ES. $f: F^3 \to F^3$ t.c. $f(x, y, z) = (x+z, -2(x+z), 2x+y+z)$

1) Det. gli autovalori di f

2) Det. gli autospazi

3) $\exists$ una base di F^3 composta da autovettori di f? In caso di risposta affermativa, scrivere la matrice associata ad f rispetto a tale base

4) $F^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

Sol: Sia $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canonica di F^3. Determiniamo M_f rispetto a B.

$$f(1,0,0) = (1, \ -2, \ 2) = 1 \cdot (1,0,0) + (-2) \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (0,0,1)$$

$$f(0,1,0) = (0, \ 0, \ 1) \qquad\qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(0,0,1) = (1, \ -2, \ 1)$$

1) $$p_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 - 2 + 2\lambda + 2(1-\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2 - 2\cancel{(1-\lambda)} + 2\cancel{(1-\lambda)} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$$

molteplicità 1 molteplicità 2

2) • $V_0 = \ker f = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in F^3 \mid (x+z,\ -2(x+z),\ 2x+y+z) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ \cancel{-2(x+z)=0} \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-x \\ 2x+y-x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-x \\ y=-x \end{cases}$$

$V_0 = \{(x,-x,-x) \mid x \in F\}$

$B_{V_0} = \{(1,-1,-1)\}$.

• $V_1 = \{(x,y,z) \in F^3 \mid f(x,y,z) = 1 \cdot (x,y,z)\} = \ker(f - 1 \cdot id) =$

$= \ker(M_f - 1 \cdot I_3)$

$$M_f - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \cancel{-2x - y = 0} \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases} \qquad V_1 = \{ (x, -2x, 0) \mid x \in F^3 \}$$

$$B_{V_1} = \{ (1, -2, 0) \}.$$

3) Non esiste una base di autovettori di F^3 poiché $\dim_F V_0 = \dim_F V_1 = 1$ ma $\dim_F F^3 = 3 \Rightarrow B_{V_0} \cup B_{V_1}$ contiene 2 elementi pertanto non può essere una base di F^3.

4) $\operatorname{Ker} f = V_0$ $\quad \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F F^3 - \dim_F \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$

$\forall\, v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, ma se $\begin{cases} v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow v = \alpha(1,-1,-1) & \alpha \in F \\ v \in \operatorname{Im} f \Rightarrow v = \beta(0,0,1) + \gamma(1,-2,1) & \beta,\gamma \in F \end{cases}$

Cerchiamo una base di $\operatorname{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle =$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \langle (1,-2,2), (0,0,1), (1,-2,1) \rangle = $$

$$= \langle (0,0,1), (1,-2,1) \rangle$$

In particolare, $v = \alpha(1,-1,-1) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow (1,-1,-1) \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow (1,-1,-1) = \beta(0,0,1) + \gamma(1,-2,1)$

Im particolare, $v = \alpha(1,-1,-1) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow (1,-1,-1) \in \operatorname{Im} f$

$$\Rightarrow (1,-1,-1) = \beta(0,0,1) + \gamma(1,-2,1)$$

$$(1,-1,-1) = (\gamma, -2\gamma, \beta+\gamma) \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \\ \beta + \gamma = -1 \end{cases} \quad !!! \quad ⚡$$

$\Rightarrow v = 0$ e $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ sono in somma diretta.

$$F^3 = \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\operatorname{Im} f} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\operatorname{Ker} f}$$

OSS. Se $f: V \to V$ è endomorfismo, $\dim_F V = n$, allora $M_f \in M_n(F)$ e fissando un'altra base di V, risulta che

$$\overline{M}_f = C^{-1} M_f C \quad , \quad C = \text{Matrice di passaggio}$$

$$\rho_{\overline{M}_f}(\lambda) = \det(\overline{M}_f - \lambda I_n) = \det(C^{-1} M_f C - \lambda I_n) =$$

$$= \det(C^{-1} M_f C - \lambda C^{-1} I_n C) = \det(C^{-1} M_f C - C^{-1} \lambda I_n C) =$$

$$= \det(C^{-1}(M_f - \lambda I_n) C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teor. di Binet}}}{=} \det(C^{-1}) \det(M_f - \lambda I_n) \det(C) =$$

$$= \cancel{\det(C)^{-1}} \det(M_f - \lambda I_n) \cancel{\det(C)} = \det(M_f - \lambda I_n) = \rho_{M_f}(\lambda).$$

