

## Korrelation Wahrscheinlichkeitsmodelle

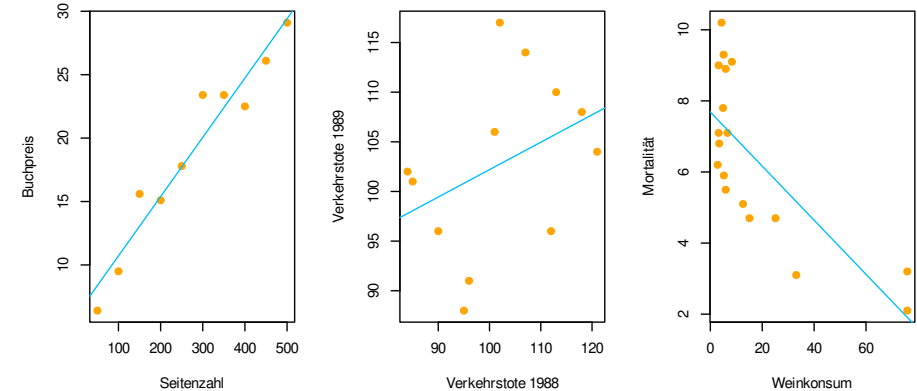
Peter Büchel

HSLU I

ASTAT: Block 04

## Wie gut passt die Regressionsgerade?

- Regressionsgerade kann (fast) immer bestimmt werden
- Beispiele:



- Letzten beiden Beispiele: Regressionsgerade sagt sehr wenig über die wirkliche Verteilung der Punkte im Streudiagramm aus

- Dafür gibt es zwei Gründe:
  - ▶ Punkte folgen scheinbar gar keiner Gesetzmässigkeit
  - ▶ Punkte folgen einer nichtlinearen Gesetzmässigkeit
- Wie kann man feststellen, ob ein linearer Zusammenhang der Daten besteht oder nicht?
- Möglichkeit: Situation graphisch betrachten
- Ziel: Wert angeben, der den Zusammenhang numerisch beschreibt

## Empirische Korrelation

- Numerischer Wert der *linearen* Abhängigkeit von zwei Grössen:

### Empirische Korrelation

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2) \cdot (\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2)}}$$

- Empirische Korrelation: Dimensionslose Zahl zwischen  $-1$  und  $+1$
- Misst Stärke und Richtung der *linearen Abhängigkeit* zwischen Daten  $x$  und  $y$

- $r = +1$ : Punkte liegen auf steigender Geraden :  $y = a + bx$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und ein  $b > 0$
- $r = -1$ : Punkte liegen auf fallender Geraden :  $y = a + bx$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und ein  $b < 0$
- Sind  $x$  und  $y$  unabhängig (d.h. kein Zusammenhang), so ist  $r = 0$

## Begründung

- Eigenschaften nicht herleiten, sondern nur graphisch veranschaulichen
- Betrachten Zähler der Korrelation (Kovarianz):

$$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Werden zeigen, dass diese Grösse:
  - ▶ grösser als 0 ist, wenn die Punktwolke einer steigenden Geraden folgt
  - ▶ kleiner als 0 ist, wenn die Punktwolke einer fallenden Geraden folgt
  - ▶ 0 ist, wenn kein Zusammenhang vorhanden ist
  - ▶ 0 sein kann, wenn kein linearer Zusammenhang vorhanden ist

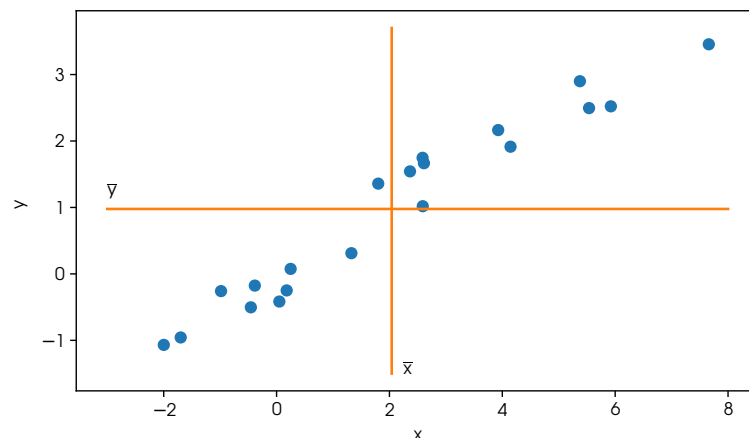
- Nenner der Korrelation:

$$\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}$$

- Positiv und *normalisiert* Kovarianz: Werte liegen zwischen  $-1$  und  $1$

## Beispiel

- Abbildung:



