Korrelation
Wahrscheinlichkeitsmodelle

Peter Büchel

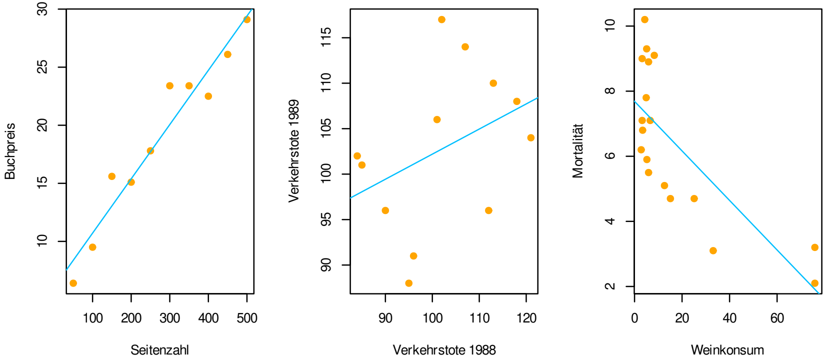
HSLU I

ASTAT: Block 04

Wie gut passt die Regressionsgerade?

- Regressionsgerade kann (fast) immer bestimmt werden

- Beispiele:



- Letzten beiden Beispiele: Regressionsgerade sagt sehr wenig über die wirkliche Verteilung der Punkte im Streudiagramm aus

- Dafür gibt es zwei Gründe:
  - Punkte folgen scheinbar gar keiner Gesetzmässigkeit
  - Punkte folgen einer nichtlinearen Gesetzmässigkeit
- Wie kann man feststellen, ob ein linearer Zusammenhang der Daten besteht oder nicht?
- Möglichkeit: Situation graphisch betrachten
- Ziel: Wert angeben, der den Zusammenhang numerisch beschreibt

Empirische Korrelation

- Numerischer Wert der *linearen* Abhängigkeit von zwei Grössen:

Empirische Korrelation

$$r = \frac{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + \ldots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})}{\sqrt{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_n - \overline{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2) \cdot (\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2)}}$$

- Empirische Korrelation: Dimensionslose Zahl zwischen -1 und $+1$
- Misst Stärke und Richtung der *linearen Abhängigkeit* zwischen Daten x und y

- $r = +1$: Punkte liegen auf steigender Geraden : $y = a + bx$ mit $a \in \mathbb{R}$ und ein $b > 0$

- $r = -1$: Punkte liegen auf fallender Geraden : $y = a + bx$ mit $a \in \mathbb{R}$ und ein $b < 0$

- Sind x und y unabhängig (d.h. kein Zusammenhang), so ist $r = 0$

Begründung

- Eigenschaften nicht herleiten, sondern nur graphisch veranschaulichen
- Betrachten Zähler der Korrelation (Kovarianz):

$$(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + \ldots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

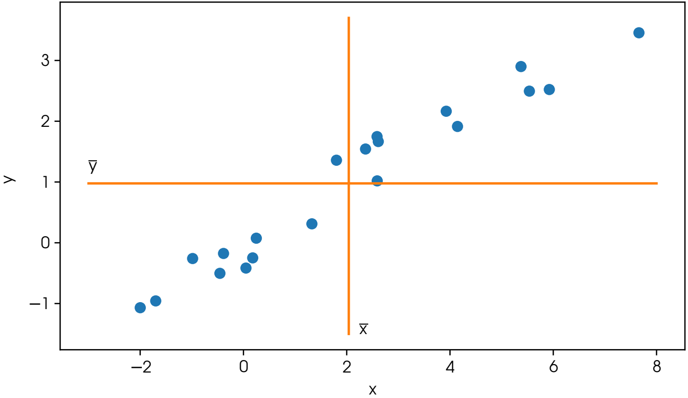
- Werden zeigen, dass diese Grösse:
  - grösser als 0 ist, wenn die Punktwolke einer steigenden Geraden folgt
  - kleiner als 0 ist, wenn die Punktwolke einer fallenden Geraden folgt
  - 0 ist, wenn kein Zusammenhang vorhanden ist
  - 0 sein kann, wenn kein linearer Zusammenhang vorhanden ist
- Nenner der Korrelation:

$$\sqrt{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_n - \overline{y})^2}$$

