LECOURTIER Frédérique 3 mai 2023

Explication - Résultats similaires avec les 2 méthodes de correction.

On considère le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

On a ainsi une EDP que l'on souhaite résoudre sur un domaine Ω. On note Γ le bord de Ω, c'est-à-dire $\Gamma = \partial\Omega$.
Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On considère ici que l'on possède une solution analytique u et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$\tilde{\phi}(x,y) = u_p(x,y) = u(x,y) - \epsilon P(x,y)$$

avec P la perturbation (tel que $P = 0$ sur Γ) et ϵ petit.
Ce document a pour but de comparer deux méthodes de correction de ce problème :

- **Méthode 1 :** On souhaite résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{\phi}C) = f & \Omega \\ C = 1 & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}_1$}$$

avec $\tilde{u} = \tilde{\phi}C$.
Dans un autre document, on a présenté l'intérêt de rehausser le problème et de se ramener au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}}$}$$

avec $\hat{u} = \hat{\phi}C + m$ où $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$ (m une constante).

- **Méthode 2 :** On souhaite résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta C = \tilde{f} & \Omega \\ C = 0 & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}_2$}$$

avec $\tilde{u} = \tilde{\phi} + C$ et $\tilde{f} = f + \Delta\tilde{\phi}$.

Remarque. *On notera que dans ce cas rehausser le problème n'a aucun intérêt.*
En effet, la décomposition de C_h sur la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$ de V_h s'écrit pour ce problème

$$C_h = \sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i$$

avec $C_i = u(x_i) - \tilde{\phi}(x_i)$. Et donc, on a l'inégalité suivante

$$||(u - \tilde{\phi}) - C_h||_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1}|u - \tilde{\phi}|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Alors

$$|u - \tilde{\phi}|_{H^{k+1}(\Omega)} = ||(u - \tilde{\phi})''||_{L^2(\Omega)} = ||(\tilde{\phi} + \epsilon P - \tilde{\phi})''||_{L^2(\Omega)} = ||P''||_{L^2(\Omega)}$$

Et ainsi, en prenant $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$ on obtient le même résultat.

Résultats numériques

On prend ici la solution analytique suivante

$$u_{ex}(x,y) = S \times \sin(2\pi f x + p) \times \sin(2\pi f y + p)$$

et P la perturbation définie par

$$P(x,y) = S \times \sin(2\pi f_p x + p_p) \times \sin(2\pi f_p y + p_p)$$

avec $p_p = 0$ pour que $P = 0$ sur Γ (et donc $u_p = u_{ex}$ sur Γ).
On cherche alors principalement à comparer les erreurs en norme L^2 obtenus avec les problèmes $\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{C}_2$.
On prendra $S = 0.5$ et $p = 0$ (c'est-à-dire $g = 0$). On fera varier ϵ, f et f_p.

Voici les résultats obtenus :

			FEM	Corr	m=1000	Corr v2
FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	0.170794	0.009114	0.000455	0.000455
		eps=0.001	0.170794	0.000911	0.000045	0.000045
	f=6, fp=2	eps=0.01	0.340309	0.009562	0.000455	0.000455
		eps=0.001	0.340309	0.000957	0.000045	0.000045
	f=8, fp=2	eps=0.01	0.511393	0.009871	0.000455	0.000455
		eps=0.001	0.511393	0.000987	0.000045	0.000045
	f=2, fp=4	eps=0.01	0.045487	0.001398	0.001708	0.001708
		eps=0.001	0.045487	0.000140	0.000171	0.000171
	f=2, fp=6	eps=0.01	0.045487	0.002909	0.003403	0.003403
		eps=0.001	0.045487	0.000292	0.000340	0.000340
	f=2, fp=8	eps=0.01	0.045487	0.004749	0.005114	0.005114
		eps=0.001	0.045487	0.000471	0.000511	0.000511

Il semblerait ici que les résultats obtenus pour les problèmes $\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}}$ avec $m = 1000$ (avant-dernière colonne) et $\mathcal{C}_2$ (dernière colonne) soient très proches.

