

Equivalências entre princípios de indução

Ao longo do semestre vimos a importância do princípio da indução para a construção de diversas provas. Este princípio pode aparecer de formas distintas dependendo do contexto a ser utilizado. O objetivo deste trabalho é mostrar a equivalência entre duas das formas mais comuns de enunciar o princípio da indução sobre os números naturais. A forma mais comum é o princípio da indução matemática:

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Seja P uma propriedade sobre o conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Se

(BI) $P(0)$, isto é, o natural 0 satisfaz a propriedade P , e;

(PI) $\forall n, (P(n) \rightarrow P(n+1))$.

Então $\forall n, P(n)$.

onde BI (resp., PI) denota a base da indução (resp., o passo indutivo).

Uma outra forma comum do princípio da indução é o chamado princípio da indução forte:

Princípio da Indução Forte (ou Completa) (PIF)

Seja Q uma propriedade sobre o conjunto dos números naturais \mathbb{N} .

Se $\forall n, (\forall m, m < n \rightarrow Q(m)) \rightarrow Q(n)$ então $\forall n, Q(n)$.

Note que aqui não precisamos da base de indução explicitamente. Ela foi encapsulada dentro do enunciado do PIF.

Exercício: Prove a equivalência entre os dois princípios enunciados acima.