

## Explication - Rehaussement avec FEM

On considère le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{E}_1)$$

On a ainsi une EDP que l'on souhaite résoudre sur un domaine  $\Omega$ . On note  $\Gamma$  le bord de  $\Omega$ , c'est-à-dire  $\Gamma = \partial\Omega$ . Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On considère ici que l'on possède une solution analytique  $u$  et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$u_p(x, y) = u(x, y) - \epsilon P(x, y) \quad (1)$$

avec  $P$  la perturbation (tel que  $P = 0$  sur  $\Gamma$ ) et  $\epsilon$  petit.

On souhaite ainsi résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{\phi}C) = f & \Omega \\ \tilde{u} = g & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{E}_2)$$

avec  $\tilde{\phi} = u_p$  et  $\tilde{u} = \tilde{\phi}C$ .

Ce document a pour but d'expliquer l'intérêt de rehausser la solution (avec FEM) afin de réduire le plus possible l'erreur  $\|u - u_c\|_{L^2}$  où  $u_c$  est la solution obtenue après la correction.

## Principe général de FEM

La démarche générale de la méthode des éléments finis consiste à écrire la formulation variationnelle de cette EDP et ainsi à se ramener à un problème du type

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \forall v \in V \quad (\mathcal{P})$$

On définit alors un maillage du domaine  $\Omega$ , grâce auquel on va définir un espace d'approximation  $V_h$ , sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension finie  $N_h$ . On écrit alors le problème approché

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (\mathcal{P}_h)$$

On considère une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$  de  $V_h$ . En décomposant  $u_h$  sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \quad (2)$$

le problème  $(\mathcal{P}_h)$  se réécrit

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$$

ou encore

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \forall j \in \{1, \dots, N_h\}$$

La résolution de l'EDP consiste alors à résoudre le système linéaire suivant :

$$A\mu = b$$

avec

$$A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq N_h}, \quad \mu = (\mu_i)_{1 \leq i \leq N_h} \quad \text{et} \quad b = (l(\varphi_j))_{1 \leq j \leq N_h}$$

Le théorème de convergence de FEM nous donne l'inégalité suivante :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (3)$$

## Application à la correction

On considère à présent uniquement le problème  $(\mathcal{E}_2)$ . On peut alors effectuer le même type de raisonnement dans le cas de la correction. Ainsi par (2), la décomposition de  $u_h$  sur la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$  de  $V_h$  s'écrit pour ce problème

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i (\varphi_i \tilde{\phi}(x)) = \left( \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \right) \tilde{\phi}(x) \quad (4)$$

Ainsi par (4) on en déduit

$$\mu_i = \frac{u(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i)}$$

Et ainsi l'inégalité (3) se réécrit pour le problème  $(\mathcal{E}_2)$  :

$$\left\| \frac{u}{\tilde{\phi}} - C_h \right\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} \left\| \frac{u}{\tilde{\phi}} \right\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (5)$$

avec  $C = \frac{u}{\tilde{\phi}}$  la solution exacte au problème et  $C_h$  la solution obtenue par FEM.

**Remarque.** On notera que si  $\epsilon = 0$  (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perturbation), alors  $C = 1$ .

On considère une solution  $\mathbb{P}^1$  ( $k = 1$ ), ainsi

$$\left\| \frac{u}{\tilde{\phi}} \right\|_{H^2(\Omega)} = \left\| \left( \frac{u}{\tilde{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \left( \frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (6)$$

car

$$\left( \frac{u}{\tilde{\phi}} \right)'' = \left( \frac{\tilde{\phi} + \epsilon P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \left( 1 + \epsilon \frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \epsilon \left( \frac{P}{\tilde{\phi}} \right)''$$

## Rehaussement

L'idée du rehaussement est la suivante : on considère cette fois

$$\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$$

avec  $m$  une constante.

On souhaite alors résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{E}_3)$$

Ainsi l'inégalité (5) se réécrit pour le problème  $(\mathcal{E}_3)$  :

$$\left\| \frac{u+m}{\hat{\phi}} - C_h \right\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} \left\| \frac{u+m}{\hat{\phi}} \right\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (7)$$

De la même manière que (6), on a :

$$\left\| \frac{u+m}{\hat{\phi}} \right\|_{H^2(\Omega)} = \left\| \left( \frac{u+m}{\hat{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \left( \frac{P}{\hat{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \left( \frac{P}{\tilde{\phi}+m} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (8)$$

