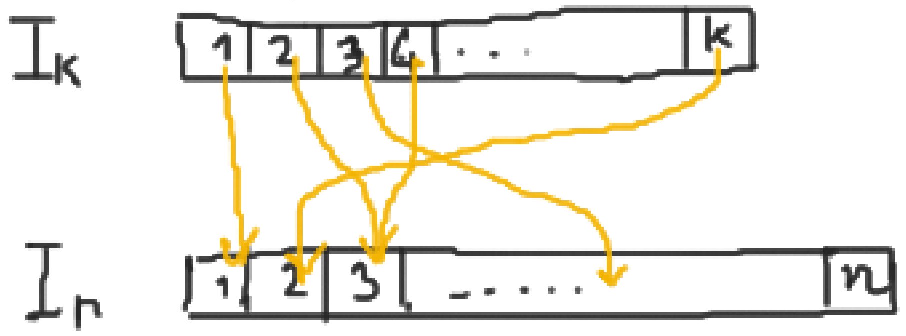
COMBINATORICA (III PARTE)

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE $\quad D'_{n,k} \quad (n,k \in \mathbb{N})$

Sequenze di K elementi (eventualmente ripetuti) presi in un insieme di n elementi.

$$D'_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

OSS: Questo valore corrisponde al numero di funzioni $I_k \longrightarrow I_n$



$(0^0 = ?)$

$$\boxed{|\mathcal{F}_{A,B}| = |B|^{|A|}}$$

In generale, dati A e B insiemi finiti: $\quad \mathcal{F}_{A,B} = \{\text{funzioni } A \longrightarrow B\}$

Es. Totocalcio $\quad A = \{\text{partite}\} \quad B = \{1, X, 2\} \quad |A| = 13 \quad |B| = 3 \quad D'_{3,13} = 3^{13}$.

Rivisitazione di $\mathcal{P}(A)$: A insieme fissato, $\Omega = \{V, F\}$, $S \subseteq A$

Possiamo costruire $\chi_S : A \longrightarrow \Omega \quad \chi_S(a) = \begin{cases} V & a \in S \\ F & a \notin S \end{cases}$ funzione caratteristica di S.

Le funzioni $A \longrightarrow \Omega$ sono in biezione coi sottoinsiemi di A.

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}_{A,\Omega}| = |\Omega|^{|A|} = 2^{|A|}.$$

DISPOSIZIONI SEMPLICI $D_{n,k}$

Sequenze di k elementi distinti presi in un insieme di n elementi.

OSS: Questo valore corrisponde al numero di funzioni iniettive $I_k \to I_n$

1) Se $k > n$, allora $D_{n,k} = 0$ (piccionaia)
2) Se $k \leq n$, allora: $D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ scelte}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ (dim. per esercizio)

In generale, dati A, B $\mathcal{I}_{A,B} = \{\text{funzioni iniettive } A \to B\}$ $|\mathcal{I}_{A,B}| = D_{|B|,|A|}$

Es: I podi della finale dei 100m. $A = \{\text{oro, argento, bronzo}\}$ $B = \{\text{atleti}\}$ $|A| = 3$ $|B| = 8$

Caso speciale: se $\boxed{k = n}$.

Allora ogni funzione iniettiva $I_k \to I_n$ è anche biettiva.
In questo caso la sequenza prende tutti i valori possibili.

PERMUTAZIONI $P_n = D_{n,n}$

Sono tutti i possibili riordinamenti di un insieme di n elementi.

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (\cancel{n} - \cancel{n} + 1) = n!$$

Possiamo affermare che $n!$ è il numero dei riordinamenti di I_n.

In generale, dato A $\quad \mathcal{B}_{A,A} = \{$funzioni biettive $A \to A\}$ $\quad |\mathcal{B}_{A,A}| = |A|!$

Domanda: $0! = ?$

Esempio: Scegliere l'ordine d'arrivo completo della finale dei 100 m.
Ci sono $P_8 = 8! = 40320$ scelte possibili.

ANAGRAMMI

Es. Quanti sono gli anagrammi (anche senza senso) della parola AMORE?
Sono $P_5 = 5! = 120$

Es: Quanti sono gli anagrammi della parola ELENA?
ELENA = ELENA $\qquad$ gli anagrammi possibili sono $\dfrac{P_5}{2} = \dfrac{5!}{2} = 60$
LENEA = LENEA

Es: Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA?
Devo tener conto delle permutazioni delle 2 M $\quad 2!$
" $\qquad$ " delle 2 T $\quad 2!$
" $\qquad$ " delle 3 A $\quad 3!$

ho $\dfrac{P_{10}}{P_2 \cdot P_2 \cdot P_3} = \dfrac{10!}{2!2!3!} = 151200$

In generale, se ci sono k lettere ripetute rispettivamente $r_1, r_2, \dots, r_k$ volte

$$n^\circ \text{ di anagrammi} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

Se invece le scelte non sono successive...

COMBINAZIONI SEMPLICI $C_{n,k}$

Raccolte di k elementi distinti presi da un insieme di n elementi.
In sostanza, sono tutti i possibili sottoinsiemi di cardinalità k del nostro insieme con n elementi.

1) Se $k > n$ allora $C_{n,k} = 0$

2) Se $k \leq n$ basta prendere le disposizioni $D_{n,k}$ e identificare quelle che contengono gli stessi elementi.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Es: 1) Quanti sono gli abbinamenti di colori dell'arcobaleno?
n = n° di colori disponibili = 7 $\quad$ k = scelte da fare = 2

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

2) Quante sono le giocate possibili del Superenalotto?
$n = 90$ $\quad$ $k = 6$

$$C_{90,6} = \frac{90!}{6!\,84!} = 622\,614\,630$$

(1 12 24 61 30 5)

"

(12 61 1 30 24 5)

6! permutazioni

COEFFICIENTI BINOMIALI

Notazione : $\binom{n}{k} = C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Ricordando che sono i sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di cardinalità n...

$\binom{n}{0} = 1$ $\qquad S \subseteq I_n \quad |S| = 0 \iff S = \emptyset$

$\binom{n}{1} = n$ $\qquad S \subseteq I_n \quad |S| = 1 \iff S = \{x\}$ per qualche $x \in I_n$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad f : \mathcal{P}(I_n) \longrightarrow \mathcal{P}(I_n)$, $S \longmapsto I_n \setminus S$ è una biezione e manda insiemi di k elementi in insiemi di $n-k$ elementi.

Tutte queste proprietà si deducono dalla formula (esercizio).

Ulteriore rivisitazione di $\mathcal{P}(I_n)$: $\quad |\mathcal{P}(I_n)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\quad$ (esercizio: dimostrare per induzione)

cardinalità del sottoinsieme

Per dimostrarlo, serve :

Formula di Stiefel : $\quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (1 \leq k \leq n)$

(si può ricavare dalla def. di coeff. binomiale)

Triangolo di Pascal-Tartaglia

$$
\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

$\dots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

$\dots$

Perché si chiamano coefficienti binomiali?

Formula del binomio di Newton: per $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(verificarlo per $n = 3, 4, 5$)

Conseguenza: se prendo $x=1$, $y=1$ trovo

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$