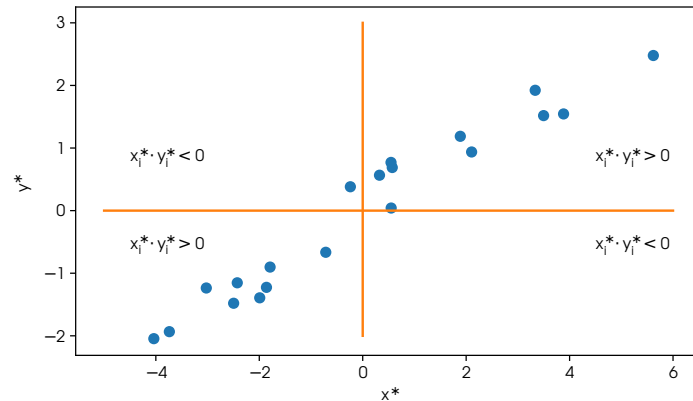
- Datenpunkte folgen mehr oder weniger einer Geraden
- Zu den Koordinatenachsen parallele Geraden  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  eingezeichnet

- Zähler der Korrelation:

$$\underbrace{(x_1 - \bar{x})}_{x_1^*} \underbrace{(y_1 - \bar{y})}_{y_1^*} + \dots + \underbrace{(x_n - \bar{x})}_{x_n^*} \underbrace{(y_n - \bar{y})}_{y_n^*}$$

- Von  $x$ -Koordinaten der Punkte wird der Durchschnitt  $\bar{x}$  subtrahiert
- Von  $y$ -Koordinaten der Punkte wird der Durchschnitt  $\bar{y}$  subtrahiert

- Ursprung der Abb. Folie ?? wird in Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  verschoben:



- Zähler der Korrelation sieht dann wie folgt aus:

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \dots + x_n^* y_n^*$$

- Was bedeutet dies für die Punkte in Folie ???

- Punkte im I. Quadranten (rechts oben):
  - Positive Koordinaten
  - $x_i^* \cdot y_i^*$  positiv
- Punkte im II. Quadranten (links oben):
  - Negative x-Koordinate und eine positive y-Koordinate
  - $x_i^* \cdot y_i^*$  negativ
- Punkte im III. Quadranten (links unten):
  - Negative x-Koordinate und negative y-Koordinate
  - $x_i^* \cdot y_i^*$  positiv
- Punkte im IV. Quadranten (rechts unten):
  - Positive x-Koordinate und negative y-Koordinate
  - $x_i^* \cdot y_i^*$  negativ

- Abb. Folie ??: Fast alle Punkte im I. und III. Quadranten

- $x_i^* y_i^* > 0$

- Somit auch

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \dots + x_n^* y_n^* > 0$$

- Punkte folgen fallender Gerade: Fast alle Punkte im II. und IV. Quadranten

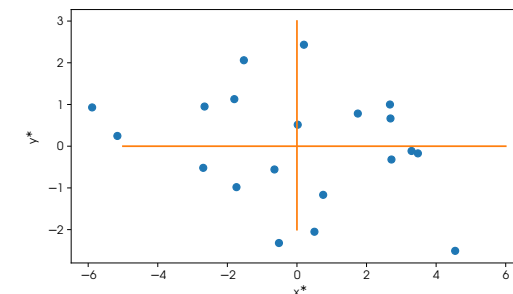
- $x_i^* y_i^* < 0$

- Somit auch

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \dots + x_n^* y_n^* < 0$$

## Beispiel

- Was passiert, wenn Punkte keinen Zusammenhang aufweisen?



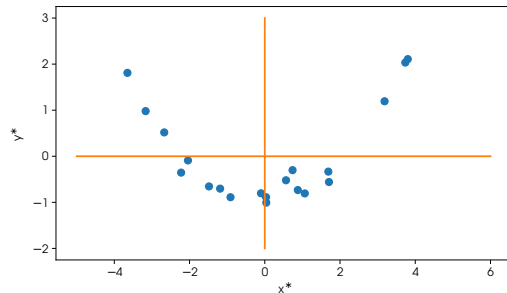
- Produkte  $x_i^* y_i^*$  über alle Punkte aufaddiert heben sich in etwa auf

- Hälfte aller Punkte im I. und III. Quadranten (Produkte positiv)
- Andere Hälfte im II. und IV. Quadranten (Produkte negativ)
- Produkte betragsmässig ähnlich
- Damit gilt

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \dots + x_n^* y_n^* \approx 0$$

## Beispiel

- Wie sieht es für *quadratischen* Zusammenhang aus?



