M1 CSSI Calcul scientifique TP5

S1

Résolution de l'équation des ondes

1. Soit le problème (c est une constante positive)

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= 0, \quad x \in [-2,2], \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), \\ \partial_t u(x,0) &= u_1(x), \\ u(-2,t) &= u(2,t) = 0. \end{aligned}$$

   On suppose que u_0 et u_1 sont à support dans $[-1,1]$. Calculer la solution exacte de ce problème pour $t \in [0,1/c]$. Pourquoi la formule n'est-elle en général plus valable pour $t > 1/c$?

2. En posant $w = (\partial_t u, \partial_x u)^T$, montrer que le problème peut s'écrire sous la forme $\partial_t w + A\partial_x w = 0$.

3. écrire le schéma décentré associé à ce modèle. On utilisera la subdivision $x_i = -2 + i\Delta x$, $i = 0 \cdots N+1$, $\Delta x = 4/(N+1)$. Les points x_0 et x_{N+1} serviront à appliquer les conditions aux limites. Décrire la programmation.

4. Vérifier numériquement que votre schéma converge vers la solution exacte du problème (vous avez le libre choix des fonctions u_0 et u_1).

5. écrire le schéma saute-mouton pour résoudre l'équation des ondes. Vérifier numériquement la convergence du schéma. Vérifier numériquement que la condition de stabilité est $c\Delta t \leq \Delta x$.

6. Quel est le schéma le plus précis ?

7. Démontrer rigoureusement le résultat de la question 5. On pourra calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & \ddots & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (chercher les vecteurs propres U sous la forme $U_i = \sin(\mu i)$).