Corso di
Architettura degli Elaboratori - A
a.a. 2021/2022

Codifica dell'informazione:
Numeri a Virgola Mobile

Numeri in virgola mobile

In un calcolo *astronomico* è necessario esprimere:

la massa dell’elettrone: 9×10^{-28} grammi

0.0000000000000000000000000009

la massa del sole: 2×10^{33} grammi

2000000000000000000000000000000000

Quante cifre occorre usare?

62 cifre: 34 alla sinistra della virgola e 28 a destra

0000000000000000000000000000000000.0000000000000000000000000009

2000000000000000000000000000000000.0000000000000000000000000000

Problema: anche se la gamma dei numeri necessari è molto grande, i numeri significativi sono pochi……

Soluzione: notazione scientifica

Numeri in virgola mobile

- La notazione scientifica è un tipo di rappresentazione in cui la "**gamma**" dei numeri esprimibili è indipendente dal numero delle cifre significative.

$$\mathbf{n = m \times 10^{e}}$$

mantissa o frazione (m) — *esponente* (e)

- la versione informatica di questa notazione è la rappresentazione in **virgola mobile** o **floating point**

Numeri in virgola mobile

Esempi:

3,14	$= 0{,}314 \times 10^{1}$	$= 3{,}14 \times 10^{0}$	$= 314 \times 10^{-2}$
- 0,0000005	$= -5 \times 10^{-7}$	$= -0{,}5 \times 10^{-6}$	
127000000	$= 127 \times 10^{6}$	$= 1{,}27 \times 10^{8}$	

La rappresentazione non è unica; esistono convenzioni che permettono di ottenere una rappresentazione unica, ad es. imponendo che la prima cifra significativa della mantissa si trovi immediatamente a destra della virgola; queste forme si dicono ***rappresentazioni normalizzate***:

3,14	$= 0{,}314 \times 10^{1}$
- 0,0000005	$= -0{,}5 \times 10^{-6}$
127000000	$= 0{,}127 \times 10^{9}$

Numeri in virgola mobile

Pensando ad una utilizzazione per il calcolatore si possono stabilire ulteriori convenzioni:

- *fissare la lunghezza* della mantissa ad un valore costante
- *limitare l'esponente* ad opportuni intervalli
- utilizzare un *esponente* convenzionale che lo renda *sempre positivo* (notazione in eccesso)
- disporre i tre elementi: <segno, esponente, mantissa> in un ordine stabilito

segno	*esponente*	*mantissa*

Numeri in virgola mobile

Esempio

- lunghezza mantissa: 8 cifre
- valore effettivo esponente: da -50 a +49
- in notazione eccesso 50 l’esponente e’ sempre positivo (0 - 99)

i numeri – 0,0000005 e 127000000 si scrivono nel seguente modo:

	segno	***esponente***	***mantissa***
$- 0,5 \times 10^{-6}$	-	44	50 000 000
$0,127 \times 10^{9}$	+	59	12 700 000

Numeri in virgola mobile

Esempio di rappresentazione floating point binaria su 32 bit

- il primo bit rappresenta il segno della mantissa (0 per +, 1 per -)
- 7 bit successivi rappresentano l'esponente (espresso in base 2) in notazione eccesso 64 (esponente effettivo tra -64 e +63)
- gli ultimi 24 bit rappresentano la mantissa normalizzata

Esempio:	**204,17437**
rappresentazione binaria:	**11001100,001011001000011110** $\times 2^0$
rappresentazione normalizzata	**0,110011000010110010000111** $\times 2^8$
• bit di segno:	0
• esponente eccesso 64:	1001000
• mantissa:	**110011000010110010000111**

Spostando la virgola a sinistra (dividere per la base) si aumenta di 1 l'esponente (si moltiplica per la base) mantenendo l'uguaglianza

0	1001000	110011000010110010000111

Numeri in virgola mobile

- La *gamma (range)* è determinata dal numero di cifre dell'esponente e la *precisione* dal numero di cifre della mantissa.

ATTENZIONE!!

- Con i numeri floating-point si può "simulare" il sistema dei numeri reali, pur con grandi differenze:

