

# Lógica Computacional 1

## Equivalências entre princípios de indução

Flávio L. C. de Moura\*

1 de maio de 2021

Ao longo do semestre vimos a importância do princípio da indução na construção de provas. Este princípio pode aparecer de formas distintas dependendo do contexto a ser utilizado. O objetivo deste trabalho é mostrar a equivalência entre três das formas mais comuns de enunciar o princípio da indução sobre os números naturais. A forma mais comum é o princípio da indução matemática:

---

### Princípio da Indução Matemática (IM)

Sejam  $P$  uma propriedade sobre os números naturais  $\mathbb{N}$ , e  $a \in \mathbb{N}$ . Se

1. (BI)  $P(a)$ , isto é, o natural  $a$  satisfaz a propriedade  $P$ , e;
2. (PI)  $\forall n \geq a, (P(n) \rightarrow P(n+1))$ .

Então  $\forall k \geq a, P(k)$ .

---

Em particular, se  $a = 0$  então o enunciado anterior toma a forma que costumamos utilizar no ensino médio:

---

Sejam  $P$  uma propriedade sobre os números naturais  $\mathbb{N}$ . Se

1. (BI)  $P(0)$ , isto é, o natural 0 satisfaz a propriedade  $P$ , e;
2. (PI)  $\forall n, (P(n) \rightarrow P(n+1))$ .

Então  $\forall n, P(n)$ .

---

Uma outra forma comum do princípio da indução é o chamado princípio da indução forte:

---

### Princípio da Indução Forte (ou Completa) (IF)

Sejam  $P$  uma propriedade sobre os números naturais  $\mathbb{N}$ , e  $a \in \mathbb{N}$ . Se

1. (BI')  $P(a)$ , isto é, o natural  $a$  satisfaz a propriedade  $P$ , e;
2. (PI')  $\forall n, (\forall m, a \leq m < n, (P(m) \rightarrow P(n)))$ .

Então  $\forall k \geq a, P(k)$ .

---

Por fim, uma terceira forma do princípio da indução é o chamado princípio da boa ordenação:

---

\*flavio@flaviomoura.info, flaviomoura@unb.br

Princípio da Boa Ordenação (BO)

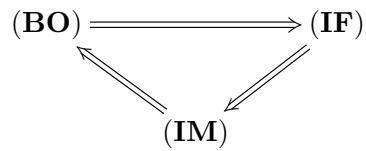
---

Todo subconjunto não-vazio do conjunto dos números naturais possui menor elemento.

---

Prove a equivalência entre os três princípios enunciados acima.

**Dica:** Esta equivalência pode ser estabelecida de diversas formas, mas uma sugestão é dada pelo diagrama a seguir:



Este trabalho pode ser resolvido via uma prova manual (papel e lápis) ou no assistente de provas Coq (ou nos dois!). A(s) solução(ões) devem estar disponíveis no repositório GitHub até o dia 16/05/2021. Adicionalmente, este trabalho pode ser feito individualmente ou em dupla.