DEF. Sia $p(x)$ polinomio e sia x_0 radice di $p(x)$, $p(x_0) = 0$. Diremo che x_0 è radice di $p(x)$ con molteplicità algebrica m se

$$p(x) = q(x)\,(x - x_0)^m$$

dove $\deg q(x) = \deg p(x) - m$ e $q(x)$ non è divisibile per $x - x_0$ (ossia $q(x_0) \neq 0$).

DEF. Sia $f: V \to V$ endomorfismo e sia λ_0 autovalore di f. Allora $m_a(\lambda_0)$, la **molteplicità algebrica** di λ_0, è la molteplicità algebrica di λ_0 in $p_f(\lambda)$. La **molteplicità geometrica** di λ_0, $m_g(\lambda_0)$, è la dimensione dell'autospazio V_{λ_0}.

$$-\lambda(1-\lambda)^2$$

ES. $f: F^3 \to F^3$, $f(x, y, z) = (x+z, -2(x+z), 2x+y+z)$

$\lambda_1 = 0 \qquad m_a(0) = 1 \qquad m_g(0) = 1$

$\lambda_2 = 1 \qquad m_a(1) = 2 \qquad m_g(1) = 1$

ES. $0 : F^n \to F^n$ t.c. $0(v) = 0$ (endomorfismo nullo)

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad M_0 - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow P_0(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$$

0 è l'unico autovalore $\Rightarrow m_a(0) = n \qquad m_g(0) = \dim_F V_0 = \dim V$
$= n$

ES. $id : F^n \to F^n$ t.c. $id(v) = v$ (endomorfismo identico)

$$M_{id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \Rightarrow P_{id}(\lambda) = \det(M_{id} - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (1-\lambda)^n \Rightarrow 1$ è l'unico autovalore $\Rightarrow m_a(1) = n$

$$m_g(1) = \dim_F V_1 = \dim_F \{ v \in F^3 \mid id(v) = 1 \cdot v \} = \dim_F V = n$$

PROPOSIZIONE: $m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$.

DEF: Un endomorfismo $f: V \to V$ è detto diagonalizzabile se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è diagonale, ossia $M_f = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & \ddots \ * \end{pmatrix}$

TEOREMA: f è diagonalizzabile $\iff$ esiste una base di V di autovettori.

DIM. $(\Rightarrow)$ Ip: f è diagonaliz. Tesi: $\exists$ base di autovettori.

f diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\exists$ una base rispetto alla quale M_f è diagonale, ossia $M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_n(F)$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti distinti, $k \leq n$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale base. Allora

$$f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n = \lambda_1 v_1 \Rightarrow v_1 \text{ è autovettore}$$

di f relativo a λ_1.

$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n = \lambda_2 v_2 \Rightarrow v_2$ è autovettore e λ_2 autovalore. Pertanto $\forall\ i = 1, \dots, n$ v_i è autovettore di f relativo a qualche autovalore tra $\lambda_1, \dots, \lambda_k \Rightarrow B$ è una base di autovettori.

($\Leftarrow$) Ip: $\exists$ base di autovettori Tesi: f è diagonalizz.

$\exists$ base di autovettori $\Rightarrow B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base t.c $f(v_i) = \lambda_i v_i$, per qualche λ_i autovalore e $\forall\ i = 1, \dots, n$.

Ma costruendo la matrice associata ad f rispetto a B

mo:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \qquad M_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = \lambda_n v_n$$

TEOREMA: f è diagonalizzabile se e solo se

1) $p_f(\lambda)$ possiede solo radici reali;

2) $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i$ autovalore.

COROLLARIO: Se f possiede autovalori reali tutti distinti, allora f è diagonalizzabile.

