Seminar 1

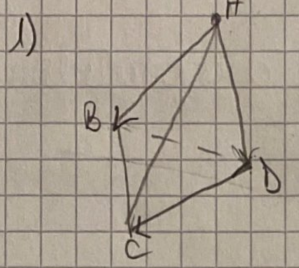
1.1. Se dă un tetraedru ABCD. Să se determine sumele de vectori

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$

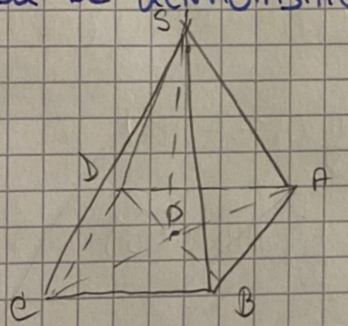
2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

1)



1.2. Se dă o piramidă cu vârful în S și baza un paralelogr ABCD ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să se demonstreze: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$



$\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}$

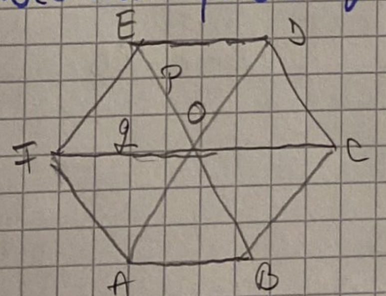
$\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}$

$=4\overrightarrow{SO}+\vec{0}=4\overrightarrow{SO}$

sau $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$ $\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

1.4 Punctul O este centrul unui hexagon regulat ABCDEF. Determinați descompunerile $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ în funcție de vectorii $p=\overrightarrow{OE}$ și $q=\overrightarrow{OF}$



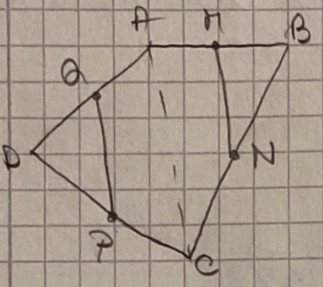
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FA}=q+\overrightarrow{EO}=q-p$

$\overrightarrow{OB}=-p$

$\overrightarrow{OC}=-q$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=p-q$

1.5. Demonstrați că dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor unui patrulater oarecare, atunci $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{0}$



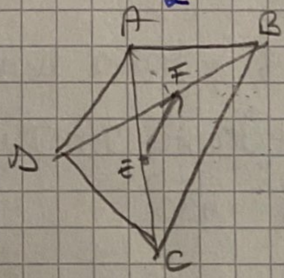
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$$

1.6. Punctele E și F sunt mijloacele diagonalelor unui patrulater ABCD. Demonstrați că

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$$



$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$

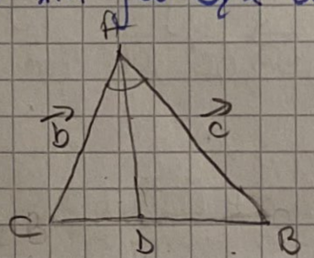
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$

$$\Rightarrow EF=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+BA)+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD})$$

$$EF=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$

1.9. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Determinați descompunerea vectorului $\overrightarrow{AD}$ în funcție de vectorii $c=\overrightarrow{AB}$ și $b=\overrightarrow{AC}$



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{c}+\overrightarrow{BD}$$

$$\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD} \qquad CD=a-BD$$

$$\frac{c}{BD}=\frac{b}{a-BD}\Leftrightarrow (a-BD)\cdot c=b\cdot BD$$

$$ac-c\cdot BD=b\cdot BD$$

$$ac=BD(b+c)\Rightarrow BD=\frac{ac}{b-c}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{a}$$

Scanned with CamScanner

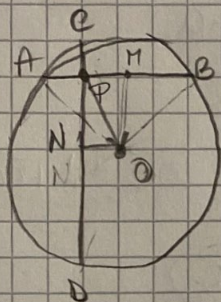
$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c}+\vec{a}=\vec{b} \quad \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{BD}=\frac{BD}{a}(\vec{b}-\vec{c})$

$\vec{BD}=\frac{\frac{a\cdot c}{b+c}(\vec{b}-\vec{c})}{a}=\frac{c}{b+c}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$

$\vec{AD}=\vec{c}+\frac{c}{b+c}(\vec{b}-\vec{c})=\frac{c}{b+c}\cdot\vec{b}-\frac{b}{b+c}\cdot\vec{c}$

1.10. Coardele AB și CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P. Să se demonstreze relația $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}=2\vec{PO}$



$\vec{PA}=\vec{PO}+\vec{OA}$

$\vec{PB}=\vec{PO}+\vec{OB}$

$\vec{PC}=\vec{PO}+\vec{OC}$

$\vec{PD}=\vec{PO}+\vec{OD}$

$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}=4\vec{PO}+\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}$

$\vec{OA}+\vec{OB}=2\vec{OM}$ (de două ori mediana care pleacă din origine)

$\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{ON}$

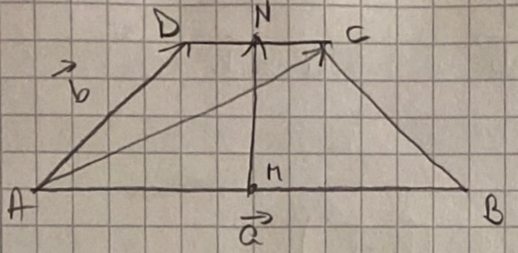
$\left.\begin{array}{l}\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2(\vec{OM}+\vec{ON}) \\ \text{OMPN este dreptunghi}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{OM}+\vec{ON}=\vec{OP}$

$\Downarrow$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{OP}$

$\Rightarrow \vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}=4\vec{PO}+2\vec{OP}=4\vec{PO}-2\vec{PO}=2\vec{PO}$

1.11. Se dă un trapez ABCD în care baza AB este de k ori $(k>1)$ mai mare decât baza mică CD. Determinați vectorii $\vec{AC}$, $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ în funcție de vectorii $\vec{AB}=a$ și $\vec{AD}=b$ unde M este mijlocul lui AB și N este mijlocul lui CD.



$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AB} + \frac{1}{k}\cdot\vec{AB} = \vec{b} + \frac{1}{k}\vec{a}$

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN}$

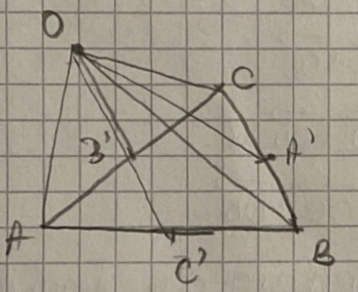
$= \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{DC}$

$\vec{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2k}\cdot\vec{a} = \frac{1-k}{2k}\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{k}\vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{1}{k} - 1\right)\vec{a} + \vec{b} - \frac{1-k}{k}\vec{a} + \vec{b}$

1.12. Fie A', B' și C' mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC și un punct oarecare O în planul triunghiului. Să se demonstreze relația

$\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$



$\vec{OA'} = \vec{OC} + \vec{CA'} = \vec{OC} + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$

$\vec{OB'} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC})$

$\vec{OC'} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$