Bedingte Wahrscheinlichkeit

Peter Büchel

HSLU I

ASTAT: Block 06

Beispiel für bedingte Wahrscheinlichkeit

- Betrachten Gruppe von 20 Personen:
  - Einige sind Raucher, die anderen Nichtraucher
  - Einige sind Frauen, der Resten Männer

- Bezeichnungen:

  F: Frau, M: Mann, R: Raucher, $\overline{R}$: Nichtraucher

- Tabelle:

$\left|R \cap M\right|$ $\left|R\right|$

	M	F	
R	3	1	4
$\overline{R}$	9	7	16
	12	8	20

- Es hat:
    - 4 Raucher und 16 Nichtraucher
    - 8 Frauen und 12 Männer
- Wert 3 links oben: Anzahl Personen, die Männer sind *und* rauchen
- Schreibweise:

$$\left| R \cap M \right| = 3$$

- Für W'keiten: Dividieren alle Werte in Tabelle durch 20
- Tabelle mit W'keiten:

$P(R \cap M)$ $P(R)$

	M	F	
R	0.15	0.05	0.2
$\overline{R}$	0.45	0.35	0.8
	0.6	0.4	1

- Wert 0.15 links oben: W'keit, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Mann ist und raucht

- Berechnung:

$$P(R \cap M) = \frac{|R \cap M|}{|\Omega|} = \frac{3}{20} = 0.15$$

- Wert 0.2 links aussen: W'keit, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Raucher ist

- Also:

$$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = 0.2$$

- Betrachten nur ein Teil der Tabelle $\quad\rightarrow\quad$ Raucher

	M	F	
R	0.15	0.05	0.2
$\overline{R}$	0.45	0.35	0.8
	0.6	0.4	1

- Können nach W'keit fragen, dass eine zufällig ausgewählte Person *unter den* Rauchern ein Mann ist

- Aus 1. Tabelle (absolute Zahlen) ist diese W'keit:

$$\frac{|R \cap M|}{|R|} = \frac{3}{4} = 0.75$$

- Mit 2. Tabelle (W'keiten):

$$\frac{P(R \cap M)}{P(R)} = \frac{0.15}{0.20} = 0.75$$

- Das heisst, dass 75 % der Raucher sind Männer

- Diese W'keit heisst *bedingte Wahrscheinlichkeit*

- Bezeichnung:

$$P(M \mid R)$$

- Begriff „bedingt”: Nicht die gesamte Grundmenge betrachten, sondern nur ein Teil davon

- Neue Grundmenge hier: Raucher R
- Dies ist in $P(M \mid R)$ die Grösse nach dem Längsstrich
- Es gilt dann:

$$P(M \mid R) = \frac{P(R \cap M)}{P(R)} \qquad (*)$$

- Formel wird als Definition der bedingte W'keit verwendet

- Berechnen bedingte W'keit:

$$P(R \mid M)$$

- W'keit, dass ein zufällig ausgewählter Mann ein Raucher ist

- Tabelle: Nur Männer werden berücksichtigt werden

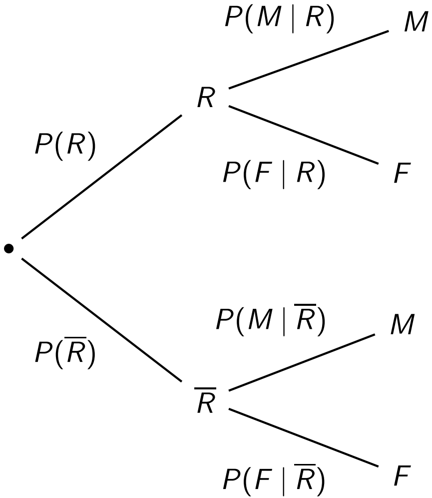
	M	F	
R	0.15	0.05	0.2
$\overline{R}$	0.45	0.35	0.8
	0.6	0.4	1

- Berechnung dieser W'keit: Vertauschen in Gleichung $(*)$ die Variable M durch R

- Resultat:

$$P(R \mid M) = \frac{P(M \cap R)}{P(M)} = \frac{P(R \cap M)}{P(M)} = \frac{0.15}{0.6} = 0.25$$

Baumdiagramm

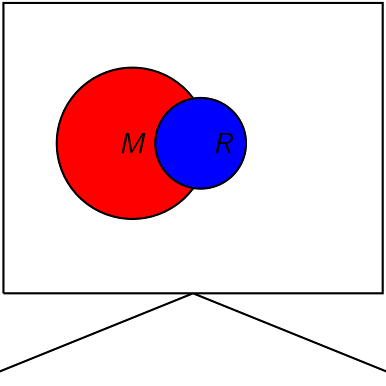


$$\rightarrow \quad P(M \cap R) = P(R)P(M \mid R)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ω: Studenten dieser VL

M: Männlich
$P(M)$



R: Raucher
$P(R)$

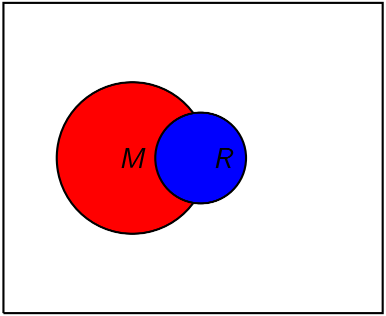
$P(R|M)$
Wa. für Raucher
wenn ein Mann gewählt wurde

