Proprietà varie

1) $\lim_n a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_n |a_n| = |\ell|$

con la convenzione $|\pm\infty| = +\infty$

es:

$\lim_n (-n) = -\infty \Rightarrow \lim_n |-n| = \lim_n n = +\infty$

Domanda: $A = ?$

$A \neq$ es: $a_n = (-1)^n$

$|a_n| = 1 \to 1$, mentre a_n non è nemmeno regolare.

$\Leftarrow$ è sicuramente vero se $l = 0$, poiché in questo caso le due definizione di limite per a_n e $|a_n|$ coincidono:

$$\lim_n a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$\lim_n |a_n| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \quad \cancel{\big|}\,|a_n|\,\cancel{\big|} < \varepsilon$$

2) $\lim_n a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_n a_n^2 = l^2$

con la convenzione $(\pm\infty)^2 = +\infty$.

$\not\Leftarrow$ <u>es</u>: $a_n = (-1)^n$

$\Leftarrow$ è vero se $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Più in generale:

$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}$

$$\lim_n a_n = \ell \in [0, +\infty] \iff \lim_n a_n^k = \ell^k,$$

$$\lim_n \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\ell}$$

con la convenzione $(+\infty)^k = +\infty$

$$\sqrt[k]{+\infty} = +\infty.$$

es:

$$\lim_n \sqrt[3]{n+1} = +\infty$$

$$\lim_n (n+1)^r = +\infty$$

3) $a>0,\ a \neq 1$

$$\lim_n b_n = b \in \mathbb{R} \iff \lim_n a^{b_n} = a^b$$

$$\lim_n b_n = +\infty \iff \lim_n a^{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{n} b_n = -\infty \iff \lim_{n} a^{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e.g.:

$$\lim_n 2^{n^2} = +\infty$$

$$\lim_n \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2} = 0$$

4) $a > 0,\ a \neq 1$

$b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

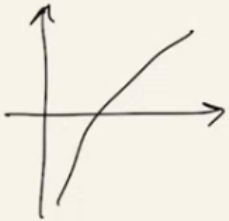
$$\lim_n b_n = b > 0 \iff \lim_n \log_a b_n = \log_a b.$$

$$\lim_n b_n = 0 \iff \lim_n \log_a b_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_n b_n = +\infty \iff \lim_n \log_a b_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

es:

$$\lim_n \log_2 (n^2 - 1) = +\infty$$



$a = 2$

$$\lim_n \log_{\frac{1}{2}} (n+1) = -\infty$$

$a = \frac{1}{2}$

OPERAZIONI CON I LIMITI

1) SOMMA

a_n, b_n successioni regolari

$\lim_n a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_n b_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$

Vorrei che

$$\boxed{\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n = a + b} \quad (*)$$

$(*)$ vale se $a, b \in \mathbb{R}$

$(*)$ vale se $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ e $a + b = +\infty$

$(*)$ vale se $a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$ e $a + b = -\infty$

(*) vale se $a = b = +\infty$ e $a + b = +\infty$

(*) vale se $a = b = -\infty$ e $a + b = -\infty$

<u>es</u>:

$$\lim_{n} \left(n + \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

$$\lim_{n} \left[2^n + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = +\infty$$

$$\lim_{n} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0 + e = e$$

FORMA INDETERMINATA: $a = +\infty$, $b = -\infty$

significa che a priori non sappiamo quale sia il comportamento di $a_n + b_n$ e di volta in volta dobbiamo valutarlo.

es:

$a_n = n^2 + n$, $b_n = -n$ $\qquad \lim_n (a_n + b_n) = +\infty$

$a_n = n^2$, $b_n = -n^2 - n$ $\qquad \lim_n (a_n + b_n) = -\infty$

$a_n = n + \frac{1}{n}$, $b_n = -n$ $\qquad \lim_n (a_n + b_n) = 0$

$a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$ $\qquad \nexists \lim_n (a_n + b_n)$.

