1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO)

0914 2023

Consideriamo $y'(t)=\frac{1}{t}$, l'obiettivo è trovare y t.c. $y'=\frac{1}{t}$ $\rightsquigarrow$ per $t>0$: $y(t)=\ln(t)+c$, $c\in\mathbb{R}$

per $t<0$: $y(t)=\ln(-t)+c$, $c\in\mathbb{R}$

per $t=0$: non c'è una soluzione

IN GENERALE una EDO ha infinite soluzioni, e queste dipendono anche dall'intervallo su cui è definita.

DEFINIZIONE: Una EDO di ORDINE $n\in\mathbb{N}$ è un'equazione con incognita una funzione $y(t)$ e che coinvolge la derivata n-esima di y (può coinvolgere anche quelle prima), e che possiamo scrivere nella forma: $^*F(t, y(t), y'(t), \dots, y^n(t))=0$, $t\in I$, dove I è un intervallo in $\mathbb{R}$ e F è una funzione di $n+2$ var.

Inoltre si dice SOLUZIONE (PARTICOLARE) della EDO in un intervallo $J\subset I$ ogni funzione $\bar{y}(t)\in C^n(J)$ (ovvero una funzione continua con derivate continue fino all'ordine n) che soddisfi $*$.

L'insieme di TUTTE LE SOLUZIONI si dice INTEGRALE GENERALE DELLA EDO.

ES: $t^2y(t)+y'(t)+\frac{y^{(2)}(t)}{t}+e^{y^{(4)}(t)}=0$: è una EDO di ordine 4.

$y'(t)=\frac{1}{t}$: è una EDO di ordine 1 con soluzione particolare $\bar{y}(t)=\ln(t)+3$ nell'intervallo $J=\{t>0\}$

DEFINIZIONE: Una EDO si dice in FORMA NORMALE se è nella forma: $y^{(n)}(t)=f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, $t\in I$.

Data una EDO di ordine n in forma normale e dato il punto $(t_0, y_0, \dots, y^{(n-1)}_0)\in D$ si dice PROBLEMA DI CAUCHY associato alla EDO il problema che consiste nel determinare una soluzione $y: J\to\mathbb{R}$ della EDO in un intervallo $J\subseteq I$ t.c. $t_0\in J$ che soddisfi il sistema:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t)=f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

! per risolverlo servono tante condizioni tante quante sono le costanti (c) e l'ordine delle soluzioni sarà ∞^c

RISOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY:

PASSO 1: determinare l'integrale generale della EDO

PASSO 2: sostituire l'integrale generale nel sistema e determinare le costanti

PASSO 3: sostituire il valore delle costanti

ES: $\begin{cases} y'(t)=1/t \\ y(2)=0 \end{cases}$ per $t>0$ $\rightarrow y(t)=\ln(t)+c$, $y(2)=0$: $\ln(2)=-c$, $c=-\ln(2)$

da cui $\bar{y}(t)=\ln(t)-\ln(2)$

Se abbiamo soluzioni costanti queste sono facili da trovare

ES: $y'(t)=ky(t)-hy^2(t) \rightarrow ks-ks^2=0 \Leftrightarrow ks(1-\frac{h}{k}s)=0 \Leftrightarrow s\in\{0,\frac{k}{h}\}$ da cui $y\equiv0$ e $y\equiv\frac{k}{h}$ sono soluzioni costanti

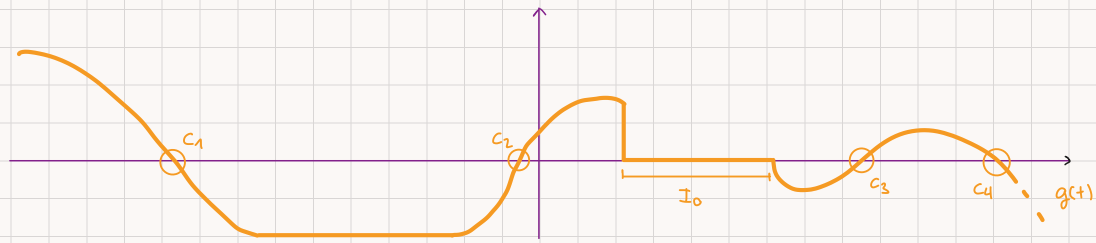
1.2 EDO 1° ORD. A VARIABILI SEPARABILI

DEFINIZIONE: Una EDO di 1° ordine si dice a variabili separabili se è della forma: $(*)\, y'(t)=h(t)\cdot g(y(t))$, $t\in I$ con $h: I_1\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g: I_2\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.