i numeri reali hanno la potenza del continuo

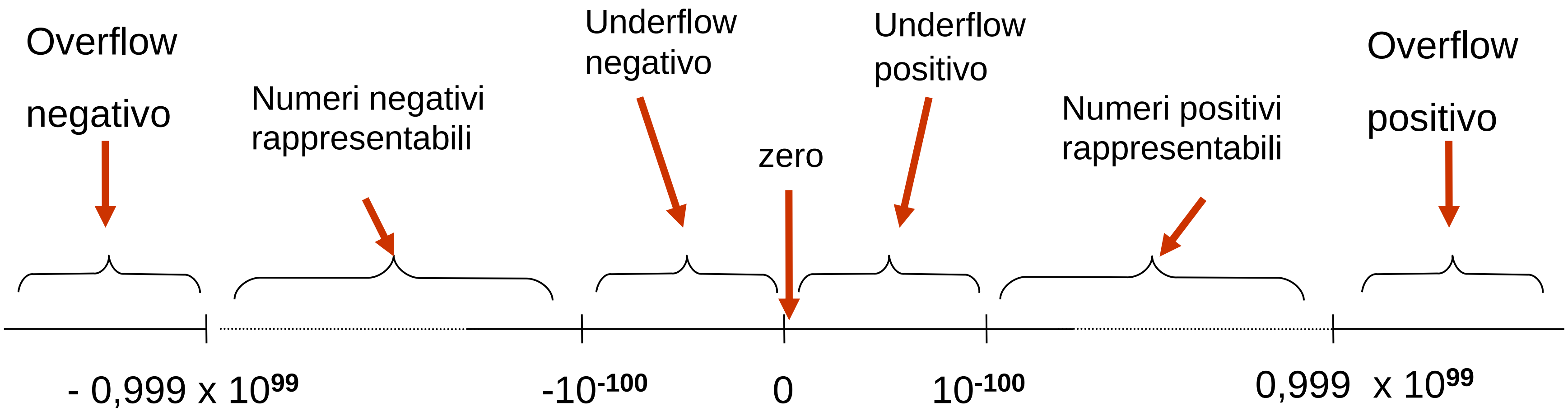
i numeri floating point sono in numero finito

Numeri in virgola mobile

- Per esempio, consideriamo rappresentazioni (espresse in base 10) con una ***mantissa di tre cifre*** con segno nella ***gamma*** $\mathbf{0{,}1 \leq |m| < 1}$ piu zero ed esponente di due cifre (con segno).
  - minimo numero negativo: $-0{,}999 \times 10^{99}$
  - massimo numero negativo: $-0{,}100 \times 10^{-99}$
  - minimo numero positivo: $+0{,}100 \times 10^{-99}$
  - massimo numero positivo: $+0{,}999 \times 10^{99}$

- Si rappresentano un numero finito di numeri negativi e numeri positivi, oltre allo zero, che ha tante rappresentazioni.

Numeri in virgola mobile



- “Spazio” tra numeri adiacenti non costante
- Arrotondamento
- Il numero di cifre della mantissa determina la densità dei punti, cioè la *precisione* delle approssimazioni
- Il numero di cifre dell’esponente determina la *dimensione degli intervalli* dei numeri rappresentabili

Standard IEEE 754

- Ogni produttore aveva un suo formato floating-point
- Fine anni '70 la **IEEE** costituisce un comitato al fine di *standardizzare* l'aritmetica floating-point
- Diversi Formati:
  «half precision» (16 bit), *«single precision»* (32 bit), *«double precision»* (64 bit), *«quad precision»* (128 bit)
- *Base 2* per mantissa, *notazione in eccesso* per esponente
- Mantissa *normalizzata*: la parte intera è sempre 1, questo bit è nascosto quindi la mantissa si compone della sola parte frazionaria

Standard IEEE 754

Semplice precisione: 32 bit

1	8	23
	(-126;127)	mantissa
segno	esponente eccesso 127	

Min numero rappresentabile > 0 : 2^{-126} (10^{-38})

Max numero rappresentabile: appr. 2^{128} (10^{38})