$P(M|R)$
Wa. für Mann
wenn ein Raucher gewählt wurde

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ω: Studenten dieser VL

M: Männlich $P(M)$

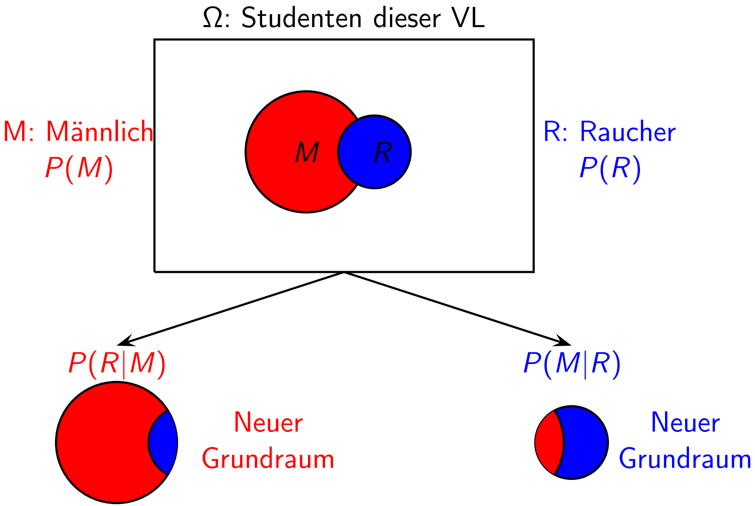


R: Raucher $P(R)$

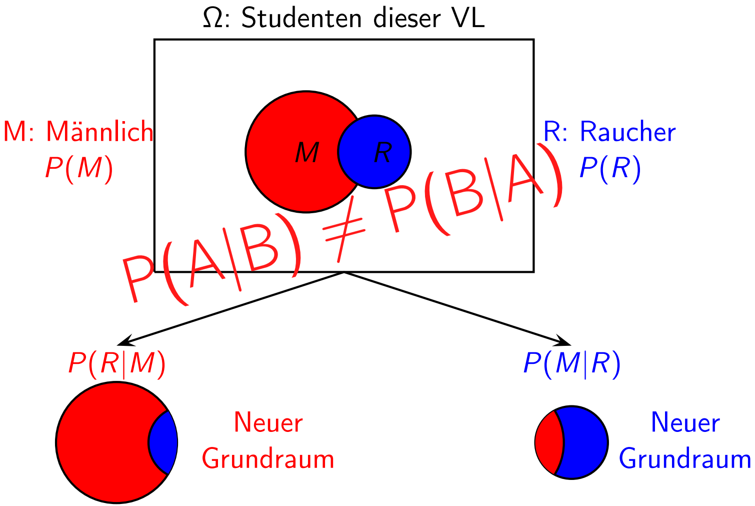
Welche Aussagen sind korrekt?

1. $P(M|R) = P(R|M)$
2. $P(M|R) > P(R|M)$
3. $P(M|R) < P(R|M)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit



Bedingte Wahrscheinlichkeit

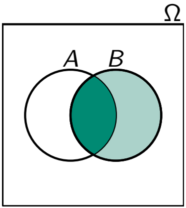


Bedingte Wahrscheinlichkeit: Definition

- Die *bedingte W'keit* ist die W'keit, dass das Ereignis A eintritt, wenn man schon weiss, dass B eingetreten ist
- Bezeichnung:
$$P(A \mid B)$$
- Längsstrich wird als „unter der Bedingung" gelesen
- Bedingte W'keit $P(A \mid B)$ wird definiert durch
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- Interpretation: $P(A \mid B)$ ist die W'keit für das Ereignis A, wenn man weiss, dass das Ereignis B schon eingetroffen ist

Verdeutlichung der Formel mit Flächen

- Graphisch:



- Es ist $|\Omega| = 1$
- $P(A \mid B)$ Flächeninhalt der dunkel gefärbten Flächen
- $P(B)$ Flächeninhalt der gesamten gefärbten Fläche B
- Anteil der dunkelgefärbten Fläche zur gefärbten Fläche ist:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Beispiel: Medizinischer Test

- Medizinischer Test soll für eine Krankheit feststellen, ob eine Person an dieser Krankheit erkrankt ist oder nicht
- Natürlich ist dieser Test nicht ganz genau:
  - Zeigt manchmal die Krankheit an, obwohl die Person gesund ist
  - Er zeigt die Krankheit nicht an, obwohl die Person krank ist
- Fragestellung:
  - Sie gehen zum Arzt und machen diesen Test auf eine tödliche Krankheit
  - Test ist positiv, d.h. Sie haben gemäss dem Test die Krankheit, müssen aber nicht unbedingt krank sein
  - Wie gross ist die W'keit, dass Sie wirklich krank sind?

