LECOURTIER Frédérique 28 avril 2023

Explication - Rehaussement avec FEM

On considère le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

On a ainsi une EDP que l'on souhaite résoudre sur un domaine Ω. On note Γ le bord de Ω, c'est-à-dire $\Gamma = \partial\Omega$. Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On considère ici que l'on possède une solution analytique u et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$u_p(x,y) = u(x,y) - \epsilon P(x,y) \tag{1}$$

avec P la perturbation (tel que $P=0$ sur Γ) et ϵ petit.
On supposera que $||P||_{H^{k+1}(\Omega)} \leq 1$.
On souhaite ainsi résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{\phi}C) = f & \Omega \\ \tilde{u} = g & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_2$}$$

avec $\tilde{\phi} = u_p$ et $\tilde{u} = \tilde{\phi}C$.
Ce document a pour but d'expliquer l'intérêt de rehausser la solution (avec FEM) afin de réduire le plus possible l'erreur $||u-u_c||_{L^2}$ où u_c est la solution obtenu après la correction.

Principe général de FEM

La démarche générale de la méthode des éléments finis consiste à écrire la formulation variationnelle de cette EDP et ainsi à se ramener à un problème du type

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in V \tag{$\mathcal{P}$}$$

On définit alors un maillage du domaine Ω, grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h, sous-espace vectoriel de V de dimension fini N_h. On écrit alors le problème approché

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h,v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V \tag{$\mathcal{P}_h$}$$

On considère une base $(\varphi_1,\dots,\varphi_{N_h})$ de V_h. En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \tag{2}$$

le problème ($\mathcal{P}_h$) se réécrit

$$\text{Trouver } \mu_1,\dots,\mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V$$

ou encore

$$\text{Trouver } \mu_1,\dots,\mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j),\ \forall j \in \{1,\dots,N_h\}$$

La résolution de l'EDP consiste alors à résoudre le système linéaire suivant :

$$A\mu = b$$

avec

$$A = (a(\varphi_i,\varphi_j))_{1\leq i,j\leq N_h}, \quad \mu = (\mu_i)_{1\leq i\leq N_h} \quad \text{et} \quad b = (l(\varphi_j))_{1\leq j\leq N_h}$$

Le théorème de convergence de FEM nous donne l'inégalité suivante :

$$||u-u_h||_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1}|u|_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{3}$$

Application à la correction

On considère à présent uniquement le problème ($\mathcal{E}_2$). On peut alors effectuer le même type de raisonnement dans le cas de la correction. Ainsi par (2), la décomposition de u_h sur la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$ de V_h s'écrit pour ce problème

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i(\varphi_i \tilde{\phi}(x)) = \left(\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \right) \tilde{\phi}(x) \tag{4}$$

Ainsi par (4) on en déduit

$$\mu_i = \frac{u(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i)}$$

Et ainsi l'inégalité (3) se réécrit pour le problème ($\mathcal{E}_2$) :

$$\left|\left| \frac{u}{\tilde{\phi}} - C_h \right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} \left| \frac{u}{\tilde{\phi}} \right|_{H^{k+1}(\Omega)} ||\tilde{\phi}||_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

avec $C = \frac{u}{\tilde{\phi}}$ la solution exacte au problème et C_h la solution obtenue par FEM.

Remarque. *On notera que si $\epsilon = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perturbation), alors $C = 1$.*

On considère une solution $\mathbb{P}^1$ ($k = 1$), ainsi

$$\left| \frac{u}{\tilde{\phi}} \right|_{H^2(\Omega)} = \left|\left| \left(\frac{u}{\tilde{\phi}} \right)'' \right|\right|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left|\left| \left(\frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' \right|\right|_{L^2(\Omega)} \tag{6}$$

car

$$\left(\frac{u}{\tilde{\phi}} \right)'' = \left(\frac{\tilde{\phi} + \epsilon P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \left(1 + \epsilon \frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \epsilon \left(\frac{P}{\tilde{\phi}} \right)''$$

avec

$$\left(\frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \frac{P'' \tilde{\phi} - P \tilde{\phi}''}{\tilde{\phi}^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{\tilde{\phi}^3}$$

Rehaussement

L'idée du rehaussement est la suivante : on considère cette fois

$$\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$$

avec m une constante.
On souhaite alors résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi} C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_3$}$$

Dans le cas où la solution s'annule, rehausser le problème permet d'améliorer la correction. Autrement dit si la solution peut-être nulle, il faut rehausser le problème.
Si la solution ne s'annule pas, rehausser le problème permet dans certains cas de diminuer l'erreur.
En effet, l'inégalité (5) se réécrit pour le problème ($\mathcal{E}_3$) :

$$\left|\left| \frac{u+m}{\hat{\phi}} - C_h \right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} \left| \frac{u+m}{\hat{\phi}} \right|_{H^{k+1}(\Omega)} ||\hat{\phi}||_{L^2(\Omega)} \tag{7}$$

De la même manière que (6), on a :

$$\left| \frac{u+m}{\hat{\phi}} \right|_{H^2(\Omega)} = \left|\left| \left(\frac{u+m}{\hat{\phi}} \right)'' \right|\right|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left|\left| \left(\frac{P}{\hat{\phi}} \right)'' \right|\right|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left|\left| \left(\frac{P}{\tilde{\phi} + m} \right)'' \right|\right|_{L^2(\Omega)} \tag{8}$$

avec

$$\left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' = \frac{P''(\tilde{\phi}+m) - P\tilde{\phi}''}{(\tilde{\phi}+m)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'(\tilde{\phi}+m))\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3}$$
$$= \frac{P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}''}{(\tilde{\phi}+m)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3} + \frac{mP''}{(\tilde{\phi}+m)^2} - \frac{2mP'\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3}$$