Doppia precisione: 64 bit

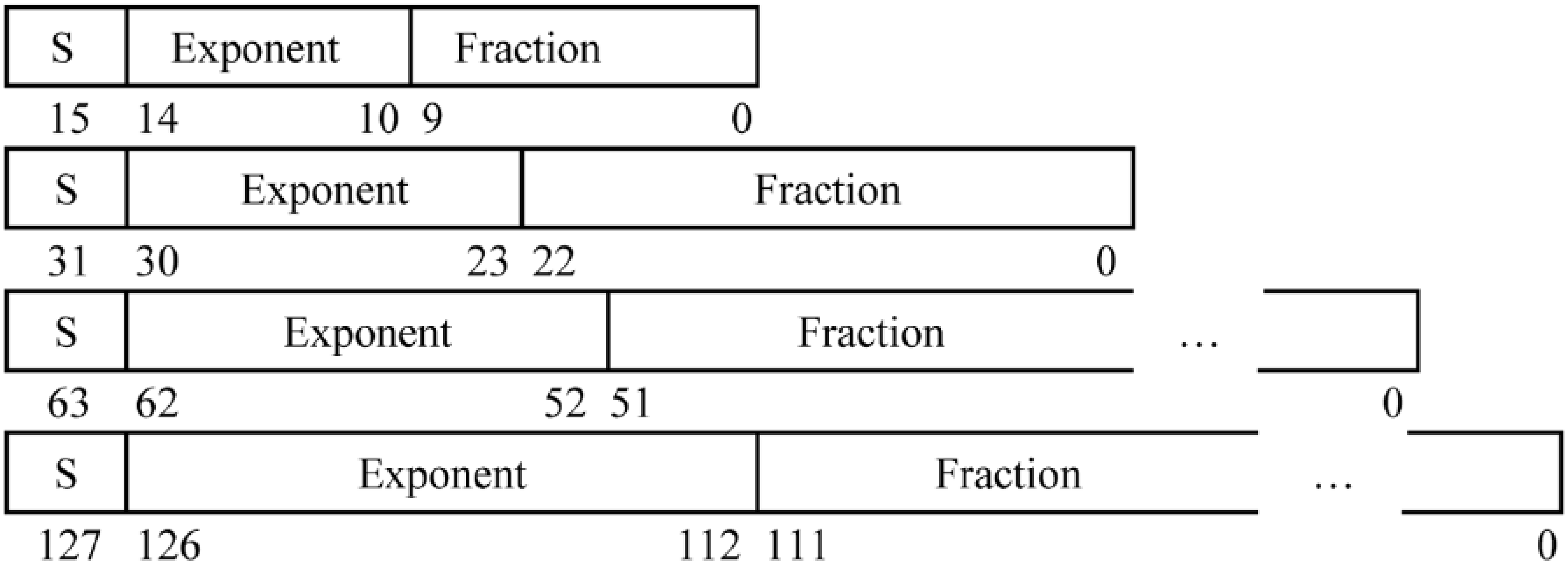
1	11	52
	(-1022;1023)	mantissa
segno	esponente eccesso 1023	

Min numero rappresentabile > 0: 2^{-1022} (10^{-308})

Max numero rappresentabile: appr. 2^{1024} (10^{308})

Standard IEEE 754

IEEE Half-, Single-, Double-, and Quad-Precision Formats:



Standard IEEE 754

432	0
216	0
108	0
54	0
27	1
13	1
6	0
3	1
1	1

$$1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0 = 1\,.\,1\,0\,1\,1 \times 2^8$$

$$1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0 \times 2^0 = 1\,.\,1\,0\,1\,1 \times 2^8$$

$$127+8 = 135\,\Big|_{10} =$$

$$10000111\,\Big|_{2}$$

8 bit

23 bit

0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

segno

esponente
eccesso 127

mantissa

Standard IEEE 754

- Numeri normalizzati e denormalizzati
- Formati speciali per identificare infinito e NaN (Not a Number, esempio se dividiamo infinito per infinito)

	esp	*mantissa M*	*valore v*
Numero normalizzato	$0 < esp < 255$	qualunque	$v = (-1)^s(1,M)2^{esp-127}$
Numero denormalizzato	$esp = 0$	$M \neq 0$	$v = (-1)^s(0,M)2^{-126}$
Zero	$esp = 0$	$M = 0$	$v = (-1)^s 0$
Infinito	$esp = 255$	$M = 0$	$v = (-1)^s \infty$
NaN	$esp = 255$	$M \neq 0$	$v =$ NaN

Virgola mobile nel RISC-V

Nome	Esempio	Commenti
32 registri virgola mobile	f0, f1, f2, … f31	I registri in virgola mobile del RISC-V possono contenere un numero in virgola mobile in precisione singola o in doppia precisione
2^{61} parole doppie di memoria	Memoria[0], Memoria[8], … , Memoria[18 446 744 073 709 551 608]	Si accede solo tramite le istruzioni di trasferimento dati. Il RISC-V utilizza l'indirizzamento al byte, per cui gli indirizzi sequenziali delle parole doppie differiscono di 8. La memoria mantiene le strutture dati, come i vettori, e il contenuto scaricato dai registri

Convenzioni di chiamata

f0-f7	ft0-ft7	FP Temporaries	Caller
f8-f9	fs0-fs1	FP Saved registers	Callee
f10-f11	fa0-fa1	FP Function arguments/Return values	Caller
f12-f17	fa2-fa7	FP Function arguments	Caller
f18-f27	fs2-fs11	FP Saved registers	Callee
f28-f31	ft8-ft11	R[rd] = R[rs1] + R[rs2]	Caller