- Bezeichnungen:
  - D: Krankheit ist vorhanden; $\overline{D}$: Krankheit ist nicht vorhanden
  - $+$: Test zeigt Krankheit an; $-$: Test zeigt Krankheit nicht an

- W'keiten in Tabelle sind durch Versuche bekannt

	D	$\overline{D}$
$+$	0.009	0.099
$-$	0.001	0.891

- Z.B.: W'keit, dass Krankheit vorhanden *und* Test positiv ausfällt

$$P(D \cap +) = 0.009$$

- Diese W'keit ist recht klein
- Grund: Nur kleiner Prozentsatz der Bevölkerung hat Krankheit
- Verschiedene bedingte W'keiten:
    - $P(+|D)$: W'keit, dass ein Kranker auch wirklich positiv getestet wird
    - $P(-|\overline{D})$: W'keit, dass ein Gesunder richtigerweise negativ getestet wird
    - $P(D|+)$: W'keit, dass positiv Getesteter auch wirklich krank ist
    - etc.
- Berechnen zuerst die W'keit $P(+|D)$:

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.001} = 0.9$$

- Für $P(D)$ wurde folgende Tatsache benützt

$$P(D) = P(D \cap +) + P(D \cap -) = 0.009 + 0.001$$

- Summe der Einträge in der Tabelle in der Spalte unter D
- Die Kranken sind entweder positiv oder negativ getestet
- Bedingte W'keit $P(-|\overline{D})$:

$$P(-|\overline{D}) = \frac{P(- \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.891}{0.891 + 0.099} = 0.9$$

- Scheinbar ist dieser Test recht genau

- Kranke Personen werden zu 90 % als positiv eingestuft, und gesunde Personen werden zu 90 % als negativ eingestuft

- Fragestellung aber auch umkehren

- Angenommen, Sie gehen zu einem Test und dieser wird als positiv eingestuft

- Wie gross ist die W'keit, dass Sie die Krankheit wirklich haben?

- Die meisten Leute würden 0.9 antworten

- Müssen Sie sich also grosse Sorgen machen und das Testament schreiben oder einer Sterbehilfeorganisation beitreten?

- Die *richtige* Antwort ist die bedingte W'keit $P(D|+)$:

$$P(D|+) = \frac{P(+ \cap D)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} = 0.08$$

- Was bedeutet nun dieses Resultat?
- Die bedingte W'keit $P(D|+)$ ist die W'keit, dass man bei einem positiven Test auch wirklich krank ist
- Diese beträgt aber nur 8 %
- Bei positivem Test haben Sie also nur zu 8 % auch wirklich die Krankheit
- Ein positiver Test sagt hier also sehr wenig darüber aus, ob man die Krankheit hat oder nicht

- Die Frage ist nun, warum ist dies so
- Grund: Krankheit *selten*
- Numerisches Beispiel: Untersuchen 100 000 Personen
  - 1000 Personen haben die Krankheit (1 %)
  - 90 % dieser Personen werden positiv getestet: 900 Personen
  - 99 000 haben die Krankheit nicht
  - 10 % dieser Personen werden positiv getestet: 9900 Personen
  - Anzahl positiv Getesteter:

$$900 + 9900 = 10\,800$$

  - Unter diesen positiv getesteten sind aber bei weitem mehr Gesunde, die fälschlicherweise positiv getestet wurden
  - W'keit, dass eine positiv getestete Person auch wirklich krank ist:

$$\frac{900}{10\,800} = 0.0833$$

Bayes Theorem

Bayes' Theorem

Nützlicher Zusammenhang zwischen $P(A \mid B)$ und $P(B \mid A)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Beispiel: Bayes Theorem liefert die gleiche Lösung wie vorher:

$$P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+)} = \frac{0.9 \cdot (0.009 + 0.001)}{0.009 + 0.099} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} = 0.08$$

Herleitung

- Zweimalige Anwendung der Definition der bedingten W'keit
  - Es gilt:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A)$$

  - und:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

- Da $A \cap B = B \cap A$, gilt:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

- Und somit gilt auch

$$P(B \mid A)P(A) = P(A \mid B)P(B)$$

- Dividieren beide Seiten durch $P(B)$ und erhalten Bayes Theorem:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

- Weiterer nützlicher Begriff: *Totale Wahrscheinlichkeit*
- Menge A in Mengen $A_1, \ldots, A_k$ unterteilt, die miteinander keine Schnittmenge haben und zusammen (Vereinigung) die ganze Menge A bilden
- Eine solche Aufteilung heisst *Partitionierung*
- Für den Würfelwurf ist folgende Partitionierung möglich:

$$A_1 = \{1\}, \qquad A_2 = \{2, 4\}, \qquad A_3 = \{3, 5, 6\}$$

- Es gilt also:

$$A_1 \cap A_2 = \{\}; \quad A_1 \cap A_3 = \{\}; \quad A_2 \cap A_3 = \{\}$$

und

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

- Es gilt dann das

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

Für Partionierung $A_1, \ldots, A_k$ und jedes beliebige Ereignis B gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_k)P(A_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B|A_k)P(A_k) \end{aligned}$$

- $k = 2$:

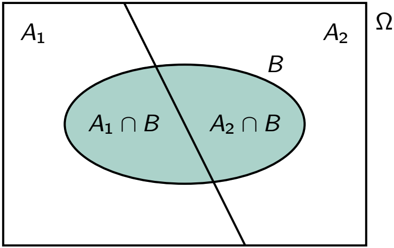
$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$$

- $k = 3$:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

Herleitung

- Fall $k = 2$
- Graphische Darstellung:



- Mengen A_1 und A_2 bilden eine Partition von Ω
- Es gilt also:

$$A_1 \cup A_2 = \Omega \qquad \text{und} \qquad A_1 \cap A_2 = \{\}$$

- Menge B in zwei Teile aufteilt: $A_1 \cap B$ und $A_2 \cap B$
- Es gilt also:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

- Für W'keit gilt:

$$P(B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))$$

- Es gilt:

$$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \{\}$$

- Rechenregel:

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) \end{aligned}$$

- Rechte Seite: Definition der bedingten W'keiten anwenden:

$$P(B \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} \quad \Rightarrow \quad P(A_1 \cap B) = P(B \mid A_1)P(A_1)$$

- Entsprechende Formel gilt für $P(A_2 \cap B)$

- Oben einsetzen: Gesetz der totalen W'keit für $k = 2$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) \\ &= P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) \end{aligned}$$

Beispiel: Spam-Mail

- Teilen Emails in drei Kategorien ein:

$$A_1 : \text{„spam''}, \quad A_2 : \text{„niedrige Priorität''}, \quad A_3 : \text{„hohe Priorität''}$$

- Aus früheren Beobachtungen bekannt:

$$P(A_1) = 0.7, \qquad P(A_2) = 0.2, \qquad \text{und} \qquad P(A_3) = 0.1$$

- Es gilt

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

  wie es bei einer Partitionierung auch sein sollte

- Ereignis B: Wort „free" taucht in der Email auf

- Dieses Wort kommt sehr oft in Spam-Mails vor, aber nicht nur
- Von früheren Beobachtungen bekannt:

$$P(B|A_1) = 0.9, \quad P(B|A_2) = 0.01, \quad \text{und} \quad P(B|A_3) = 0.01$$

- Hier ergibt die Summe nicht 1
- Dies sind die W'keiten, mit der das Wort „free" in den drei Mailkategorien vorkommt
- Angenommen, es kommt eine Email an, die das Wort „free" enthält
- Wie gross ist die W'keit, dass es sich um Spam handelt?

- Lösung mit Bayes Theorem und Gesetz der totalen W'keit:

$$
\begin{aligned}
P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.7}{(0.9 \cdot 0.7) + (0.01 \cdot 0.2) + (0.01 \cdot 0.1)} \\
&= 0.995
\end{aligned}
$$

- Viele Spamfilter basieren tatsächlich auf diesem Prinzip
- Mails werden nach Worten wie „free", „credit", etc. durchsucht, die häufig in Spam-Mails vorkommen, in anderen aber eher nicht

Beispiel

- Einige Kinder werden mit Down-Syndrom geboren
- Es gibt Tests, die schwangeren Frauen machen können, ob ihr Baby an dieser Krankheit leiden könnte
- Untersuchung (Universität Liverpool), wie gut die Testergebnisse von den Beteiligten, d.h. den schwangeren Frauen, ihren Lebenspartnern, Hebammen und Gynäkologen, interpretiert werden
- 85 Personen wurde folgendes Szenario gezeigt:

  Der Serumtest untersucht schwangere Frauen auf Babys mit Down-Syndrom. Der Test ist ein sehr guter, aber nicht perfekter Test. Ungefähr 1 % der Babys haben das Down-Syndrom. Wenn das Baby das Down-Syndrom hat, besteht eine 90-prozentige Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis positiv ausfällt. Wenn das Baby nicht betroffen ist, besteht immer noch eine 1 % Chance, dass das Ergebnis positiv ist. Eine schwangere Frau wurde getestet und das Ergebnis ist positiv. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Baby tatsächlich das Down-Syndrom hat?

- Resultat, wie gut die 85 Personen abgeschnitten haben:

	richtig	zu hoch	zu niedrig	
Schwangere Frauen	1	15	6	22
Lebenspartner	3	10	7	20
Hebammen	0	10	12	22
Gynäkologen	1	16	4	21
	5	51	29	85

- Nur fünf der 85 gaben die richtige Antwort
- Die Angehörigen der Gesundheitsberufe waren nicht besser als die schwangeren Frauen und ihrer Lebenspartner
- Besonders bemerkenswert: Nur einer von 21 Gynäkologen erhielt die richtige Antwort

- Anderen Gruppe von 81 Personen: Alternatives Szenario gezeigt:

  Der Serumtest untersucht schwangere Frauen auf Babys mit Down-Syndrom. Der Test ist ein sehr guter, aber nicht perfekter Test. Etwa 100 von 10 000 *Babys haben das Down-Syndrom. Von diesen 100 Babys mit Down-Syndrom werden 90 ein positives Testergebnis haben. Von den verbleibenden 9900 nicht betroffenen Babys werden immer noch 99 ein positives Testergebnis haben. Wie viele schwangere Frauen, die ein positives Testergebnis haben, bekommen tatsächlich ein Baby mit Down-Syndrom?*