- Positiv und *normalisiert* Kovarianz: Werte liegen zwischen -1 und 1

Beispiel

- Abbildung:



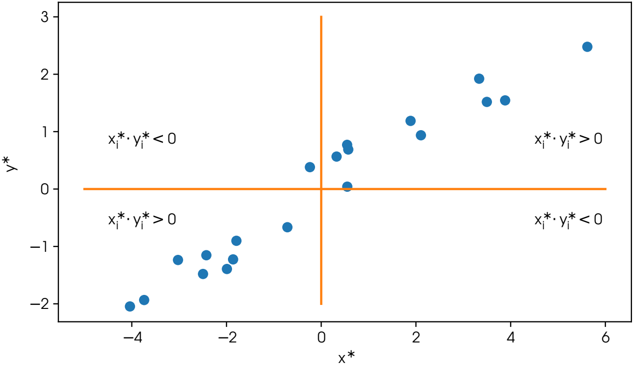
- Datenpunkte folgen mehr oder weniger einer Geraden
- Zu den Koordinatenachsen parallele Geraden $\overline{x}$ und $\overline{y}$ eingezeichnet

- Zähler der Korrelation:

$$\underbrace{(x_1 - \overline{x})}_{x_1^*}\underbrace{(y_1 - \overline{y})}_{y_1^*} + \ldots + \underbrace{(x_n - \overline{x})}_{x_n^*}\underbrace{(y_n - \overline{y})}_{y_n^*}$$

- Von x-Koordinaten der Punkte wird der Durchschnitt $\overline{x}$ subtrahiert
- Von y-Koordinaten der Punkte wird der Durchschnitt $\overline{y}$ subtrahiert

- Ursprung der Abb. Folie **??** wird in Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$ verschoben:



- Zähler der Korrelation sieht dann wie folgt aus:

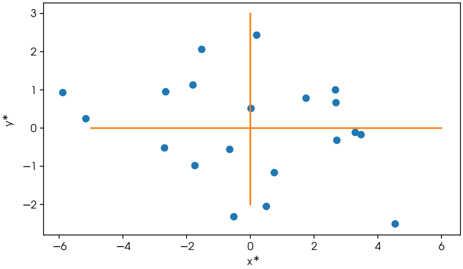
$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \ldots + x_n^* y_n^*$$

- Was bedeutet dies für die Punkte in Folie ???
  - Punkte im I. Quadranten (rechts oben):
    - Positive Koordinaten
    - $x_i^* \cdot y_i^*$ *positiv*
  - Punkte im II. Quadranten (links oben):
    - Negative x-Koordinate und eine positive y-Koordinate
    - $x_i^* \cdot y_i^*$ *negativ*
  - Punkte im III. Quadranten (links unten):
    - Negative x-Koordinate und negative y-Koordinate
    - $x_i^* \cdot y_i^*$ *positiv*
  - Punkte im IV. Quadranten (rechts unten):
    - Positive x-Koordinate und negative y-Koordinate
    - $x_i^* \cdot y_i^*$ *negativ*

- Abb. Folie **??**: Fast alle Punkte im I. und III. Quadranten
- $x_i^* y_i^* > 0$
- Somit auch
$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \ldots + x_n^* y_n^* > 0$$
- Punkte folgen fallender Gerade: Fast alle Punkte im II. und IV. Quadranten
- $x_i^* y_i^* < 0$
- Somit auch
$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \ldots + x_n^* y_n^* < 0$$

Beispiel

- Was passiert, wenn Punkte keinen Zusammenhang aufweisen?

