COMBINATORICA (I PARTE)

Problemi di <u>conteggio</u> su insiemi <u>finiti</u>

Domande: 1) che cosa vuol dire che un insieme è finito?

2) che cosa significa contare?

3) che cosa significa che due insiemi hanno lo stesso numero di elementi?

<u>Def</u>: Due insiemi X e Y si dicono <u>equipollenti</u> se esiste una funzione biettiva $f: X \to Y$.

Scriveremo: $|X| = |Y|$ "hanno la stessa cardinalità".

E' una "buona" nozione:

- $|X| = |X|$ $\quad id_X: X \longrightarrow X$
- se $|X| = |Y| \Rightarrow |Y| = |X|$ $\quad$ infatti se $f: X \longrightarrow Y$ biettiva $\exists!\, f^{-1}: Y \longrightarrow X$ biettiva
- se $|X| = |Y|$ e $|Y| = |Z| \Rightarrow |X| = |Z|$ $\quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ basta comporre

<u>Def</u>: Se esiste una funzione iniettiva $X \longrightarrow Y$, diciamo che $|X| \leq |Y|$. ⇝ esistono però esempi con $X \subset Y$ strettamente ma $|X| = |Y|$

<u>Proprietà</u>: 1) Dati due insiemi X e Y, vale $|X| \leq |Y|$ oppure $|Y| \leq |X|$.

2) Se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$ allora $|X| = |Y|$.

Esempi: 1) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ è iniettiva ma non suriettiva $(f^{-1}(0) = \emptyset)$
$n \longmapsto n+1$

se restringo il codominio $\tilde{f}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è biettiva

$\Rightarrow$ secondo la definizione $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}|$

2) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è iniettiva ma non suriettiva $(f^{-1}(1) = \emptyset)$
$n \longmapsto 2n$

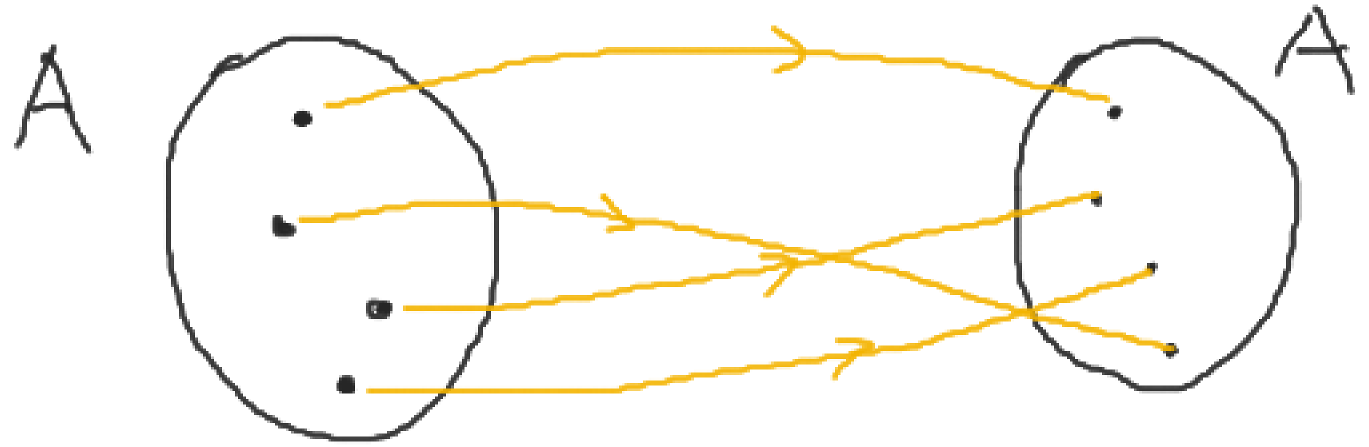
se restringo il codominio a $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (gli interi pari)

$\tilde{f}: \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ biettiva $\Rightarrow$ $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}|$ "ci sono tanti numeri pari quanti numeri interi".
$n \longmapsto 2n$

<u>Def</u>: Un insieme si dice <u>infinito</u> se è equipollente ad un suo sottoinsieme <u>proprio</u>.
Un insieme si dice <u>finito</u> se non è infinito.

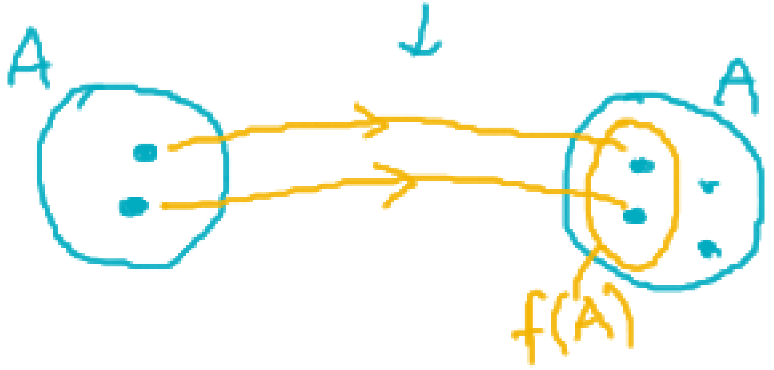
<u>Prop</u>: Sia A un insieme finito e $f: A \to A$ funzione. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f iniettiva;
2) f suriettiva;
3) f biettiva.



