$

2) $\forall\, \alpha \in F$, $\forall\, w \in \langle v \rangle$, dobbiamo verificare che $\alpha w \in \langle v \rangle$.

Ma $\forall\, w \in \langle v \rangle$, $\exists\, \beta \in F$ t.c. $w = \beta v \Rightarrow \alpha w = \alpha(\beta v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associativo}}}{=}$

$$= (\alpha\beta) \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma = \alpha\beta}}{=} \gamma \cdot v \Rightarrow \alpha w \in \langle v \rangle.$$

$\langle v \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V.

DEF: Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora una combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ è un vettore del tipo:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$.

DEF. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora il sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_n$ è:

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F \}$$

OSS: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V.

ES. $V = F^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$

Dimostriamo che $U = \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0) \mid a_i \in F\}$ è un sottosp. vett. di V.

1) $\forall\ (a_1, \dots, a_{n-1}, 0), (b_1, \dots, b_{n-1}, 0) \in U$,

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) + (b_1, \dots, b_{n-1}, 0) \underset{\substack{\uparrow \\ +\text{ in } F^n}}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, 0+0)$$

$$= (a_1 + b_1, \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, 0) \in U$$

2) $\forall\ (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \in U,\ \forall \alpha \in F$

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \underset{\substack{\uparrow \\ \cdot\text{ in } F^n}}{=} (\alpha a_1, \dots, \alpha a_{n-1}, \alpha \cdot 0) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_{n-1}, 0) \in U$$

ES. $V = F^n$. Fissiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ non tutti nulli.

Si consideri $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in F^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\} \leq V$

1) $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in H \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \\ \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \end{cases}$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in H$$

$$\alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) + \dots + \alpha_n(x_n + y_n) \overset{\text{distributiva}}{=}$$

$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_n y_n$$

$$\underset{\text{commutativa}}{=} \underbrace{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)}_{= 0} + \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n)}_{= 0} = 0$$

2) $\forall \beta \in F, \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in H \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

$\beta(x_1, \dots, x_n) = (\beta x_1, \dots, \beta x_n) \in H$. associative

$$\alpha_1(\beta x_1) + \alpha_2(\beta x_2) + \dots + \alpha_n(\beta x_n) \overset{\text{associative}}{=} (\alpha_1 \beta) x_1 + \dots + (\alpha_n \beta) x_n =$$

$$\underset{\text{commutativa}}{=} (\beta \alpha_1) x_1 + \dots + (\beta \alpha_n) x_n \underset{\text{distributiva}}{=} \beta \underbrace{(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)}_{= 0} = \beta \cdot 0 = 0$$

DEF. Dato un campo F, una matrice $n \times m$ su F è una tabella di elementi di F con n righe ed m colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

L'insieme di tali matrici è denotato con $M_{n \times m}(F)$.

Il coefficiente a_{ij} è detto entrata o componente (i,j)-esima.

DEF: Una matrice $A \in M_{n\times 1}(F)$ è detta vettore colonna, una matrice $B \in M_{1\times m}(F)$ è detta vettore riga.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \end{pmatrix}$$

NOTAZIONE: Data $A \in M_{n\times m}(F)$, indichiamo con A^j la j-esima colonna. Indichiamo con A_i la i-esima riga.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

OSS: Se $n = m$ allora la matrice è detta quadrata e scriviamo $A \in M_n(F)$.

PROPOSIZIONE: Sia $V = M_{n \times m}(F)$. Definendo

$$(+): \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$(\cdot): \quad \alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j}$$

$\forall A, B \in V$ e $\forall \alpha \in F$.

V è un F-sp. vettoriale.

DEF: Sia $A \in M_{n \times m}(F)$. Si definisce trasposta di A, e si scrive A^t, la matrice ottenuta da A scambiando le righe e le colonne.

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

OSS: Se $A \in M_{n \times m}(F) \Rightarrow A^t \in M_{m \times n}(F)$

$A \in M_n(F) \Rightarrow A^t \in M_n(F)$.

DEF. Data una matrice quadrata $A \in M_n(F)$, la diagonale principale di A è formata dagli elementi a_{ii}, $i = 1, \dots, n$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi sulla diagonale principale della trasposta di una matrice quadrata rimangono invariati.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

DEF: Una matrice quadrata $A \in M_n(F)$ è detta diagonale se $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & 0 & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matrice A è detta simmetrica se $A = A^t$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ diagonale $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ simmetrica $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Una matrice diagonale é simmetrica

ES. $V = M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ é un sottosp. vett. di $M_2(\mathbb{R})$.

DEF. Siano U e V due spazi vettoriali. Allora la loro intersezione è

$$U \cap V = \{ w \mid w \in U \text{ e } w \in V \}.$$

TEOREMA: Sia V = F-sp. vett. e siano U e W due sottosp. vett. di V. Allora $U \cap W$ é un sottosp. vett. di V.

DIM: 1) $\forall\ v_1, v_2 \in U \cap W$, devo dim. che $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

Ma $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 \in U \\ \text{e} \\ v_1, v_2 \in W \end{cases} \underset{\substack{U \text{ e } W \\ \text{sono sottosp. vett. di } V}}{\Rightarrow} \begin{cases} v_1 + v_2 \in U \\ v_1 + v_2 \in W \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W.$

2) $\forall\ \alpha \in F$ e $\forall\ v \in U \cap W$ devo dim. $\alpha v \in U \cap W$.

Ma $v \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} v \in U \\ \text{e} \\ v \in W \end{cases} \underset{\substack{U \text{ e } W \text{ sono sottosp. vett. di } V}}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha v \in U \\ \text{e} \\ \alpha v \in W \end{cases} \Rightarrow \alpha v \in U \cap W$

Pertanto $U \cap W$ è un sottosp. vett. di V.