

## Explication - Résultats similaires avec les 2 méthodes de correction.

On considère le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{E}_1)$$

On a ainsi une EDP que l'on souhaite résoudre sur un domaine  $\Omega$ . On note  $\Gamma$  le bord de  $\Omega$ , c'est-à-dire  $\Gamma = \partial\Omega$ . Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On considère ici que l'on possède une solution analytique  $u$  et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$u_p(x, y) = u(x, y) - \epsilon P(x, y)$$

avec  $P$  la perturbation (tel que  $P = 0$  sur  $\Gamma$ ) et  $\epsilon$  petit.

On notera

$$\tilde{\phi} = u_p$$

Ce document a pour but de comparer deux méthodes de correction de ce problème :

- **Méthode 1 :** On souhaite résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{\phi}C) = f & \Omega \\ C = 1 & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{C}_1)$$

avec  $\tilde{u} = \tilde{\phi}C$ .

Dans un autre document, on a présenté l'intérêt de rehausser le problème et de se ramener au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}})$$

avec  $\hat{u} = \hat{\phi}C + m$  où  $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$  ( $m$  une constante).

- **Méthode 2 :** On souhaite résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta C = \tilde{f} & \Omega \\ C = 0 & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{C}_2)$$

avec  $\tilde{u} = \tilde{\phi} + C$  et  $\tilde{f} = f + \Delta\tilde{\phi}$ .

**Remarque.** On notera que dans ce cas rehausser le problème n'a aucun intérêt. A COMPLETER

## Résultats numériques

On prend ici la solution analytique suivante

$$u_{ex}(x, y) = S \times \sin(2\pi f x + p) \times \sin(2\pi f y + p)$$

et  $P$  la perturbation définie par

$$P(x, y) = S \times \sin(2\pi f_p x + p_p) \times \sin(2\pi f_p y + p_p)$$

avec  $p_p = 0$  pour que  $P = 0$  sur  $\Gamma$  (et donc  $u_p = u_{ex}$  sur  $\Gamma$ ).

On cherche alors principalement à comparer les erreurs en norme  $L^2$  obtenus avec les problèmes  $\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{C}_2$ .

On prendra  $S = 0.5$  et  $p = 0$  (c'est-à-dire  $g = 0$ ). On fera varier  $\epsilon$ ,  $f$  et  $f_p$ .

Voici les résultats obtenus :

			FEM	Corr	m=1000	Corr v2
FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	0.170794	0.009114	0.000455	0.000455
		eps=0.001	0.170794	0.000911	0.000045	0.000045
	f=6, fp=2	eps=0.01	0.340309	0.009562	0.000455	0.000455
		eps=0.001	0.340309	0.000957	0.000045	0.000045
	f=8, fp=2	eps=0.01	0.511393	0.009871	0.000455	0.000455
		eps=0.001	0.511393	0.000987	0.000045	0.000045
	f=2, fp=4	eps=0.01	0.045487	0.001398	0.001708	0.001708
		eps=0.001	0.045487	0.000140	0.000171	0.000171
	f=2, fp=6	eps=0.01	0.045487	0.002909	0.003403	0.003403
		eps=0.001	0.045487	0.000292	0.000340	0.000340
	f=2, fp=8	eps=0.01	0.045487	0.004749	0.005114	0.005114
		eps=0.001	0.045487	0.000471	0.000511	0.000511

Il semblerait ici que les résultats obtenus pour les problèmes  $\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}}$  (avec  $m = 1000$ ) et  $\mathcal{C}_2$  soient très proches.

## Explication

On cherche ici à comprendre pourquoi on obtient les mêmes résultats avec ces 2 méthodes.

### Méthode 1

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{C}_1^{\mathcal{R}})$$

avec  $\hat{u} = \hat{\phi}C + m$  où  $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$  ( $m$  une constante).

La décomposition de  $\hat{u}_h$  sur la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$  de  $V_h$  s'écrit pour ce problème

$$\hat{u}_h = C_h \hat{\phi} = \left( \sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i \right) \hat{\phi}(x) \quad (1)$$

Or

$$C_i = \frac{u(x_i) + m}{\hat{\phi}(x_i)} = \frac{u(x_i) + m}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \quad (2)$$

avec

$$u(x_i) = \tilde{\phi}(x_i) + \epsilon P(x_i) \quad (3)$$

et

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x_i) + (x - x_i) \tilde{\phi}'(x_i) \quad (4)$$

De plus

$$\sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i = 1 \quad (5)$$

Avec les 4 relations précédentes, on peut développer 1 :

$$\begin{aligned} \hat{u}_h &= \left( \sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i \right) \hat{\phi}(x) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{N_h} \frac{u(x_i) + m}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \varphi_i \right) \hat{\phi}(x) \quad \text{par 2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{N_h} \frac{\tilde{\phi}(x_i) + m + \epsilon P(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \varphi_i \right) \hat{\phi}(x) \quad \text{par 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N_h} \left( 1 + \epsilon \frac{P(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \right) \varphi_i \hat{\phi}(x) \\
&= \left( \sum_{i=1}^{N_h} \varphi_i \right) \hat{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \frac{\hat{\phi}(x)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \varphi_i \\
&= \hat{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \frac{\tilde{\phi}(x_i) + m + (x - x_i) \tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \varphi_i \quad \text{par 4 et 5} \\
&= \hat{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \left( 1 + \frac{(x - x_i) \tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \right) \varphi_i \\
&= \tilde{\phi}(x) + m + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \left( 1 + \frac{(x - x_i) \tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \right) \varphi_i
\end{aligned}$$

Ainsi

$$u_h = \hat{u}_h - m = \tilde{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \left( 1 + \frac{(x - x_i) \tilde{\phi}'(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i) + m} \right) \varphi_i$$

et finalement

$$u_h \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \varphi_i$$

## Méthode 2

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta C = \tilde{f} & \Omega \\ C = 0 & \Gamma \end{cases} \quad (\mathcal{C}_2)$$

avec  $\tilde{u} = \tilde{\phi} + C$  et  $\tilde{f} = f + \Delta \tilde{\phi}$ .

La décomposition de  $u_h$  sur la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$  de  $V_h$  s'écrit pour ce problème

$$u_h = C_h + \tilde{\phi} = \left( \sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i \right) + \tilde{\phi}(x) \quad (6)$$

Or

$$C_i = u(x_i) - \tilde{\phi}(x_i) \quad (7)$$

avec

$$u(x_i) = \tilde{\phi}(x_i) + \epsilon P(x_i) \quad (8)$$

Avec les 2 relations précédentes, on peut développer 6 :

$$\begin{aligned}
u_h &= \tilde{\phi}(x) + \sum_{i=1}^{N_h} C_i \varphi_i \\
&= \tilde{\phi}(x) + \sum_{i=1}^{N_h} (u(x_i) - \tilde{\phi}(x_i)) \varphi_i \quad \text{par 7} \\
&= \tilde{\phi}(x) + \sum_{i=1}^{N_h} (\tilde{\phi}(x_i) + \epsilon P(x_i) - \tilde{\phi}(x_i)) \varphi_i \quad \text{par 8} \\
&= \tilde{\phi}(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{N_h} P(x_i) \varphi_i
\end{aligned}$$

Il semblerait alors que pour le problème  $\mathcal{E}_1$ , les 2 méthodes proposées soit équivalentes (en prenant  $m$  grand).