

MIMESIS

UNIVERSITY OF STRASBOURG

MASTER CSMI

Internship Report : Innovative non-conformal finite element methods for augmented surgery

Authors:

Frédérique Lecourtier

Supervisors:

Michel Duprez

Emmanuel Franck

Inria

Date: June 28, 2023

Contents

1	Introduction	3
2	Finite Element Methods (FEMs)	4
3	Fourier Neural Operator (FNO)	5
3.1	Architecture of the FNO	5
3.1.1	General structure of the FNO	5
3.1.2	Fourier Layer structure	6
3.2	Application	7
4	Correction	8
5	Numerical Results ?	9
6	Conclusion	10

PLAN :

1. Intro : Ce stage est un stage de M2, dans le cadre du master CSMI. C'est la suite d'un projet effectué pendant le premier semestre.... explication rapide du projet (colab entre Cemosis et Mimesis dans le but de blablabla)
 - (a) Présentation de Mimesis
 - (b) Contexte : Mimesis est spécialisé dans la simulation en temps réel de blabla. C'est pourquoi ils ont développé une méthode appelée PhiFEM (explication des intérêts de PhiFEM).
 - (c) Objectifs : On cherche ici à améliorer la précision de la solution ainsi que les temps pour l'obtenir en passant par le biais d'un FNO que l'on va entraîner avec des solutions PhiFEM qui sont bien adapté à ce type de réseau de neurones, due aux grilles cartésienne.
2. Finite Element Methods (FEM)
 - (a) Standard FEM
 - (b) PhiFEM
3. Fourier Neural Operator (FNO)
4. Correction :

Présentation des différentes méthodes de Correction (2 cas tests : solution analytique, sol FNO) / Legendre / Modèle Dense ?

On veut mettre un schéma qui explique Entraînement du FNO -> Sortie -> Correction (-> Legendre ?)
5. Résultats ?
6. Conclu
7. Bibliography
8. Appendix (Organisation of the repository, Documentation, Github actions ...)

1 Introduction

2 Finite Element Methods (FEMs)

3 Fourier Neural Operator (FNO)

We will now introduce Fourier Neural Operators (FNO). For more information, please refer to the following articles [ADD REF !](#).

In image treatment, we call image tensors of size $ni \times nj \times nk$, where $ni \times nj$ corresponds to the image resolution and nk corresponds to its number of channels. For example, an RGB (Red Green Blue) image has $nk = 3$ channels. We choose here to present the FNO as an operator acting on discrete images. Reference articles present it in its continuous aspect, which is an interesting point of view. Indeed, it is thanks to this property that it can be trained/evaluated with images of different resolutions.

The FNO methodology creates a relationship between two spaces from a finite collection of observed input-output pairs. *Est-ce que je gardes cette phrase ?*

3.1 Architecture of the FNO

The following figure (Figure 3.1) describes the FNO architecture in detail:

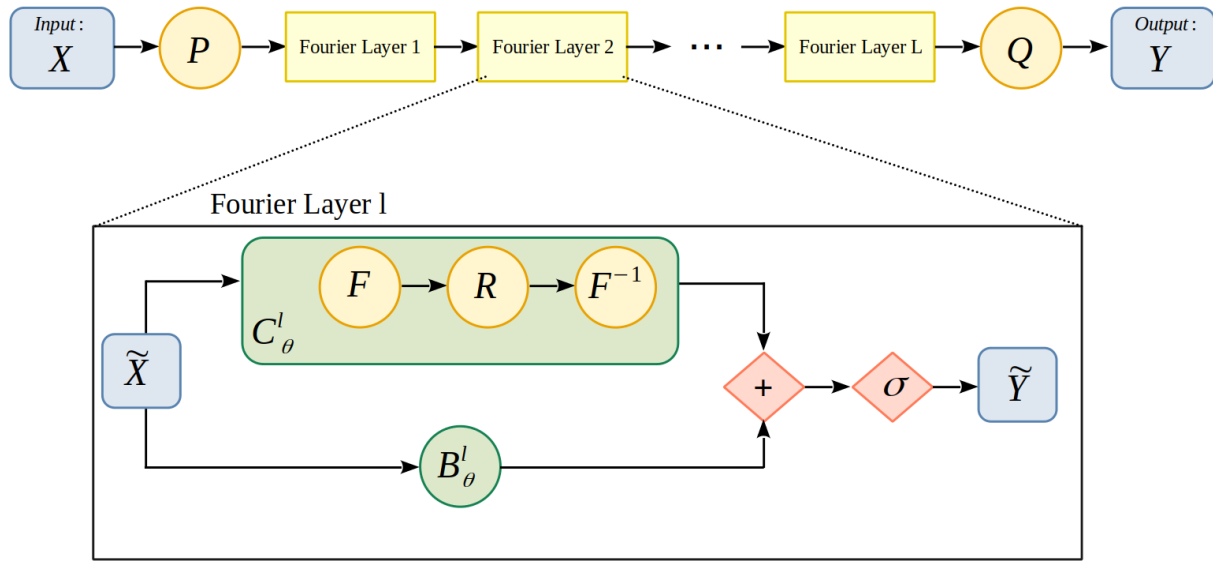


Figure 3.1: Architecture of the FNO

La structure du FNO est alors la suivante :

$$G_{\theta} = P \circ \mathcal{H}_{\theta}^1 \circ \dots \circ \mathcal{H}_{\theta}^L \circ Q$$

3.1.1 General structure of the FNO

We'll now describe the composition of this scheme in a little more detail :

- We start with input X of shape (batch_size, height, width, nb_channels) with batch_size the number of images to be processed at the same time, height and width the dimensions of the images and nb_channels the number of channels. Simplify by (bs,ni,nj,nk).
- We perform a P transformation in order to move to a space with more channels. This step enables the network to build a sufficiently rich representation of the data. For example, a Dense layer (also known as fully-connected) can be used.
- We then apply L Fourier layers, noted \mathcal{H}_θ^l , $l = 1, \dots, L$, whose specifications will be detailed in Section 3.1.2.
- We then return to the target dimension by performing a Q transformation. In our case, the number of output channels is 1.
- We then obtain the output of the Y model of shape (bs,ni,nj,1).

rajouter la valeur des paramètres dans un tableau : width,modes...

3.1.2 Fourier Layer structure

Chaque couche de Fourier est composé de deux sous-couches :

$$\tilde{Y} = \mathcal{H}_\theta^l(\tilde{X}) = \sigma \left(\mathcal{C}_\theta^l(\tilde{X}) + \mathcal{B}_\theta^l(\tilde{X}) \right)$$

où

- \tilde{X} correspond à l'entrée de la couche courante et \tilde{Y} à la sortie.
- σ est une fonction d'activation. Pour $l = 1, \dots, L-1$, on prendra la fonction d'activation ReLU (Rectified linear unit) et pour $l = L$ on prendra la fonction d'activation GELU (Gaussian Error Linear Units).rajouter schéma + argument fcts d'activation
- \mathcal{C}_θ^l est une couche de convolution où la convolution est faite par FFT
- \mathcal{B}_θ^l is the "bias-layer".

Convolution sublayer Chaque couche de convolution \mathcal{C}_θ^l contient un kernel \hat{W} entraînable et effectue la transformation

$$\mathcal{C}_\theta^l(X) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(X) \cdot \hat{W})$$

où \mathcal{F} correspond à la transformée de Fourier discrète (DFT) en 2D sur une grille de résolution $ni \times nj$

Bias subLayer

3.2 Application

Dans notre cas, on souhaite apprendre au FNO à prédire des solutions d'EDP. Plus précisément, on souhaite que le réseau soit capable de prédire la solution à partir d'un terme source f . **enrichissement des données, grilles régulières**

4 Correction

5 Numerical Results ?

6 Conclusion