- Beträge der Produkte links und rechts von der y-Achse auf

- Es gilt

$$x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + \dots + x_n^* y_n^* \approx 0$$

- Korrelationskoeffizient erkennt nur *lineare* Zusammenhänge

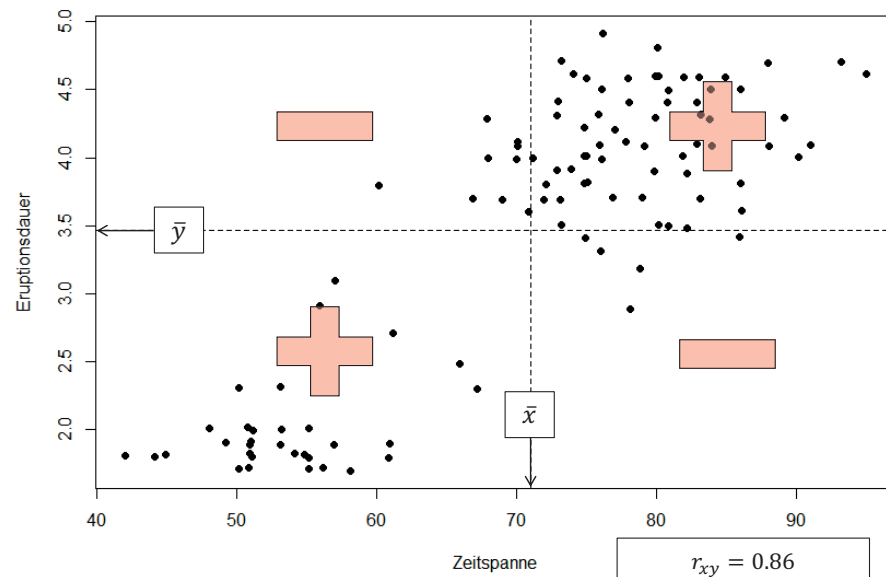
## Berechnung von Korrelation mit R

- Seitenzahl-Preis-Beispiel mit R

```
cor(seiten, preis)
## [1] 0.9681122
```

- Wert sehr nahe bei 1: Starker linearer Zusammenhang
- Wert positiv: „Je mehr, desto mehr“-Zusammenhang

## Abbildung: Old Faithful

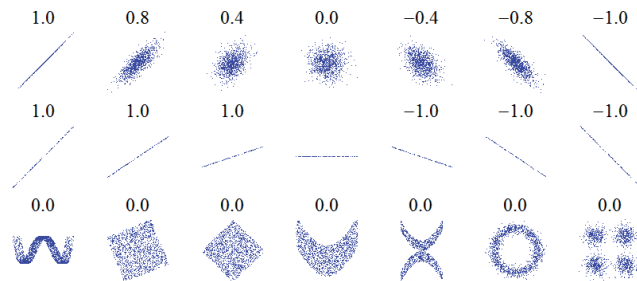


## Empirische Korrelation: Beispiele

- Beispiel Körpergröße von Vater und Sohn: Erwarten hohen Korrelationskoeffizient, da Daten nahe Regressionsgerade  
→ 0.973
- Verkehrsunfälle: Kein Zusammenhang: Korr.koeff. „nahe“ 0  
→ 0.386
- Weinkonsum:
  - Kein allzu grosser Korrelationskoeffizient (keine Gerade)
  - Sollte negativ sein, da mit steigendem Weinkonsum Mortalität sinkt
 → -0.746