Dim: Mostriamo che 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

1) $\Rightarrow$ 2) Supponiamo che $f: A \to A$ sia iniettiva. Allora $f(A)$ è un sottoinsieme di A equipollente ad A. Ma poiché A non è infinito $\Rightarrow$ $f(A) = A$ $\Rightarrow$ f suriettiva.



c'è una biezione tra A (dominio) e $f(A)$ perché f iniettiva

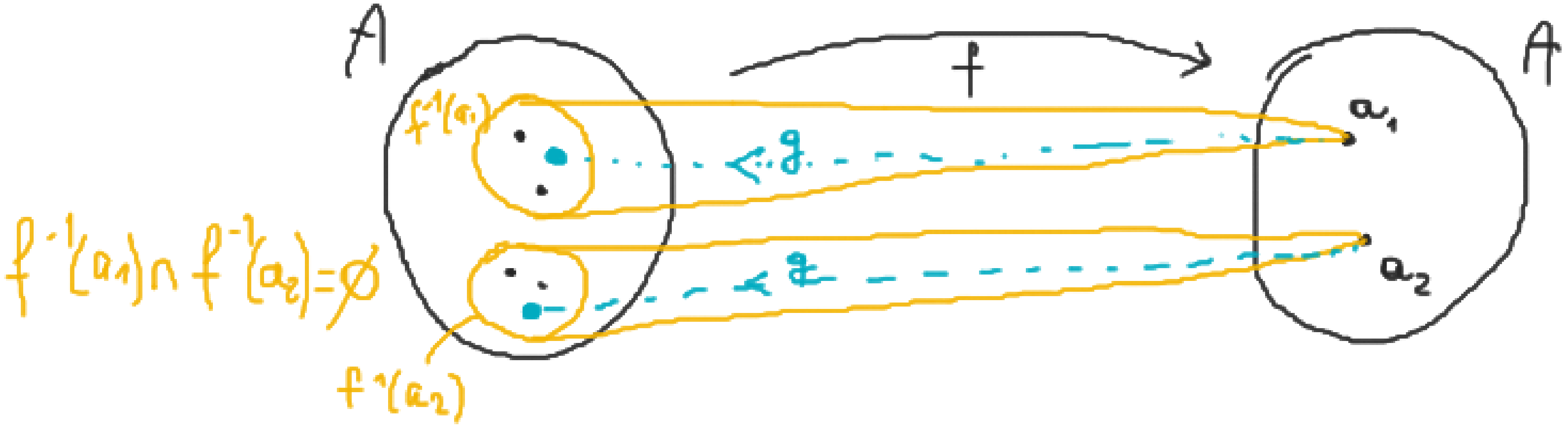
$f(A)$ non può essere sottoinsieme proprio

2) $\Rightarrow$ 3) Supponiamo $f: A \to A$ sia suriettiva e definiamo
$$g: A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto a' \in f^{-1}(a)$$

esiste perché f suriettiva e possiamo sceglierla a caso

Dati $a_1 \neq a_2 \in A$. Poiché $f^{-1}(a_1) \cap f^{-1}(a_2) = \emptyset$
allora la funzione g è iniettiva e $g: A \to A$
allora, per quanto dimostrato al punto precedente, g è suriettiva $\Rightarrow$ biettiva.

3) $\Rightarrow$ 1) ovvia.



(f suriettiva)

$\Longrightarrow A \xleftarrow{g} A$ è iniettiva

(poi applico il punto precedente)

Definiamo degli insiemi: $I_0 = \emptyset$

$I_n = \{1, 2, \dots, n\} \quad \forall n \geq 1$

Teorema:
1) $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n è finito.
2) Se $m \neq n$ allora I_m non è equipollente a I_n.
3) Se $m \leq n$ allora $|I_m| \leq |I_n|$
4) Ogni insieme finito è equipollente a un certo I_n.
5) Per ogni insieme infinito X, si ha $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

Osservazione: esistono però insiemi infiniti di cardinalità superiore a $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ alef zero

Es: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ $\qquad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$

Gli insiemi infiniti di cardinalità $\aleph_0$ si dicono numerabili (sono in biezione con $\mathbb{N}$)

Esempi: $\mathbb{Z}$ è numerabile: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile: $(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), \dots$

$\mathbb{Q}$ è numerabile.

Principio delle gabbie e i piccioni

Se vogliamo mettere n piccioni in $k<n$ gabbie, ci sarà almeno una gabbia che contiene più di un piccione.

Deriva da questa osservazione: Se $|X|=n$ e $|Y|=k$ con $k<n$ allora non esistono funzioni iniettive $f: X \to Y$

Es. 1) Tra gli iscritti al primo anno a Informatica, ci sono almeno due studenti che condividono il compleanno

2) A Torino ci sono almeno due persone (non pelate) con lo stesso numero di capelli

3) Estraendo 9 carte da un mazzo di 52, ce ne sono 3 dello stesso seme.