1809 2023

- Data l'eq. diff: $(x \cdot y')^2 - 4y = 0$

verificare che $y_1(x) = \log^2 x$ è sol., mentre $y_2(x) = e^{1/x}$ no.

$y_1'(x) = 2\log x \frac{1}{x}$ | $y_2'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$

$(2\log x)^2 - 4\log^2 x = 0$

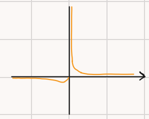
$4\log^2 x - 4\log^2 x = 0$ ✓

$\forall x \in (0, +\infty)$

$\left(\cancel{x} e^{1/x} \left(-\frac{1}{x\cancel{2}}\right)\right)^2 - 4e^{1/x} = 0$

$\frac{e^{2/x}}{x^2} - 4e^{1/x} = 0 \rightarrow e^{1/x}\left(\frac{e^{1/x}}{x^2} - 4\right) = 0$

$\nexists I$ in cui è definita → basti pensare al grafico di $\frac{e^{1/x}}{x}$:



- Data $y' = y^4$ determinare l'integrale generale

Risolvere i problemi di Cauchy (P.C.) $\begin{cases} y' = y^4 \\ y(0) = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} y' = y^4 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

EDO 1° ord, var sep: $h(x) = 1$:

1. sol. costanti:

$y \equiv 0 \rightarrow y(x) = c$, $y'(x) = 0$ $\forall c \in \mathbb{R}$ $\rightarrow c^4 = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow y(x) = 0$

2. integriamo

$\int \frac{y'(x)}{y^4(x)} dx = \int 1 \, dx$

$c_2 - c_1 = c$

$\int \frac{dy}{y^4(x)} = \int 1 dx \rightarrow -\frac{y^{-3}}{3} + c_1 = x + c_2 + c \rightarrow \frac{1}{3y^3} = -x + c$

$3y^3 = \frac{1}{-x+c} \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{-3x+c}}$

3. INT GEN:

$y \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{c-3x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

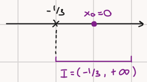
4. Problemi di Cauchy

1: $y(0) = \sqrt[3]{1/c} = -1$: $c = -1$

dunque la sol (unica) del P.C è: $y(x) = -\sqrt[3]{\frac{1}{3x+1}}$

!Ogni soluzione di un P.C. viene con l'INSIEME (intervallo) MASSIMALE DI DEFINIZIONE:

C.E: $3x + 1 \neq 0$: $x \neq -\frac{1}{3}$:

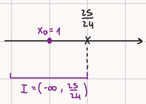


2: $y(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{c-3}} = 2 \rightarrow 8 = \frac{1}{c-3}$

$c - 3 = \frac{1}{8}$ $c = \frac{25}{8}$

$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{25}{8} - 3x}}$

$\frac{25}{8} - 3x \neq 0$: $x \neq \frac{25}{24}$



- Dato il P.C. $\begin{cases} y' = \frac{4x}{y} \\ y(2) = -2 \end{cases}$

a) PRIMA DI RISOLVERE scrivere l'eq della retta tangente al grafico della sol in corrispondenza di $x_0 = 2$

b) risolvere con I di def.

c) quale asintoto ha la sol a $+\infty$?

a) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$x_0 = 2$ $y_0 = y(x_0) = -2$

$m = y'(2) = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{-\cancel{2}} = -4$

$\Bigg\}$ $y + 2 = -4(x - 2)$
$y = -4x + 6$

CONTENTS
TEMPLATES
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

b) $y' = \frac{4x}{y}$ prendo $y = c \rightarrow y' = 0 \ \forall c \in \mathbb{R}$

$\frac{4x}{c} = 0$ sse $x = 0$ ovvia $h(x) \equiv 0$ $\rightarrow$ NO SOL COSTANTI

