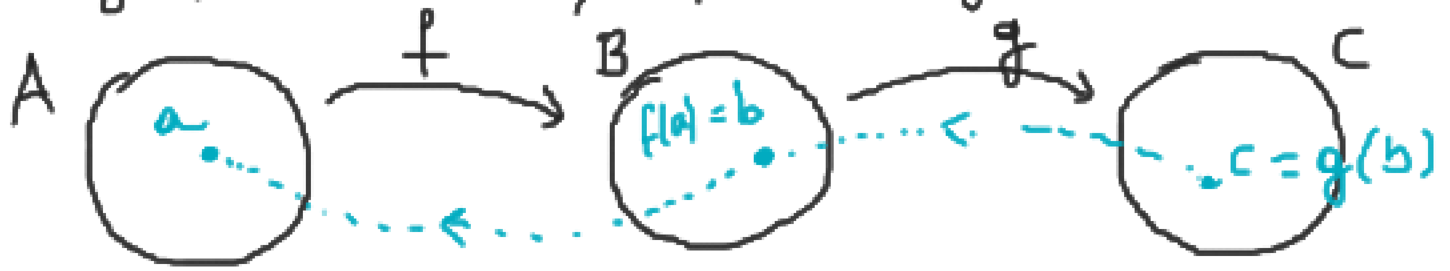
FUNZIONI (III PARTE)

Prop: Date due funzioni $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, allora:

1) Se f e g sono iniettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ iniettiva;
2) Se f e g sono suriettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ suriettiva.

Dim: 1) Siano $a_1, a_2 \in A$. Consideriamo $(g \circ f)(a_1)$, $(g \circ f)(a_2)$.
Se $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, cioè $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ $\underset{\text{poiché } g \text{ iniettiva}}{\Longrightarrow}$ $f(a_1) = f(a_2)$ $\underset{\text{poiché } f \text{ iniettiva}}{\Longrightarrow}$ $a_1 = a_2$.
Quindi $g \circ f$ è iniettiva.

2) Vogliamo mostrare che $\forall c \in C\ \exists a \in A$ tale che $(g \circ f)(a) = c$.
Prendiamo $c \in C$. Poiché g suriettiva, $\exists b \in B$ tale che $g(b) = c$.
Inoltre, poiché f é suriettiva, $\exists a \in A$ tale che $f(a) = b$. Ma $g(f(a)) = g(b) = c$,
quindi $(g \circ f)(a) = c$, quindi $g \circ f$ è suriettiva.



Prop: Date due funzioni $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$:

1) Se $g \circ f$ è iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva;
2) Se $g \circ f$ è suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva.

Dim: 1) Supponiamo che $g \circ f$ sia iniettiva. Consideriamo $a_1, a_2 \in A$.
Se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, cioè $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \underset{\substack{\text{poiché} \\ g \circ f \text{ iniettiva}}}{\Rightarrow} a_1 = a_2$
In conclusione, f è iniettiva.

2) Supponiamo che $g \circ f$ sia suriettiva. Prendiamo un qualsiasi $c \in C$.
Poiché $(g \circ f)$ è suriettiva, $\exists a \in A$ tale che $(g \circ f)(a) = c$, ovvero $g(f(a)) = c$.
Ma allora l'elemento $f(a) \in B$ è tale per cui $f(a) \in g^{-1}(c) \Rightarrow g$ suriettiva.

Esempio:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad\qquad g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto (n, n) \qquad\qquad (m, n) \longmapsto n$$

$g \circ f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad n \overset{f}{\longmapsto} (n, n) \overset{g}{\longmapsto} n$, ovvero $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$

$id_{\mathbb{N}}$ è biettiva $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva, ma g non è iniettiva (es. $g((0,0)) = g((1,0)) = 0$)
$\Rightarrow$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva, ma f non è suriettiva (es. $f^{-1}((1,0)) = \emptyset$)

Invertibilità

Def: Due funzioni $f: A \to B$, $g: B \to A$ si dicono inverse tra loro se

$$g \circ f = id_A \quad e \quad f \circ g = id_B$$

[devono valere entrambe le uguaglianze.
Nell'esempio precedente avevamo $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$, ma $f \circ g \neq id_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$]

Prop: Se f e g sono funzioni inverse tra loro, sono entrambe biezioni.

Dim: Se $g \circ f = id_A \Rightarrow f$ iniettiva e g suriettiva

$f \circ g = id_B \Rightarrow f$ suriettiva $\quad g$ iniettiva

f biettiva $\quad g$ biettiva

Teorema: Se $f: A \to B$ è una funzione biettiva $\Rightarrow \exists!$ la funzione inversa di f.

Dim: Poiché f è biettiva, $\forall b \in B$ $|f^{-1}(b)| = 1$, cioè $f^{-1}(b) = \{a\}$ per un certo $a \in A$.

Possiamo allora definire una funzione $g: B \to A$ $\quad b \mapsto a$ (unico elemento di $f^{-1}(b)$).

Verifichiamo che g è l'inversa di f.

$a \xmapsto{f} \underset{\in B}{f(a)} \xmapsto{g} a$ poiché $a \in f^{-1}(f(a))$ ed è l'unico $\Rightarrow g \circ f = id_A$

$$b \overset{g}{\longmapsto} \underset{\substack{\text{l'unico elemento} \\ \text{di } f^{-1}(b)}}{a} \overset{f}{\longmapsto} \underset{\substack{\text{poiché} \\ a \in f^{-1}(b)}}{b} \implies f \circ g = id_B .$$

<u>Unicità</u>: Sia $h : B \longrightarrow A$ una funzione inversa di f.

Allora $$h = h \circ id_B \underset{\substack{\text{poiché } g \\ \text{inversa di } f}}{=} h \circ (f \circ g) \underset{\text{associatività}}{=} (h \circ f) \circ g \underset{\substack{\text{poiché } h \\ \text{inversa di } f}}{=} id_A \circ g = g \implies h = g \qquad \boxtimes$$

D'ora in poi denoteremo l'inversa di f con il simbolo: $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

<u>Prop</u>: Date $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ biettive:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

<u>dim</u>: per esercizio.