ESERCIZI DI DERIVE DIFFERENZIALI DI PROFA

$\S$ $f \in \mathcal{R}$, $x \in I$, $x \neq 0$

$\S$ derivabile in x

$\S$ derivabile $\forall$ punto x in I.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{h} - \frac{f(x)}{h}}{h}$, $f'(x) \in \mathbb{R}$

Ex:

$f(x) = \sin(5x+2)$

$x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \sin(5x+2)'$

$f'(x) = \cos(5x+2) \cdot 5 = 5\cos(5x+2)$

$\S$ derivabile $\forall$ punto x.

$\S$ derivabile $\forall$ punto in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{h} - \frac{f(x)}{h}}{h}$, $f'(x) \in \mathbb{R}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)$ derivata n-esima con $n \in \mathbb{N}$

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

2) $\S$ g derivabile in $I =]x_0, x_0[$

3) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I =]x_0, x_0[$

4) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

OSS: Se la 4) non c'è, si faccia una ε radicale finita nel rapporto che si $\frac{f(x)}{g(x)}$ non mai, ma che non sia mai radicale per altri x_0.

Es

$f(x) = x - \sin x$

$g(x) = x - \tan x$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\tan x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1}{1 - 1} = 0$!

Es

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$g(x) = x \sin x$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x \sin x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)$ $\cos \frac{1}{x}$ Oscillante

OSS

Ex 1) scalo $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]x_0, x_0[$

Esempio: $f(x) = \sin x$ $g(x) = x + \sin x$

allora $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$

Ma $g'(x) = 1 + \cos x$ $g'(x) = 0$ $\forall x \in]x_0, x_0[$

$g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]x_0, x_0[$ $\Rightarrow$ g derivabile $\forall$ punto in $]x_0, x_0[$

$g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]x_0, x_0[$ $\Rightarrow$ g derivabile $\forall$ punto in $]x_0, x_0[$

Ritornando invece però nonostante sotto tendenza a $\frac{0}{0}$ non si applica 3) ottenuta da $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]x_0, x_0[$ $\Rightarrow$ $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]x_0, x_0[$

OSS

Sotto analogo sul caso $I =]x_0, x_0[$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{2 - (1 + 3x^2)}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-3x^2}{5x^2}\right) = -\frac{3}{5}$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log x$ $\frac{1}{x} \cdot \log x$ $\infty \cdot 0$ ∞ ∞ ∞ ∞

$\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x \to 0} -x = 0$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2}$

$\frac{1}{2}$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = 0$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + \tan x}{x(e^x - 1)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + \tan x}{x^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + \tan x}{x^2} = H$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}}{2x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x}}{2}$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{0}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{0} = 0$

Per Teorema di de l'Hopital le prime condizioni può essere sostituita quella di essere continua ad una regola

Es

$\lim_{x \to 0} (1 - x) \cdot \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$\frac{\log(1)}{\frac{1}{x}}$

$\frac{\log(1)}{\frac{1}{\log(x)}}$ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\log(x)}}{\frac{1}{x}}$ $\frac{0}{0}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\log(x)}}{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\log(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\log(x)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\log(x)} = 0$

Es

$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$

$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \log x}{\log x \cdot (x-1)}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \log x}{\frac{\log(1+(x-1))}{x-1} \cdot (x-1)^2}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2(x-1)}$

$= \frac{1}{2}$

Es per ∞ ∞

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x} \log\left(\frac{\log x}{x}\right)}$ $\frac{1}{x} \log\left(\frac{\log x}{x}\right)$

dato

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log\left(\frac{\log x}{x}\right)$ $\frac{1}{x} \log\left(\frac{\log x}{x}\right)$

$\Rightarrow e^0 = 1$

OSS: Abbiamo dato che

$\S$ derivabile in x_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{h} - \frac{f(x_0)}{h}}{h}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Se $x = x_0 + h$, $c = x - x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)}{x - x_0}}{x - x_0}$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Supponiamo che $\S$ sia derivabile $\Rightarrow$ $I =]x_0, x_0[$

Se $\exists$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $x \in \mathbb{R}$, allora $\S$ derivabile in x

$\Rightarrow f(x_0) \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = L$

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = L$

$\Rightarrow$ $\S$ derivabile in 0, $f'(0) = 0$

ATTENZIONE Se $\exists$ $\lim_{x \to x_0} f'(x)$, non $\Rightarrow$ $\S$ derivabile

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Es Determinare valori derivabili nel punto di $f(x) = e^x (2x^2 + 3x)$

1) Ricerca $\S$ derivabile $\mathbb{R}$

1)

$\lim_{x \to 0} e^x (2x^2 + 3x) =$

$= e^0 (2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0) = 0$

$\lim_{x \to 0} e^x (2x^2 + 3x) = 0$

$\lim_{x \to 0} e^x (2x^2 + 3x) = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{x} = 0$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$

2)

$\left(e^x (2x^2 + 3x)\right)' = \left(e^x (2x^2 + 3x)\right) + e^x (4x + 3)$

$= e^x \left(2x^2 + 3x + 4x + 3\right)$

$= e^x \left(2x^2 + 4x + 3\right)$

$x = 0$ $y = 0$

$2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 = 3$

$\Rightarrow f = 0 + 0 + 0 = 0$

$m_{tg} = \frac{-5 + 5}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$

$\S(3)$: $e^3 (2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3) = 5 e^{-3}$

$\S(1)$: $e^{-3} (2 - 3) = -e$ m_{tg} m_{tg}

Es

$\S(x) = \left|1 - \frac{\log x}{x}\right|$

$g(x) = 1 + \frac{\log x}{x}$

1)

$C.E.$

$\left(\frac{x > 0}{x \neq 0}\right) \Rightarrow x > 0$

2)

$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \log x}{x} = \left[\frac{1 - \infty}{0}\right] = -\infty$, $+\infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \log x}{x} = 0$

$y = 0$ asintoto per $x \to +\infty$

$x = 0$

3)

$\left(\frac{1 + \log x}{x}\right)' =$

$\frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) - \left(1 + \log x\right)\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

$\frac{1 - 1 - \log x}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2}$

DERIVATIVA DI $y = 0$ $C.E.$ quindi

$-\log x > 0$

$\log x < 0$

$0 < x < 1$

$\S(1)$: $\frac{1 + \log 1}{1} = 1$