AB-701: Desempenho de Aeronaves

Planeio

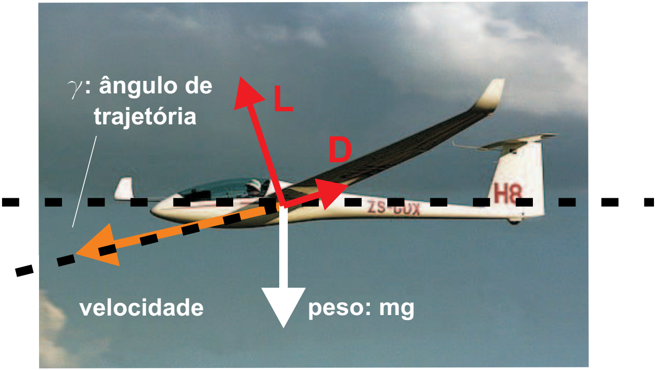
Flávio Ribeiro   Mauricio Morales   Flavio Silvestre

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

2017

PARTE III
Planeio Permanente

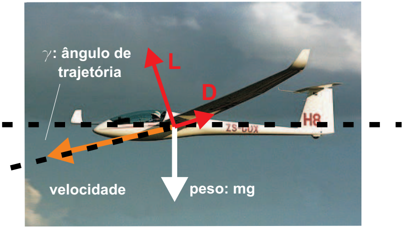
Equações do movimento durante o planeio



Equações do movimento durante o planeio

Decompondo-se o peso no chamado referencial aerodinâmico, temos (γ definido positivo para cima!)

$$D = -mg\sin\gamma$$
$$L = mg\cos\gamma$$
$$\dot{H} = V\sin\gamma$$
$$\dot{x} = V\cos\gamma$$

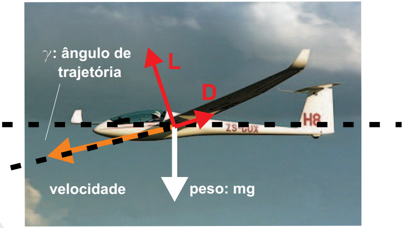


Equações do movimento durante o planeio

Das duas primeiras relações:

$$D = -mg\sin\gamma$$
$$L = mg\cos\gamma$$

a chamada **Equação Fundamental do Planeio**:



$$\tan\gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{C_D}{C_L}$$

Equações do movimento durante o planeio

-

Cálculo de $\sin\gamma$ e $\cos\gamma$:

$$\begin{cases} \tan\gamma = -\frac{C_D}{C_L} \\ \sec^2\gamma = 1 + \tan^2\gamma \\ \cos\gamma = \frac{1}{\sec\gamma} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sin\gamma &= -\frac{C_D}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C_L}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \end{aligned}$$

Cálculo da velocidade de planeio:

$$\begin{cases} L = mg\cos\gamma \\ L = 0,5\rho V^2 S C_L \\ \cos\gamma = \frac{C_L}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{1/4}}$$

Equações do movimento durante o planeio

-

Cálculo de $\dot{H}$ e $\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{H} = V \sin\gamma \\ \dot{x} = V \cos\gamma \\ V = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{1/4}} \\ \sin\gamma = -\frac{C_D}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \\ \cos\gamma = \frac{C_L}{\sqrt{{C_L}^2 + {C_D}^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{H} &= -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{C_D}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{3/4}} \\ \dot{x} &= \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{C_L}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{3/4}} \end{aligned}$$

Equações do movimento durante o planeio
- razão de planeio

Define-se razão de planeio a razão do deslocamento horizontal pelo deslocamento vertical, ou seja:

$$\text{razão de planeio} = \frac{dx}{dz} = \frac{dx}{-dH} = \frac{\frac{dx}{dt}}{-\frac{dH}{dt}} = \frac{\dot{x}}{-\dot{H}} = \frac{V\cos\gamma}{-V\sin\gamma} = -\frac{1}{\tan\gamma} = \frac{L}{D}$$

Logo:

$$\boxed{\text{razão de planeio} = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = E}$$

Portanto, a razão de planeio é máxima quando a eficiência aerodinâmica é máxima.