$\int y \, dy = \int 4x \, dx$

$\frac{y^2}{2} = 2x^2 + c \rightarrow y = \pm 2x + c$

$y(x) = \pm\sqrt{4x^2+c}$

$y(2) = -2 = -\sqrt{16+c} \rightarrow c = -12$

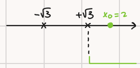
$\downarrow y(2) < 0$: scelgo il meno come sol

$y = \pm\sqrt[2]{4x^2-12}$

$4x^2 > 12$

$x^2 > 3$

$x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$



$I = (+\sqrt{3}, +\infty)$

$\lim_{x} y(x) = \lim_{x} 4x^2$, asintoto obliquo

- P.C : $\begin{cases} y' = x \, tg \, y \\ y(0) = \pi/3 \end{cases}$ C.E : $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

a) disegnare il grafico locale della soluzione

b) sol del P.C. con I di def.

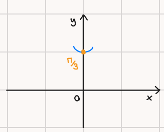
a) $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{3}$

per il grafico locale bastano $y'(0)$ e $y''(0)$ se non sono entrambe nulle

$y'(0) = 0 \cdot \frac{\pi}{3} = 0$ ← p. critico o staz.

$y''(x) = 1 \cdot tg(y(x)) + x \cdot \frac{1}{\cos^2(y(x))} \, y'(x)$

$y''(0) = 1 \cdot tg(\frac{\pi}{3}) + 0 \cdot \frac{1}{\cos^2(\pi/3)} \cdot 0 = \sqrt{3} > 0$ $\cup$



b) $y' = tg \, y \cdot x \rightarrow \int \frac{dy}{tg \, y} = \int x \, dx \rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{x^2}{2} \rightarrow \log|\operatorname{sen} y| = \frac{x^2}{2} + c$

$\sin y = e^{x^2/2 + c} = e^{x^2/2} \cdot e^c$ ← $k > 0$

$\sin y = \pm k e^{x^2/2}$ con $k \neq 0$, sol. cos : $\sin y \equiv 0$

$\sin\frac{\pi}{3} = k e^0 = k = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{x^2/2}$

sol P.C : $y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{x^2/2}\right)$

C.E : $\begin{cases} -1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} e^{x^2/2} \leq +1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{x^2/2} \neq \pm 1 \end{cases}$ ← dalla C.E. iniziale $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

da cui $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} e^{x^2/2} < 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} e^{x^2/2} < 1$

$\downarrow$ $\forall x$

$e^{x^2/2} < \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{x^2}{2} < \log\frac{2}{\sqrt{3}}$

$x^2 < \log\frac{4}{3}$

$x < +\sqrt{\log\frac{4}{3}} \vee x > -\sqrt{\log\frac{4}{3}}$

poiché $x_0 = 0$: $I = \left(-\sqrt{\log\frac{4}{3}}, +\sqrt{\log\frac{4}{3}}\right)$

- Risolvere $\begin{cases} y' = 4t - ty^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

e determinare quali asintoti possiede la funzione

$y' = 4t - ty^2$ var separabili

sol costanti: $y' = t(4-y^2)$: $4 - y^2 = 0 \rightarrow y(t) \equiv \pm 2$ MA NON SONO SOLUZIONI DEL PC: $y_0 = 0$

separo e integro:

$$\int \frac{dy}{4-y^2} = \int t = t^2 + c$$

$\Delta > 0$: $\frac{1}{4-y^2} = \frac{A}{2-y} + \frac{B}{2+y} = \frac{Ay + 2A - By + 2B}{(2-y)(2+y)} = \frac{(A-B)y + 2A + 2B}{2A + 2B}$ * vedi ripasso

$\begin{cases} A - B = 0 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \rightarrow A = B = 1/4$

$$\int \frac{1/4}{2-y} + \frac{1/4}{2+y}\, dy = 1/4 \left(\int \frac{1}{2-y}\, dy + \int \frac{1}{2+y}\, dy \right) = \frac{1}{4}\left(-\log|2-y| + \log|2+y|\right) = 1/4 \log\left|\frac{2+y}{2-y}\right| = \frac{t^2}{2} + c$$