- Ergebnis:

	richtig	zu hoch	zu niedrig	
Schwangere Frauen	3	3	10	21
Lebenspartner	3	8	9	20
Hebammen	0	7	13	20
Gynäkologen	13	3	4	20
	19	26	36	81

- Eindeutig eine Verbesserung

- Neuformulierung des Szenarios: Absolute Zahlen anstatt Prozenten verwendet

- Macht es zu einem leichteren Problem

- Muss nur die beiden Zahlen 90 und 99 herauslesen:

$$\frac{90}{90+99} \approx 48\,\%$$

- Aber: Immer noch erhielt nur etwa ein Viertel die richtige Antwort

- Immerhin schnitten die Gynäkologen deutlich besser ab

Repetition: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zufallsvariable X: Ordnet jedem Zufallsexperiment genau eine Zahl zu
- Wir können somit X auch als *Funktion* auffassen
- Beispiel: Zufallsvariable X ordnet einer zufällig ausgewählten, in der Schweiz lebenden Person, die Körpergrösse in cm zu
- Hier: Körpergrösse wird auf Zentimeter gerundet
- *Definitionsmenge* dieser Zufallsvariable X: Menge aller in der Schweiz lebenden Personen
- Zufallsvariable X kann nur folgende Werte annehmen (*Wertemenge*)

$$W_X = \{0, 1, 2, \ldots, 500\}$$

- Wertebereich absichtlich zu gross gewählt, damit auch sicher alle vorkommenden Werte dabei sind
- Wertemenge besteht also nur aus endlich vielen ganzen Zahlen
- Eine solche Menge heisst *diskret*
- Wichtig: Wir können *keinen* Wert zwischen zwei Werten der Wertemenge auswählen können
- Die Menge ist „löchrig"
- Dies kann man als saloppe Definition von „diskret" auffassen

- Zufallsvariable X: Misst die Körpergrösse einer zufällig ausgewählten Person
- Wählen nun zufällig (deshalb Zufallsvariable) eine Person aus
- Name der Person: *Tabea*
- Annahme: Jeder Name kommt nur genau einmal vor, was natürlich nicht der Fall ist
- Aber hätten auch die AHV-Nummer wählen können, die eindeutig ist.
- Tabea Einzigartig hat eine Körpergrösse 166 cm (auf cm gerundet)
- Formulierung mit Zufallsvariable:

$$X(\text{Tabea}) = 166$$

- Auswahl einer weiteren Person: *Tadeo* mit Körpergrösse von 176 cm

- Schreiben:
$$X(\text{Tadeo}) = 176$$

- Dies können wir mit jeder in der Schweiz lebenden Person machen

- Ausdruck
$$X = 174$$
beschreibt das *Ereignis* eine Person ausgesucht zu haben, die eine gerundete Körpergrösse von 174 cm hat

- Wir sprechen von einer *Realisierung* $x = 174$ von X

- *Unterschied*: Gross- und Kleinschreibung:
  - $x = 174$ ist eine Zahl
  - $X = 174$ ist eine Menge (Personen mit gerundeter Körpergrösse 174 cm)

- Diesem Ereignis kann man eine Wahrscheinlichkeit zuordnen:

$$P(X = 174)$$

- Berechnung: Anzahl Personen mit gerundeter Körpergrösse von 174 cm durch die Anzahl der in der Schweiz lebenden Personen dividieren

- Auf diese Weise können wir alle Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = x)$$

berechnen, wobei x jeden Wert im Wertebereich annehmen kann.

- Insbesondere ist

$$P(X = 500) = 0$$

da es keine Person mit so einer Körpergrösse gibt.

- Deswegen spielt es auch keine Rolle, wenn Wertemenge viel zu gross gewählt wird

- Wir können weitere Wahrscheinlichkeiten bestimmen

- So ist
$$P(X \leq 170)$$
die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person eine gerundete Körpergrösse von 170 cm *oder weniger* hat

- Beachten Sie, dass die *nicht* der Wahrscheinlichkeit
$$P(X < 170)$$
entspricht

- Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person eine gerundete Körpergrösse *kleiner als* 170 cm hat. Die Körpergrösse 170 cm gehört hier *nicht* dazu.

- Wichtig: Es gilt z. B.

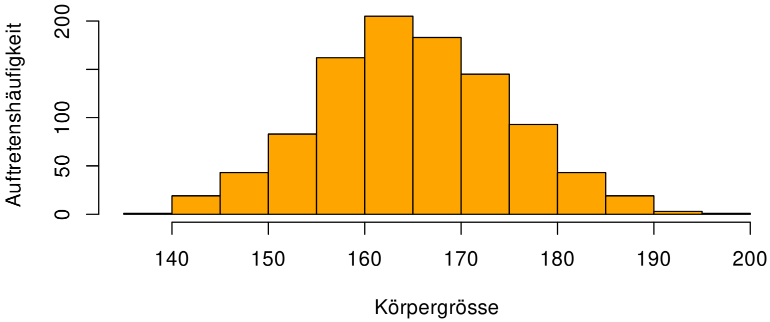
$$P(X < 160) \leq P(X < 170)$$

- W'keit eine zufällig eine Person auszuwählen, die kleiner als 160 cm ist, ist kleiner gleich, als dass sie kleiner als 160 cm ist