!Una $y=c$ è soluzione di $(*)$ sse. $g(c)=0$, in questo caso y è detta SOLUZIONE COSTANTE.

ES: $y'(t)=\frac{1}{t}$ è a var. sep. con $h(t)=\frac{1}{t}$ e $g\equiv1$

ES:



tutte le funzioni $y \equiv c \ \forall c \in \{c_1, \dots, c_4\} \cup I_0$ sono soluzioni

RISOLUZIONE DI UNA EDO DI 1° ORD. A VARIABILI SEPARABILI - teoria svolta per $y'(t) = t y^3(t)$

PASSO 1: Cerchiamo le soluzioni costanti

$g(s) = 0 \Leftrightarrow s^3 = 0 \Leftrightarrow s = 0$ e quindi $y \equiv 0$ è l'unica sol. costante

PASSO 2: Cerchiamo le soluzioni non costanti

2.1: Dividiamo la EDO per $g(y(t))$

$$\frac{y'(t)}{y^3(t)} = t$$

2.2: Integriamo nell'intervallo $(t_0, t) \subset I$ per un certo $t_0 \in I$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(r)}{y^3(r)} dr = \int_{t_0}^{t} r \, dr$$

2.3: Facciamo il cambio di variabili $z = y(r)$ e usiamo il TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (TFCI):

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(r)}{y^3(r)} dr \underset{\substack{\text{SOSTITUZIONE} \\ z = y(r) \\ dz = y'(r) dr}}{=} \int_{t_0}^{t} \frac{dz}{z^3} \underset{\text{TFCI}}{=} \frac{-1}{2y^2(t)} + \frac{1}{2y^2(t_0)}$$

$$\int_{t_0}^{t} r \, dr = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}$$ ed otteniamo dunque: $$-\frac{1}{\cancel{2}y^2(t)} + \frac{1}{\cancel{2}y^2(t_0)} = \frac{t^2}{\cancel{2}} - \frac{t_0^2}{\cancel{2}}$$

2.4: Troviamo la forma esplicita per $y(t)$:

$$\frac{1}{y^2(t)} = -t^2 + \underbrace{t_0^2 + \frac{1}{y^2(t_0)}}_{= c} = -t^2 + c$$

$c > 0 \Rightarrow y^2(t) = \frac{1}{c - t^2} \Rightarrow y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{c - t^2}}$

con $t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$

PASSO 3: Scriviamo l'integrale generale

$y \equiv 0, \ \forall t \in \mathbb{R}; \quad y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{c - t^2}}, \ t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}), \ c > 0$

M.1 EDO DEL 2° ORDINE LINEARI

MOOC 1.1

Consideriamo $y'' - y' - 2y = 0$, $y(t) = e^{2t}$ è soluzione?

$y'(t) = 2e^{2t}$, $y^{(2)} = 4e^{2t}$

Sostituendo: $4e^{2t} - 2e^{2t} - 2e^{2t} = 0$ V

Per una EDO di secondo ordine il problema di Cauchy assume la forma:

$$\begin{cases} a(t) y'' = b(t) y' + c(t) y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

ES: $y'' - 3y' + 2y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + t/2 + 3/4$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $y(0) = c_1 + c_2 + 3/4 = 1$, $y'(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 1/2$, $y'(0) = c_1 + 2c_2 + 1/2$ da cui $c_1 = 2$, $c_2 = -7/4$

Consideriamo una EDO del secondo ordine generale: $a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t)$, vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

DEFINIZIONE: Secondo il PdS se y_1 è soluzione di $ay''+by'+cy=f_1$ e y_2 è soluzione di $ay''+by'+cy=f_2$ allora $y(t)=c_1y_1+c_2y_2$ è soluzione di $ay''+by'+cy=c_1f_1+c_2f_2$

Ma come è fatto l'integrale generale? Consideriamo una EDO 2° L. OMOGENEA ($f(t)=0$)

ES: Data $y''+4y=0$ verificare che $y(t)=c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)\ \forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Dobbiamo verificare che $y_1(t)=\cos(2t)$ e $y_2(t)=\sin(2t)$ siano soluzioni linearmente indipendenti fra loro.