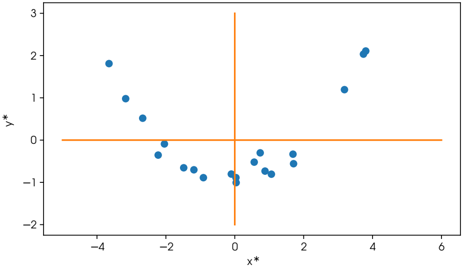


- Produkte $x_i^* y_i^*$ über alle Punkte aufaddiert heben sich in etwa auf
  - Hälfte aller Punkte im I. und III. Quadranten (Produkte positiv)
  - Andere Hälfte im II. und IV. Quadranten (Produkte negativ)
  - Produkte betragsmässig ähnlich
  - Damit gilt

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \ldots + x_n^* y_n^* \approx 0$$

Beispiel

- Wie sieht es für *quadratischen* Zusammenhang aus?



- Beträge der Produkte links und rechts von der y-Achse auf
- Es gilt

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \ldots + x_n^* y_n^* \approx 0$$

- Korrelationskoeffizient erkennt nur *lineare* Zusammenhänge

Berechnung von Korrelation mit R

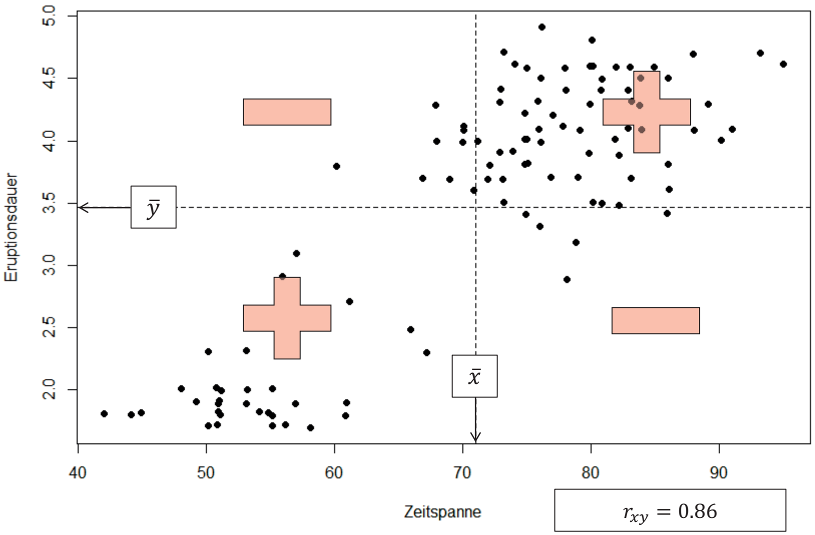
- Seitenzahl-Preis-Beispiel mit R

```r
cor(seiten, preis)
## [1] 0.9681122
```

- Wert sehr nahe bei 1: Starker linearer Zusammenhang

- Wert positiv: „Je mehr, desto mehr"-Zusammenhang

Abbildung: Old Faithful



Empirische Korrelation: Beispiele

- Beispiel Körpergrösse von Vater und Sohn: Erwarten hohen Korrelationskoeffizient, da Daten nahe Regressionsgerade

  $\rightarrow \quad 0.973$

- Verkehrsunfälle: Kein Zusammenhang: Korr.koeff. „nahe" 0

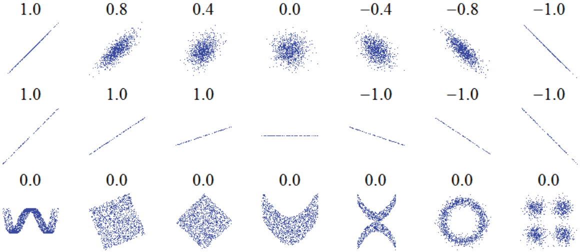
  $\rightarrow \quad 0.386$

- Weinkonsum:
  - Kein allzu grosser Korrelationskoeffizient (keine Gerade)
  - Sollte negativ sein, da mit steigendem Weinkonsum Mortalität sinkt