2) PRODOTTO

Vorrei che

$$\boxed{\lim_n (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_n a_n\right)\left(\lim_n b_n\right) = a\,b.} \quad (**)$$

(**) vale se $a, b \in \mathbb{R}$

(**) vale se $a \neq 0$, $b = +\infty$ e $a \cdot b = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

(**) vale se $a \neq 0$, $b = -\infty$ e $a \cdot b = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

(**) vale se $a = b = +\infty$ e $a \cdot b = +\infty$

(**) vale se $a = b = -\infty$ e $a \cdot b = +\infty$

(**) vale se $a = +\infty, b = -\infty$ e $a \cdot b = -\infty$

FORMA INDETERMINATA $0 \cdot \infty$ $(a = 0, b = \pm\infty)$

es:

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$ e $\lim_n (a_n \cdot b_n) = 1$

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ e $\lim_n (a_n \cdot b_n) = +\infty$

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$ e $\lim_n (a_n \cdot b_n) = 0$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$ e $\nexists \lim_n (a_n \cdot b_n)$.

<u>Oss</u>:

$c \in \mathbb{R}$

$$\lim_n (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_n a_n .$$

3) RAPPORTO $\left(b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \right)$

Vorrei che

$$\boxed{\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n} = \frac{a}{b}} \quad (***)$$

(***) vale se: $a \in \mathbb{R}, b \neq 0$

$a \in \mathbb{R}, b = \pm\infty$ e $\frac{a}{b} = 0$

$a \neq 0, b = 0, b_n > 0$ e $\frac{a}{b} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$a \neq 0$, $b = 0$, $b_n < 0$ e $\frac{a}{b} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$a = +\infty$, $b \neq 0$ e $\frac{a}{b} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$

$a = -\infty$, $b \neq 0$ e $\frac{a}{b} = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$

$a \neq 0$, $b = 0$ ma b_n non è né pos. né neg.

$\Rightarrow \nexists \lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$.

FORME INDETERMINATE: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

se $a=b=0$ oppure $a=b=+\infty$ oppure $a=b=-\infty$ oppure $a=+\infty$, $b=-\infty$ oppure $a=-\infty$, $b=+\infty$.

4) POTENZA ($a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n} = e^{\log a_n^{b_n}}$$

Vorrei che

$$\boxed{\lim_n \left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim_n a_n\right)^{\lim_n b_n} = a^b} \quad (\bullet)$$

$(\bullet)$ vale se: $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

$a = 0$, $b \neq 0$ e $a^b = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$

$a = 0$, $b = +\infty$ e $a^b = 0$

$a = 0$, $b = -\infty$ e $a^b = +\infty$

$$a>0,\ b=+\infty \quad e \quad a^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$a>0,\ b=-\infty \quad e \quad a^b = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$a=+\infty,\ b=+\infty \quad e \quad a^b = +\infty$$

$$a=+\infty,\ b=-\infty \quad e \quad a^b = 0$$

FORME INDETERMINATE: 0^0, 1^∞, $(+\infty)^0$

Da

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}$$

ricaviamo in tutti e tre i casi la F.I. O.a

es:

$$\lim_{n} \frac{n+1}{n-3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)} = 1$$

es:

$$\lim_{n} \frac{n^2+n+1}{2n^2-3} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

es:

$$\lim_{n} \frac{n+1}{n^2-3} = \lim_{n} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = 0$$

es:

$$\lim_{n} \frac{n^3+3n^2-1}{n^2-2} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = +\infty$$

es:

$$\lim_{n} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) \qquad \infty-\infty$$

$$= \lim_{n} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$

$$= \lim_{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + n} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cancel{n}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

es:

$$\lim_{n}\left(\underbrace{\sqrt[3]{n^2+1}}_{a} - \underbrace{\sqrt[3]{2n^2-1}}_{b}\right) \qquad \infty-\infty$$

$$= \lim_{n} \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{2n^2-1}\right)\left(\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt[3]{2n^2-1}+\sqrt[3]{(2n^2-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt[3]{2n^2-1}+\sqrt[3]{(2n^2-1)^2}}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$= \lim_{n} \frac{(n^2+1)-(2n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt[3]{2n^2-1}+\sqrt[3]{(2n^2-1)^2}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{-n^2+2}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt[3]{2n^2-1}+\sqrt[3]{(2n^2-1)^2}}$$

$= -\infty$ poiché $N \sim -n^2$

$D \sim n^{\frac{4}{3}}$

es:

$$\lim_{n} \left(\frac{4n+1}{n+1} \right)^{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{4} = 2$$

es:

$$\lim_{n} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n} \underbrace{\sin n}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 0$$

GERARCHIA DEGLI INFINITI

a_n, b_n divergenti pos. o neg.