$y_1(t)=\cos(2t)$ | $y_2(t)=\sin(2t)$

$y_1'(t)=-2\sin(2t)$ | $y_2'(t)=2\cos(2t)$

$y_1''(t)=-4\cos(2t)$ | $y''_2(t)=-4\sin(2t)$ ☑

$y_1''(t)+4y=-4\cos(2t)+\cos(2t)=0\quad\forall t\in\mathbb{R}$ ☑

$\frac{y_2(t)}{y_1(t)}=\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)}=\tan(2t)$ ← NON È COSTANTE: sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

Per una EDO 2° L. COMPLETA ($f\neq0$) l'integrale generale: $a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=f(t)$ è dato da tutte e sole le $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_p(t)$ con y_1 e y_2 soluzioni di $Ly=0$

1.3 EDO 1° ORD LINEARI

19.07.2023

DEFINIZIONE: una EDO del primo ordine lineare è una EDO del primo ordine nella forma: $y'(t)=a(t)y(t)+b(t)$, $t\in I$, $a,b: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se $b\equiv0$: si dice OMOGENEA, altrimenti COMPLETA

*TEOREMA: Date a e b continue in I l'integrale generale della EDO: $y'(t)=a(t)y(t)+b(t)$ è dato dalla formula: $y(t)=e^{A(t)}[B(t)+c]$, $t\in I$ dove:

- $c\in\mathbb{R}$
- A è una primitiva di a: $A=\int a$
- B " " " $e^{-A}b$: $B=\int e^{-A}b$

DIM (*1) svolgiamo 3 passi:

PASSO 1: porto a sinistra il termine con la $a(t)$ e moltiplico per e^{-A}

$$\underbrace{y'e^{-A}-aye^{-A}}_{ye^{-A}\ dt}=be^{-A}:(ye^{-A})'=be^{-A}$$

PASSO 2: TFCI

$$ye^{-A}=\int(ye^{-A})'\,dt=\int be^{-A}\,dt+c$$

PASSO 3: moltiplico per e^A

$$y(t)=e^A\left[\int be^{-A}\,dt+c\right]$$

Seguendo la notazione del MOOC: $Ly:=y'-ay$ mentre $b(t)=f$.

Ovviamente è un operatore lineare, per questo soddisfano il principio di sovrapposizione

ES: Trovare int. gen di: $y'(t)+y(t)+\sin(t)=0$

$a(t)=1$

$b(t)=\sin(t)$

$y(t)=e^{-t}\left[\int-\cos(t)\,e^t+c\right]=e^{-t}\left[\cos(t)e^t-\int\cos(t)e^t+c\right]=e^{-t}\left[\cos(t)e^t-\sin e^t+\int\sin e^t+c\right]$

$=\frac{\cos(t)-\sin(t)}{2}+ce^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$

ES: risolvere il P.B: $\begin{cases} y'(t)+y(t)+\sin(t)=a \\ y(0)=1 \end{cases}$

$y(t)=\frac{\cos(t)-\sin(t)}{2}+ce^{-t}$

da cui $y(0)=\frac{1}{2}+c=1 \rightarrow c=\frac{1}{2}$

dunque $y(t)=\frac{\cos(t)-\sin(t)}{2}+\frac{1}{2}e^{-t} \quad t\in\mathbb{R}$

TEOREMA (PB di Cauchy per EDO 1° ORD lineari): Siano $I\subseteq\mathbb{R}$, $a, b: I\rightarrow\mathbb{R}$ continue, $t_0\in I$ e $y_0\in\mathbb{R}$: esiste un'unica soluzione per il P.B: $\begin{cases} y'(t)=a(t)y(t)+b(t) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$

*la soluzione ESISTE, è UNICA ed è definita su I: esiste anche per $\{t<t_0\}\cap I$, ovvero per il passato

1.4 EQUAZIONI DI BERNOULLI

21 07 2023

DEFINIZIONE: EDO di 1° ord. NON lineari del tipo: $y'(t)=g(t)y(t)+h(t)y^{\alpha}(t)$, $t\in I\subseteq\mathbb{R}$, dove $g,h: I\rightarrow\mathbb{R}$ sono continue in I, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0,1$ e $h\not\equiv 0$.