  $\rightarrow \quad -0.746$

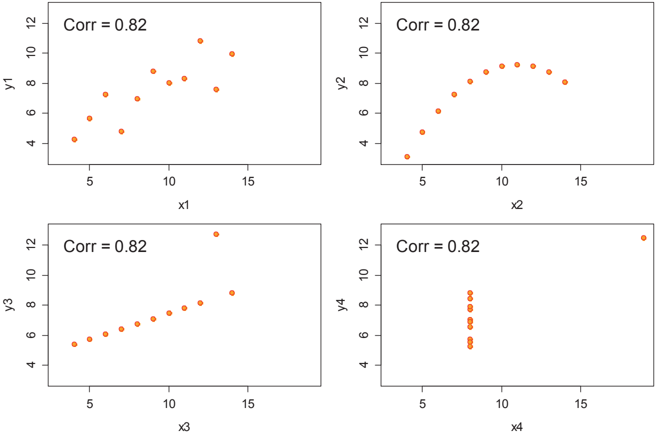
Empirische Korrelation: Bemerkungen

- Was heisst eigentlich „nahe" bei 0 oder „nahe" bei 1?
  - Das lässt sich allgemein nicht sagen
  - Hängt vom Problem und dem Gebiet ab
  - In Physik kann 0.9 sehr schlecht sein, in der Soziologie sehr gut
- Korrelation misst „nur" den *linearen Zusammenhang*
- Daher: Daten immer auch graphisch betrachten, statt sich „blind" auf Kennzahlen zu verlassen



Empirische Korrelation: Anscombe Plots

- Abbildung:



- Streudiagramme sehen sehr unterschiedlich aus, aber gleicher Korrelationskoeffizient

Wahrscheinlichkeit

- Alle haben intuitives Gefühl, was W'keit ist
  - W'keit mit einem fairen Würfel eine 4 zu würfeln, ist ein Sechstel
- Aber: Interpretation der W'keit überraschend schwierig
- Aussage „Es regnet morgen mit einer W'keit von 80 %"
- Alles andere als klar, was damit gemeint ist

Wahrscheinlichkeitsmodell

- *Zufallsexperimente*: Ausgang nicht exakt vorhersagbar ist:
  - Würfelwurf
  - Münzenwurf
  - Anzahl Anrufe in einem Callcenter
- *Wahrscheinlichkeitsmodell* besteht aus:
  - Ereignissen, die in einem solchen Experiment möglich sind
  - W'keiten, die die verschiedenen Ergebnisse haben
- Beispiel: Würfel werfen
  - Mögliche Ergebnisse: $1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - W'keit eine dieser Zahlen zu werfen: $\frac{1}{6}$ (sofern Würfel fair)

- Ein W'keitsmodell hat folgende Komponenten:
  - *Grundraum* Ω: Enthält alle möglichen Elementarereignisse ω
  - *Ereignisse* A, B, C: Teilmengen des Grundraums
  - *W'keiten* P, die zu den Ereignissen A, B, C gehören
- *Elementarereignisse*: *Mögliche* Ergebnisse (Ausgänge) des Experiments
- Zusammen bilden diese den Grundraum:

$$\Omega = \{\underbrace{\text{mögliche Elementarereignisse } \omega}_{\text{mögliche Ausgänge/Resultate}}\}$$

Beispiel: Würfelwurf

- Grundraum (die möglichen Ergebnisse)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Element $\omega = 2$ ist ein Elementarereignis
- Bedeutung: Beim Würfeln wurde die Zahl 2 geworfen
- Zahl 7: *Kein* Elementarereignis, da nicht im Grundraum Ω

Beispiel: Anrufe in Callcenter

- Anzahl Anrufe in einer Stunde in einem Callcenter
- Grundraum (zumindest theoretisch beliebig viele Anrufe möglich):

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Elementarereignis $\omega = 6$: 6 Anrufe in einer Stunde

Beispiel: Münzwurf

- 2-maliges Werfen einer Münze
- Bezeichnungen K : „Kopf" und Z : „Zahl"
- Alle möglichen Ergebnisse des Experimentes (Grundraum)