- Se $\lim_n \frac{|a_n|}{|b_n|} = l \in]0,+\infty[$, diciamo che a_n e b_n sono infiniti dello stesso ordine.

- Se $\lim_n \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0$, diciamo che a_n ha ordine di infinito inferiore rispetto a b_n.

- Se $\lim_n \frac{|a_n|}{|b_n|} = +\infty$, diciamo che a_n ha ordine di infinito maggiore rispetto a b_n.

- Se $\nexists \lim_n \frac{|a_n|}{|b_n|}$, diciamo che a_n e b_n hanno ordini di infinito non confrontabili.

$a > 1 \quad , \quad \alpha > 0$

$\log_a n \quad , \quad n^\alpha \quad , \quad a^n$

Si può dimostrare che

$$\lim_n \frac{\log_a n}{n^\alpha} = \lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 .$$

<u>es</u>:

$$\lim_n \left(3^n - n^2\right) =$$

$$= \lim_n 3^n \left(1 - \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

es:

$$\lim_{n} \left(\log_2 n - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n} \sqrt{n} \left(\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -\infty$$

$$\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} \to 0$$

$n!$ $\quad$ n fattoriale

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$$0! = 1$$

es:

$1! = 1$, $\quad 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \ldots$

Ovviamente

$$\begin{cases} n! = n(n-1)! \\ 0! = 1 \end{cases}$$

In calcolo combinatorio $n!$ è il numero di permutazioni di n oggetti, cioè il numero di disposizioni di n oggetti su n posti.

<u>es</u>: $n=3$ $\quad a, b, c$

abc, acb, bac, bca, cab, cba

$\rightarrow 6 = 3!$ permutazioni

Come si calcola il numero di disposizioni di n oggetti su k posti quando $k < n$?

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

es:

$n = 4$ $\quad a, b, c, d$

$k = 2$

ab , ba

ac , ca

ad , da

bc , cb

bd , db

b d , d b

c d , d c

$$\rightarrow \quad 12 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

Possiamo non dare peso all'ordine con cui disponiamo gli n oggetti su k posti. In questo

caso parliamo di combinazioni di n oggetti su k posti ed il numero di combinazioni è

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

"coefficiente binomiale n su k"

Il nome dipende dal fatto che $\binom{n}{k}$ compare nella formula del binomio di Newton:

$a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

<u>OSS</u>:

$$\frac{n!}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)\cancel{k}\cancel{(k-1)}\cdots\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{k}\cancel{(k-1)}\cdots\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$$

$$= n(n-1)\cdots(k+1) \quad , \quad k < n.$$

Possiamo raffinare la gerarchia degli infiniti:

$$\log_a n, \quad n^\alpha, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n$$

con

$$\lim_n \frac{\log_a n}{n^\alpha} = \lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_n \frac{a^n}{n!} =$$

$$= \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0 .$$

es:

$$\lim_{n} \frac{n^3 + n! + \sin n}{n^n + 2^n} =$$

$$= \lim_{n} \frac{n!\left(\cancel{\frac{n^3}{n!}}^{\,0} + 1 + \cancel{\frac{\sin n}{n!}}^{\,0}\right)}{n^n\left(1 + \cancel{\frac{2^n}{n^n}}^{\,0}\right)} = 0$$

LIMITI DI FUNZIONI

$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

X intervallo oppure unione finita di intervalli

Supponiamo che $x_0 \in X$ oppure x_0 sia uno degli estremi degli intervalli che formano X.

es:

$X =]0,1] \cup [2,+\infty[$

$x_0 \in X$, oppure $x_0 = 0$, oppure $x_0 = +\infty$

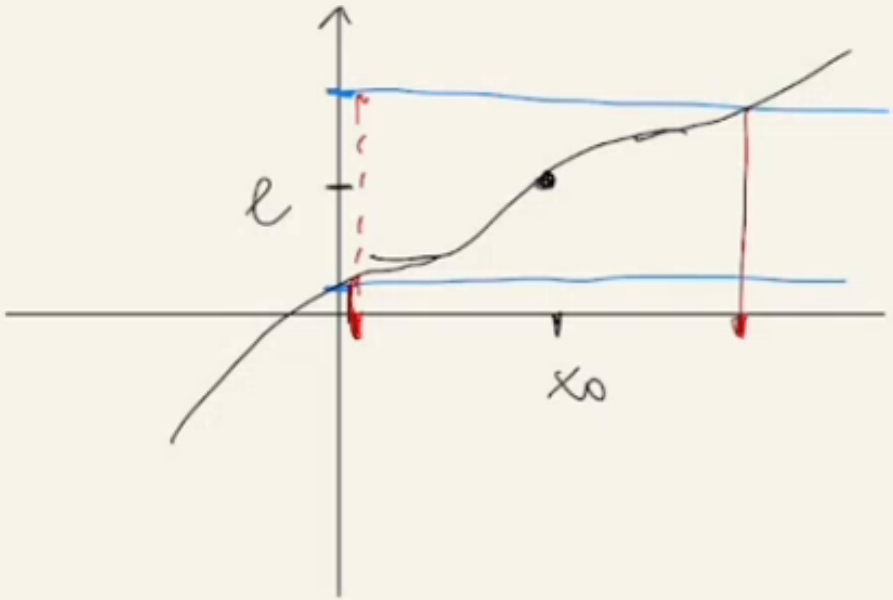
1) $x_0 \in \mathbb{R}$; 2) $x_0 = +\infty$; 3) $x_0 = -\infty$

1) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

$\iff \forall I \in \mathcal{J}(\ell)\ \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \mid x \in X \cap J,$

$x \neq x_0, \quad f(x) \in I.$



Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid x \in X, \; x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

$$x \neq x_0, \quad f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

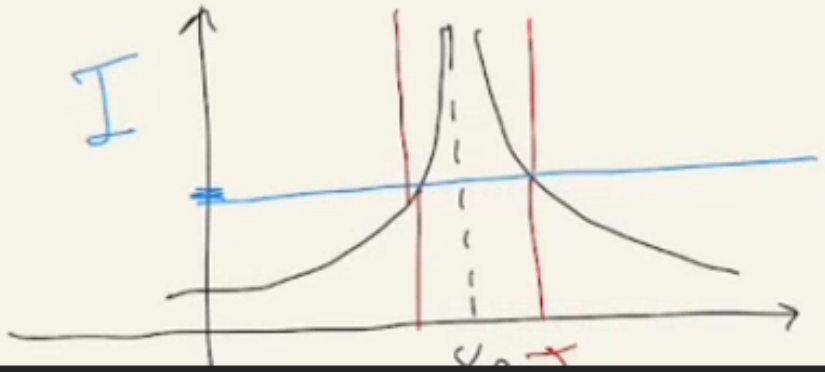
$\Leftrightarrow \forall I \in \mathcal{J}(+\infty) \ \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \mid x \in X \cap J,$

$x \neq x_0, \quad f(x) \in I .$

Equivalentemente

$$\forall k > 0 \ \exists \delta > 0 \mid x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$f(x) > k$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

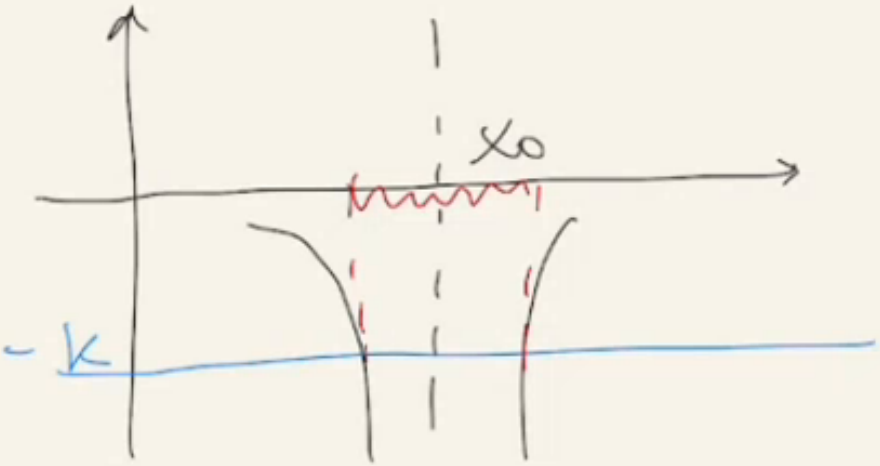
$\iff \forall I \in \mathcal{J}(-\infty)\ \exists J \in \mathcal{J}(x_0) \mid x \in X \cap J,$