Equações do movimento durante o planeio
- razão de planeio

Para a polar de arrasto simétrica: $C_D = C_{D_0} + k\,{C_L}^2$, a condição de **máxima razão de planeio** é portanto:

$$(C_L)_{\substack{\text{máx. razão}\\\text{de planeio}}} = C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}$$

$$(C_D)_{\substack{\text{máx. razão}\\\text{de planeio}}} = C_D^* = 2\,C_{D_0}$$

$$(E)_{\substack{\text{máx. razão}\\\text{de planeio}}} = E_{\text{max}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{kC_{D_0}}}$$

Equações do movimento durante o planeio
- alcance

Considere agora o cálculo do alcance. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dz} = E \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)_{\text{max}} = E_{\text{max}}$$

Para uma dada variação de altitude $\Delta z = -\Delta H$, como a eficiência aerodinâmica depende APENAS das características aerodinâmicas, então para o **alcance máximo** tem-se que:

$$(\Delta x)_{\text{máx.}} = -E_{\text{máx.}}\Delta H$$

OBSERVE que o máximo alcance depende APENAS da $E_{\text{máx.}}$ e da diferença de altitude. **Não depende portanto do peso da aeronave!!!**

Equações do movimento durante o planeio
- alcance

A velocidade associada à condição de **máxima razão de planeio**, ou **máximo alcance**, ou **máxima eficiência aerodinâmica** é dada por:

$$V^* = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{((C_L^*)^2 + (C_D^*)^2)^{1/4}}$$

Considerando a aproximação de que $(C_D^*)^2 << (C_L^*)^2$:

$$V^* \approx \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{1}{((C_L^*)^2)^{1/4}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_L^*}}$$

Equações do movimento durante o planeio
- velocidade de descida

Recordando a expressão da velocidade vertical:

$$\dot{H} = V \sin\gamma = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{C_D}{({C_L}^2 + {C_D}^2)^{3/4}}$$

Considerando $(C_D)^2 << (C_L)^2$ e polar de arrasto simétrica:

$$\dot{H} \approx -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{(C_{D_0} + k\,{C_L}^2)}{(C_L)^{3/2}}$$

$\dot{H}$ é mínimo quando:

$$\frac{d\,\dot{H}}{dC_L} \approx \frac{d}{dC_L}\left(-\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{(C_{D_0} + k\,{C_L}^2)}{(C_L)^{3/2}}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}} \frac{(2kC_L)(C_L)^{3/2} - (C_{D_0} + k\,{C_L}^2)(\frac{3}{2})(C_L)^{1/2}}{(C_L)^3} = 0$$

Equações do movimento durante o planeio
- velocidade de descida

(continuação)

$$\frac{d\,\dot{H}}{dC_L} \approx -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\frac{[4kC_L{}^2 - 3(C_{D_0} + kC_L{}^2)](C_L)^{1/2}}{2(C_L)^3} =$$
$$= -\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\frac{[kC_L{}^2 - 3C_{D_0}](C_L)^{1/2}}{2(C_L)^3} = 0$$

O C_L para $\dot{H}$ mínimo (em módulo) é dado por:

$$[kC_L{}^2 - 3C_{D_0}] = 0 \Rightarrow C_L = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{k}} = \sqrt{3}C_L^*$$

Logo:

$$\boxed{(C_L)_{\substack{\text{máxima}\\\text{autonomia}}} = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{k}} = \sqrt{3}C_L^*}$$

Equações do movimento durante o planeio
- velocidade de descida

Portanto, para polar de arrasto na forma $\boxed{C_D = C_{D_0} + k\,{C_L}^2}$, a condição de mínima velocidade de descida é:

$$(C_L)_{\substack{\text{min. velocidade}\\ \text{de descida}}} = \sqrt{3}\,C_L^* = \sqrt{\frac{3\,C_{D_0}}{k}}$$

$$(C_D)_{\substack{\text{min. velocidade}\\ \text{de descida}}} = C_{D_0} + k\,\frac{3\,C_{D_0}}{k} = 4\,C_{D_0}$$

$$(E)_{\substack{\text{min. velocidade}\\ \text{de descida}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,E_{\text{max}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{kC_{D_0}}}$$