Virgola mobile nel RISC-V

Categoria	Istruzione	Esempio	Significato	Commenti
Aritmetica	Somma VM singola prec.	`fadd.s f0,f1,f2`	f0 = f1 + f2	somma VM (singola precisione)
	Sottrazione VM singola prec.	`fsub.s f0,f1,f2`	f0 = f1 − f2	sottraz VM (singola precisione)
	Moltiplicaz VM singola prec.	`fmul.s f0,f1,f2`	f0 = f1 × f2	moltiplicaz VM (singola precisione)
	Divisione VM singola prec.	`fdiv.s f0,f1,f2`	f0 = f1 / f2	divisione VM (singola precisione)
	Radice quadrata VM singola prec.	`fsqrt.s f0,f1`	f0 = √f1	Radice quadrata VM (singola precisione)
	Somma VM doppia prec.	`fadd.d f0,f1,f2`	f0 = f1 + f2	somma VM (doppia precisione)
	Sottrazione VM doppia prec.	`fsub.d f0,f1,f2`	f0 = f1 − f2	sottraz VM (doppia precisione)
	Moltiplicaz VM doppia prec.	`fmul.d f0,f1,f2`	f0 = f1 × f2	moltiplicaz VM (doppia precisione)
	Divisione VM doppia prec.	`fdiv.d f0,f1,f2`	f0 = f1 / f2	divisione VM (doppia precisione)
	Radice quadrata VM doppia prec.	`fsqrt.d f0,f1`	f0 = √f1	radice quadrata VM (doppia precisione)

Virgola mobile nel RISC-V

Categoria	Istruzione	Esempio	Significato	Commenti
Confronto	Uguaglianza VM singola prec.	`feq.s x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 == f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (precisione singola)
	Test di minoranza VM singola prec.	`flt.s x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 < f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (precisione singola)
	Test di minore uguale VM singola prec.	`fle.s x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 <= f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (precisione singola)
	Uguaglianza VM doppia prec.	`feq.d x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 == f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (doppia precisione)
	Test di minoranza VM doppia prec.	`flt.d x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 < f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (doppia precisione)
	Test di minore uguale VM doppia prec.	`fle.d x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 <= f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (doppia precisione)
Trasferimento dati	Lettura di una parola in VM	`flw f0,4(x5)`	`f0 = Memoria[x5+4]`	Leggi da memoria dato in singola precisione
	Lettura di una parola doppia in VM	`fld f0,8(x5)`	`f0 = Memoria[x5+8]`	Leggi da memoria dato in doppia precisione
	Scrittura di una parola in VM	`fsw f0,4(x5)`	`Memoria[x5+4] = f0`	Trasferisci in memoria dato in singola precisione
	Scrittura di una parola doppia in VM	`fsd f0,8(x5)`	`Memoria[x5+8] = f0`	Trasferisci in memoria dato in doppia precisione

Ricapitolando

- <u>Una sequenza di N bit da sola non rappresenta nulla: si deve sempre specificare il contesto (la codifica) nella quale deve avvenire la sua interpretazione (decodifica)</u>
- Per cui, cosa rappresenta la sequenza che segue?

111000001010111110101011

  - il carattere ௫ in codifica UTF-8 (è il 5 della lingua Tamil)
  - Il colore (224,239,171) in RGB
  - 375 µs di voce umana
  - il numero 14725035 se in binario puro (divisioni successive per 2)
  - il numero -2052181 in complemento a 2 su 24 bit
  - Il numero -6336427 in modulo e segno su 24 bit
  - …. continuate voi ……

Ricapitolando

- Un informatico deve saper:
  - Cos’è la notazione scientifica per un numero
  - Cos’è una rappresentazione normalizzata e perché se ne ha bisogno
  - Essere consapevole dei limiti di rappresentazione rispetto all’insieme dei numeri reali
  - Conoscere i vari formati dello standard IEEE 754
  - Saper codificare un numero reale in uno degli standard IEEE 754
  - Saper decodificare una sequenza di bit in uno degli standard IEEE 754 nel corrispondente numero reale

Qualche problema

- Problema 1: Ipotizziamo l'esistenza del formato IEEE 754 in precisione ***scarsa*** su 8 bit con 1 bit di segno, 4 bit di esponente e 3 bit di mantissa (nell'ordine)***.*** Esso condivide tutte le caratteristiche dei formati a precisione singola e doppia dello standard IEEE 754, ovvero, la codifica dei numeri normalizzati, denormalizzati, dello zero, dell'infinito, del NaN, con le stesse convenzioni di codifica. Dire:
  - In eccesso a quale valore sarebbe codificato l'esponente?
  - Che numero sarebbe rappresentato dalla sequenza 11011100?
- Problema 2: Descrivere la notazione standard IEEE 754 in semplice precisione, specificando i campi che la compongono e descrivendo i passi da eseguire per codificare il numero 13,75.
- Problema 3: Decodificare la sequenza
  1 10000011 11100000000000000000000
  assumendo che rappresenti un numero in formato IEEE 754 in precisione singola