DIM: $p_f(\lambda) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$, $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i,j \Rightarrow$

$\Rightarrow m_a(\lambda_i) = 1 \ \forall i = 1,\dots,n$. Ma $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ e

$m_g(\lambda_i) = \dim_F V_{\lambda_i} > 0 \Rightarrow 0 < m_g(\lambda_i) \leq 1 \Rightarrow m_g(\lambda_i) = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$, $\forall i = 1,\dots,n \Rightarrow$ per il Teor. precedente, f è diagonalizzabile.

ES. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $f(x, y, z) = \big(x - z,\ \alpha x + y - \alpha z,\ -(x - z) \big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Det. gli autovalori di f

2) Discutere la diagonalizzabilità di f

3) Calcolare gli autospazi

4) In caso di risposta affermativa a 2), diagonalizzare f.

sol: $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canonica

$f(1,0,0) = (1, \alpha, -1)$; $f(0,1,0) = 1\cdot(0, 1, 0)$; $f(0,0,1) = (-1, -\alpha, 1)$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_\alpha(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ \alpha & 1-\lambda & -\alpha \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+2} \cdot (1-\lambda) \cdot \left((1-\lambda)^2 - 1 \right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} - \cancel{1} \right) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow \quad p_\alpha(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$ sono gli autovalori di f $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Poiché $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono tutti reali e distinti, per il Corollario precedente, f sarà sempre diagonalizzabile.

2) ↗

3) Gli autospazi sono $V_0 = \text{Ker} f$; $V_1 = \text{Ker}(M_f - I_3)$; $V_2 = \text{Ker}(M_f - 2I_3)$

- $\underline{V_0} = \text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} =$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - z, \ \alpha x + y - \alpha z, \ -(x - z)) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ \alpha x + y - \alpha z = 0 \\ \cancel{-(x-z) = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ \cancel{\alpha x} + y - \alpha \cancel{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \{ (x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}^3 \}, \quad \dim_{\mathbb{R}} V_0 = 1 = m_g(0) \leq m_a(0) = 1$$

$$\mathcal{B}_{V_0} = \{ (1, 0, 1) \}.$$

- $\underline{V_1 = \mathrm{Ker}(M_f - I_3)}$ $\qquad (M_f - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ \alpha x - \alpha z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1 = m_g(1) \leq m_a(1) = 1.$$

$$B_{V_1} = \{(0, 1, 0)\}$$

- $\underline{V_2 = \ker(M_f - 2I_3)}$: $\quad (M_f - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ \alpha x - y - \alpha z = 0 \\ \cancel{-x - z = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ \alpha x - y + \alpha x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -x \\ y = 2\alpha x \end{cases} \Rightarrow \quad V_2 = \{(x, 2\alpha x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1 \qquad B_{V_2} = \{(1, 2\alpha, -1)\}$$

4) $B = B_{v_0} \cup B_{v_1} \cup B_{v_2} = \{ (1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2\alpha, -1) \}$

$$\bar{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ES. Sia $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $\varphi_t(x, y, z) = (tx + y + 2z,\ x + ty + tz,\ z)$, $t \in \mathbb{R}$

1) Det. $\operatorname{Ker} \varphi_t$, $\operatorname{Im} \varphi_t$

2) Det. gli autovalori di φ_t

3) Discutere la diagonalizzabilità di φ_t determinandone gli autosp.

sol. $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

$$\varphi_t(1,0,0) = (t,\ 1,\ 0)$$

$$M_{\varphi_t} = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $r(M_{\varphi_t}) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi_t$ e $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi_t = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi_t$

$$\det M_{\varphi_t} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot (t^2 - 1) = t^2 - 1 \neq 0 \iff (t-1)(t+1) \neq 0 \iff$$

$$t \neq 1 \text{ e } t \neq -1 \iff t \neq \pm 1$$

a) $\underline{t \neq \pm 1}$: $\det M_{\varphi_t} \neq 0 \Rightarrow r(M_{\varphi_t}) = 3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi_t = 3 =$

$= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi_t = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \varphi_t$ è surgettiva.

