ES.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB \neq BA$$

$$A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$$

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\parallel$$

$$(x+y)(x+y) = x^2 + \underbrace{xy + yx} + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \overbrace{\underbrace{AB + BA}_{\neq 2AB}}^{AB \neq BA} + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 \underbrace{-AB + BA}_{\neq 0} - B^2 \neq A^2 - B^2.$$

so $AB \neq BA \Rightarrow BA - AB \neq 0$

ES.
$$\begin{cases} x + hy + z = 0 \\ x + y + hz = K \\ x + 2hy + z = 1 \end{cases} \qquad h, K \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \\ 1 & 2h & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 0 \\ 1 & 1 & h & K \\ 1 & 2h & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \cancel{1} + h^2 + 2h - \cancel{1} - 2h^2 - h = -h^2 + h = h(1-h)$$

$$r(A) = 3 \iff \det A \neq 0 \iff h(1-h) \neq 0 \iff h \neq 0 \text{ e } h \neq 1$$

1° CASO $h \neq 0$ e $h \neq 1$: $\det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A|B) = 3$

Per il Teor. di Rouché - Capelli, il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione.

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ k & 1 & h \\ 1 & 2h & 1 \end{pmatrix}}{h(1-h)} = \frac{h^2+2kh-1-kh}{h(1-h)} = \frac{h^2+kh-1}{h(1-h)}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & h \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{h(1-h)} = \frac{\cancel{k}+1-\cancel{k}-h}{h(1-h)} = \frac{\cancel{1-h}}{h\cancel{(1-h)}} = \frac{1}{h}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2h & 1 \end{pmatrix}}{h(1-h)} = \frac{1+kh-2kh-h}{h(1-h)} = \frac{1-kh-h}{h(1-h)}.$$

2° caso $h=0$:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = K \\ x + z = 1 \end{cases}$$

il sistema non è compatibile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{array}{c} \qquad\quad M \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & K \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$r(A) = 2$ perché A^2 e A^3 non sono multipli.

$$\det M = (-1)^{2+1} \cdot 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow r(A|B) = 3 \neq 2 = r(A) \Rightarrow$ il sistema non è compatibile.

3° CASO $h = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = k \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Se $k \neq 0 \Rightarrow$ il sistema non è compatibile.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$A|B = \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}} \right) M$$

$$\det M = \cancel{1} + 2k - k - \cancel{1} = k$$

$\det M \neq 0 \iff k \neq 0$. Pertanto se $k \neq 0$, $r(A|B) = 3 \neq 2 = r(A)$

$\Rightarrow$ il sistema non è compatibile.

<u>SOTTOCASO $k = 0$</u>:

$$\begin{cases} \cancel{x + y + z = 0} \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) = 2 \; ; \quad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A|B) = 2$$

il sistema è compatibile ed ammette ∞^{3-2} soluzioni $\equiv$ infinite soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$x = -z - 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 1 + z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x - 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(x, 1, -x-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(-z-1, 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

ES. $V = F^3$ $\quad B = \{(1,1,0), (1,2,0), (0,0,1)\}$

$B' = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,2)\}$

$M = M_{B \to B'}$ $\quad M' = M_{B' \to B}$.

Costruiamo M: $(1,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,1,2)$

$(1,1,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,1) + (-1) \cdot (0,1,2)$

$(1,2,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 4 \cdot (0,1,1) + (-2) \cdot (0,1,2)$

$(0,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) + (-1) \cdot (0,1,1) + 1 \cdot (0,1,2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Costruiamo M': $(1,0,0) = 2\cdot(1,1,0) + (-1)\cdot(1,2,0) + 0\cdot(0,0,1)$

$(0,1,1) = (-1)\cdot(1,1,0) + 1\cdot(1,2,0) + 1\cdot(0,0,1)$

$(0,1,2) = (-1)\cdot(1,1,0) + 1\cdot(1,2,0) + 2\cdot(0,0,1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$-2+4-1$

$1-2+2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$M' \cdot M = I_3.$

ES. $f: F^2 \to F^3$ t.c. $f(x, y) = (x+y,\ x-2y,\ x)$ omomorfismo di sp. vett.

