RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Le but de ce TP est de calculer numériquement de deux façons différentes la solution du problème suivant

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad t > 0, \quad L > x > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \\ &u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ce problème d'évolution peut modéliser, par exemple, la dissolution d'un sucre dans le café. La valeur $u(x,t)$ représente alors la concentration en sucre (comprise entre zéro et un) au point x et à l'instant t.

Pour les applications, on choisira $L = 1$ et la condition initiale (le sucre) sera de la forme suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [1/2 - 1/8, 1/2 + 1/8], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

1. Justifier de façon heuristique le fait de chercher u sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i e^{-\frac{i^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{i\pi}{L}x\right). \tag{3}$$

2. Calculer les coefficients c_i en utilisant la condition initiale.

3. Sans calcul, donner la limite quand t tend vers l'infini de $u(x,t)$.

4. Pour approcher $u(x,t)$, on considère la série tronquée

$$u_N(x,t) = \sum_{i=0}^{N} c_i e^{-\frac{i^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{i\pi}{L}x\right). \tag{4}$$

Pour diverses valeurs de N tracer (écrire un programme C99 ou Python en double précision) la solution approchée u_N aux instants $t = 0.001$, $t = 0.01$, $t = 0.1$, $t = 1$. Que constatez-vous pour les petites valeurs de t ? Pourquoi ?

5. Ecrire un programme pour résoudre l'équation (1) par la méthode des différences finies avec intégration en temps par un $\theta-$schéma. Décrire la programmation. Expliquer comment exploiter le stockage creux des matrices.

6. Comparer les solutions obtenues en **4** avec ce que vous obtenez avec la méthode des différences finies. Tester plusieurs valeurs de θ ainsi que plusieurs finesses de maillage et de pas de temps. Vérifier numériquement l'importance de la condition de stabilité quand $\theta = 0$.