- Wichtig: Alle W'keiten der Verteilung aufaddiert, ergibt 1:

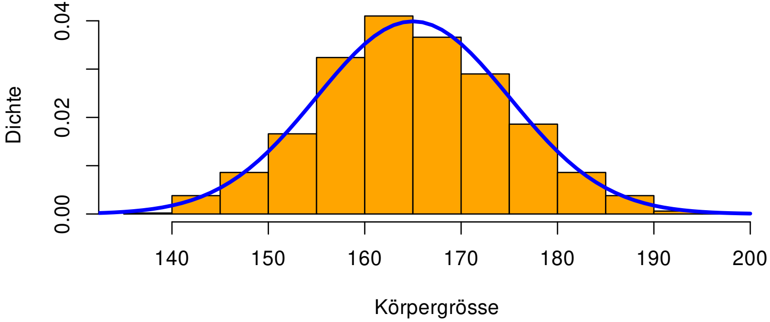
$$P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 499) + P(X = 500) = 1$$

- Wählen zufällig (siehe DoE) 1000 erwachsene Frauen aus
- Körpergrösse messen und ein Histogramm erstellen



- *Form* des Histogrammes sehr typisch $\rightarrow$ kommt recht häufig vor
- In Mitte Balken hoch
- Werden immer kleiner, je weiter sie von Mitte entfernt sind

- Versuchen Kurve einzuzeichnen, die Histogramm möglichst gut folgt



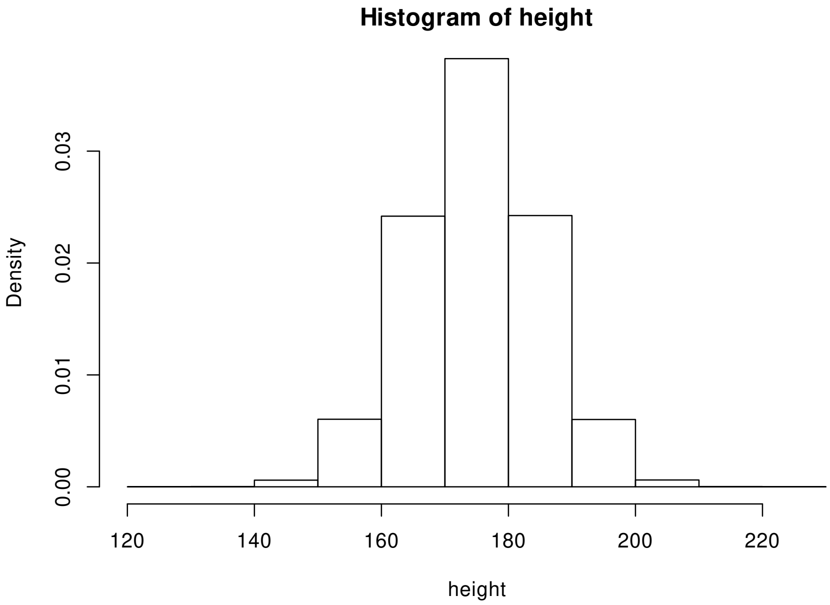
- Auf vertikaler Achse Dichten auftragen $\rightarrow$ Fläche von Histogramm 1

- Blaue Kurve heisst *Normalverteilungskurve*

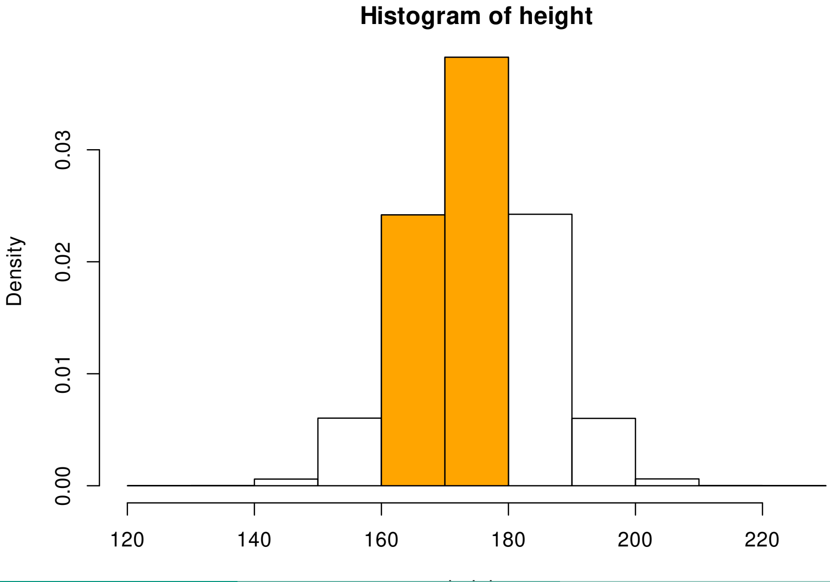
Von diskreter zu kontinuierlicher W'keitsverteilung

