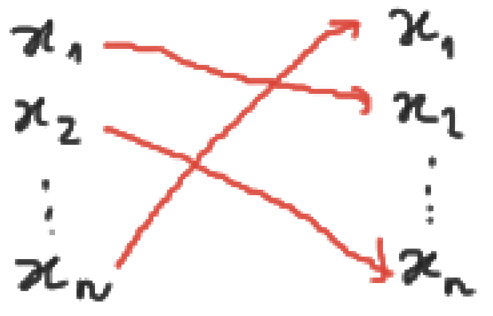
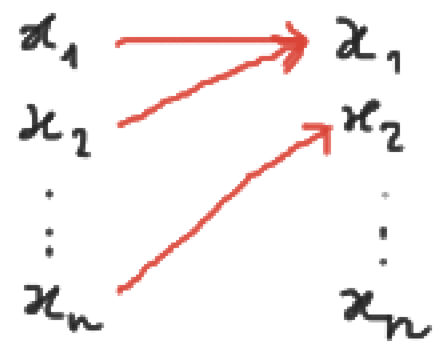
PERMUTAZIONI (I PARTE)

X insieme finito. Le sue permutazioni sono i possibili riordinamenti dei suoi elementi.
Si possono anche interpretare come funzioni biettive $X \longrightarrow X$.

<u>Def</u>: $S_X = \{ \text{funzioni } f: X \to X \text{ biettive} \}$



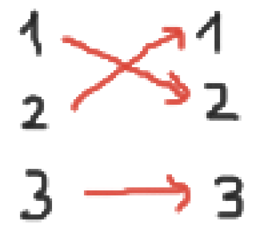
$f \in S_X$



$f \notin S_X$

Se, in particolare, $X = I_n = \{1, 2, \dots, n\}$
usiamo la notazione $S_{I_n} = S_n$

<u>Es</u>: $S_3 = \{ \text{funzioni biettive } I_3 \longrightarrow I_3 \}$



$\in S_3$

<u>Prop</u>: Sia X insieme finito, con $|X| = n$. Allora c'è una biezione $f: S_X \to S_n$ tale che per $\sigma, \pi \in S_X$, vale $f(\sigma \circ \pi) = f(\sigma) \cdot f(\pi)$.

D'ora in poi studieremo solo gli insiemi S_n.

Proprietà degli S_n:

1) $id_{I_n} : I_n \longrightarrow I_n \quad id_{I_n}(x) = x \qquad id \in S_n \Rightarrow S_n \neq \emptyset$

2) Se $\sigma \in S_n$, $\pi \in S_n \Rightarrow \sigma, \pi$ sono biezioni $\Rightarrow \sigma \circ \pi$ è biezione $\Rightarrow \sigma \circ \pi \in S_n$
(S_n è chiuso per composizione)

3) Se $\sigma \in S_n \Rightarrow \sigma$ è biettiva $\Rightarrow \sigma$ è invertibile $\Rightarrow \sigma^{-1}$ è biettiva $\Rightarrow \sigma^{-1} \in S_n$

4) $|S_n| = n!$ $\rightsquigarrow$ per assegnare $\sigma \in S_n$ devo scegliere $\forall x \in I_n$ la sua immagine

$$\begin{array}{lll}
1 \longrightarrow \sigma(1) \in I_n & n & \text{scelte} \\
2 \longrightarrow \sigma(2) \in I_n & n-1 & " \\
3 \longrightarrow \sigma(3) \in I_n & n-2 & " \\
\vdots & \vdots & \\
n \longrightarrow \sigma(n) \in I_n & 1 & \text{scelta}
\end{array}$$

Per il principio delle scelte successive, ho

$\underbrace{n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 1}_{= n!}$ scelte

Es: S_3

$$\begin{array}{cccccc}
1 \to 1 & 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 3 & 1 \to 2 & 1 \to 3 \\
2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 1 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 1 \\
3 \to 3 & 3 \to 2 & 3 \to 3 & 3 \to 1 & 3 \to 1 & 3 \to 2
\end{array}$$

Ci sono $6 = 3!$ funzioni biettive $I_3 \longrightarrow I_3 \Rightarrow |S_3| = 6$.

Notazione: Nella pratica, per descrivere un elemento di S_n, useremo questa tabella:

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Es: S_3 $\quad \sigma: \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array}$ $\quad$ si scriverà così: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

⚠ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ è una permutazione $\in S_5$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ non è una permutazione (non è biettiva)

(tutti gli elementi di I_n devono comparire anche nella seconda riga)

Calcolo della composizione:

S_5 $\qquad \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\pi \circ \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u> : $\sigma \circ \pi \neq \pi \circ \sigma$ cioè non vale la proprietà commutativa.

<u>Es.</u> S_4 $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ in questo caso <u>speciale</u> (esercizio)

Riprendiamo la permutazione $\sigma \in S_5$ dell'esercizio precedente.
Quanto vale $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma$

$$\sigma \circ \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{5} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^3 = id$$

In generale, date σ e $\pi \in S_n$, la composta $\sigma \circ \pi$ si ottiene attraverso la tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \sigma(\pi(3)) & \dots & \sigma(\pi(n)) \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa:

Data $\sigma \in S_n$, l'inversa σ^{-1} si ottiene in questo modo:

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{le righe}]{\text{scambio}} \sigma^{-1} : \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

e poi riordino secondo la prima riga

Es: S_6 $\quad \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sigma^{-1} : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$\sigma \circ \sigma^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{4} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = id \qquad \sigma^{-1} \circ \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = id$$

Cicli

Es: S_6 $\quad \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

È un <u>ciclo</u>

$\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Non</u> è un ciclo

Def: $\sigma \in S_n$ si dice <u>ciclo</u> se $\exists \{x_1, x_2, \dots, x_\ell\} \subseteq I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ tale che

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2, \ \sigma(x_2) = x_3, \ \dots, \ \sigma(x_\ell) = x_1 & \text{elementi coinvolti nel ciclo} \\ \sigma(k) = k \quad \forall k \neq x_i & \text{elementi fermi} \end{cases}$$

ℓ si dice <u>lunghezza</u> del ciclo.

Per i cicli esiste una notazione più compatta:

$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ si può rappresentare così: $(1\ 4\ 3\ 5)\cancel{(2)(6)}$

non si scrivono