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

- Elementarereignis ist z.B. $\omega = KZ$

Ereignis

- *Ereignisse* allgemeiner und wichtiger als Elementarereignisse, bestehen aber aus diesen

- *Ereignis A*: Teilmenge von Ω:

$$A \subset \Omega$$

- „Ein Ereignis A tritt ein" bedeutet, dass Ergebnis ω des Experiments zu A gehört

Beispiel: 2-maliges Werfen einer Münze

- Ereignis A, wo genau einmal K geworfen wird
- Ereignis A besteht aus Elementarereignissen KZ und ZK
- Ereignis A ist dann die Menge

$$A = \{KZ, ZK\}$$

- Werfen ZZ: Ereignis A tritt *nicht* ein
- W'keit, dass A eintritt (falls Münze fair):

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Statistik: W'keiten oft mit P oder p bezeichnet

Beispiel: Würfeln

- Ereignis A: „Eine ungerade Zahl würfeln"
  - Dann ist
    $$A = \{1, 3, 5\}$$
  - Ereignis A tritt ein, wenn z.B. Zahl 5 gewürfelt wird
  - W'keit, dass A eintritt (fairer Würfel):
    $$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- Ereignis B: „Eine Zahl kleiner als 7 würfeln"
  - Das ist natürlich immer der Fall und somit ist
    $$B = \Omega$$
  - B heisst dann *sicheres* Ereignis
  - W'keit, dass B eintritt (fairer Würfel):
    $$P(B) = \frac{6}{6} = 1$$

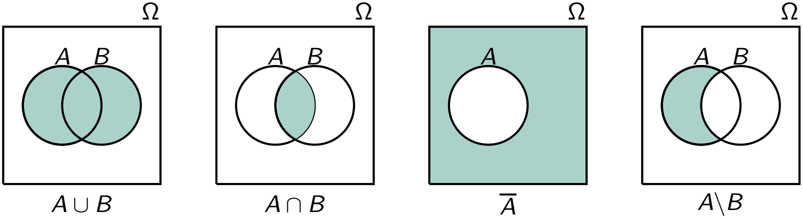
- Ereignis C: „Die Zahl 7 würfeln"
  - Dies ist unmöglich
$$C = \{\}$$
  - Leere Menge $\{\}$ (oder $\emptyset$) enthält kein Element
  - Heisst *unmögliches* Ereignis
  - W'keit, dass C eintritt (fairer Würfel):
$$P(C) = \frac{0}{6} = 0$$

Neue Mengen aus Bekannten

- Operationen der Mengenlehre für Ereignisse:

Name	Symbol	Bedeutung
Vereinigung	$A \cup B$	A *oder* B, nicht-exklusives „oder"
Schnittmenge	$A \cap B$	A *und* B
Komplement	$\overline{A}$	*nicht* A
Differenz	$A \backslash B = A \cap \overline{B}$	A *ohne* B

- Graphisch



Beispiel: Würfelwurf

- Ereignis A: Die geworfene Zahl ist gerade:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

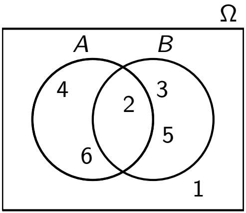
- Ereignis B: Die geworfene Zahl ist Primzahl:

$$B = \{2, 3, 5\}$$

- Ω wie gewohnt:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

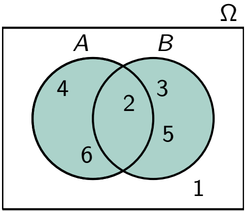
- Abbildung:



- *Vereinigung*: Alle Elemente, die entweder in A *oder* in B *oder* in beiden Mengen vorkommen:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

  - Abbildung:

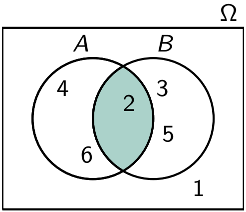


  - Element 2 kommt in Menge A *und* in Menge B vor

- *Schnittmenge*: Alle Elemente, die in A *und* in B vorkommen:

$$A \cap B = \{2\}$$

  - Abbildung:

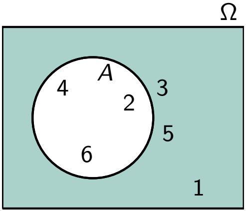


  - Element 2 einziges Element, das sowohl in Menge A wie auch in B vorkommt

- *Komplement*: Alle Elemente von Ω, die nicht in der entsprechenden Menge vorkommen:

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}; \qquad \overline{B} = \{1, 4, 6\}$$

  - Abbildung:

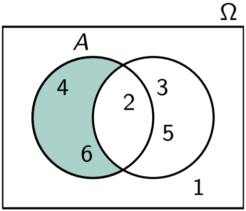


  - Menge $\overline{A}$ sind die ungeraden Zahlen

- *Differenz*: Alle Elemente der Menge A, die aber *nicht* in der Menge B vorkommen:

$$A \backslash B = \{4, 6\}$$

  - Abbildung:



  - Element 2 kommt sowohl in A, wie auch in B vor und gehört deswegen *nicht* zur Differenz

Axiome der Wahrscheinlichkeit

- Eigenschaften von W'keiten

Kolmogorov Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Jedem Ereignis A wird eine *W'keit* $P(A)$ zugeordnet, mit:

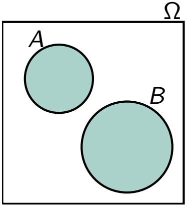
- A1: $P(A) \geq 0$
- A2: $P(\Omega) = 1$
- A3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad$ falls $A \cap B = \{\}$

- Bezeichnung $P(A)$: W'keit, dass das Ereignis A eintritt
- Ereignis A: „ungerade Zahl würfeln" (bei fairem Würfel)

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

- Buchstabe P steht für *probability*

- A1: Wahrscheinlichkeit kann nicht negativ sein
- A2: Mit $P(\Omega) = 1$: W'keiten eines Ereignisses zwischen 0 und 1
- Mathematik (Statistik): W'keiten praktisch nie in Prozenten angeben
- A3: Für zwei *disjunkte* Ereignisse:



  - W'keit, dass eines der beiden eintritt, gleich Addition W'keiten der beiden Ereignisse
  - A3 gilt *nicht*, falls die Ereignisse *nicht* disjunkt sind

- Beispiel Würfel fair: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$
- Dann $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- Wenden A3 an:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

- Kann nicht sein, da $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$
- Grund: $A \cap B = \{2\} \neq \{\}$

Beispiel

- Wurf zweier Münzen:

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

- Plausibel: Alle 4 Elemente gleich wahrscheinlich (faire Münze)
- Wegen $P(\Omega) = 1$ müssen sich die W'keiten zu eins aufaddieren:

$$P(KK) + P(KZ) + P(ZK) + P(ZZ) = 1$$

- Da alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich:

$$P(KK) = P(KZ) = P(ZK) = P(ZZ) = \frac{1}{4}$$

Rechenregeln aus Axiomen

Rechenregeln

Sind A, B und $A_1, \ldots A_n$ Ereignisse, dann gilt

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \text{für jedes } A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{für beliebige } A \text{ und } B$$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n) \quad \text{für beliebige } A_1, \ldots, A_n$$

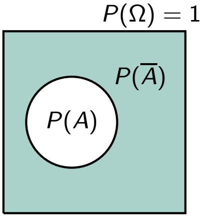
$$P(B) \leq P(A) \quad \text{für beliebige } A \text{ und } B \text{ mit } B \subseteq A$$

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(B) \quad \text{für beliebige } A \text{ und } B \text{ mit } B \subseteq A$$

- W'keiten als Flächen im Venn-Diagramm vorstellen
- Totalfläche von Ω gleich 1 oder $P(\Omega) = 1$
- Regeln klar

1. Regel

- Abbildung:



- $P(A)$: Flächeninhalt der Fläche A
- $P(\overline{A})$: Flächeninhalt der restlichen Fläche in Ω
- Es gilt also offensichtlich:

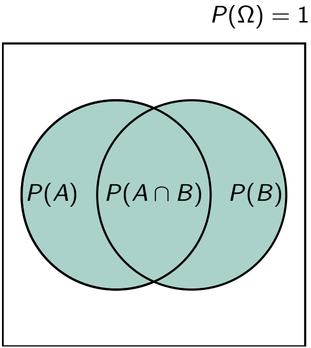
$$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$$

- Und damit:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2. Regel

- Abbildung:



- Schnittmenge $A \cap B$ mit $P(A) + P(B)$ doppelt gezählt: Einmal abziehen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Diese Regel ist die Verallgemeinerung von Axiom A3
- Sind die Mengen A und B disjunkt, so gilt:

$$A \cap B = \{\}$$

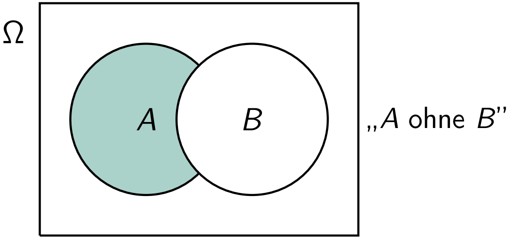
- Mit der Regel oben:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(\{\}) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

- Dies ist genau Axiom A3, da die W'keit des unmöglichen Ereignisses $\{\}$ gleich 0 ist

Knobelaufgabe

$$P(A \setminus B) = \ldots$$



1. $P(A) - P(B)$
2. $P(A) + P(B)$
3. $P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle

- Heisst: Grundraum endlich oder unendlich und diskret
- Begriff „diskret": *Endliche* Menge, wie:

$$\Omega = \{0, 1, \dots, 10\}$$

- *Unendliche*, aber trotzdem *diskrete* Menge, wie

$$\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Menge $\Omega = \mathbb{R}$ (Menge aller Dezimalbrüche, Zahlengerade) ist *nicht* diskret
- Wird später für Messdaten eine sehr wichtige Rolle spielen

Wahrscheinlichkeiten für diskrete Modelle

- Berechnung von W'keiten für diskrete Modelle

Im diskreten Fall ist die W'keit eines Ereignisses

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

durch die W'keiten der zugehörigen Elementarereignisse $P(\omega)$ festgelegt:

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

- Alle W'keiten der Elementarereignisse aus Ereignis A werden addiert

Beispiel: Unfairer Würfel

- W'keiten, unterschiedliche Zahlen zu werfen, sind nicht gleich:

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- Es gilt:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Für Ereignis $A = \{1, 2, 4\}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1) + P(2) + P(4) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- Beachte: Resultat nicht gleich, wenn Würfel fair wäre: $\frac{1}{2}$

- Bsp: Berechne W'keit, eine Zahl kleiner als 6 zu würfeln

- Ereignis B:

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Zugehörige W'keit:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

- Einfacher mit *Gegenw'keit*: $P(\overline{B})$

- 1. Rechenregel: Komplement $\overline{B}$ von B:

$$\overline{B} = \{6\}$$

- Dann gilt:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Modell von Laplace

- Annahme: Jedes Elementarereignis hat die gleiche W'keit
- Ereignis $E = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g\}$;
- Grundraum m Elemente
- W'keiten addieren sich zu 1 und deshalb:

$$P(\omega_k) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{m}$$

Für ein Ereignis E im Laplace Modell gilt also

$$P(E) = \frac{g}{m} = \sum_{k:\ \omega_k \in E} P(\{\omega_k\})$$

- Man teilt die Anzahl der „*günstigen*" Elementarereignisse durch die Anzahl der „*möglichen*" Elementarereignisse

Beispiel: Laplace Modell

- Es werden zwei verschiedene (blau und rot) Würfel geworfen

- Wie gross ist die W'keit, dass die Augensumme 7 ergibt?

