PERMUTAZIONI (II PARTE)

Cicli

Es. $\pi = (1\ 3\ 7\ 4)$ è un ciclo in S_7

oss: il punto di partenza in un ciclo non è rilevante, quindi $(1\ 3\ 7\ 4) = (3\ 7\ 4\ 1) = (7\ 4\ 1\ 3)$

Prop: $\pi = (x_1\ x_2 \dots x_\ell)$, allora $\pi^{-1} = (x_\ell\ x_{\ell-1} \dots x_2\ x_1)$.

Dim: Se $1 < i < \ell$ allora $\pi(x_i) = x_{i+1}$ $\quad \pi^{-1}(x_i) = x_{i-1}$ $\quad \pi(\pi^{-1}(x_i)) = \pi(x_{i-1}) = x_i$

$\pi(x_\ell) = x_1$ $\quad \pi^{-1}(x_1) = x_\ell$ $\quad \pi^{-1}(\pi(x_i)) = \pi^{-1}(x_{i+1}) = x_i$

$$\pi(\pi^{-1}(x_1)) = \pi(x_\ell) = x_1 \qquad \pi^{-1}(\pi(x_1)) = \pi^{-1}(x_2) = x_1$$
$$\pi(\pi^{-1}(x_\ell)) = \pi(x_{\ell-1}) = x_\ell \qquad \pi^{-1}(\pi(x_\ell)) = \pi^{-1}(x_1) = x_\ell$$

Torniamo all'esempio: $\pi = (1\ 3\ 7\ 4)$ $\quad \pi^{-1} = (4\ 7\ 3\ 1)$.

Def: Data una permutazione π, si dice periodo di π il numero:

$$per(\pi) = \min\{k > 0 \text{ t.c. } \pi^k = id\}$$

Prop: Se π è un ciclo di lunghezza ℓ, allora $per(\pi) = \ell$.

Dim: $\pi = \underbrace{(x_1 \; x_2 \; \dots \; x_\ell)}_{\ell \text{ elementi}}$

$$x_1 \xrightarrow{\pi} \pi(x_1) = x_2 \neq x_1 \quad \dots\dots$$

$$x_2 \xrightarrow{\pi} \pi(x_2) = \pi(\pi(x_1)) = \pi^2(x_1) = x_3 \neq x_1 \quad \dots$$

$$\dots$$

oss: $x_i = \pi^{i-1}(x_1)$

$$x_{\ell-1} = \pi^{\ell-2}(x_1) \xrightarrow{\pi} \pi^{\ell-1}(x_1) = \pi(x_{\ell-1}) = x_\ell \neq x_1$$

$$x_\ell \xrightarrow{\pi} \pi(x_\ell) = \pi^\ell(x_1) = x_1 .$$

Se $1 < i \leq \ell$ $\quad \pi^\ell(x_i) = \pi^\ell(\pi^{i-1}(x_1)) = \pi^{\ell+i-1}(x_1) = \pi^{i-1}(\pi^\ell(x_1)) = \pi^{i-1}(x_1) = x_i$.

In sostanza, la proposizione precedente ci dice che, per un ciclo π di lunghezza ℓ:

$$\pi^\ell = id \quad \text{e} \quad \pi^k \neq id \;\; \forall k \text{ con } 0 < k < \ell .$$

Es: $\pi = (1 \; 3 \; 7 \; 4) \in S_7$ $\quad \ell = 4$ $\quad$ ci aspettiamo che $\pi^4 = id$

$$\begin{array}{c} \\ \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
3 & 2 & 7 & 1 & 5 & 6 & 4 \\
7 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \\
4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 3 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \pi \neq id \\ \pi^2 \neq id \\ \pi^3 \neq id \\ \pi^4 = id \end{array}$$

Def: Due cicli $\sigma = (x_1\, x_2 \dots x_\ell)$ e $\tau = (y_1\, y_2 \dots y_m)$ si dicono **disgiunti** se $\{x_1, x_2, \dots x_\ell\} \cap \{y_1, y_2, \dots y_m\} = \emptyset$

Es: $\sigma = (1\ 2\ 3)$ $\tau = (4\ 5)$ sono cicli disgiunti in S_5.

Prop: Cicli disgiunti commutano: se σ e τ sono cicli disgiunti di S_n, allora

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

Dim: Siano $\sigma = (x_1\, x_2 \dots x_\ell)$, $\tau = (y_1\, y_2 \dots y_m)$ cicli disgiunti di S_n.