Inoltre, $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi_t = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi_t = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi_t = 0$ e φ_t è iniettiva.

b) $\underline{t = 1}$:

$$M_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(M_{\varphi_1}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi_1 = 3 - 2 = 1.$$

$$\operatorname{Im} \varphi_1 = \langle \varphi_1(1,0,0), \varphi_1(0,1,0), \varphi_1(0,0,1) \rangle =$$

$$= \langle (1,1,0), (1,1,0), (2,1,1) \rangle = \langle (1,1,0), (2,1,1) \rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} \varphi_1} = \{ (1,1,0), (2,1,1) \}.$$

$$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(x,y,z) = (0,0,0) \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + 2z, \; x + y + z, \; z) = (0,0,0) \}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ \cancel{x + y = 0} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker}\varphi_1} = \{(1, -1, 0)\}.$$

c) <u>$t = -1$</u>:

$$M_{\varphi_{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(M_{\varphi_{-1}}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi_{-1}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\varphi_{-1} &= \langle \varphi_{-1}(1,0,0), \varphi_{-1}(0,1,0), \varphi_{-1}(0,0,1) \rangle = \\ &= \langle (-1, 1, 0), (1, -1, 0), (2, -1, 1) \rangle = \\ &= \langle (1, -1, 0), (2, -1, 1) \rangle; \quad \mathcal{B}_{\operatorname{Im}\varphi_{-1}} = \{(1,-1,0), (2,-1,1)\}.\end{aligned}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\varphi_{-1} = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi_{-1} = 3 - 2 = 1.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ x - y - \\ z = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{Ker}\varphi_{-1} = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad B_{\operatorname{Ker}\varphi_{-1}} = \{(1, 1, 0)\}.$$

2) $$p_{\varphi_t}(\lambda) = \det(M_{\varphi_t} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & t-\lambda & t \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+3} \cdot (1-\lambda) \cdot \left((t-\lambda)^2 - 1\right) = (1-\lambda)\left((t-\lambda)^2 - 1\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2t\lambda + t^2 - 1) = 0 \iff \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ \text{opp.} \\ \lambda^2 - 2t\lambda + t^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = t \pm \sqrt{\cancel{t^2} - \cancel{t^2} + 1} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{opp.} \\ \lambda = t \pm 1 \end{cases}$$ abbiamo 2 oppure 3 autovalori tutti reali

Sia $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = t - 1$; $\lambda_3 = t + 1$

$\lambda_1 = \lambda_2$? $1 = t - 1 \Rightarrow \underline{t = 2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = \lambda_3$? $1 = t + 1 \Rightarrow \underline{t = 0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

$\lambda_2 = \lambda_3$? $\cancel{t} - 1 = \cancel{t} + 1 \Rightarrow -1 = 1$ ↯ MAI!

a) $t \neq 0$ e $t \neq 2$: gli autovalori sono tutti distinti (reali) $\Rightarrow$ per il corollario φ_t è diagonalizzabile

$$\overline{M}_{\varphi_t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

b) $\underline{t=2}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ $\Rightarrow$ $m_a(1) = 2$; $m_a(3) = 1$

$0 < m_g(3) \leq m_a(3) = 1 \Rightarrow m_g(3) = 1$

Determiniamo $V_1 = \mathrm{Ker}(M_{\varphi_2} - I_3)$

$$M_{\varphi_2} - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(M_{\varphi_2} - I_3) = 1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(M_{\varphi_2} - I_3)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(M_{\varphi_2} - I_3) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(M_{\varphi_2} - I_3) = 3 - 1 =$$

$$= 2 \quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(M_{\varphi_2} - I_3) = 2$$

$$\overset{\shortparallel}{m_g(1)}$$

$$\left.\begin{aligned} m_g(1) &= m_a(1) = 2 \\ m_g(3) &= m_a(3) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_2 \text{ è diagonalizzabile}$$

$$\overline{M}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $\underline{t=0}$: $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ $m_a(1) = 2$, $m_a(-1) = 1$

$\Rightarrow$ $m_g(-1) = 1$

$$V_1 = Ker(M_{\varphi_0} - I_3) \Rightarrow M_{\varphi_0} - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g(1) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} Ker(M_{\varphi_0} - I_3) = 3 - r(M_{\varphi_0} - I_3) =$$

$$= 3 - 2 = 1 \Rightarrow m_g(1) = 1 \neq 2 = m_a(1)$$

$\Rightarrow$ φ_0 NON é diagonalizzabile.