

Cours Victor
DS: 08/02/2021

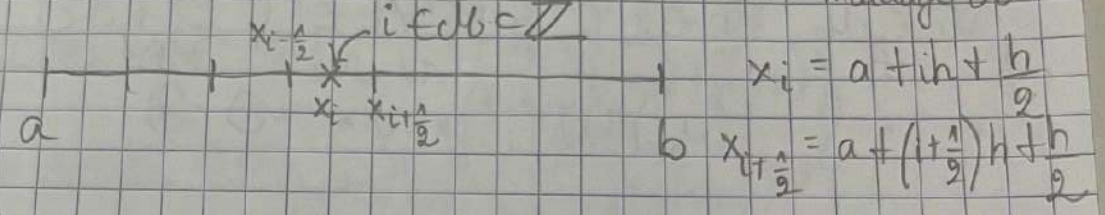
$$E(u) = \frac{du}{dt} + \frac{df(u)}{dx} = 0 \quad u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{ex: } f(u) = \alpha u$$

$u \in V$ espace fonctionnel de dim infinie ex: $V = L^2(\mathbb{R})$

$V_{h,i} \subset V$ espace fonctionnel, ss esp vect de V de dim finie : $p+1$
dépend du maillage cellule i

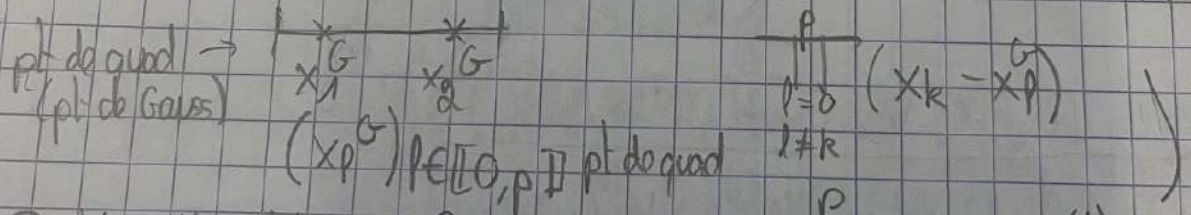
$$V_{h,i} = \text{Span}(\varphi_i^0, \dots, \varphi_i^p) \quad i: \text{numéro de cellule du maillage d'b}$$



ex. Taylor: $\forall i \in \text{d'b}, \forall x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) = C_i$

$$\varphi_i^{(k)}(x) = \frac{(x - x_i)^k}{k!} \quad \forall k \in [0, p] \quad (*)$$

(Lagrange: $\varphi_i^{(k)}(x) = \frac{\prod_{l=0, l \neq k}^p (x - x_l^G)}{l! \neq k} \quad \forall k \in [0, p]$)



$$(*) \quad \forall i \in \text{d'b}, \forall x \in C_i, u_{h,i}(x) = \sum_{j=0}^p u_{i,j} \varphi_i^{(j)}(x)$$

si $p=3$ $= u_{i,0} + u_{i,1}(x - x_i) + u_{i,2} \frac{(x - x_i)^2}{2} + u_{i,3} \frac{(x - x_i)^3}{6}$
4 d'fs par cellule

$$\forall x \in \Omega$$

$$u_h(x) = \sum_{i \in \mathcal{M}} u_{h,i}(x) \chi_{\{x \in C_i\}}$$

Soit $i \in \mathcal{M}$, on cherche $u_{h,i}$ comme la fct de $V_{h,i}$ qui réalise la projection orthogonale de $E(u_{h,i})$ sur $V_{h,i}$:

$$\langle E(u_{h,i}), \psi_i^{(k)} \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$$

$$\forall i \in \mathcal{M}, \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall t \in [t^n, t^n + \Delta t]$$

$$\int_{C_i} E(u_{h,i})(t, x) \psi_i^{(k)}(x) dx = 0 \quad (*)$$

$$u_{h,i}(t, x) = \sum_{j=0}^p u_{i,j}(t) \psi_i^{(j)}(x)$$

$$E(u_{h,i})(t, x) = \sum_{j=0}^p \frac{d}{dt} u_{i,j}(t) \psi_i^{(j)}(x)$$

$$+ \alpha \sum_{j=0}^p u_{i,j}(t) \frac{\partial}{\partial x} \psi_i^{(j)}(x) \quad (\text{par } f(u) = \alpha u)$$