1) Det. M_f rispetto alle basi canoniche di F^2 ed F^3.

2) Det. $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$

3) Det. $\overline{M}_f$ rispetto alle basi: $\overline{B}_{F^2} = \{(1,1),\ (0,-1)\}$

$\overline{B}_{F^3} = \{(1,1,1),\ (1,-2,0),\ (0,0,1)\}$

sol. 1) $B_{F^2} = \{(1,0),\ (0,1)\}$; $B_{F^3} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

$f(1,0) = (1, 1, 1) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$

$f(0,1) = (1, -2, 0) = 1 \cdot (1,0,0) + (-2) \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$

$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad r(M_f) = 2$ poiché A^1 e A^2 non sono multiple

2) $r(M_f) = \dim_F \operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f = \dim_F F^2 - \dim_F \operatorname{Im} f = 2 - r(M_f)$

$\dim_F \operatorname{Im} f = 2$ e $\dim_F \operatorname{Ker} f = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$

$\Rightarrow f$ é iniettiva.

f non è surgettiva poiché $\dim_F \operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim_F F^3$.

$$\mathrm{Im}\, f = \langle f(1,0),\ f(0,1) \rangle = \langle (1,1,1),\ (1,-2,0) \rangle =$$
$$= \{ \alpha(1,1,1) + \beta(1,-2,0) \mid \alpha, \beta \in F \} =$$
$$= \{ (\alpha+\beta,\ \alpha-2\beta,\ \alpha) \mid \alpha, \beta \in F \}$$

3) $\overline{B}_{F^2} = \{ (1,1),\ (0,-1) \}$ $\quad \overline{B}_{F^3} = \{ (1,1,1),\ (1,-2,0),\ (0,0,1) \}$

$$f(1,1) = (2,\ -1,\ 1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,-2,0) + \gamma(0,0,1) =$$
$$= (\alpha+\beta,\ \alpha-2\beta,\ \alpha+\gamma)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - 2\beta = -1 \\ \alpha + \gamma = 1 \end{cases} \qquad 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1 \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$f(0,-1) = (-1,\ 2,\ 0) = 0 \cdot (1,1,1) + (-1) \cdot (1,-2,0) + 0\,(0,0,1)$$

$$\overline{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZAZIONE di UNA MATRICE

DEF. Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di sp. vett. Se $v \in V$, $v \neq 0$, allora v è detto autovettore di f se $\exists\, \alpha \in F$ t.c. $f(v) = \alpha v$. In tal caso lo scalare α è detto autovalore relativo all'autovettore v.

DEF. L'insieme degli autovalori di f è detto spettro di f.

OSS. 1) Ogni autovettore è associato ad un solo autovalore, difatti: se $v \in V$, $v \neq 0$, è autovettore associato a due autovalori λ_1 e λ_2 differenti, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0 \text{. Ma } v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \;\lightning$$

2) Se v è autovettore associato all'autovalore λ, allora $\forall \alpha \in F$,

αv è ancora un autovettore associato a λ, difatti $f(\alpha v) \underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ è lineare}}}{=} \alpha f(v) =$

$\underset{\substack{\downarrow \\ v \text{ autovettore}}}{=} \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \Rightarrow \alpha v$ è autovettore di f.

DEF. L'insieme $V_\lambda = \{ v \in V \mid v \text{ è autovettore associato a } \lambda \}$ è detto **autospazio** relativo all'autovalore λ.

PROPOSIZIONE: $V_\lambda \cup \{0_V\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

DIM. Dim. che $V_\lambda \cup \{0_V\}$ è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalare.

1) $\forall\, v_1, v_2 \in V_\lambda$, $f(v_1) = \lambda v_1$ ed $f(v_2) = \lambda v_2$. Ma $f(v_1+v_2) \overset{f \text{ lineare}}{=} f(v_1) + f(v_2)$
$= \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1+v_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda$.