- Simulation der Körpergrösse (in cm) von einer Million Personen
- Zeichnen Histogramm dieser Grössen auf
- Annahme: Körpergrösse jeder Person so genau wie möglich bekannt
- Histogramm unten normalisiert: Summe der Fläche aller Balken ist 1
- Beginnen mit Balkenbreite von 10 cm

- Histogramm:

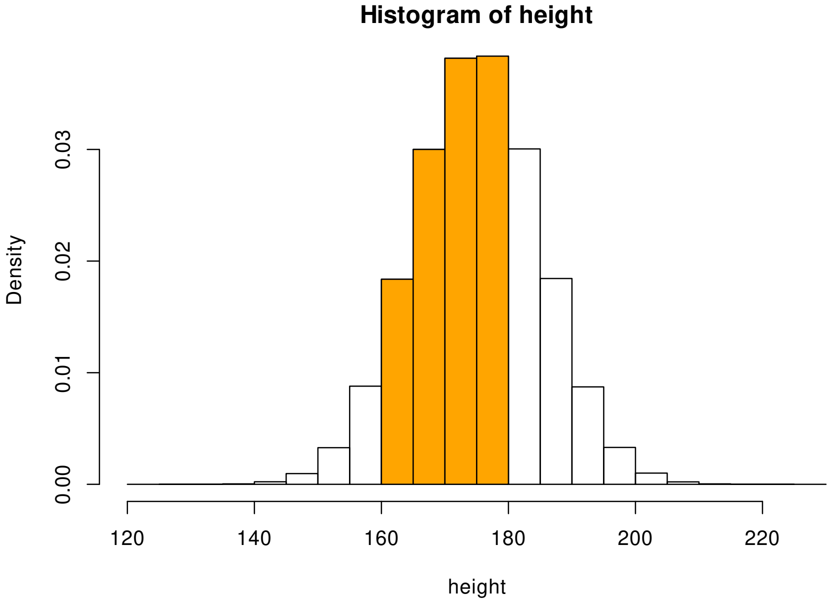

Histogram of height
Density
0.00
0.01
0.02
0.03
120
140
160
180
200
220
height

- Im folgendem Histogramm: Zwei Balken von 160 to 180 gefärbt
- Histogramm:



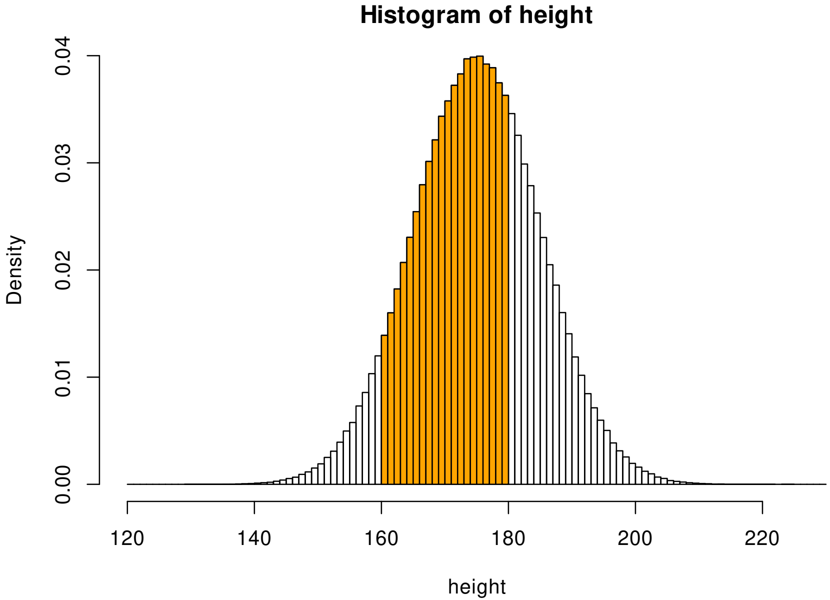
- Da Histogramm normalisiert: Bereich dieser beiden Balken als die W'keit interpretieren, dass eine zufällig ausgewählte Person dieser 1 000 000 Personen eine Grösse zwischen 160 cm und 180 cm
- Begründung: Grösse *jeder* dieser Personen ist im Histogramm enthalten
- W'keit, dass Grösse einer zufällig ausgewählten Person im Histogramm enthalten ist, beträgt 1
- Das ist Fläche der Summe der Flächen aller Balken $\quad \to \quad 1$
- Fläche der beiden Balken als den Anteil aller Personen mit einer in diesen beiden Balken enthaltenen Höhe betrachten
- Dieser Anteil ist nichts anderes als die entsprechende W'keit