On discrétise en temps
et on fait Euler explicite.

$$\forall i \in \mathcal{M}, \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall t \in [t^n, t^n + \Delta t]$$

$$(*) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{j=0}^p \frac{d}{dt} u_{i,j}(t) \int_{C_i} \psi_i^{(j)}(x) \psi_i^{(k)}(x) dx} \quad (1)$$

$$+ \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial x} (u_{h,i}(t, x)) \psi_i^{(k)}(x) dx = 0$$

(**)

$$(*) = \left[f(u_{h,i}(t,x)) \varphi_i^{(k)}(x) \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = \int_{C_i} f(u_{h,i}(t,x)) \frac{d}{dx} \varphi_i^{(k)}(x) dx \quad (a)$$

$$(**) = \left[f(u_{h,i}(t, x_{i+\frac{1}{2}})) \varphi_i^{(h)}(x_{i+\frac{1}{2}}) - f(u_{h,i}(t, x_{i-\frac{1}{2}})) \varphi_i^{(h)}(x_{i-\frac{1}{2}}) \right] \quad (b)$$

$$f(u_{h,i}(t, x_{i+\frac{1}{2}})) \approx \mathcal{F}(u_{h,i}(t, x_{i+\frac{1}{2}}), u_{h,i+1}(t, x_{i+\frac{1}{2}}))$$

\mathcal{F} : Flux numérique consistant, eg $\mathcal{F}(v, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$$\text{ex: Flux centré } \mathcal{F}(v_L, v_R) = \frac{1}{2} (f(v_L) + f(v_R))$$

$$\text{Flux décentré } \mathcal{F}(v_L, v_R) = \frac{1}{2} (f(v_L) + f(v_R)) - \Phi(v_L, v_R) (v_R - v_L)$$

(Euler explicite)

$V1$: On le voit avec une intégrale

$$V2: \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) \approx \frac{u_{i,j}(t^{n+1}) - u_{i,j}(t^n)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad u_{i,j}(t) \approx u_{i,j}(t^n)$$

$$M_i = (M_{i,j,k})_{j,k \in \{0,p\}}$$

$$\text{et on note } u_{i,j}(t^n) = u_{i,j}^n$$

$$\sum_{j=0}^p \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \int_{C_i} \varphi_i^{(j)}(x) \varphi_i^{(k)}(x) dx = \int_{C_i} f\left(\sum_{j=0}^p u_{i,j}^n \varphi_i^{(j)}(x)\right) \frac{d}{dx} \varphi_i^{(k)}(x) dx \quad (c)$$

$$+ \mathcal{F}\left(\sum_{j=0}^p u_{i,j}^n \varphi_i^{(j)}(x_{i+\frac{1}{2}}), \sum_{j=0}^p u_{i+1,j}^n \varphi_{i+1}^{(j)}(x_{i+\frac{1}{2}})\right) - \mathcal{F}\left(\sum_{j=0}^p u_{i-1,j}^n \varphi_{i-1}^{(j)}(x_{i-\frac{1}{2}}), \sum_{j=0}^p u_{i,j}^n \varphi_i^{(j)}(x_{i-\frac{1}{2}})\right) \quad (d)$$

(2)

$$M_i \begin{pmatrix} u_{i,0}^{n+1} \\ u_{i,1}^{n+1} \\ u_{i,p}^{n+1} \\ u_{i,n+1}^{n+1} \end{pmatrix} = M_i u_i^n - \Delta t [V_i(u_i^n) - F_i(u_{i,n}^n, u_i^n, u_{i,n+1}^n)]$$

$$\underline{EF} : -\Delta u = f$$

$$A\alpha = b$$

$$\Leftrightarrow \min_{\alpha} \sum_i \|(\Delta u + f)\psi_i\|^2$$

DG :

Ajout d'un terme de pénalisation pour forcer la continuité.

$$\text{type} \rightarrow C \frac{h}{2} \sum [u_i] [\psi_i]$$

coeff de pénalisation

saut de u à gauche et à droite