COMBINATORICA (II PARTE)

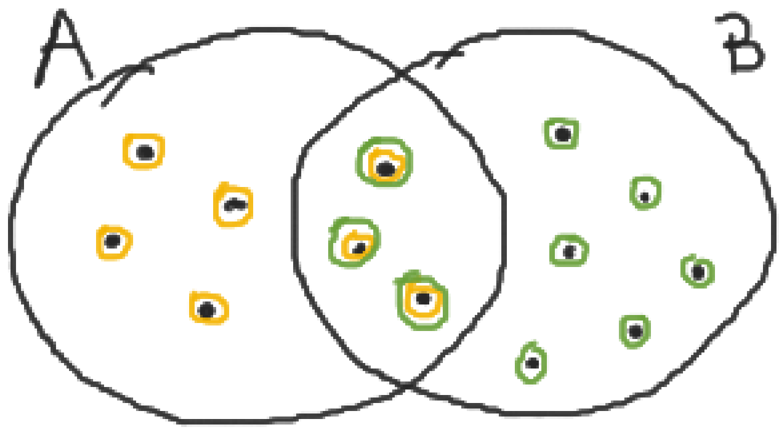
In questo capitolo tutti gli insiemi sono finiti.

Consideriamo due insiemi A e B, con $|A| = n$, $|B| = m$.

Se $\underbrace{A \cap B = \emptyset}_{\text{disgiunti}}$, allora $|A \cup B| = m + n$

In generale $A \cap B \neq \emptyset$, $|A \cap B| = k$ $(k \leq \min\{n, m\})$

Domanda: $|A \cup B| = ?$



gli elementi di $A \cap B$ sono stati contati due volte (giallo + verde)

$$|A \cup B| = n + m - k$$

Principio di Inclusione-Esclusione:

Dati due insiemi finiti A e B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Esempi: 1) Ad un corso di laurea, 90 studenti hanno superato Fisica, 120 hanno superato Chimica, 48 le hanno superate entrambe. Quanti ne hanno superata almeno una?

$A = \{\text{hanno superato Fisica}\}$ $\quad B = \{\text{hanno superato Chimica}\}$

$|A| = 90 \qquad |B| = 120 \qquad |A \cap B| = 48$

$$|A \cup B| \underset{\text{incl.-escl.}}{=} |A| + |B| - |A \cap B| = 90 + 120 - 48 = 162$$

2) In un gruppo di 32 giovani, 20 praticano sport, 18 suonano uno strumento, e ciascuno fa almeno una delle due cose. Quanti tra loro fanno sport e suonano uno strumento allo stesso tempo?

$A = \{\text{giovani che praticano sport}\}$ $\quad B = \{\text{giovani che suonano uno strumento}\}$

$|A| = 20 \qquad |B| = 18 \qquad |A \cup B| = 32$

$|A \cap B| = ?$ $\qquad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (incl-escl)

ma allora $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 20 + 18 - 32 = 6$.

Che cosa succede se abbiamo tre insiemi?

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$\parallel$$
$$|A\cup B\cup C|$$

<u>Principio di inclusione - esclusione</u> (caso con 3 insiemi):

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| .$$

<u>Dim</u>: $|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C| = |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| =$

applico incl-escl su 2

$= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|(A\cap C)\cap(B\cap C)| =$

$= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| .$

Esempio: $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 6 \le n \le 40\}$. Quali tra questi sono primi?

Osservazione $X \cap \{\text{primi}\} = \{\text{numeri di } X \text{ non divisibili per } 2, 3, 5\}$

$A = \{n \in X \mid n = 2k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$ multipli di 2 $|A| = 18$

$B = \{n \in X \mid n = 3k$ " " $\}$ " di 3 $|B| = 12$

$C = \{n \in X \mid n = 5k$ " " $\}$ " di 5 $|C| = 7$

I numeri che stanno in X e <u>non</u> sono primi stanno in $A \cup B \cup C$.

$A \cap B = \{n \in X \mid n = 6k\}$ multipli di 6 $|A \cap B| = 6$

$B \cap C = \{n \in X \mid n = 15k\}$ " di 15 $|B \cap C| = 2$

$A \cap C = \{n \in X \mid n = 10k\}$ " di 10 $|A \cap C| = 4$

$A \cap B \cap C = \{n \in X \mid n = 30k\}$ " di 30 $|A \cap B \cap C| = 1$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 18 + 12 + 7 - 6 - 4 - 2 + 1 = 26$$

$$|X \cap \{\text{primi}\}| = |X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A \cup B \cup C| = 35 - 26 = 9$$

Prodotto cartesiano : $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$ $\qquad |A \times B| = |A| \cdot |B|$

|A| scelte $\qquad$ |B| scelte

Con più di 2 insiemi, definiamo $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, 1 \le i \le n \}$

Si può costruire per passi successivi: $(A \times B) \times C = \{ ((a,b), c) \mid (a,b) \in A \times B, c \in C \}$

sono in biezione

Posso "dimenticare" le parentesi: $A \times B \times C = \{ (a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$

Prop: Dati n insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ finiti, $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$. (*)

Dim: Per induzione.

PASSO BASE $(n=2)$: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ visto sopra.

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che la formula (*) sia vera per un certo n.

Prendiamo $n+1$ insiemi:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| \underset{\text{c'è biezione}}{=} |(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}| \underset{\text{PASSO BASE}}{=} |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| \cdot |A_{n+1}| \underset{\text{ipotesi induttiva}}{=}$$

$$= |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

$\boxtimes$

Su questa proposizione si basa il METODO DELLE SCELTE SUCCESSIVE.

Esempi: 1) Quanti pasti completi diversi si possono avere in un ristorante che offre:

6 antipasti, 4 primi, 5 secondi, 3 dolci ?
$A \quad P \quad S \quad D$

Un pasto è una sequenza $(a, p, s, d) \in A \times P \times S \times D$.

Quanti ce ne sono? $|A \times P \times S \times D| = |A| \cdot |P| \cdot |S| \cdot |D| = 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 360$.

2) Quanti sono tutti i possibili PIN di uno smartphone?

Dobbiamo scegliere 4 cifre decimali (non necessariamente distinte).

$|\text{PIN possibili}| = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.

3) Quante sono le possibili giocate del totocalcio:

ci sono 13 partite, per ciascuna delle quali devo scegliere tra $\{1, X, 2\}$.

Scelte possibili: $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{13 \text{ volte}} = 3^{13}$

4) Quanti sono i podii possibili della finale dei 100 m alle olimpiadi (8 atleti)?

Opzioni possibili: $\underset{\text{scelta del vincitore}}{8} \cdot \underset{\text{scelta del } 2°}{7} \cdot \underset{\text{scelta del } 3°}{6} = 336$.