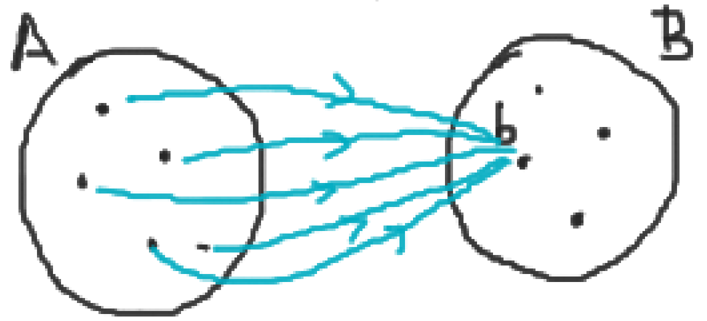
FUNZIONI (II PARTE)

Funzioni "notevoli":

- Funzione <u>identità</u> $id_A : A \longrightarrow A$
  $a \longmapsto a$

- Dati A, B insiemi e fissato un elemento $b \in B$, possiamo definire la funzione <u>costante</u>:
  $f_b : A \longrightarrow B \qquad \forall a \in A \;\; f_b(a) = b$



- Dati A, B, consideriamo il prodotto cartesiano $A \times B$
  <u>proiezione</u> su A $\quad \pi_A : A \times B \longrightarrow A$
  $(a, b) \longmapsto a$

  $\left(\pi_B : A \times B \longrightarrow B \right.$
  $\left. (a, b) \longmapsto b \right)$

- Dati $S \subseteq A$, <u>inclusione</u> $\quad i : S \longrightarrow A$
  $s \longmapsto s$

- <u>Successioni</u>: una successione è una funzione di dominio $\mathbb{N}$.
  $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$
  $n \longmapsto f(n)$

  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n) \dots$ è una successione di elementi di B.

– Operazioni: Un'operazione binaria su A è una funzione $f: A \times A \longrightarrow A$

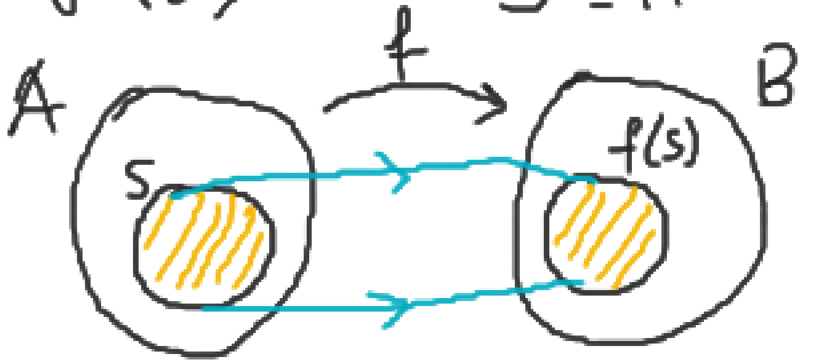
Es. $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{+} & \mathbb{N} \\ (m,n) & \longmapsto & m+n \end{array}$ è l'operazione di somma tra naturali

---

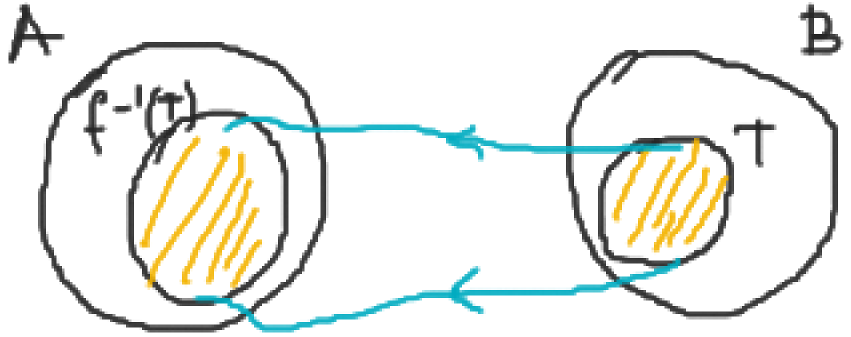
Immagini e controimmagini

Data una funzione $f: A \longrightarrow B$, essa induce due funzioni

$f: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$, $\quad S \subseteq A \longmapsto \underbrace{f(S)}_{\text{immagine di } S \text{ tramite } f} = \{ b \in B \mid \exists a \in S,\ f(a) = b \}$