2) $\forall\, v \in V_\lambda$ e $\forall\, \alpha \in F$, $f(v) = \lambda v$. Ma $f(\alpha v) \overset{f \text{ lineare}}{=} \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) =$
$= \lambda(\alpha v) \Rightarrow \alpha v \in V_\lambda$.

ES. $id : V \to V$ t.c. $id(v) = v$, $\forall\, v \in V$

$id(v) = v = \underset{\lambda}{\underset{\shortparallel}{1}} \cdot v \Rightarrow$ ogni vettore di V non nullo è autovettore relativo all'unico autovalore $\lambda = 1 \Rightarrow V_1 = V$.

ES. $0 : V \to V$ t.c. $0(v) = 0_V$, $\forall v \in V$

$0(v) = 0_V = \underbrace{0_F}_{= \lambda} \cdot v$ $\forall v \in V \Rightarrow$ ogni vettore di V non nullo è autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0 \Rightarrow V_0 = V$.

OSS. $\mathrm{Ker} f = V_0$

DIM: $\forall v \in V$, $v \in \mathrm{Ker} f \iff f(v) = 0 \iff f(v) = 0 \cdot v \iff 0$ è autovalore relativo a $v \iff v \in V_0$.

OSS. Gli autospazi sono una generalizzazione del nucleo. Difatti, $v \in V_\lambda \iff f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0_V \iff f(v) - \lambda\, id(v) = 0_V \iff$

$$(f - \lambda id)(v) = 0_V \iff v \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id)$$

OSS. Se 0 è autovalore di f $\Rightarrow \exists\, V_0 = \operatorname{Ker} f \neq \{0\} \Rightarrow f$ non è iniettiva $\iff f$ non è invertibile.

ES. $V = F_2[x]$ $\quad f: V \to V$ t.c. $f(ax^2 + bx + c) = bx + c$

$$f(ax^2 + bx + c) = \lambda(ax^2 + bx + c) \Rightarrow bx + c = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ \lambda b = b \\ \lambda c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ (\lambda - 1) b = 0 \\ (\lambda - 1) c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \text{opp.} \\ a = 0 \end{array}$$

1) se $\lambda = 0 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow ax^2$ è autovettore relativo a $\lambda = 0$.

$$V_0 = \{ax^2 \mid a \in F\}.$$

2) se $\lambda \neq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1) b = 0 \\ (\lambda - 1) c = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$ opp. $b = 0$

- se $\lambda = 1 \Rightarrow$ la seconda eq. è sempre verificata $\Rightarrow bx + c$ é autovettore relativo a $\lambda = 1$

$$V_1 = \{bx + c \mid b, c \in F\}.$$

- se $b = 0 \Rightarrow (\lambda - 1) c = 0$ ma $c \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1. \Rightarrow$ ricadiamo nel caso precedente.

$$\mathcal{B}_{V_0} = \{x^2\} \qquad \mathcal{B}_{V_1} = \{1, x\}$$

unendo le basi otteniamo la base canonica di $F_2[x]$

$$B_{V_0} \cup B_{V_1} = \{1, x, x^2\}$$

$$f(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 \cdot 1$$

$$f(x) = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 \cdot x$$

$$f(x^2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^2$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE: Sia $f: V \to V$ endomorfismo e siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ <u>distinti</u>, $f(v_i) = \lambda_i v_i \ \forall i = 1, \dots, k$.

Allora $v_1, \dots, v_k$

DIM Dimostriamo la proposizione solo per $K=2$, quindi v_1 e v_2 sono autovettori relativi agli autovalori λ_1 e λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Sia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \quad (1)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in F. \Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(0) = 0$

Ma f è lineare, pertanto $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = 0$ inoltre $\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0 \quad (2)$. Moltiplico la (1) per $-\lambda_1$ e sommo il risultato a (2):

$$\begin{cases} -\alpha_1 \lambda_1 v_1 - \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$$

Ma $v_2 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$. Se $\alpha_2 = 0$ abbiamo finito perché in questo caso $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 = 0$ ma $v_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$.