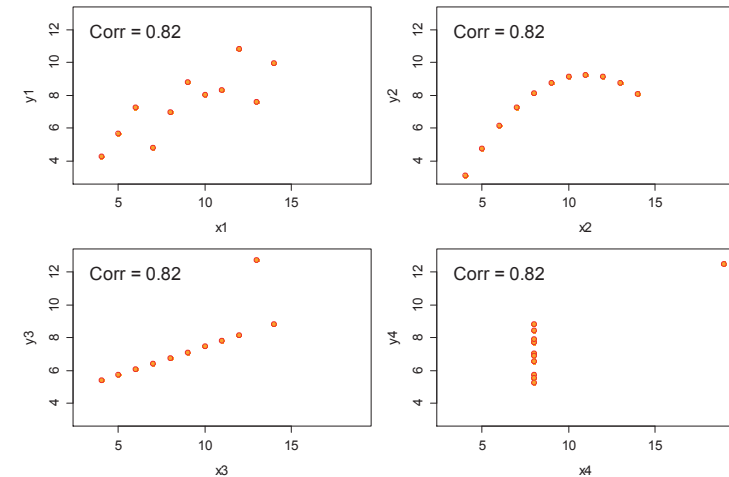
## Empirische Korrelation: Bemerkungen

- Was heisst eigentlich „nahe“ bei 0 oder „nahe“ bei 1?
  - ▶ Das lässt sich allgemein nicht sagen
  - ▶ Hängt vom Problem und dem Gebiet ab
  - ▶ In Physik kann 0.9 sehr schlecht sein, in der Soziologie sehr gut
- Korrelation misst „nur“ den *linearen Zusammenhang*
- Daher: Daten immer auch graphisch betrachten, statt sich „blind“ auf Kennzahlen zu verlassen



## Empirische Korrelation: Anscombe Plots

- Abbildung:



- Streudiagramme sehen sehr unterschiedlich aus, aber gleicher Korrelationskoeffizient

## Wahrscheinlichkeit

- Alle haben intuitives Gefühl, was W'keit ist
  - ▶ W'keit mit einem fairen Würfel eine 4 zu würfeln, ist ein Sechstel
- Aber: Interpretation der W'keit überraschend schwierig
- Aussage „Es regnet morgen mit einer W'keit von 80 %“
- Alles andere als klar, was damit gemeint ist

## Wahrscheinlichkeitsmodell

- *Zufallsexperimente*: Ausgang nicht exakt vorhersagbar ist:
  - ▶ Würfelwurf
  - ▶ Münzenwurf
  - ▶ Anzahl Anrufe in einem Callcenter
- *Wahrscheinlichkeitsmodell* besteht aus:
  - ▶ Ereignissen, die in einem solchen Experiment möglich sind
  - ▶ W'keiten, die die verschiedenen Ergebnisse haben
- Beispiel: Würfel werfen
  - ▶ Mögliche Ergebnisse: 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - ▶ W'keit eine dieser Zahlen zu werfen:  $\frac{1}{6}$  (sofern Würfel fair)

- Ein W'keitsmodell hat folgende Komponenten:
  - ▶ Grundraum  $\Omega$ : Enthält alle möglichen Elementarereignisse  $\omega$
  - ▶ Ereignisse  $A, B, C$ : Teilmengen des Grundraums
  - ▶ W'keiten  $P$ , die zu den Ereignissen  $A, B, C$  gehören
- Elementarereignisse: Mögliche Ergebnisse (Ausgänge) des Experiments
- Zusammen bilden diese den Grundraum:

$$\Omega = \underbrace{\{\text{mögliche Elementarereignisse } \omega\}}_{\text{mögliche Ausgänge/Resultate}}$$

## Beispiel: Würfelwurf

- Grundraum (die möglichen Ergebnisse)
 
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- Element  $\omega = 2$  ist ein Elementarereignis
- Bedeutung: Beim Würfeln wurde die Zahl 2 geworfen
- Zahl 7: *Kein* Elementarereignis, da nicht im Grundraum  $\Omega$

## Beispiel: Anrufe in Callcenter

- Anzahl Anrufe in einer Stunde in einem Callcenter
- Grundraum (zumindest theoretisch beliebig viele Anrufe möglich):

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Elementarereignis  $\omega = 6$ : 6 Anrufe in einer Stunde

## Beispiel: Münzwurf

- 2-maliges Werfen einer Münze
- Bezeichnungen  $K$  : „Kopf“ und  $Z$  : „Zahl“
- Alle möglichen Ergebnisse des Experimentes (Grundraum)