RISOLUZIONE DI UN'EQ. DI BERNOULLI

PASSO 1: ricerca delle soluzioni costanti

- se $\alpha>0$, $y\equiv 0$ è sol.
- se $\alpha\in(0,1)$ $\quad y^{\alpha}(gy^{1-\alpha}+h)=0 \rightarrow y\equiv 0,\ gy^{1-\alpha}=-h: y=(-\frac{h}{g})^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- se $\alpha>1$ $\quad y(g+hy^{\alpha-1})=0 \rightarrow y\equiv 0,\ y=(-\frac{g}{h})^{\frac{1}{\alpha-1}}$
- se $\alpha<0$ $\quad gy+\frac{h}{y^{-\alpha}}\equiv 0 \rightarrow y=(-\frac{h}{g})^{\frac{1}{1-\alpha}}$

se g e h non sono ben definite NON ci sono soluzioni costanti

PASSO 2: divido per $y^{\alpha}(t)$ e moltiplico per $(1-\alpha)$ dopo aver fatto le sostituzioni

PASSO 3: ho una EDO lineare, risolvo

ES: risolvere l'eq. di Bernoulli: $y'(t)=\Delta y(t)-\sigma(y(t))^2$, $t\in\mathbb{R}$ con $\Delta,\sigma>0$

$\alpha>1$: $\quad y(\Delta-\sigma y)=0$: SOL COSTANTI $= y\equiv 0,\ y=\frac{\Delta}{\sigma}$

$\frac{y'}{y^2}=\Delta\frac{\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}}-\sigma$

$\quad \shortparallel$

$\frac{d}{dt}-\frac{1}{y}$: $z=(y(t))^{-1}$

$-z'=\Delta z-\sigma$ da cui $z'=-\Delta z+\sigma$

$z(t)=e^{-\Delta t}[\sigma\int e^{\Delta t}\,dt+c]$

$z(t)=e^{-\Delta t}[\frac{\sigma}{\Delta}e^{\Delta t}+c]=\frac{\sigma}{\Delta}+e^{-\Delta t}\cdot c$

$z(t)=\frac{1}{y(t)}$: $y(t)=\frac{1}{\frac{\sigma}{\Delta}+e^{-\Delta t}c}=\frac{\Delta}{\sigma+\Delta e^{-\Delta t}\cdot c}=\frac{\Delta e^{\Delta t}}{\sigma e^{\Delta t}+c}$

INT GEN: $y(t)\equiv 0$, $y(t)=\frac{\Delta}{\sigma}$, $y(t)=\frac{\Delta e^{\Delta t}}{\sigma e^{\Delta t}+c}$, CE: $\sigma e^{\Delta t}+c\neq 0$: $e^{\Delta t}\neq -\frac{c}{\sigma}$: $t\neq\frac{\log(-\frac{c}{\sigma})}{\Delta}$ se $c<0$

2 MODELLI DI DINAMICA DELLE POPOLAZIONI

MODELLO DI MALTHUS

Assume che la popolazione evolva ISOLATA, i fattori di evoluzione sono natalità e mortalità.

$N(t)$: numero membri popolazione al tempo t, quindi $N: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+ := \{r\in\mathbb{R} : r\geq 0\}$

$\lambda>0$ tasso di natalità

$\mu>0$ tasso di mortalità

MODELLO: $N'(t)=(\lambda-\mu)N(t)$

Sia $(\Delta - \mu)$ il TASSO DI POTENZIALE BIOLOGICO ε allora l'EDO equivale a: $N'(t) = \varepsilon N(t)$ [1° ord, lineare, variabili separabili].

