Cours Victor
Del: 08/02/96

$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f(u)}{\partial x} \to$ Transport linéaire

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ex: $f(u) = \alpha u$

$u \in V$ espace fonctionnel de dim infinie ex: $V = L^2(\mathbb{R})$

$V_{h,i} \subset V$ espace fonctionnel, ss esp vect de V de dim finie : $p+1$

$V_{h,i}$: dépend du maillage, i : cellule i

$V_{h,i} = \mathrm{Span}(\varphi_i^0, \dots, \varphi_i^p)$ i: numéro de cellule du maillage $\mathcal{M}$

$i \in \mathcal{M} \subset \mathbb{Z}$

$x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i, $x_{i+\frac{1}{2}}$, a, b

$x_i = a + ih + \frac{h}{2}$

$x_{i+\frac{1}{2}} = a + (i+\frac{1}{2})h + \frac{h}{2}$

ex Taylor: $\forall i \in \mathcal{M}, \forall x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) = C_i$

$$\varphi_i^{(k)}(x) = \frac{(x-x_i)^k}{k!} \quad \forall k \in [\![0,p]\!] \quad (\mathcal{M})$$

(Lagrange: $$\varphi_i^{(k)}(x) = \frac{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{p} (x - x_l^G)}{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{p} (x_k - x_l^G)} \quad \forall k \in [\![0,p]\!]$$)

pt de quad → x_1^G, x_2^G
(pt de Gauss)

$(x_l^G)_{l \in [\![0,p]\!]}$ pt de quad

(*) $\forall i \in \mathcal{M}, \forall x \in C_i, \quad u_{h,i}(x) = \sum_{j=0}^{p} u_{i,j}\, \varphi_i^{(j)}(x)$

si $p=3$ $= u_{i,0} + u_{i,1}(x-x_i) + u_{i,2}\frac{(x-x_i)^2}{2} + u_{i,3}\frac{(x-x_i)^3}{6}$

4 $(p+1)$ dofs par cellule

$\forall x \in \Omega$

$$u_h(x) = \sum_{i \in \mathcal{M}} u_{h,i}(x) \, \mathbb{1}_{\{x \in C_i\}}$$

Soit $i \in \mathcal{M}$, on cherche $u_{h,i}$ comme la fct de $V_{h,i}$ qui réalise la projection orthogonale de $E(u_{h,i})$ sur $V_{h,i}$:

$$\langle E(u_{h,i}), \varphi_i^{(k)} \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall k \in [\![0, p]\!]$$

$\forall i \in \mathcal{M}$, $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\forall t \in [t^n, t^n + \Delta t]$

$$\int_{C_i} E(u_{h,i})(t,x) \, \varphi_i^{(k)}(x) \, dx = 0 \quad (*)$$

On discrétise en temps et on fait Euler explicite.

$$u_{h,i}(t,x) = \sum_{j=0}^{p} u_{i,j}(t) \, \varphi_i^{(j)}(x)$$

$$E(u_{h,i})(t,x) = \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) \, \varphi_i^{(j)}(x) + \alpha \sum_{j=0}^{p} u_{i,j}(t) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i^{(j)}(x)$$

(par $f(u) = \alpha u$)

$\forall i \in \mathcal{M}$, $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\forall t \in [t^n, t^n + \Delta t]$

$$(*) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p} \frac{d}{dt} u_{i,j}(t) \int_{C_i} \varphi_i^{(j)}(x) \, \varphi_j^{(k)}(x) \, dx \quad (1)} + \underbrace{\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial x} f(u_{h,i}(t,x)) \, \varphi_i^{(k)}(x) \, dx}_{(**)} = 0$$

$$(**) = \underbrace{\Big[f(u_{h,i}(t,x))\, \varphi_i^{(k)}(x) \Big]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}}_{(***)} \boxed{- \int_{C_i} f(u_{h,i}(t,x))\, \frac{d}{dx} \varphi_i^{(k)}(x)\, dx \quad (2)}$$

$$(***) = \boxed{f(u_{h,i}(t,x_{i+\frac{1}{2}}))\, \varphi_i^{(k)}(x_{i+\frac{1}{2}}) - f(u_{h,i}(t,x_{i-\frac{1}{2}}))\, \varphi_i^{(k)}(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (3)}$$

$$f(u_{h,i}(t,x_{i+\frac{1}{2}})) \simeq \mathcal{F}(u_{h,i}(t,x_{i+\frac{1}{2}}), u_{h,i+1}(t,x_{i+\frac{1}{2}}))$$

$\mathcal{F}$: flux numérique consistant, tq $\mathcal{F}(v,v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$

ex : Flux centré $\mathcal{F}(v_L, v_R) = \frac{1}{2}\left(f(v_L) + f(v_R)\right)$

Flux décentré $\mathcal{F}(v_L, v_R) = \frac{1}{2}\left(f(v_L) + f(v_R)\right) - \mathcal{D}(v_L, v_R)(v_R - v_L)$

(Euler explicit) <u>V1</u> : on le voit avec une intégrale

<u>V2</u> : $\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) \simeq \frac{u_{i,j}(t^{n+1}) - u_{i,j}(t^n)}{\Delta t}$ et $u_{i,j}(t) \simeq u_{i,j}(t^n)$

et on note $u_{i,j}(t^n) = u_{i,j}^n$

$$\sum_{j=0}^{p} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} \overbrace{\int_{C_i} \varphi_i^{(j)}(x)\, \varphi_i^{(k)}(x)\, dx}^{M_i = (M_{j,k})_{j,k \in [0,p]} \quad (1)} \underbrace{- \int_{C_i} f\Big(\sum_{j=0}^{p} u_{i,j}^n \varphi_i^{(j)}(x)\Big) \frac{d}{dx} \varphi_i^{(k)}(x)\, dx}_{V_i(U_i^n)} \quad (2)$$

$$(3) \left\{ \underbrace{\begin{aligned} &+ \mathcal{F}\Big(\sum_{j=0}^{p} u_{i,j}^n \varphi_i^{(j)}(x_{i+\frac{1}{2}}), \sum_{j=0}^{p} u_{i+1,j}^n \varphi_{i+1}^{(j)}(x_{i+\frac{1}{2}})\Big) \\ &- \mathcal{F}\Big(\sum_{j=0}^{p} u_{i-1,j}^n \varphi_{i-1}^{(j)}(x_{i-\frac{1}{2}}), \sum_{j=0}^{p} u_{i,j}^n \varphi_i^{(j)}(x_{i-\frac{1}{2}})\Big) \end{aligned}}_{F_i(U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n)} \right.$$

$$\begin{pmatrix} U_{i,0}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{i,p}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$M_i U_i^{n+1} = M_i U_i^n - \Delta t \left[V_i(U_i^n) - F_i(U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n) \right]$$

EF : $-\Delta u = f$

$$A\alpha = b$$

$$\Longleftrightarrow \min_{\alpha} \sum_i \| (\Delta u + f) \varphi_i \|^2$$

DG :

Ajout d'un terme de pénalisation pour forcer la continuité.

type $c \frac{h}{2} \sum [U_i][\varphi_i]$

coeff de pénalisation

saut de u à gauche et à droite