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

- Elementarereignis ist z.B.  $\omega = KZ$

## Ereignis

- Ereignisse allgemeiner und wichtiger als Elementarereignisse, bestehen aber aus diesen
- Ereignis  $A$ : Teilmenge von  $\Omega$ :

$$A \subset \Omega$$

- „Ein Ereignis  $A$  tritt ein“ bedeutet, dass Ergebnis  $\omega$  des Experiments zu  $A$  gehört

## Beispiel: 2-maliges Werfen einer Münze

- Ereignis  $A$ , wo genau einmal  $K$  geworfen wird
- Ereignis  $A$  besteht aus Elementarereignissen  $KZ$  und  $ZK$
- Ereignis  $A$  ist dann die Menge

$$A = \{KZ, ZK\}$$

- Werfen  $ZZ$ : Ereignis  $A$  tritt *nicht* ein
- W'keit, dass  $A$  eintritt (falls Münze fair):

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Statistik: W'keiten oft mit  $P$  oder  $p$  bezeichnet

## Beispiel: Würfeln

- Ereignis  $A$ : „Eine ungerade Zahl würfeln“

- ▶ Dann ist

$$A = \{1, 3, 5\}$$

- ▶ Ereignis  $A$  tritt ein, wenn z.B. Zahl 5 gewürfelt wird
- ▶ W'keit, dass  $A$  eintritt (fairer Würfel):

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Ereignis  $B$ : „Eine Zahl kleiner als 7 würfeln“

- ▶ Das ist natürlich immer der Fall und somit ist

$$B = \Omega$$

- ▶  $B$  heisst dann *sicheres* Ereignis
- ▶ W'keit, dass  $B$  eintritt (fairer Würfel):

$$P(B) = \frac{6}{6} = 1$$

- Ereignis  $C$ : „Die Zahl 7 würfeln“

- ▶ Dies ist unmöglich

$$C = \{\}$$

- ▶ Leere Menge  $\{\}$  (oder  $\emptyset$ ) enthält kein Element
- ▶ Heisst *unmögliches* Ereignis
- ▶ W'keit, dass  $C$  eintritt (fairer Würfel):

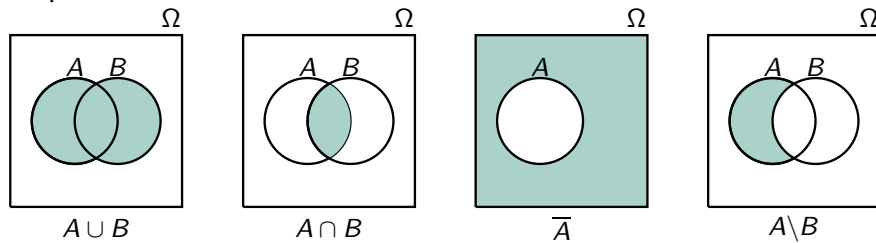
$$P(C) = \frac{0}{6} = 0$$

## Neue Mengen aus Bekannten

- Operationen der Mengenlehre für Ereignisse:

| Name         | Symbol                           | Bedeutung                              |
|--------------|----------------------------------|--|
| Vereinigung  | $A \cup B$                       | $A$ oder $B$ , nicht-exklusives „oder“ |
| Schnittmenge | $A \cap B$                       | $A$ und $B$                            |
| Komplement   | $\bar{A}$                        | nicht $A$                              |
| Differenz    | $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ | $A$ ohne $B$                           |

- Graphisch



## Beispiel: Würfelwurf

- Ereignis  $A$ : Die geworfene Zahl ist gerade:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

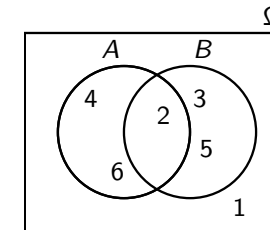
- Ereignis  $B$ : Die geworfene Zahl ist Primzahl:

$$B = \{2, 3, 5\}$$

- $\Omega$  wie gewohnt:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

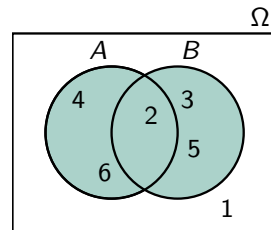
- Abbildung:



- Vereinigung:** Alle Elemente, die entweder in  $A$  oder in  $B$  oder in beiden Mengen vorkommen:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Abbildung:

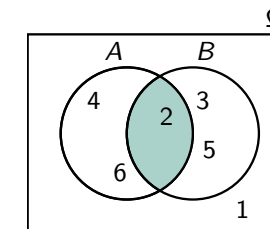


- Element 2 kommt in Menge  $A$  und in Menge  $B$  vor

- Schnittmenge:** Alle Elemente, die in  $A$  und in  $B$  vorkommen:

$$A \cap B = \{2\}$$

- Abbildung:



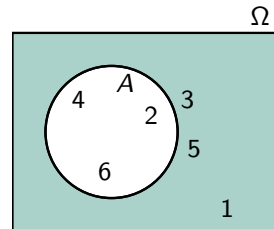
- Element 2 einziges Element, das sowohl in Menge  $A$  wie auch in  $B$  vorkommt



- **Komplement:** Alle Elemente von  $\Omega$ , die nicht in der entsprechenden Menge vorkommen:

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}; \quad \bar{B} = \{1, 4, 6\}$$

- Abbildung:

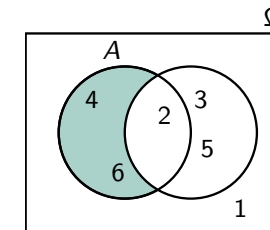


- Menge  $\bar{A}$  sind die ungeraden Zahlen

- **Differenz:** Alle Elemente der Menge A, die aber *nicht* in der Menge B vorkommen:

$$A \setminus B = \{4, 6\}$$

- Abbildung:



- Element 2 kommt sowohl in A, wie auch in B vor und gehört deswegen *nicht* zur Differenz

## Axiome der Wahrscheinlichkeit

- Eigenschaften von W'keiten

### Kolmogorov Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Jedem Ereignis A wird eine W'keit  $P(A)$  zugeordnet, mit:

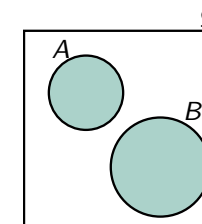
- A1:  $P(A) \geq 0$
- A2:  $P(\Omega) = 1$
- A3:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  falls  $A \cap B = \{\}$

- Bezeichnung  $P(A)$ : W'keit, dass das Ereignis A eintritt
- Ereignis A: „ungerade Zahl würfeln“ (bei fairem Würfel)

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

- Buchstabe P steht für *probability*

- A1: Wahrscheinlichkeit kann nicht negativ sein
- A2: Mit  $P(\Omega) = 1$ : W'keiten eines Ereignisses zwischen 0 und 1
- Mathematik (Statistik): W'keiten praktisch nie in Prozenten angeben
- A3: Für zwei *disjunkte* Ereignisse:



- W'keit, dass eines der beiden eintritt, gleich Addition W'keiten der beiden Ereignisse
- A3 gilt *nicht*, falls die Ereignisse *nicht* disjunkt sind

- ▶ Beispiel Würfel fair:  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 5\}$
- ▶ Dann  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$
- ▶  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Wenden A3 an:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

- ▶ Kann nicht sein, da  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$
- ▶ Grund:  $A \cap B = \{2\} \neq \{\}$

## Beispiel

- Wurf zweier Münzen:

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

- Plausibel: Alle 4 Elemente gleich wahrscheinlich (faire Münze)
- Wegen  $P(\Omega) = 1$  müssen sich die W'keiten zu eins aufaddieren:

$$P(KK) + P(KZ) + P(ZK) + P(ZZ) = 1$$

- Da alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich:

$$P(KK) = P(KZ) = P(ZK) = P(ZZ) = \frac{1}{4}$$

## Rechenregeln aus Axiomen

### Rechenregeln

Sind  $A$ ,  $B$  und  $A_1, \dots, A_n$  Ereignisse, dann gilt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{für jedes } A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{für beliebige } A \text{ und } B$$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n) \quad \text{für beliebige } A_1, \dots, A_n$$

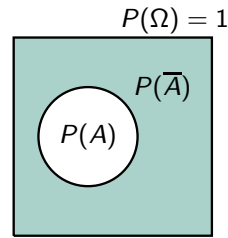
$$P(B) \leq P(A) \quad \text{für beliebige } A \text{ und } B \text{ mit } B \subseteq A$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \quad \text{für beliebige } A \text{ und } B \text{ mit } B \subseteq A$$

- W'keiten als Flächen im Venn-Diagramm vorstellen
- Totalfläche von  $\Omega$  gleich 1 oder  $P(\Omega) = 1$
- Regeln klar

## 1. Regel

- Abbildung:



- $P(A)$ : Flächeninhalt der Fläche  $A$
- $P(\bar{A})$ : Flächeninhalt der restlichen Fläche in  $\Omega$
- Es gilt also offensichtlich:

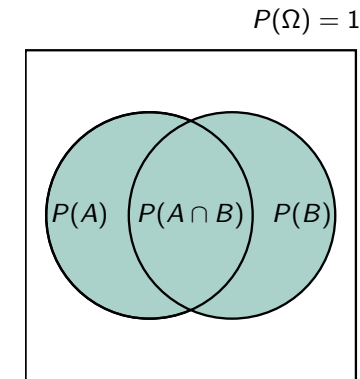
$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

- Und damit:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

## 2. Regel

- Abbildung:



- Schnittmenge  $A \cap B$  mit  $P(A) + P(B)$  doppelt gezählt: Einmal abziehen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Diese Regel ist die Verallgemeinerung von Axiom A3
- Sind die Mengen  $A$  und  $B$  disjunkt, so gilt:

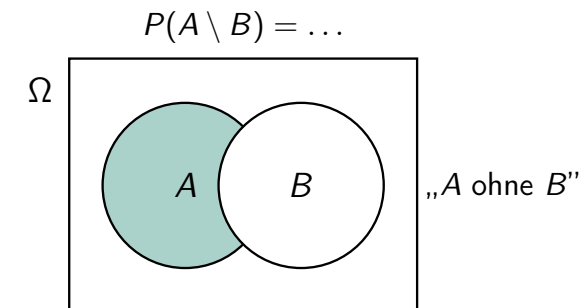
$$A \cap B = \{\}$$

- Mit der Regel oben:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(\{\}) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

- Dies ist genau Axiom A3, da die W'keit des unmöglichen Ereignisses  $\{\}$  gleich 0 ist

## Knobelaufgabe



1.  $P(A) - P(B)$

2.  $P(A) + P(B)$

3.  $P(A) - P(A \cap B)$

4.  $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle

- Heisst: Grundraum endlich oder unendlich und diskret
- Begriff „diskret“: *Endliche* Menge, wie:

$$\Omega = \{0, 1, \dots, 10\}$$

- *Unendliche*, aber trotzdem *diskrete* Menge, wie

$$\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Menge  $\Omega = \mathbb{R}$  (Menge aller Dezimalbrüche, Zahlengerade) ist *nicht* diskret
- Wird später für Messdaten eine sehr wichtige Rolle spielen

## Wahrscheinlichkeiten für diskrete Modelle

- Berechnung von W'keiten für diskrete Modelle

Im diskreten Fall ist die W'keit eines Ereignisses

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

durch die W'keiten der zugehörigen Elementarereignisse  $P(\omega)$  festgelegt:

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

- Alle W'keiten der Elementarereignisse aus Ereignis  $A$  werden addiert

## Beispiel: Unfairer Würfel

- W'keiten, unterschiedliche Zahlen zu werfen, sind nicht gleich:

|             |               |               |                |               |                |                |
|-------------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
| $\omega$    | 1             | 2             | 3              | 4             | 5              | 6              |
| $P(\omega)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

- Es gilt:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Für Ereignis  $A = \{1, 2, 4\}$  gilt:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1) + P(2) + P(4) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- Beachte: Resultat nicht gleich, wenn Würfel fair wäre:  $\frac{1}{2}$

- Bsp: Berechne W'keit, eine Zahl kleiner als 6 zu würfeln

- Ereignis  $B$ :

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Zugehörige W'keit:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

- Einfacher mit *Gegenw'keit*:  $P(\overline{B})$

- 1. Rechenregel: Komplement  $\overline{B}$  von  $B$ :

$$\overline{B} = \{6\}$$

- Dann gilt:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

## Modell von Laplace

- Annahme: Jedes Elementarereignis hat die gleiche W'keit
- Ereignis  $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g\}$ ;
- Grundraum  $m$  Elemente
- W'keiten addieren sich zu 1 und deshalb:

$$P(\omega_k) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{m}$$

Für ein Ereignis  $E$  im Laplace Modell gilt also

$$P(E) = \frac{g}{m} = \sum_{k: \omega_k \in E} P(\{\omega_k\})$$

- Man teilt die Anzahl der „*günstigen*“ Elementarereignisse durch die Anzahl der „*möglichen*“ Elementarereignisse

