PERMUTAZIONI (III PARTE)

Def Data una permutazione $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_r$ dove $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sono cicli disgiunti di lunghezze $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_r$ rispettivamente, σ si dice di *tipo* $(l_1, l_2, \ldots, l_r)$

Es: $\sigma = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3) \Rightarrow \sigma$ è di tipo $(3,3)$
$\tau = (1\ 3)(2\ 4\ 5\ 7)(6\ 8)$ τ è di tipo $(4,2,2)$

oss: Se $\sigma \in S_n$, il suo tipo $(l_1, l_2, \ldots, l_r)$ è t.c. $l_1 + l_2 + \ldots + l_r \leq n$
Viceversa, dati $l_1, l_2, \ldots, l_r$ tali che $l_1 + l_2 + \ldots + l_r \leq n$ esiste una permutazione in S_n di tipo $(l_1, l_2, \ldots, l_r)$

Es: $n=3$ Quanti tipi di permutazione esistono in S_3?
(3) $(2)=(2,1)$ $(1,1,1) = id$

$n=4$ Quanti tipi ci sono in S_4?
(4) $(3)=(3,1)$ $(2,2)$ $(2)=(2,1,1)$ $(1,1,1,1) = id$

$n=5$ Quanti tipi ci sono in S_5?
(5) $(4)=(4,1)$ $(3,2)$ $(3)=(3,1,1)$ $(2,2)=(2,2,1)$ $(2)=(2,1,1,1)$ $(1,1,1,1,1) = id$

Come facciamo a sapere quante permutazioni ci sono di un certo tipo?

Es: Quante permutazioni di tipo $(5,3,2)$ ci sono in S_{12}

- devo scegliere un ciclo C_1 di lunghezza $\ell_1=5$ $\quad \dfrac{D_{12,5}}{5} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5} = \dfrac{12!}{5\cdot 7!}$

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)=(2\ 3\ 4\ 5\ 1)$
$=(3\ 4\ 5\ 1\ 2)=(4\ 5\ 1\ 2\ 3)=(5\ 1\ 2\ 3\ 4)$

- devo scegliere un ciclo C_2 di lunghezza $\ell_2=3$ tra i 7 elementi restanti $\quad \dfrac{D_{7,3}}{3} = \dfrac{7!}{3\cdot 4!}$

- infine scelgo un ciclo C_3 di lunghezza $\ell_3=2$ tra i 4 elementi restanti $\quad \dfrac{D_{4,2}}{2} = \dfrac{4!}{2\cdot 2!}$

Per il principio delle scelte successive, le permutazioni in S_{12} di tipo $(5,3,2)$ sono
$$\frac{12!}{5\cdot \cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{3\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{\cancel{4!}}{2\cdot 2!} = \frac{12!}{5\cdot 3\cdot 2\cdot 2!}$$

Es: Quante permutazioni di tipo $(2,2)$ ci sono in S_5? Ci aspettiamo $\dfrac{5!}{2\cdot 2}=30$ SBAGLIATO

$(1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4)(1\ 2) \Rightarrow$ dobbiamo dividere per 2

Ci sono 15 permutazioni di tipo $(2,2)$ in S_5.

Es. Quante permutazioni di tipo $(6,6,6,5,5,2,2,2,2)$ ci sono in S_{40}?

Sono $$\frac{40!}{6^3\cdot 5^2\cdot 2^4\cdot 3!\cdot 2!\, 4!\cdot 4!}$$ $\to n-(l_1+l_2+\dots+l_r)$

Periodi e cicli

Abbiamo visto che se c è un ciclo di lunghezza l allora $per(c)=l$.

$c^l = id$ ma $c^k \neq id$ se $1 \le k < l$

Inoltre $c^{2l} = c^l \cdot c^l = id \cdot id = id$ $\qquad c^{h\cdot l} = \underbrace{c^l\, c^l \cdots c^l}_{h \text{ volte}} = id\cdot id \cdots id = id$

$c^k = id \iff k$ multiplo di l.