Per gli elementi x_i $(1 \le i < \ell)$: $(\sigma \circ \tau)(x_i) = \sigma(\tau(x_i)) = \sigma(x_i) = x_{i+1}$

$(\tau \circ \sigma)(x_i) = \tau(\sigma(x_i)) = \tau(x_{i+1}) = x_{i+1}$

x_ℓ: $(\sigma \circ \tau)(x_\ell) = \sigma(\tau(x_\ell)) = \sigma(x_\ell) = x_1$

$(\tau \circ \sigma)(x_\ell) = \tau(\sigma(x_\ell)) = \tau(x_1) = x_1$

Per gli elementi y_i $(1 \le i < m)$: $(\sigma \circ \tau)(y_i) = \sigma(\tau(y_i)) = \sigma(y_{i+1}) = y_{i+1}$

$(\tau \circ \sigma)(y_i) = \tau(\sigma(y_i)) = \tau(y_i) = y_{i+1}$

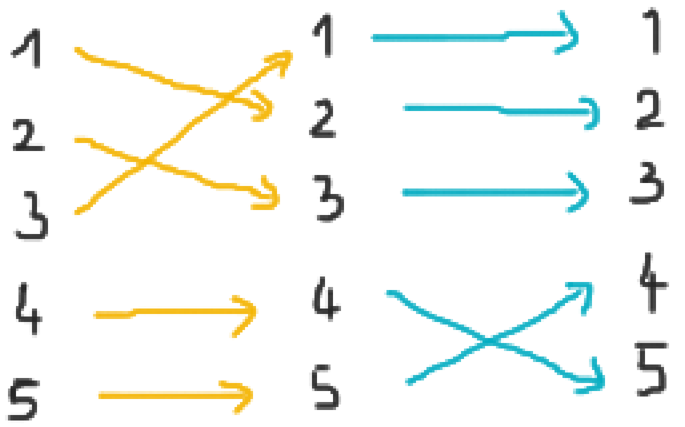
y_m: $(\sigma \circ \tau)(y_m) = \sigma(\tau(y_m)) = \sigma(y_1) = y_1$

$(\tau \circ \sigma)(y_m) = \tau(\sigma(y_m)) = \tau(y_m) = y_1$

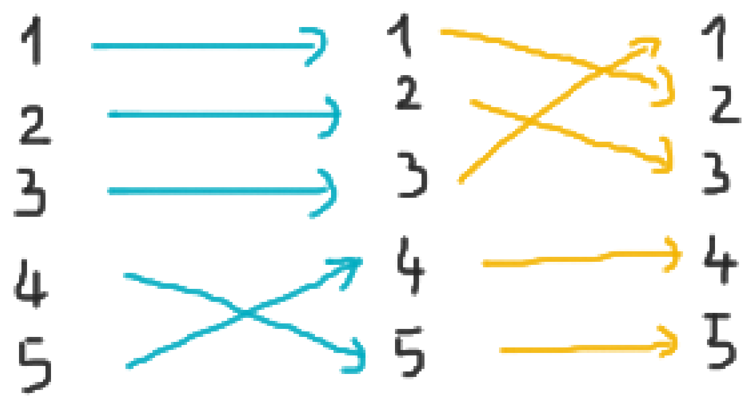
Se $z \notin \{x_1, \dots, x_\ell\} \cup \{y_1, \dots, y_m\}$ allora $(\sigma \circ \tau)(z) = \sigma(\tau(z)) = \sigma(z) = z$