$x \neq x_0,\ f(x) \in I$

Equivalentemente

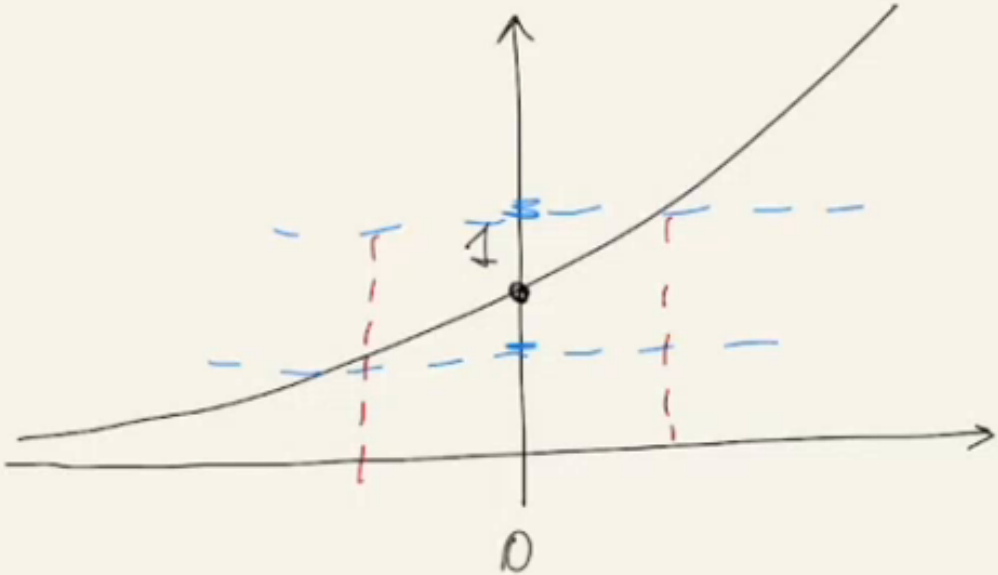
$\forall k > 0\ \exists \delta > 0 \mid x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta$

$f(x) < -k$



Ex:

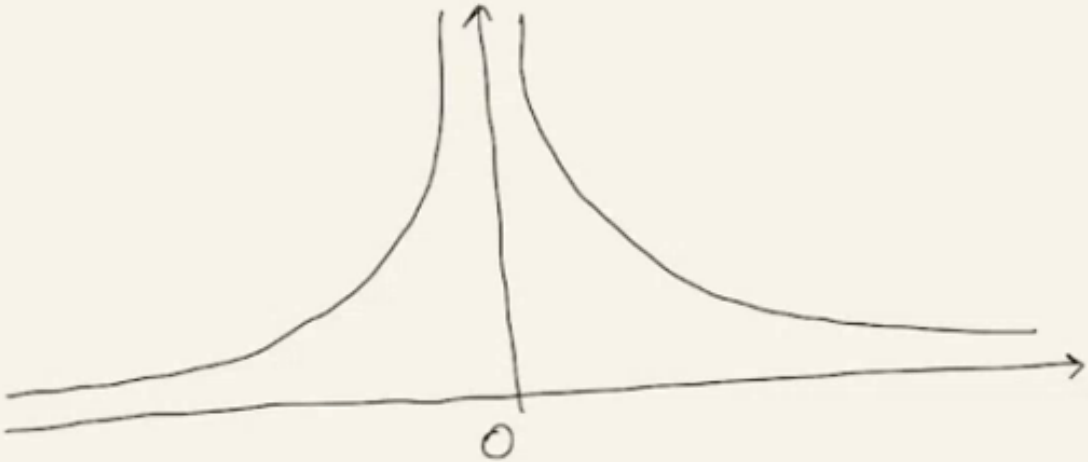
$$\lim_{x \to 0} 2^x = 1$$



es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$



Osserviamo esplicitamente che possiamo avvicinarci ad x_0 da sinistra, cioè prendendo $x \in X$, $x < x_0$, o da destra, cioè prendendo $x \in X$, $x > x_0$.

Diremo limite sinistro di f, (destro)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$$

il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $X \cap \{x < x_0\}$.