Explication

On cherche ici à comprendre pourquoi on obtient des résultats aussi proches avec les 2 méthodes.

Méthode 1

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}}$}$$

avec $\hat{u} = \hat{\phi}C + m$ où $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$ (m une constante).
La décomposition de $\hat{u_h}$ sur la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N_h})$ de V_h s'écrit pour ce problème

$$\hat{u_h} = C_h\hat{\phi} = \left(\sum_{i=1}^{N_h} C_i\varphi_i\right)\hat{\phi}(x) \tag{1}$$

Or

$$C_i = \frac{u(x_i) + m}{\hat{\phi}(x_i)} = \frac{u(x_i) + m}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \tag{2}$$

avec

$$u(x_i) = \tilde{\phi}(x_i) + \epsilon P(x_i) \tag{3}$$

et

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x_i) + (x - x_i)\tilde{\phi}'(x_i) \tag{4}$$

De plus

$$\sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i = 1 \tag{5}$$

Avec les 4 relations précédentes, on peut développer 1 :

$$\begin{aligned}
\hat{u_h} &= \left(\sum_{i=1}^{N_h} C_i\varphi_i\right)\hat{\phi}(x) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_h} \frac{u(x_i) + m}{\tilde{\phi}(x_i) + m}\varphi_i\right)\hat{\phi}(x) \quad \text{par } 2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_h} \frac{\tilde{\phi}(x_i) + m + \epsilon P(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m}\varphi_i\right)\hat{\phi}(x) \quad \text{par } 3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N_h} \left(1 + \epsilon \frac{P(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m}\right) \varphi_i \hat{\phi}(x) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i\right) \hat{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \frac{\hat{\phi}(x)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \varphi_i \\
&= \hat{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \frac{\tilde{\phi}(x_i) + m + (x - x_i)\tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \varphi_i \quad \text{par 4 et 5} \\
&= \hat{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \left(1 + \frac{(x - x_i)\tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m}\right) \varphi_i \\
&= \tilde{\phi}(x) + m + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \left(1 + \frac{(x - x_i)\tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m}\right) \varphi_i
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
u_h = \hat{u_h} - m = \tilde{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \left(1 + \frac{(x - x_i)\tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m}\right) \varphi_i
$$

et finalement

$$
u_h \xrightarrow[m \to \infty]{} \tilde{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \varphi_i \tag{6}
$$

Méthode 2

On cherche à résoudre le problème

$$
\begin{cases} -\Delta C = \tilde{f} & \Omega \\ C = 0 & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}_2$}
$$

avec $\tilde{u} = \tilde{\phi} + C$ et $\tilde{f} = f + \Delta \tilde{\phi}$.
La décomposition de u_h sur la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N_h})$ de V_h s'écrit pour ce problème

$$
u_h = C_h + \tilde{\phi} = \left(\sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i\right) + \tilde{\phi}(x) \tag{7}
$$

Or

$$
C_i = u(x_i) - \tilde{\phi}(x_i) \tag{8}
$$

avec

$$
u(x_i) = \tilde{\phi}(x_i) + \epsilon P(x_i) \tag{9}
$$

Avec les 2 relations précédentes, on peut développer 7 :

$$
\begin{aligned}
u_h &= \tilde{\phi}(x) + \sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i \\
&= \tilde{\phi}(x) + \sum_{i=1}^{N_h} (u(x_i) - \tilde{\phi}(x_i)) \varphi_i \quad \text{par 8} \\
&= \tilde{\phi}(x) + \sum_{i=1}^{N_h} (\tilde{\phi}(x_i) + \epsilon P(x_i) - \tilde{\phi}(x_i)) \varphi_i \quad \text{par 9}
\end{aligned}
$$

$$
u_h = \tilde{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \varphi_i \tag{10}
$$

Ainsi par 6 et 10, il semblerait que pour le problème $\mathcal{E}_1$, les 2 méthodes proposées soit équivalentes (en prenant m grand).