## Beispiel: Laplace Modell

- Es werden zwei verschiedene (blau und rot) Würfel geworfen
- Wie gross ist die W'keit, dass die Augensumme 7 ergibt?
- Elementarereignis beschreibt die Augenzahlen auf beiden Würfeln
- Ergebnis in der Form **14** schreiben
- Ergebnis **14** ist *nicht* gleich **41**
- Elementarereignisse:

$$\Omega = \{11, 12, \dots, 16, 21 \dots, 65, 66\}$$

- Anzahl Elementarereignisse:

$$|\Omega| = 36$$

- Ereignis  $E$ : Augensumme 7 wird gewürfelt
- Es gibt davon 6 Elementarereignisse:

$$E = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$$

- Alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich: W'keit für Ereignis  $E$ :

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

## Stochastische Unabhängigkeit

- Gesehen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Frage: Wie berechnet man  $P(A \cap B)$ ?
  - ▶ Leider keine allgemeine Regel
  - ▶ Wenn W'keiten  $P(A)$  und  $P(B)$  bekannt, so ist W'keit  $P(A \cap B)$  i. A. nicht aus  $P(A)$  und  $P(B)$  berechenbar
- Wichtiger Spezialfall: Berechnung von  $P(A \cap B)$  aus  $P(A)$  und  $P(B)$  mit Produktformel:

Sind Ereignisse  $A$  und  $B$  *stochastisch unabhängig*, so gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Was heisst hier aber „stochastisch unabhängig“?
- Ausgang des Ereignisses  $A$  keinen Einfluss auf den Ausgang des Ereignisses  $B$  hat und umgekehrt

## Beispiel

- Ereignis  $A$ : Mit fairem Würfel eine eins oder zwei zu werfen
- Ereignis  $B$ : Kopf beim Werfen einer fairen Münze
- Werfen einer Münze keinen Einfluss auf das Resultat beim Würfelwurf
- Formel oben verwenden:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

## Beispiel

- Ereignis  $E$ : Tokyo wird an bestimmten Tag durch Erdbeben erschüttert
- Ereignis  $F$ : An diesem Tag fegt ein Taifun über die Stadt
- Erdbeben wohl kaum Einfluss auf das Entstehen eines Taifuns
- Beide Ereignisse sind also stochastisch unabhängig

## Beispiel

- Werfen eine Münze zweimal nacheinander
- Resultat des ersten Wurfes hat kaum Einfluss auf Resultat des zweiten Wurfes
- Dies allerdings nur richtig, wenn Münze ideal
- Reale Münze: Durch Aufprall minimalste Veränderungen
- Diese haben Einfluss auf die Wurfw'keit für Kopf (oder Zahl) beim nächsten Wurf
- Veränderungen aber so klein, dass sie vernachlässigbar sind

## Beispiel

- In Topf 20 Lose mit 5 Gewinnen
- Ziehen zweimal hintereinander *ohne Zurücklegen*
- Ereignis  $A$ : Gewinn beim ersten Ziehen
- Ereignis  $B$ : Gewinn beim zweiten Ziehen
- Diese beiden Ereignisse sind *nicht* stochastisch unabhängig
- Ziehen beim ersten Ziehen ein Gewinnlos: W'keit, dass  $A$  eintrifft:

$$P(A) = \frac{5}{20}$$

- Bei 2. Ziehung fehlt ein Gewinn: W'keit dann zu gewinnen:

$$P(B) = \frac{4}{19}$$

- Ziehen ersten Ziehung Niete: W'keit bei der 2. Ziehung zu gewinnen:

$$P(B) = \frac{5}{19}$$

- Je nachdem, ob Ereignis  $A$  eintrifft oder nicht, ändert sich die W'keit für das Eintreffen von  $B$
- Ereignisse sind also nicht stochastisch unabhängig

## Beispiel

- Ereignis  $A$ : Morgen ist schönes Wetter
- Ereignis  $B$ : Person hat morgen gute Laune
- Die meisten Menschen sind bei schönem Wetter besser aufgelegt, als bei schlechtem Wetter
- Eintreffen von  $A$  hat Einfluss auf Eintreffen von  $B$
- Die Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig

## Achtung

- Formel

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt *nur*, falls Ereignisse  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig sind

- Sind die Ereignisse *nicht* stochastisch unabhängig, so gibt es keine allgemeine Formel für  $P(A \cap B)$