M1 CSSI/MF Calcul scientifique TP6

S1

Résolution de l'équation de Laplace sur un carré

1. Soit f une fonction donnée et le problème aux limites d'inconnue u

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = [0,L] \times [0,H], \\ u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

   Proposer une discrétisation par différences finies de ce problème. On posera $h = L/(N+1) = H/(M+1)$. On cherchera une approximation u_{ij} de $u((i+1)h,(j+1)h)$, $0 \leq i \leq N-1$,$0 \leq j \leq M-1$.

2. Vérifier que le problème discrétisé peut se mettre sous la forme matricielle

$$AU = F.$$

   Expliciter la matrice A et les vecteurs U et F lorsque $N = 3$, $M = 4$.

3. Décrire et tester un programme Python ou C qui construit la matrice A pour N, M quelconques. La matrice sera stockée dans un format creux (« matrice sparse ») ou plein. En Python, utiliser scipy.sparse. En C, utiliser la bibliothèque « skyline » fournie. Remarque : pour activer un stockage plein, il suffit de remplacer les valeurs nulles $A_{k,l} = 0$ par des petites valeurs non nulles aléatoires.
4. Écrire un programme qui permet de résoudre numériquement le problème aux différences finies puis qui affiche le résultat (utiliser matplotlib ou gnuplot).
5. Valider votre programme au moyen d'un couple (u, f) bien choisi.
6. Comparer les temps de calcul pour un cas avec $N = 10$, $M = 1000$ puis $M = 10$, $N = 1000$ avec le stockage creux ou plein. Conclusion ?