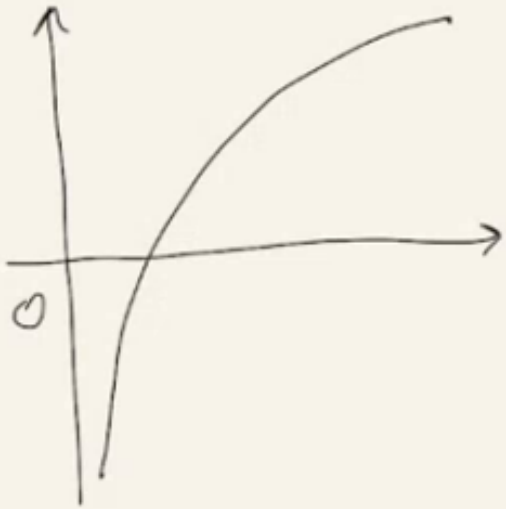
$(X \cap \{x > x_0\})$.

Chiaramente, se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$,

esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

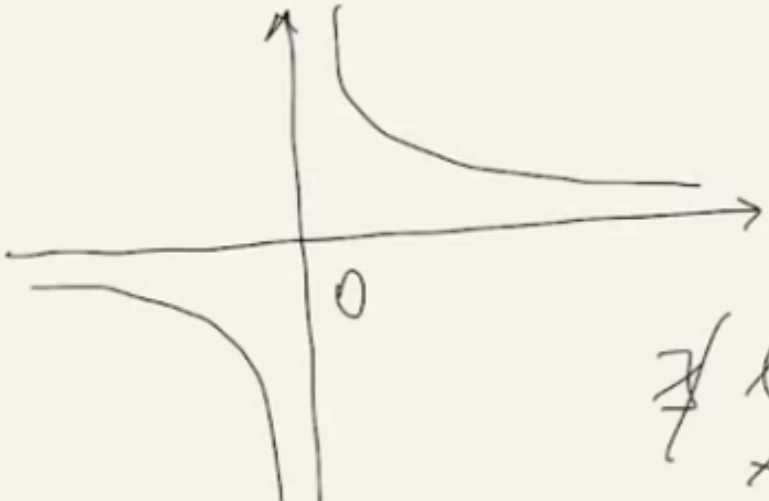
eg:

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$



es:

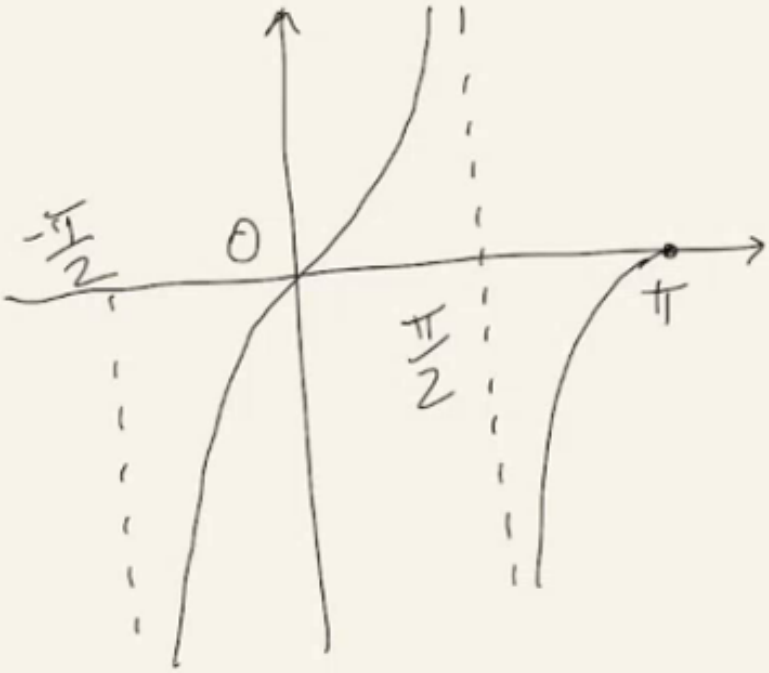
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \; !$$

es:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$



Se $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, la retta

$x = x_0$ è detta ASINTOTO VERTICALE

da sinistra o da destra, verso l'alto o

verso il basso