$f^{-1}: \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, $\quad T \subseteq B \longmapsto \underbrace{f^{-1}(T)}_{\text{controimmagine di } T \text{ tramite } f} = \{ a \in A \mid f(a) \in T \}$



Casi speciali:

$a \in A \quad f(\{a\}) = \{f(a)\}$, $\qquad b \in B \quad f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(b) = \{ a \in A \mid f(a) = b \}$

Def: Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice:

1) **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$;
2) **suriettiva** se $\forall b \in B \ \exists a \in A$ tale che $f(a) = b$;
3) **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

Es.: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad n \mapsto 2n$ $\quad$ è iniettiva ma non suriettiva (i dispari non hanno controimmagini)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad n \mapsto |n|$ $\quad$ è suriettiva ($\forall n \in \mathbb{N}$ $n = |n|$) ma non iniettiva ($|n| = |-n|$ $\forall n \in \mathbb{Z}$)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad n \mapsto n^2$ $\quad$ non é iniettiva né suriettiva

Attenzione ⚠: Se cambio dominio/codominio le proprietà cambiano:

Es. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad n \mapsto n^2$ $\quad$ é iniettiva

$f: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ $\quad x \mapsto x^2$ $\quad$ è biettiva

Prop: (A) $f: A \to B$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ (B) $\forall b \in B \ |f^{-1}(b)| \leq 1$ $\Leftrightarrow$ (C) $\forall a_1, a_2 \in A \ (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$.

dim: (A) $\Rightarrow$ (B) (dimostriamo che $\neg$(B) $\Rightarrow \neg$(A)) se $\exists b \in B$ t.c. $|f^{-1}(b)| > 1 \Rightarrow \exists a_1 \neq a_2 \in A$ t.c. $f(a_1) = f(a_2) = b \Rightarrow f$ non è iniettiva

(B) $\Rightarrow$ (C) Siano $a_1, a_2 \in A$ t.c. $f(a_1) = f(a_2)$. Poiché $a_2 \in f^{-1}(f(a_1))$ e, per ipotesi $|f^{-1}(f(a_1))| \leq 1 \Rightarrow a_1 = a_2$.

(C) $\Rightarrow$ (A) Siano $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Se fosse $f(a_1) = f(a_2)$, per ipotesi avremmo $a_1 = a_2$, ma ciò non è possibile, quindi $f(a_1) \neq f(a_2)$. In conclusione, f è iniettiva. ⊠

Prop: $f: A \to B$ è suriettiva $\iff$ $\forall b \in B \; |f^{-1}(b)| \geq 1$.

Corollario: $f: A \to B$ è biettiva $\iff$ $\forall b \in B \; |f^{-1}(b)| = 1$.

Composizione

Def: Date due funzioni $f: A \to B$, $g: B \to C$, la funzione composta è:

$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\longrightarrow C \\ a &\longmapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

$$g \circ f : \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

⚠ La composizione non è commutativa.

Es: $\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g: \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g \circ f: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto -n-1 \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} f \circ g: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto -n+1 \end{aligned}$

Proprietà: · la composizione di funzioni è associativa: date $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- $f: A \to B$ allora $f \circ id_A = f$ $\qquad A \xrightarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{f} B$
- $f: A \to B$ allora $id_B \circ f = f$

Prop: $f: A \to B$, $g: B \to C$

1) Se f, g sono iniettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ iniettiva
2) Se f, g sono suriettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ suriettiva
3) Se f, g sono biettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ biettiva

dim: per esercizio.

Prop: $f: A \to B$, $g: B \to C$

1) Se $g \circ f$ è iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva
2) Se $g \circ f$ è suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

dim: per esercizio.