M1 maths Calcul scientifique TP3

2021

Résolution de l'équation de transport

1. On considère le problème aux limites (c est une constante réelle positive)

$$\begin{aligned} \partial_t u + c\partial_x u &= 0, \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T[, \\ u(0,t) &= e^{-t}, \quad t \in]0, T[, \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in]0, L[. \end{aligned} \tag{1}$$

   Calculer la solution de ce problème.

2. Écrire le schéma aux différences finies décentrées permettant de calculer numériquement la solution de (1). La solution approchée sera notée $u_i^n \simeq u(i\Delta x, n\Delta t)$, $\Delta x = L/N$.

3. Montrer que ce schéma est stable dans L^∞ et dans L^2 sous condition de CFL $c\Delta t \leq \Delta x$ (pour la stabilité L^2 la démonstration est différente de celle du cours : on ne peut pas utiliser la transformée de Fourier). Pour étudier la stabilité, remplacer la condition à la limite gauche par

$$u(0,t) = 0,$$

   et la condition initiale par

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (u_0 \in L^\infty \text{ ou } L^2).$$

4. Programmer ce schéma (en Rust pour les CSMI ou en Python pour les MF). Décrire votre programme. Vérifier que le schéma est instable lorsque la condition de CFL n'est pas vérifiée (tracer un exemple de solution numérique obtenue à l'instant T).

5. Vérifier (numériquement) la convergence du schéma (comparer, à l'instant T, en norme L^1 et L^2, la solution numérique et la solution exacte pour diverses finesses de maillage).

6. Vérifier numériquement que le schéma centré est inconditionnellement instable.

7. Programmer le schéma de Lax-Wendrof (voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Sch%C3%A9ma_de_Lax-Wendroff`). Quel est sa condition de stabilité L^2 ? La vérifier numériquement. Vérifier aussi numériquement que ce schéma n'est pas stable dans L^∞.