se $\varepsilon = 0$: $N'(t) = 0 \rightarrow N(t) = c \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$

se $\varepsilon \neq 0$: $N \equiv 0$ è sol. costante

$\frac{N'(t)}{N(t)} = \varepsilon \rightarrow \log\left|\frac{N(t)}{N(t_0)}\right| = \varepsilon(t - t_0)$ da cui $N(t) = N(t_0)\, e^{\varepsilon(t-t_0)}$

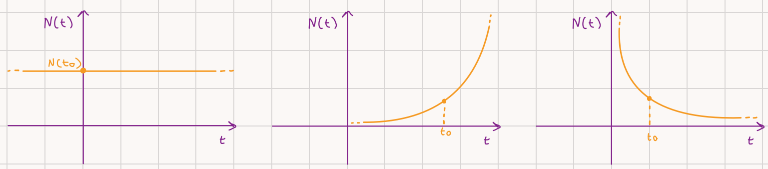
dunque l'int. gen: $N \equiv 0 \vee N(t) = N(t_0) e^{\varepsilon(t-t_0)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

abbiamo 3 POSSIBILI comportamenti:

(i) $N(t_0)$ o $\varepsilon = 0$: POPOLAZIONE COSTANTE

(ii) $N(t_0) \neq 0 \wedge \varepsilon > 0$: POPOLAZIONE AUMENTA (esponenzialmente)

(iii) $N(t_0) \neq 0 \wedge \varepsilon < 0$: POPOLAZIONE DIMINUISCE



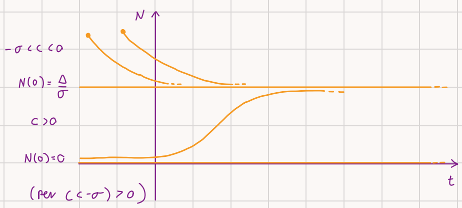
MODELLO DI VERHULST (O EQUAZIONE LOGISTICA)

il tasso di nuovi nati è proporzionale al numero di popolazione presente e all'ammontare di risorse disponibili.

MODELLO: $N'(t) = \Delta N(t) - g(N(t))$ con $g(N) = \sigma N^2$ e $\Delta, \sigma > 0$

int. gen: $N(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$ $\vee$ $N(t) = \frac{\Delta}{\sigma}$, $t \in \mathbb{R}$ $\vee$ $N(t) = \frac{\Delta e^{\Delta t}}{c + \sigma e^{\Delta t}} = \frac{\Delta}{c e^{-\Delta t} + \sigma}$, $t \in \mathbb{R}$ se $c > 0$, $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\log\left(-\frac{c}{\sigma}\right)}{\Delta}\right\}$ se $c < 0$

il comportamento dipende da $N(0) = \frac{\Delta}{c + \sigma}$



3 SISTEMI DIFFERENZIALI ORDINARI

sono esempi di SD LINEARI:

1) OSCILLAZIONI MECCANICHE:

$my''(t) = -h y'(t) - k y(t) + f(t)$ (*)

$y(t) = $ pos.

$y'(t) = v$

$y''(t) = a$

2) CIRCUITI RLC

3) PENDOLO PER PICCOLE OSCILLAZIONI

se consideriamo in (*) $h = k = 0$ allora otteniamo $y''(t) = g$.

definiamo $y_1(t) = y(t)$ e $y_2(t) = y'(t)$, dunque

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & \leftarrow \text{EDO DEL 1° ORD.} \\ y_2'(t) = g & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

dunque $y_2(t) = gt + c$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, da cui $y(t) = y_1(t) = g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$

Una EDO del 2° ORD. generale è: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f$ (con $a \neq 0$), dunque posso scrivere il sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = -\frac{b}{a} y_2(x) - \frac{c}{a} y_1(x) + \frac{f}{a} \end{cases}$$

CONTENTS
TEMPLATES
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

ES: Trasformare $y'''(t) = 2y''(t) - y(t)$ in un SDL a tre incognite:

$y_1(t) = y(t)$

$y_2(t) = y'(t) = y_1'(t)$

$y_3(t) = y''(t) = y_2'(t)$

dunque il sistema sarà: $\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) - y_1(t) \end{cases}$

in forma matriciale: $\underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}$ con $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

CONTENTS
TEMPLATES
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12