Or

$$\left( \frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \frac{P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}''}{\tilde{\phi}^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{\tilde{\phi}^3}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' &= \frac{P''(\tilde{\phi} + m) - P\tilde{\phi}''}{(\tilde{\phi} + m)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'(\tilde{\phi} + m))\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi} + m)^3} \\ &= \frac{P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}''}{(\tilde{\phi} + m)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi} + m)^3} + \frac{mP''}{(\tilde{\phi} + m)^2} - \frac{2mP'\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi} + m)^3} \end{aligned}$$

Alors, pour  $m$  suffisamment grand :

$$\left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' < \left(\frac{P}{\tilde{\phi}}\right)''$$

Et donc

$$\left\| \left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} < \left\| \left(\frac{P}{\tilde{\phi}}\right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (9)$$

A COMPLETER : Je n'arrive pas à justifier la phrase suivante car les normes à gauche des inégalités (5) et (7) ne sont pas les mêmes.

On en déduit alors que pour  $m$  grand, rehausser la solution permet de diminuer l'erreur  $\|u - u_c\|_{L^2}$  (cf ....).

## Résultats numériques

On prend ici la solution analytique suivante

$$u_{ex}(x, y) = S \times \sin(2\pi f x + p) \times \sin(2\pi f y + p)$$

et  $P$  la perturbation définie par

$$P(x, y) = S \times \sin(2\pi f_p x + p_p) \times \sin(2\pi f_p y + p_p)$$

avec  $p_p = 0$  pour que  $P = 0$  sur  $\Gamma$  (et donc  $u_p = u_{ex}$  sur  $\Gamma$ ).

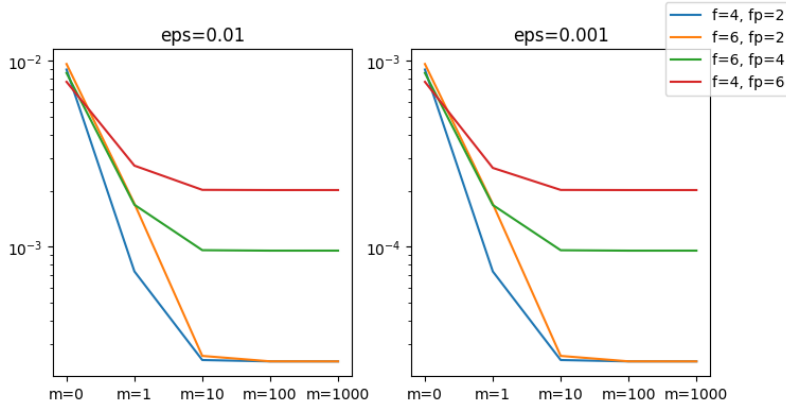
On cherche alors à corriger cette solution avec et sans rehaussement.

On prendra  $S = 0.5$  et  $p = 0$  (c'est-à-dire  $g = 0$ ). On fera varier  $\epsilon$ ,  $f$  et  $f_p$ .

Voici les résultats obtenus (avec à gauche les erreurs et à droite les facteurs obtenus en comparant avec l'erreur FEM classique) :

FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	0.095196	0.008953	0.000736	0.000246	0.000242	0.000242
		eps=0.001	0.095196	0.008953	0.000074	0.000025	0.000024	0.000024
	f=6, fp=2	eps=0.01	0.201494	0.009584	0.001701	0.000259	0.000242	0.000242
		eps=0.001	0.201494	0.000959	0.000170	0.000026	0.000024	0.000024
	f=6, fp=4	eps=0.01	0.201494	0.008578	0.001679	0.000957	0.000952	0.000952
		eps=0.001	0.201494	0.000858	0.000167	0.000096	0.000095	0.000095
	f=4, fp=6	eps=0.01	0.095196	0.007688	0.002725	0.002020	0.002015	0.002015
		eps=0.001	0.095196	0.000769	0.000265	0.000202	0.000201	0.000201

FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	10.632588	129.268768	387.223595	393.748857	393.742152
		eps=0.001	106.315008	1293.647125	3872.070426	3937.472946	3937.419987
	f=6, fp=2	eps=0.01	21.024327	118.426204	778.838663	832.835214	833.388314
		eps=0.001	210.201187	1187.929347	7788.825049	8328.329635	8333.880044
	f=6, fp=4	eps=0.01	23.489579	119.976882	210.472466	211.708833	211.669409
		eps=0.001	234.912870	1203.206236	2105.810805	2117.086604	2116.692744
	f=4, fp=6	eps=0.01	12.381564	34.934546	47.135628	47.251756	47.245743
		eps=0.001	123.831430	359.222973	471.745833	472.517487	472.457027



## Application à $\phi$ -FEM

On souhaitera par la suite obtenir le même type de résultats avec  $\phi$ -FEM. L'idée décrite ici sera la même mais pour l'instant les résultats obtenus ne sont pas ceux attendus.