Se $\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$ $\lightning$

PROPOSIZIONE: Sia $f: V \to V$ endomorfismo e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di f distinti, allora $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta

DIM. $k = 2 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$, dobbiamo dim. che V_{λ_1} è in somma diretta con V_{λ_2}. Per assurdo, sia $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ e $v \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} v \in V_{\lambda_1} \Rightarrow f(v) = \lambda_1 v \\ v \in V_{\lambda_2} \Rightarrow f(v) = \lambda_2 v \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$. Ma $v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\lightning$.

Come calcolare gli autovalori?

$f : V \to V$ endomorfismo e $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V su F. Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ matrice associata ad f rispetto a B

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ t.c. $\forall v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Supponiamo che v sia autovettore relativo all'autovalore λ:

$$\begin{cases} f(v) = \lambda v \\ f(v) = AX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \lambda X \\ Y = AX \end{cases} \Rightarrow \lambda X = AX \Rightarrow AX - \lambda X = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad AX - \lambda I_n \cdot X = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I_n) X = 0 \quad \text{ossia:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I_n$$

$(A - \lambda I_n) X = 0$ questo è un sistema lineare omogeneo con n incognite ed n equazioni. Affinché esistano soluzioni non nulle (ossia autovettori e autovalori) è necessario che $r(A - \lambda I_n) < n$ ossia che $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

DEF: Sia A matrice associata ad un endomorfismo f. Si chiama <u>polinomio caratteristico</u> il polinomio $p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

OSS. λ è autovalore di $f \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff p_f(\lambda) = 0$

$\iff \lambda$ è radice del polinomio caratteristico.

equazione caratteristica: $p_f(\lambda) = 0$.

ES. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ t.c. $f(ax^2 + bx + c) = bx + c$

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(1-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 1.$$

ES. $f: F^3 \to F^3$ t.c. $f(x, y, z) = (x+y+z, \ x+y+z, \ x+y+z)$

$$B = \{(1,0,0), \ (0,1,0), \ (0,0,1)\}$$

$$f(1,0,0) = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$f(0,1,0) = (1,1,1)$$

$$f(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = \cancel{1} - \lambda^3 - 3\cancel{\lambda} + 3\lambda^2 + \cancel{2} - \cancel{3} + \cancel{3\lambda} = \lambda^2(3-\lambda)$$

$\lambda^2(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3$. Esistono due autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$.

- $\underline{\lambda = 0}$: $V_0 = \{ v \in F^3 \mid f(v) = 0 \} = \ker f$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x+y+z=0} \\ \cancel{x+y+z=0} \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=0$$

$$\Rightarrow z = -x-y \Rightarrow V_0 = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$B_{V_0} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

- $\underline{\lambda = 3}$: $V_3 = \{ v \in F^3 \mid f(v) = 3v \} = \operatorname{Ker}(A - 3I_3)$

$$(A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{-2x+y+z=0} \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad y-z=0 \Rightarrow z=y \Rightarrow$$

$$/ \qquad 3y-3z=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=y \\ x=2y-z=y \end{cases}$$

$$V_3 = \{(y,y,y) \mid y \in F\} \qquad B_{V_3} = \{(1,1,1)\}.$$

Per la proposizione precedente, $B' = B_{V_0} \cup B_{V_3}$ ottengo un insieme lin. indip. inoltre V_0 e V_3 sono in somma diretta, quindi $B' = \{(1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,1)\}$ è una base di F^3 e pertanto $F^3 = V_0 \oplus V_3$

$$f(u_1) = 0 \cdot u_1 = 0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$f(u_2) = 0 \cdot u_2 = 0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$f(u_3) = 3 \cdot u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f : ax^2 + bx + c \longrightarrow \underline{\overset{1}{bx + c}}$$

$f(1)$ $\quad \underline{a = 0} \quad b \underline{= 0} \quad c \underline{= 1}$

$\overset{\shortparallel}{1}$

$a = 0 \quad b = 1 \quad c = 0$

$$f(x) = x$$

$$f(x^2) =$$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 0$