$(\tau \circ \sigma)(z) = \tau(\sigma(z)) = \tau(z) = z$ $\boxtimes$

Es: $\sigma = (1\ 2\ 3)$ $\tau = (4\ 5)$ in S_5

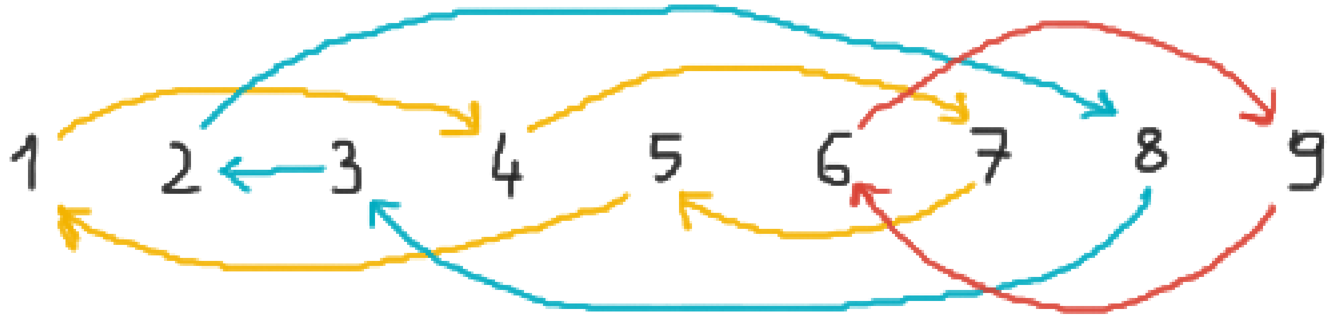


$\tau \circ \sigma$



$\sigma \circ \tau$

Es: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 7 & 1 & 9 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$



$\pi = (1\ 4\ 7\ 5)(2\ 8\ 3)(6\ 9)$

π è composizione di cicli a due a due disgiunti.

Prop: Ogni permutazione π si scrive in modo <u>essenzialmente unico</u> come composizione di cicli $c_1, c_2, \dots, c_r$ a due a due disgiunti.

$$\pi = c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_r$$

nel senso che l'ordine di composizione è irrilevante.

Dim: Se $\forall x \in I_n$ $\pi(x) = x \Rightarrow \pi = id$.

Se $\exists x \in I_n$ t.c. $\pi(x) \neq x$, allora posso far partire un ciclo.

Pongo $x_1 = x$, $\pi(x_1) = x_2$, ... $\pi^i(x_1) = x_{i+1}$ ... Poiché I_n è finito, ad un certo punto gli elementi si ripetono, cioè $\exists$ il più piccolo ℓ t.c. $x_{\ell+1} = x_j$ per qualche $1 \leq j \leq \ell$.

Se fosse $j > 1$ allora $\pi(x_{j-1}) = x_j = x_{\ell+1} = \pi(x_\ell)$, ma π è iniettiva $\Rightarrow x_{j-1} = x_\ell$ quindi ℓ non era il più piccolo t.c. ... CONTRADDIZIONE $\Rightarrow j = 1$, cioè $x_{\ell+1} = x_1$ e $(x_1\ x_2 \dots x_\ell)$ è un ciclo costitutivo di π.

Considero l'insieme $I_n \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Se $\pi(x) = x$ $\forall x \in I_n \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$ allora $\pi = (x_1 \dots x_\ell)$. Altrimenti $\exists x \in I_n \setminus \{x_1 \dots x_\ell\}$ t.c. $\pi(x) \neq x$ allora pongo $y_1 = x$ e parto con un nuovo ciclo .....

Il processo ha termine poiché I_n è finito $\boxtimes$.

Come si compongono cicli non disgiunti ?

Es : $\pi = \underbrace{(1\ 3\ 4\ 7)}_{c_3}\underbrace{(2\ 6\ 4)}_{c_2}\underbrace{(5\ 1\ 2)}_{c_1}$ in S_7 non sono disgiunti!

(provare per esercizio nel modo usuale)

Procediamo in un modo diverso :

$$1 \xrightarrow{c_1} 2 \xrightarrow{c_2} 6 \xrightarrow{c_3} 6$$
$$6 \xrightarrow{c_1} 6 \xrightarrow{c_2} 4 \xrightarrow{c_3} 7$$
$$7 \xrightarrow{c_1} 7 \xrightarrow{c_2} 7 \xrightarrow{c_3} 1$$

$$2 \xrightarrow{c_1} 5 \xrightarrow{c_2} 5 \xrightarrow{c_3} 5$$
$$5 \xrightarrow{c_1} 1 \xrightarrow{c_2} 1 \xrightarrow{c_3} 3$$
$$3 \xrightarrow{c_1} 3 \xrightarrow{c_2} 3 \xrightarrow{c_3} 4$$
$$4 \xrightarrow{c_1} 4 \xrightarrow{c_2} 2 \xrightarrow{c_3} 2$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, "\pi"] & \\ 7 \arrow[ur, "\pi"] & & 6 \arrow[ll, "\pi"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\pi"] & \\ 4 \arrow[ur, "\pi"] & & 5 \arrow[dl, "\pi"] \\ & 3 \arrow[ul, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

$$\pi = (1\ 6\ 7)(2\ 5\ 3\ 4)$$