Or

$$\left|\left|\left(\frac{P}{\tilde{\phi}+m}\right)''\right|\right|_{L^2(\Omega)} = \left|\left|\left(\frac{P}{m\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)}\right)''\right|\right|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{m}\left|\left|\left(\frac{P}{1+\frac{\tilde{\phi}}{m}}\right)''\right|\right|_{L^2(\Omega)}$$

Alors, pour m suffisamment grand :

$$||\hat{\phi}||_{L^2(\Omega)} \sim m$$

et

$$\left|\left|\left(\frac{P}{1+\frac{\tilde{\phi}}{m}}\right)''\right|\right|_{L^2(\Omega)} \sim ||P''||_{L^2(\Omega)}$$

car

$$\left(\frac{P}{1+\frac{\tilde{\phi}}{m}}\right)'' = m\left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' = \frac{m(P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}'')}{(\tilde{\phi}+m)^2} + \frac{2m(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3} + \frac{m^2P''}{(\tilde{\phi}+m)^2} - \frac{2m^2P'\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3}$$
$$= \frac{m(P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}'')}{m^2\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^2} + \frac{2m(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{m^3\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^3} + \frac{m^2P''}{m^2\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^2} - \frac{2m^2P'\tilde{\phi}'}{m^3\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^3}$$
$$= \frac{P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}''}{m\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{m^2\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^3} + \frac{P''}{\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^2} - \frac{2P'\tilde{\phi}'}{m\left(1+\frac{\tilde{\phi}}{m}\right)^3}$$

Donc pour m suffisamment grand, (7) devient

$$\left|\left|\frac{u+m}{\hat{\phi}} - C_h\right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1}\epsilon\,||P''||_{L^2(\Omega)} \tag{9}$$

Et ainsi, quand m est grand, l'erreur ne dépend plus de la solution mais dépend uniquement de P.
Quand m est petit, l'erreur est dominée par les dérivées et dérivées secondes de la solution perturbée $\tilde{\phi}$.

Résultats numériques

On prend ici la solution analytique suivante

$$u_{ex}(x,y) = S \times \sin(2\pi fx + p) \times \sin(2\pi fy + p)$$

et P la perturbation définie par

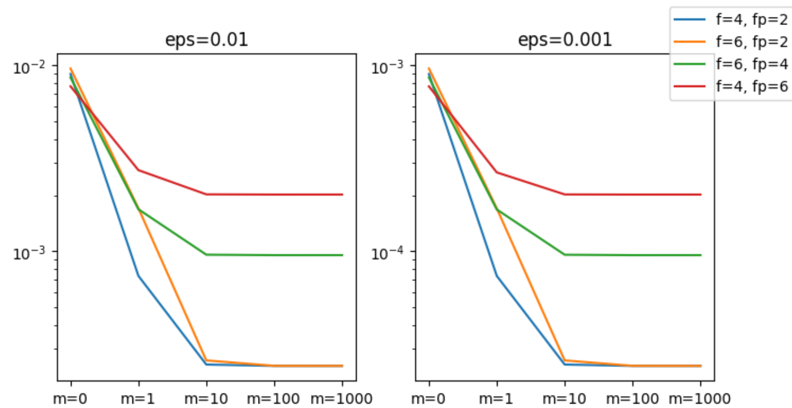
$$P(x,y) = S \times \sin(2\pi f_p x + p_p) \times \sin(2\pi f_p y + p_p)$$

avec $p_p = 0$ pour que $P = 0$ sur Γ (et donc $u_p = u_{ex}$ sur Γ).
On cherche alors à corriger cette solution avec et sans rehaussement.
On prendra $S = 0.5$ et $p = 0$ (c'est-à-dire $g = 0$). On fera varier ϵ, f et f_p.

Voici les résultats obtenus (avec à gauche les erreurs et à droite les facteurs obtenus en comparant avec l'erreur FEM classique) :

			FEM	Corr	m=1	m=10	m=100	m=1000
FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	0.095196	0.008953	0.000736	0.000246	0.000242	0.000242
		eps=0.001	0.095196	0.000895	0.000074	0.000025	0.000024	0.000024
	f=6, fp=2	eps=0.01	0.201494	0.009584	0.001701	0.000259	0.000242	0.000242
		eps=0.001	0.201494	0.000959	0.000170	0.000026	0.000024	0.000024
	f=6, fp=4	eps=0.01	0.201494	0.008578	0.001679	0.000957	0.000952	0.000952
		eps=0.001	0.201494	0.000858	0.000167	0.000096	0.000095	0.000095
	f=4, fp=6	eps=0.01	0.095196	0.007688	0.002725	0.002020	0.002015	0.002015
		eps=0.001	0.095196	0.000769	0.000265	0.000202	0.000201	0.000201

			Corr	m=1	m=10	m=100	m=1000
FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	10.632588	129.268768	387.223595	393.748857	393.742152
		eps=0.001	106.315008	1293.647125	3872.070426	3937.472946	3937.419987
	f=6, fp=2	eps=0.01	21.024327	118.426204	778.838663	832.835214	833.388314
		eps=0.001	210.201187	1187.929347	7788.825049	8328.329635	8333.880044
	f=6, fp=4	eps=0.01	23.489579	119.976882	210.472466	211.708833	211.669409
		eps=0.001	234.912870	1203.206236	2105.810805	2117.086604	2116.692744
	f=4, fp=6	eps=0.01	12.381564	34.934546	47.135628	47.251756	47.245743
		eps=0.001	123.831430	359.222973	471.745833	472.517487	472.457027



Application à ϕ-FEM

On souhaitera par la suite obtenir le même type de résultats avec ϕ-FEM. L'idée décrite ici sera la même mais pour l'instant les résultats obtenus ne sont pas ceux attendus.