# MVO-31: Desempenho de Aeronaves

## Planeio

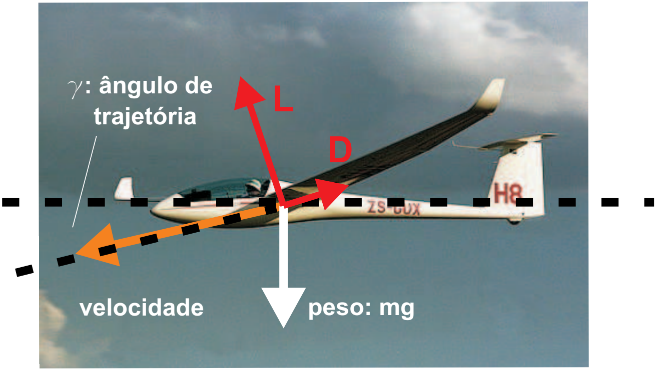
Flávio Ribeiro

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

2019

# PARTE III
# Planeio Permanente

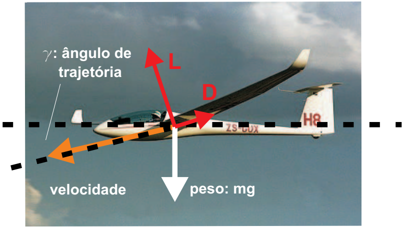
# Equações do movimento durante o planeio



# Equações do movimento durante o planeio

Decompondo-se o peso no chamado referencial aerodinâmico, temos ($\gamma$ definido positivo para cima!)

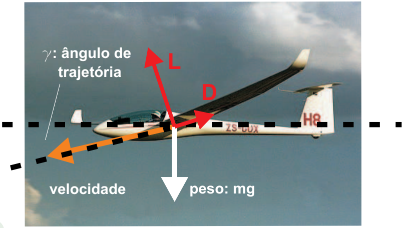
$$D = -mg\sin\gamma$$
$$L = mg\cos\gamma$$
$$\dot{H} = V\sin\gamma$$
$$\dot{x} = V\cos\gamma$$



# Equações do movimento durante o planeio

Das duas primeiras relações:

$$D = -mg \sin\gamma$$
$$L = mg \cos\gamma$$




a chamada **Equação Fundamental do Planeio**:

$$\tan\gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{C_D}{C_L}$$

# Equações do movimento durante o planeio

-

Cálculo de $\sin\gamma$ e $\cos\gamma$:

$$\begin{cases} \tan\gamma = -\frac{C_D}{C_L} \\ \sec^2\gamma = 1 + \tan^2\gamma \\ \cos\gamma = \frac{1}{\sec\gamma} \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \sin\gamma &= -\frac{C_D}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C_L}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \end{aligned}$$

Cálculo da velocidade de planeio:

$$\begin{cases} L = mg\cos\gamma \\ L = 0,5\rho V^2 S C_L \\ \cos\gamma = \frac{C_L}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \end{cases} \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{1/4}}$$

# Equações do movimento durante o planeio

-

Cálculo de $\dot{H}$ e $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{H} = V \sin\gamma \\ \dot{x} = V\cos\gamma \\ V = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{1/4}} \\ \sin\gamma = -\frac{C_D}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \\ \cos\gamma = \frac{C_L}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{H} &= -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{C_D}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{3/4}} \\ \dot{x} &= \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{C_L}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{3/4}} \end{aligned}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - razão de planeio

Define-se razão de planeio a razão do deslocamento horizontal pelo deslocamento vertical, ou seja:

$$\begin{matrix}\text{razão}\\ \text{de planeio}\end{matrix} = \frac{dx}{dz} = \frac{dx}{-dH} = \frac{\frac{dx}{dt}}{-\frac{dH}{dt}} = \frac{\dot{x}}{-\dot{H}} = \frac{V\cos\gamma}{-V\sin\gamma} = -\frac{1}{\tan\gamma} = \frac{L}{D}$$

Logo:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{razão}\\ \text{de planeio}\end{matrix} = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = E}$$

Portanto, a razão de planeio é máxima quando a eficiência aerodinâmica é máxima.