Sia ora $\sigma = c_1 \cdot c_2$ cicli disgiunti di lunghezze $l_1 \ge l_2$ rispettivamente, cioè σ ha tipo (l_1, l_2)

Voglio capire qual è il più piccolo $k>0$ t.c. $\sigma^k = id$.

$\sigma^k = (c_1\cdot c_2)^k = \underbrace{(c_1\cdot c_2)\cdot(c_1\cdot c_2)\cdot \ldots \cdot (c_1\cdot c_2)}_{k \text{ volte}} = c_1^k \cdot c_2^k$ agiscono in modo indipendente (gli elementi mossi da una sono fissati dall'altra)

$\sigma^k = id \iff c_1^k = id$ e $c_2^k = id \iff k$ multiplo di l_1 e k è multiplo di l_2.

Il più piccolo k con queste proprietà è $k = mcm(l_1, l_2)$

Prop: $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_r$ cicli disgiunti di lunghezze $(l_1, l_2 \cdots l_r)$

Allora $per(\sigma) = mcm(l_1, l_2, \ldots, l_r)$

Es: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 6)(2\ 5\ 4\ 7)$ tipo $(4,3)$ $per(\sigma) = mcm(4,3) = 12$.

Il periodo dipende solo dal tipo.

Es. σ di tipo $(9,6,4) \Rightarrow per(\sigma) = mcm(9,6,4) = 36$.

τ di tipo $(8,6,6,5,4,4,3) \Rightarrow per(\tau) = mcm(8,6,5,4,3) = 120$.

Scambi e parità

Def Uno scambio (trasposizione) è un ciclo di lunghezza 2.

oss: s scambio $\Rightarrow s \cdot s = s^2 = id$ $\quad [(12)(12) = id]$

$\Rightarrow s^{-1} = s$

Prop: Un ciclo di lunghezza l è composizione di $l-1$ scambi.

Dim: $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_l) = \underline{(x_1\ x_l)(x_1\ x_{l-1}) \ldots (x_1\ x_3)(x_1\ x_2)}$

$x_1 \to x_2$

$x_2 \to x_1 \to x_3$

$x_i \to x_1 \to x_{i+1}$ $\quad 1 < i < l$

$x_l \to x_1$

Es: $(1\ 2\ 4\ 3) \overset{?}{=} (1\ 3)(1\ 4)(1\ 2)$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 4 \\ 4 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Corollario: Ogni permutazione si può scrivere come composizione di scambi.

"dim": Infatti $\sigma = \underbrace{c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots}_{\text{cicli}} c_r = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$

decompongo i cicli

La scomposizione in scambi non è unica.

Es: $id_{S_4} = (1\,2)(1\,2) = (1\,3)(1\,3) =$
$= (1\,2)(3\,4)(3\,4)(1\,2)$.

Es: $(1\ 2\ 3) = (1\,2)(2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$

Perché usare gli scambi? Per esempio per motivi di calcolo: $|S_n| = n!$
ma gli scambi in S_n sono solo $\binom{n}{2}$

Se so costruire e comporre gli scambi, ho tutte le permutazioni.

Parità

Def: Una composizione di scambi $s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_j$ si dice pari se j è pari
dispari se j è dispari.

Teorema: Data una permutazione π, ogni sua scomposizione in scambi ha la stessa parità.

Come si calcola la parità di una permutazione?

Se C è un ciclo di lunghezza ℓ, la sua parità è $\begin{cases} \text{pari se } \ell \text{ dispari} \\ \text{dispari se } \ell \text{ pari} \end{cases}$ perché C è prodotto di $\ell-1$ scambi

Es: $(1\ 2\ 3)$ è un ciclo pari $\quad (1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$

Se σ è una permutazione qualsiasi, la scompongo in cicli:

$\sigma = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_r$ $\quad$ calcolo $(\ell_1 - 1) + (\ell_2 - 1) + \ldots + (\ell_r - 1) = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r - r = p$

allora σ è $\begin{cases} \text{pari se } p \text{ pari} \\ \text{dispari se } p \text{ dispari} \end{cases}$