LECOURTIER Frédérique 15 juin 2023

Estimation d'erreur - Problème rehaussé.

On se place ici dans le cadre de FEM standard.
Problème initital :
On considère initialement le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

Problème considéré :
Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On va considérer ici que l'on possède une solution analytique u_{ex} et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$\tilde{\phi}(x,y) = u_{ex}(x,y) - \epsilon P(x,y)$$

avec P la perturbation (tel que $P = 0$ sur Γ) et ϵ petit.
On considère

$$\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m = u_{ex} - \epsilon P + m = \widehat{u_{ex}} - \epsilon P$$

avec $\widehat{u_{ex}} = u_{ex} + m$ et m une constante.
On souhaite alors résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ (\hat{\phi}C) = g + m & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}$}$$

On pose alors

$$\hat{u} = \hat{\phi}C$$

But du document :
Démonter la propriété suivante :

$$||\hat{u} - \hat{u_h}||_0 \leq ch^{k+1}||\hat{\phi}||_\infty \, |C|_{k+1} \tag{1}$$

Problèmes variationnels :

Problème variationnel :

$$\text{Trouver } \hat{u} \in V \text{ tel que } a(\hat{u}, v) = l(v), \ \forall v \in V$$

Problème variationnel approché :

$$\text{Trouver } \hat{u_h} \in V_h \text{ tel que } a(\hat{u_h}, v_h) = l(v_h), \ \forall v_h \in V_h$$

1 Partie 1 : norme H^1

Comme V_h est un sous espace vectoriel de V, en posant $v = v_h$, on obtient :

$$a(\hat{\phi}C, \hat{\phi}v_h) - a(\hat{\phi}C_h, \hat{\phi}v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

On a alors l'orthogonalité de Galerkin : (ATTENTION : Abus de notation sur v_h !)

$$a(\hat{u} - \hat{u_h}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\nu||\hat{u} - \hat{u_h}||_1^2 &\leq \alpha a(\hat{u} - \hat{u_h}, \hat{u} - \hat{u_h}) && \text{par coercivité} \\
&= \alpha a(\hat{u} - \hat{u_h}, \hat{u} - I_h\hat{u} + I_h\hat{u} - \hat{u_h}) \\
&= \alpha a(\hat{u} - \hat{u_h}, \hat{u} - I_h\hat{u}) && \text{par orthogonalité de Galerkin en prenant } v_h = \hat{u_h} - I_h\hat{u} \\
&\leq \alpha|\hat{u} - \hat{u_h}|_1|\hat{u} - I_h\hat{u}|_1 && \text{par continuité} \\
&\leq \alpha||\hat{u} - \hat{u_h}||_1|\hat{u} - I_h\hat{u}|_1
\end{aligned}$$

Ainsi
$$||\hat{u}-\hat{u_h}||_1 \leq \alpha|\hat{u}-I_h\hat{u}|_1$$
Or
$$|\hat{u}-I_h\hat{u}|_1 = |(C-I_hC)\hat{\phi}|_1$$
En posant $A = C - I_hC$, on a
$$|A\hat{\phi}|_1 = ||(A\hat{\phi})'||_0 = ||A'\hat{\phi}+A\hat{\phi}'||_0 \leq ||A'\hat{\phi}||_0 + ||A\hat{\phi}'||_0$$
Comme
$$||A'\hat{\phi}||_0 = \sqrt{\int_\Omega (A'\hat{\phi})^2} \leq \max_\Omega \hat{\phi}\sqrt{\int_\Omega (A')^2} = ||\hat{\phi}||_\infty |A|_1 \leq ||\hat{\phi}||_\infty ||A||_1$$
et
$$||A\hat{\phi}'||_0 = \sqrt{\int_\Omega (A\hat{\phi}')^2} \leq \max_\Omega \hat{\phi}'\sqrt{\int_\Omega (A)^2} = ||\hat{\phi}'||_\infty ||A||_0 \leq \alpha||\hat{\phi}||_\infty ||A||_1$$
Ainsi
$$|A\hat{\phi}|_1 \leq \alpha||\hat{\phi}||_\infty ||A||_1$$
Donc
$$|\hat{u}-I_h\hat{u}|_1 = |(C-I_hC)\hat{\phi}|_1 \leq \alpha||\hat{\phi}||_\infty ||C-I_hC||_1$$
Finalement en utilisant l'inégalité d'interpolation, on obtient
$$\boxed{||\hat{u}-\hat{u_h}||_1 \leq \alpha h^k ||\hat{\phi}||_\infty |C|_{k+1}} \tag{2}$$

2 Partie 2 : norme L^2

On applique la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche. On considère le problème dual :
Soit $\hat{z} \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème
$$\begin{cases} -\Delta\hat{z} = \hat{e_h} & \text{dans } \Omega \\ \hat{z} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$
avec $\hat{e_h} = \hat{u} - \hat{u_h}$. Alors
$$a(u,v) = -\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$
et comme $e_h \in H_0^1(\Omega)$
$$a(\hat{z},\hat{e_h}) = \int_\Omega (-\Delta\hat{z})\cdot\hat{e_h} = \int_\Omega \hat{e_h}^2 = ||\hat{e_h}||_0^2 \tag{3}$$
De plus, par les propriétés de régularité :
$$\hat{z} \in H^2(\Omega) \tag{4}$$
et
$$||\hat{z}||_2 \leq \alpha||\hat{e_h}||_0 = \alpha||\hat{u}-\hat{u_h}||_0 \tag{5}$$
Ainsi
$$\begin{aligned} ||\hat{u}-\hat{u_h}||_0^2 &= ||\hat{e_h}||_0^2 \\ &= a(\hat{z},\hat{e_h}) && \text{par 3} \\ &= a(\hat{z}-I_h\hat{z},\hat{e_h}) && \text{par orthogonalité de Galerkin} \\ &\leq \alpha|\hat{z}-I_h\hat{z}|_1|\hat{e_h}|_1 && \text{par continuité} \\ &\leq \alpha h|\hat{z}|_2|\hat{e_h}|_1 && \text{par 4 et par inégalité d'interpolation} \\ &\leq \alpha\cdot h|\hat{z}|_2\cdot h^k||\hat{\phi}||_\infty|C|_{k+1} && \text{par 2} \\ &\leq \alpha h^{k+1}||\hat{u}-\hat{u_h}||_0||\hat{\phi}||_\infty|C|_{k+1} && \text{par 5} \end{aligned}$$
Finalement
$$\boxed{||\hat{u}-\hat{u_h}||_0 \leq \alpha h^{k+1}||\hat{\phi}||_\infty|C|_{k+1}} \tag{6}$$
Remarque. *On notera que*
$$||\hat{u}-\hat{u_h}||_0 = ||u+m-(u_h+m)||_0 = ||u-u_h||_0$$