# Equações do movimento durante o planeio
## - razão de planeio

Para a polar de arrasto simétrica: $C_D = C_{D_0} + k\,{C_L}^2$, a condição de **máxima razão de planeio** é portanto:

$$(C_L)_{\substack{\text{máx. razão}\\ \text{de planeio}}} = C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}$$

$$(C_D)_{\substack{\text{máx. razão}\\ \text{de planeio}}} = C_D^* = 2\,C_{D_0}$$

$$(E)_{\substack{\text{máx. razão}\\ \text{de planeio}}} = E_{\text{max}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{kC_{D_0}}}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - alcance

Considere agora o cálculo do alcance. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dz} = E \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)_{\text{max}} = E_{\text{max}}$$

Para uma dada variação de altitude $\Delta z = -\Delta H$, como a eficiência aerodinâmica depende APENAS das características aerodinâmicas, então para o **alcance máximo** tem-se que:

$$(\Delta x)_{\text{máx.}} = -E_{\text{máx.}} \Delta H$$

OBSERVE que o máximo alcance depende APENAS da $E_{\text{máx.}}$ e da diferença de altitude. **Não depende portanto do peso da aeronave!!!**

# Equações do movimento durante o planeio
## - alcance

A velocidade associada à condição de **máxima razão de planeio**, ou **máximo alcance**, ou **máxima eficiência aerodinâmica** é dada por:

$$V^* = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{((C_L^*)^2 + (C_D^*)^2)^{1/4}}$$

Considerando a aproximação de que $(C_D^*)^2 << (C_L^*)^2$:

$$V^* \approx \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{((C_L^*)^2)^{1/4}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_L^*}}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - velocidade de descida

Recordando a expressão da velocidade vertical:

$$\dot{H} = V\sin\gamma = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\frac{C_D}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{3/4}}$$

Considerando $(C_D)^2 << (C_L)^2$ e polar de arrasto simétrica:

$$\dot{H} \approx -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\frac{(C_{D_0} + k\,{C_L}^2)}{(C_L)^{3/2}}$$

$\dot{H}$ é mínimo quando:

$$\frac{d\,\dot{H}}{dC_L} \approx \frac{d}{dC_L}\left(-\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\frac{(C_{D_0} + k\,{C_L}^2)}{(C_L)^{3/2}}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\frac{(2kC_L)(C_L)^{3/2} - (C_{D_0} + k\,{C_L}^2)(\frac{3}{2})(C_L)^{1/2}}{(C_L)^3} = 0$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - velocidade de descida

(continuação)

$$\frac{d\,\dot{H}}{dC_L} \approx -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\,\frac{[4k\,{C_L}^2 - 3(C_{D_0} + k\,{C_L}^2)](C_L)^{1/2}}{2(C_L)^3} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\,\frac{[k\,{C_L}^2 - 3\,C_{D_0}](C_L)^{1/2}}{2(C_L)^3} = 0$$

O $C_L$ para $\dot{H}$ mínimo (em módulo) é dado por:

$$[k\,{C_L}^2 - 3\,C_{D_0}] = 0 \Rightarrow C_L = \sqrt{\frac{3\,C_{D_0}}{k}} = \sqrt{3}\,C_L^*$$

Logo:

$$\boxed{(C_L)_{\substack{\text{máxima}\\\text{autonomia}}} = \sqrt{\frac{3\,C_{D_0}}{k}} = \sqrt{3}\,C_L^*}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - velocidade de descida

Portanto, para polar de arrasto na forma $\boxed{C_D = C_{D_0} + k\,{C_L}^2}$, a condição de mínima velocidade de descida é:

$$(C_L)_{\substack{\text{min. velocidade}\\ \text{de descida}}} = \sqrt{3}\,C_L^* = \sqrt{\frac{3\,C_{D_0}}{k}}$$

$$(C_D)_{\substack{\text{min. velocidade}\\ \text{de descida}}} = C_{D_0} + k\,\frac{3\,C_{D_0}}{k} = 4\,C_{D_0}$$

$$(E)_{\substack{\text{min. velocidade}\\ \text{de descida}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,E_{\text{max}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{kC_{D_0}}}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - autonomia