- Histogramm mit Balkenbreite 5 cm

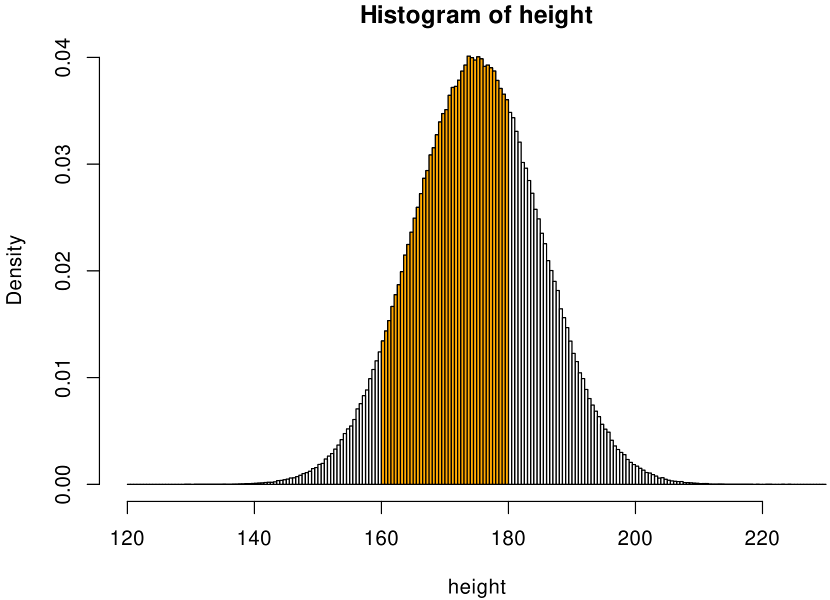


- Fläche der Summe aller Balken immer noch 1
- Interpretation des farbigen Bereichs gleich wie oben
- Beachte: Fläche der einzelnen Balken kleiner ist als die Fläche der einzelnen Balken im Histogramm vor

- Histogramm mit Balkenbreite 1 cm

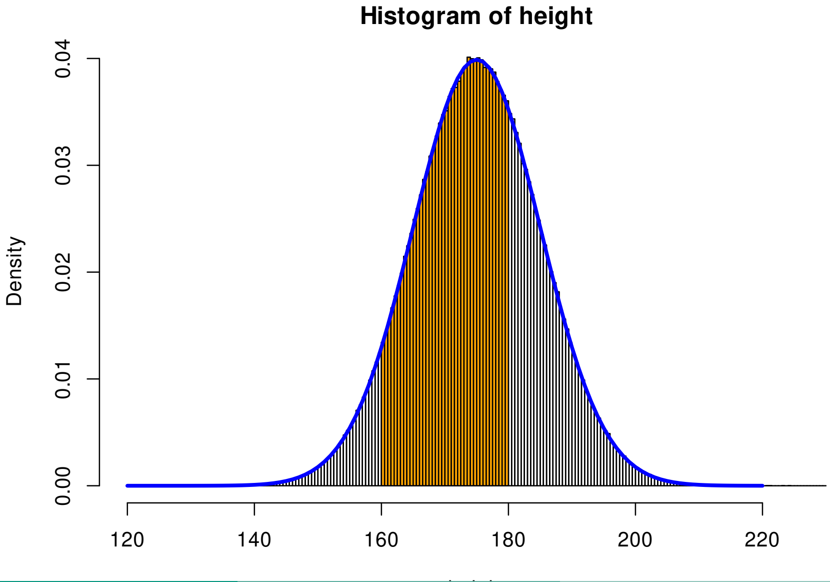


- Histogramm mit Balkenbreite 0.5 cm



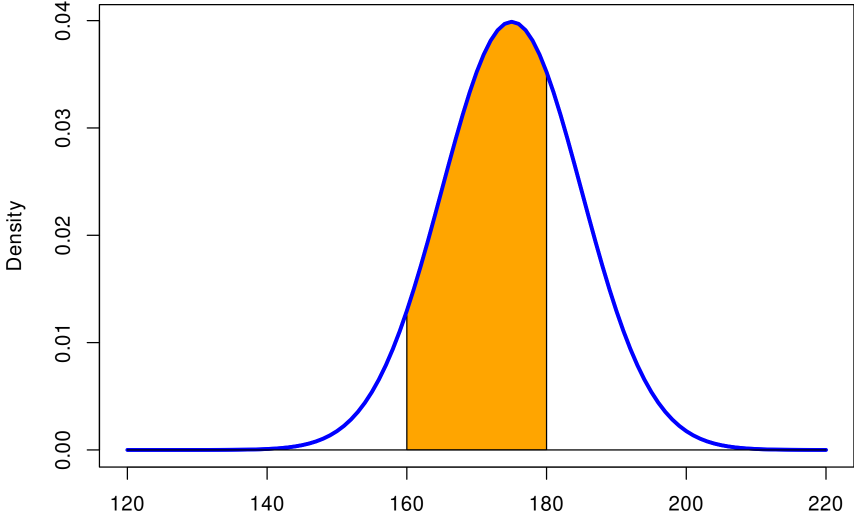
- Kleine Balkenbreite: Histogramm folgt einer glatten Kurve

- Histogramm mit glatter Kurve



- Der letzte Schritt

- Balkenbreite gegen 0 streben (unendlich klein)



- Das „Histogramm" folgt einer glatten Kurve
- Fläche unter dieser Kurve beträgt 1
- Farbige Fläche immer noch die W'keit, dass eine zufällig ausgewählte Person eine Körpergrösse zwischen 160cm und 180cm hat
- Fläche eines einzelnen „Balken" ist 0
- Die blaue Kurve wird *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* genannt