- T.E. sett 22 : $y' = \sin x \cdot y^3$

a) int. gen.

b) sol (dell'eq) definita in $\mathbb{R}$ $(I = \mathbb{R})$

c) P.C. con $y(\pi) = 1$

a) soluzione costante: $y(x) \equiv 0$

$\int \frac{dy}{y^3} = -\cos x + c$: $\frac{1}{2y^2} = \cos x + c \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2\cos x} + c}$

INT. GEN: $y \equiv 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; $y = \sqrt{\frac{1}{2\cos x} + c}$, $x \neq \pm \pi/2 \wedge$ $1/2\cos x + c \geq 0$: $c \geq -\frac{1}{2\cos x}$

c) $y(\pi) = 1$: $y(\pi) = \sqrt{-1/2 + c}$: $c = 3/2$

$y(t) = \sqrt{1/2\cos x + 3/2}$ da trovare la C.E. ed I

- T.E. sett 18 : Data $y' = \frac{1+y^2}{ty}$ risolvere il P.C: 1) $y(1) = -1$

C.E: $t \wedge y \neq 0$

2) $y(-1) = 2$

soluzioni costanti: $1 + y^2 = 0$ MAI $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \log|t| + c$$

$1/2 \log|1+y^2| = \log|t| + c$

$1 + y^2 = e^{2\log|t|} \cdot e^c$

$y = \pm\sqrt{e^{2\log|t|} \cdot e^c - 1}\ \forall t \in \mathbb{R}$

questo è sempre ≥ 0 poiché un esponenziale: $x^k \geq 1$

P.C. 1:

$-\sqrt{e^0 \cdot e^c - 1} = -1$

$-\sqrt{k-1} = -1 \rightarrow k = 2$: $e^c = 2$, $c = \log 2$

dunque: $y(t) = -\sqrt{2t^2 - 1}$

con $t^2 \geq 1/2$: $t \leq -1/\sqrt{2} \vee t \geq 1/\sqrt{2}$

$t_0 = 1$: $I = [\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty)$

- $\begin{cases} y' = e^{y+t} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

a) sviluppo di Taylor in $t_0 = 1$, 2° ordine, resto secondo Peano

CONTENTS
TEMPLATES
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

b) sol del P.C. (con I) e as.

a) $y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \frac{y''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + o[(t-t_0)^2]$

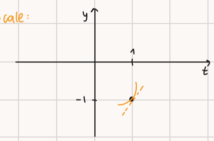
$y(t_0) = y(1) = -1$

$y'(t_0) = e^{y(t_0)+t} = e^{-1+1} = 1$

$y''(t_0) = e^{y(t_0)+t}\,(y'(t_0)+1) = e^{-1+1}(1+1) = 2$ $\cup \leftarrow$ cosa rapp la y''?
la conconcavità

$y(t) = -1 + 1(t-1) + 1(t-1)^2 + o[(t-1)^2]$

grafico locale:



b) $\begin{cases} y' = e^{y+t} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

$y' = e^y e^t$

soluzioni cos: $e^y = 0$ MAI

$\int e^{-y}\,dy = \int e^t\,dt$

$-e^{-y} = e^t + c$

$-y = \log(-e^t + c)$

$y = -\log(-e^t + c) = \log\left(\frac{1}{c-e^t}\right)$

$y(1) = -1 = \log\left(\frac{1}{c-e}\right) \rightarrow \log(c-e) = 1 : c-e = e : c = 2e$

$y(t) = \log\left(\frac{1}{2e-e^t}\right)$

$2e - e^t > 0 : e^t < 2e : t < \log 2e = \log(2)+1$

$I = (-\infty, \log(2)+1)$

ASIN: $\lim_{t \to \log(2)+1} (\log(1/2e-e^t)) = -\lim(\log(0^+)) = +\infty$: as. ver $x = 1 + \log(2)$