Para calcular a autonomia do vôo planado, temos:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dot{H} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{\dot{H}}\mathrm{d}H$$

Logo:

$$\Delta t = \int_{Hi}^{Hf} \frac{1}{\dot{H}}\mathrm{d}H$$

A **máxima autonomia** é obtida para a condição de mínima velocidade de descida, isto é:

$$(\Delta t)_{\text{max}} = \int_{Hi}^{Hf} \frac{1}{\dot{H}_{\text{min}}}\mathrm{d}H$$

OBSERVE que $\dot{H}_{\text{min}}$ depende da densidade $\rho$ e portanto da altitude!

# Equações do movimento durante o planeio
## - exercício

**Exercício**: Um T-37 tem a polar de arrasto $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$. Encontre sua máxima razão de planeio e o máximo alcance a partir de $10.000$ ft até o nível do mar.

# Equações do movimento durante o planeio
## - exercício

**Exercício**: Um T-37 tem a polar de arrasto $C_D = 0,02 + 0,057 {C_L}^2$. Encontre sua máxima razão de planeio e o máximo alcance a partir de $10.000$ ft até o nível do mar.

**Solução**: a máxima razão de planeio ocorre em $(L/D)_{\text{max}}$ onde, para polar parabólica simétrica, $C_L = \sqrt{C_{D_0}/k}$

$$\left(\frac{R}{H}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\text{max}} = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}}{C_{D_0} + k\frac{C_{D_0}}{k}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0,057(0,02)}} = 14,8$$

O máximo alcance de $10.000$ ft seria

$$\left(\frac{R}{H}\right)_{\text{max}} = 14,8 = \frac{R}{10.000}$$

$$R = 14,8(10.000) = 148.000 \text{ ft}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - exercício

**Exercício**: Encontre a velocidade de máximo alcance e máxima autonomia para um F-4, a $18.000$ ft $(0,00136$ slug/ft$^3)$, $W = 45.000$ lb, $C_D = 0,027 + 0,209 {C_L}^2$, $S = 530$ ft$^2$.

# Equações do movimento durante o planeio
## - exercício

**Exercício**: Encontre a velocidade de máximo alcance e máxima autonomia para um F-4, a $18.000$ ft ($0,00136$ slug/ft$^3$), $W = 45.000$ lb, $C_D = 0,027 + 0,209{C_L}^2$, $S = 530$ ft$^2$.

**Solução**: o planeio de máximo alcance com uma polar parabólica simétrica

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} = \sqrt{\frac{0,027}{0,209}} = 0,359$$

$$V \approx \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2(45.000)}{(0,00136)(530)(0,359)}} = 589,4 \text{ft/s}$$

o planeio de máxima autonomia com uma polar parabólica simétrica

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{k}} = \sqrt{\frac{3(0,027)}{0,209}} = 0,623$$

$$V \approx \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2(45.000)}{(0,00136)(530)(0,623)}} = 447,8 \text{ft/s}$$

# Equações do movimento durante o planeio
## - exercício

Para o aconchego do lar:
Com os mesmos dados do exercício anterior:
F-4 voando a $18.000$ ft $(0,00136$ slug/ft$^3)$, $W = 45.000$ lb, $C_D = 0,027 + 0,209 {C_L}^2$, $S = 530$ ft$^2$
encontrar a autonomia de 5km de altitude até o nível do mar (ISA) para a condição de máxima autonomia e para a condição de máxima razão de planeio e comparar. Utilizar o modelo de atmosfera dado/construído em curso.
Após o cálculo usando a integração de $1/\dot{H}$, calcular o valor aproximado de $\Delta t$ usando a média dos valores calculados adotando a altitude inicial e a final e comparar com os anteriores.