- Elementarereignis beschreibt die Augenzahlen auf beiden Würfeln

- Ergebnis in der Form 14 schreiben

- Ergebnis 14 ist *nicht* gleich 41

- Elementarereignisse:

$$\Omega = \{11, 12, \ldots, 16, 21 \ldots, 65, 66\}$$

- Anzahl Elementarereignisse:

$$\left|\Omega\right| = 36$$

- Ereignis E: Augensumme 7 wird gewürfelt
- Es gibt davon 6 Elementarereignisse:

$$E = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$$

- Alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich: W'keit für Ereignis E:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Stochastische Unabhängigkeit

- Gesehen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Frage: Wie berechnet man $P(A \cap B)$?
  - Leider keine allgemeine Regel
  - Wenn W'keiten $P(A)$ und $P(B)$ bekannt, so ist W'keit $P(A \cap B)$ i. A. nicht aus $P(A)$ und $P(B)$ berechenbar

- Wichtiger Spezialfall: Berechnung von $P(A \cap B)$ aus $P(A)$ und $P(B)$ mit Produktformel:

> Sind Ereignisse A und B *stochastisch unabhängig*, so gilt
>
> $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Was heisst hier aber „stochastisch unabhängig"?
- Ausgang des Ereignisses A keinen Einfluss auf den Ausgang des Ereignisses B hat und umgekehrt

Beispiel

- Ereignis A: Mit fairem Würfel eine eins oder zwei zu werfen
- Ereignis B: Kopf beim Werfen einer fairen Münze
- Werfen einer Münze keinen Einfluss auf das Resultat beim Würfelwurf
- Formel oben verwenden:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Beispiel

- Ereignis E: Tokyo wird an bestimmten Tag durch Erdbeben erschüttert
- Ereignis F: An diesem Tag fegt ein Taifun über die Stadt
- Erdbeben wohl kaum Einfluss auf das Entstehen eines Taifuns
- Beide Ereignisse sind also stochastisch unabhängig

Beispiel

- Werfen eine Münze zweimal nacheinander
- Resultat des ersten Wurfes hat kaum Einfluss auf Resultat des zweiten Wurfes
- Dies allerdings nur richtig, wenn Münze ideal
- Reale Münze: Durch Aufprall minimalste Veränderungen
- Diese haben Einfluss auf die Wurfw'keit für Kopf (oder Zahl) beim nächsten Wurf
- Veränderungen aber so klein, dass sie vernachlässigbar sind

Beispiel

- In Topf 20 Lose mit 5 Gewinnen
- Ziehen zweimal hintereinander *ohne Zurücklegen*
- Ereignis A: Gewinn beim ersten Ziehen
- Ereignis B: Gewinn beim zweiten Ziehen
- Diese beiden Ereignisse sind *nicht* stochastisch unabhängig
- Ziehen beim ersten Ziehen ein Gewinnlos: W'keit, dass A eintrifft:

$$P(A) = \frac{5}{20}$$

- Bei 2. Ziehung fehlt ein Gewinn: W'keit dann zu gewinnen:

$$P(B) = \frac{4}{19}$$

- Ziehen ersten Ziehung Niete: W'keit bei der 2. Ziehung zu gewinnen:

$$P(B) = \frac{5}{19}$$

- Je nachdem, ob Ereignis A eintrifft oder nicht, ändert sich die W'keit für das Eintreffen von B

- Ereignisse sind also nicht stochastisch unabhängig

Beispiel

- Ereignis A: Morgen ist schönes Wetter
- Ereignis B: Person hat morgen gute Laune
- Die meisten Menschen sind bei schönem Wetter besser aufgelegt, als bei schlechtem Wetter
- Eintreffen von A hat Einfluss auf Eintreffen von B
- Die Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig

Achtung

- Formel
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
gilt *nur*, falls Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind

- Sind die Ereignisse *nicht* stochastisch unabhängig, so gibt es keine allgemeine Formel für $P(A \cap B)$