$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \log(1/2e)$: as. or: $\log(1/2e)$

- Data $y' = \sin x \cdot y^3$ determinare se ci sono soluzioni in $\mathbb{R}$ 25 09 2023

var. sep:

sol cost: $y^3 = 0 : y \equiv 0$

int: $\int \frac{dy}{y^3} = \int \sin x \, dx$: $-\frac{1}{2y^2} = -\cos x + c$

$y^2 = \frac{1}{2(\cos x + C)}$: $y = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos x + c}}$

dunque: $y \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \vee \ y = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos x + c}} \ \forall\, 2\cos x + C > 0$: $-2 \leq \cos x \leq 2$ da cui $C > 2 \ \forall x$

per $C \leq -2$ non ho soluzioni

per $-2 < C \leq 2$ ho una soluzione

- Dato il P.C. $\begin{cases} y' - \tan(x) \cdot y = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \\ y(\pi) = -2 \end{cases}$

$y' = \tan(x)\, y + \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$: $y' = a(x)\,y(x) + b(x)$; EDO 1° ORD LINEARE

a) prima di risolvere: retta tangente al grafico in $(\pi, 2)$

b) soluzione con I

a) $x_0 = \pi$, $y_0 = 2$ $\qquad m = y'(x_0) = \overset{0}{tg(x_0)} \cdot \overset{-2}{y(x_0)} + \dfrac{1}{\underset{0}{1+sen^2 x_0}} = -1$

$y + 2 = -1(x - \pi)$

b) $y' e^{-\log|\cos x|} - \tan x \; y \, e^{-\log|\cos x|} = e^{-\log|\cos x|} \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$

$y e^{-\log|\cos x|} = \int e^{-\log|\cos x|} \dfrac{1}{1+\sin^2 x} \, dx + c]$

$y = \int \frac{1}{1+\sin^2 x} \, dx + c e^{\log|\cos x|}$

$y = \dfrac{1}{|\cos x|} \int \dfrac{|\cos x|}{1+\sin^2 x} \, dx + c e^{\log|\cos x|} \cdot \dfrac{1}{|\cos x|}$

$g(x) = \sin x$

$\int \dfrac{g'(x)}{1+(g(x))^2} = \arctan(g(x))$

sfrutto $x_0 = \pi$ (e $I = (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$)

$\cos x < 0$: $|\cos x| = -\cos x$

$y = +\dfrac{1}{\cos x} \arctan(\sin x) - \dfrac{c}{\cos x}$

OSS: per eq. lineari possiamo "prevedere" (= discutere a priori) I di def. a partire dalla continuità di $a(x), b(x)$

- Data $y' = \dfrac{x^2 y - 4}{x^3}$

a) sviluppo di Taylor in $x_0 = 1$ al secondo ordine (resto Peano) della soluz.: $y(1) = -2$

b) integrale generale

c) soluzioni limitate in $(0, 1)$; e $(1, +\infty)$?

$y' = \dfrac{x^2 y - 4}{x^3}$: $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{4}{x^3}$ $(y' = a(x) y(x) + b(x))$

LINEARE CON C.E: $x \neq 0$

a) P.C = $\{ y(1) = -2$

TAYLOR: $f(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0)(x - x_0)^2 + o[(x - x_0)^2]$

$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o[(x - x_0)^k]$

$y(x_0) = y(1) = -2$

$y'(x_0) = \dfrac{-2-4}{1} = -6$

$y'' = \dfrac{y'(x) \cdot x - y(x)}{x^2} - 4(-3x^{-4}) = -6 + 2 + 12 = 8 \rightsquigarrow f(x)$: $\cup$

TAYLOR: $f(x) = -2 - 6(x-1) + 4(x-1)^2 + o[(x-1)^2]$