Equações do movimento durante o planeio
- autonomia

Para calcular a autonomia do vôo planado, temos:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dot{H} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{\dot{H}}\mathrm{d}H$$

Logo:

$$\Delta t = \int_{Hi}^{Hf} \frac{1}{\dot{H}}\mathrm{d}H$$

A **máxima autonomia** é obtida para a condição de mínima velocidade de descida, isto é:

$$(\Delta t)_{\text{max}} = \int_{Hi}^{Hf} \frac{1}{\dot{H}_{\text{min}}}\mathrm{d}H$$

OBSERVE que $\dot{H}_{\text{min}}$ depende da densidade ρ e portanto da altitude!

Equações do movimento durante o planeio
- exercício

Exercício: Um T-37 tem a polar de arrasto $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$. Encontre sua máxima razão de planeio e o máximo alcance a partir de 10.000 ft até o nível do mar.

Equações do movimento durante o planeio
- exercício

Exercício: Um T-37 tem a polar de arrasto $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$. Encontre sua máxima razão de planeio e o máximo alcance a partir de 10.000 ft até o nível do mar.

Solução: a máxima razão de planeio ocorre em $(L/D)_{\text{max}}$ onde, para polar parabólica simétrica, $C_L = \sqrt{C_{D_0}/k}$

$$\left(\frac{R}{H}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\text{max}} = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}}{C_{D_0} + k\frac{C_{D_0}}{k}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0,057(0,02)}} = 14,8$$

O máximo alcance de 10.000 ft seria

$$\left(\frac{R}{H}\right)_{\text{max}} = 14,8 = \frac{R}{10.000}$$

$$R = 14,8(10.000) = 148.000 \text{ ft}$$

Equações do movimento durante o planeio
- exercício

Exercício: Encontre a velocidade de máximo alcance e máxima autonomia para um F-4, a 18.000 ft ($0,00136$ slug/ft^3), $W = 45.000$ lb, $C_D = 0,027 + 0,209{C_L}^2$, $S = 530$ ft^2.

Equações do movimento durante o planeio
- exercício

Exercício: Encontre a velocidade de máximo alcance e máxima autonomia para um F-4, a 18.000 ft ($0,00136$ slug/ft^3), $W = 45.000$ lb, $C_D = 0,027 + 0,209 {C_L}^2$, $S = 530$ ft^2.

Solução: o planeio de máximo alcance com uma polar parabólica simétrica

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} = \sqrt{\frac{0,027}{0,209}} = 0,359$$

$$V \approx \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2(45.000)}{(0,00136)(530)(0,359)}} = 589,4 \text{ft/s}$$

o planeio de máxima autonomia com uma polar parabólica simétrica

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{k}} = \sqrt{\frac{3(0,027)}{0,209}} = 0,623$$

$$V \approx \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2(45.000)}{(0,00136)(530)(0,623)}} = 447,8 \text{ft/s}$$

Equações do movimento durante o planeio
- exercício

Para o aconchego do lar:
Com os mesmos dados do exercício anterior:
F-4 voando a 18.000 ft $(0,00136$ slug/ft$^3)$, $W = 45.000$ lb, $C_D = 0,027 + 0,209 {C_L}^2$, $S = 530$ ft^2
encontrar a autonomia de 5km de altitude até o nível do mar (ISA) para a condição de máxima autonomia e para a condição de máxima razão de planeio e comparar. Utilizar o modelo de atmosfera dado/construído em curso.
Após o cálculo usando a integração de $1/\dot{H}$, calcular o valor aproximado de Δt usando a média dos valores calculados adotando a altitude inicial e a final e comparar com os anteriores.