LECOURTIER Frédérique 27 avril 2023

Explication - Rehaussement avec FEM

On considère le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

On a ainsi une EDP que l'on souhaite résoudre sur un domaine Ω. On note Γ le bord de Ω, c'est-à-dire $\Gamma = \partial\Omega$. Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On considère ici que l'on possède une solution analytique u et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$u_p(x,y) = u(x,y) - \epsilon P(x,y) \tag{1}$$

avec P la perturbation (tel que $P = 0$ sur Γ) et ϵ petit.
On souhaite ainsi résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{\phi} C) = f & \Omega \\ \tilde{u} = g & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_2$}$$

avec $\tilde{\phi} = u_p$ et $\tilde{u} = \tilde{\phi} C$.
Ce document a pour but d'expliquer l'intérêt de rehausser la solution (avec FEM) afin de réduire le plus possible l'erreur $||u - u_c||_{L^2}$ où u_c est la solution obtenu après la correction.

Principe général de FEM

La démarche générale de la méthode des éléments finis consiste à écrire la formulation variationnelle de cette EDP et ainsi à se ramener à un problème du type

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in V \tag{$\mathcal{P}$}$$

On définit alors un maillage du domaine Ω, grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h, sous-espace vectoriel de V de dimension fini N_h. On écrit alors le problème approché

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h,v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V \tag{$\mathcal{P}_h$}$$

On considère une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$ de V_h. En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \tag{2}$$

le problème ($\mathcal{P}_h$) se réécrit

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V$$

ou encore

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j),\ \forall j \in \{1, \dots, N_h\}$$

La résolution de l'EDP consiste alors à résoudre le système linéaire suivant :

$$A\mu = b$$

avec

$$A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \le i,j \le N_h}, \quad \mu = (\mu_i)_{1 \le i \le N_h} \quad \text{et} \quad b = (l(\varphi_j))_{1 \le j \le N_h}$$

Le théorème de convergence de FEM nous donne l'inégalité suivante :

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \le c h^{k+1} |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{3}$$

Application à la correction

On considère à présent uniquement le problème ($\mathcal{E}_2$). On peut alors effectuer le même type de raisonnement dans le cas de la correction. Ainsi par (2), la décomposition de u_h sur la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N_h})$ de V_h s'écrit pour ce problème

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i(\varphi_i \tilde{\phi}(x)) = \left(\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \right) \tilde{\phi}(x) \tag{4}$$

Ainsi par (4) on en déduit

$$\mu_i = \frac{u(x_i)}{\tilde{\phi}(x_i)}$$

Et ainsi l'inégalité (3) se réécrit pour le problème ($\mathcal{E}_2$) :

$$\left\| \frac{u}{\tilde{\phi}} - C_h \right\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} \left| \frac{u}{\tilde{\phi}} \right|_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{5}$$

avec $C = \frac{u}{\tilde{\phi}}$ la solution exacte au problème et C_h la solution obtenue par FEM.

Remarque. *On notera que si $\epsilon = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perturbation), alors $C = 1$.*

On considère une solution $\mathbb{P}^1$ $(k = 1)$, ainsi

$$\left| \frac{u}{\tilde{\phi}} \right|_{H^2(\Omega)} = \left\| \left(\frac{u}{\tilde{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \left(\frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{6}$$

car

$$\left(\frac{u}{\tilde{\phi}} \right)'' = \left(\frac{\tilde{\phi} + \epsilon P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \left(1 + \epsilon \frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \epsilon \left(\frac{P}{\tilde{\phi}} \right)''$$

Rehaussement

L'idée du rehaussement est la suivante : on considère cette fois

$$\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m$$

avec m une constante.
On souhaite alors résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi} C) = f & \Omega \\ \hat{u} = g + m & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{E}_3$}$$

Ainsi l'inégalité (5) se réécrit pour le problème ($\mathcal{E}_3$) :

$$\left\| \frac{u + m}{\hat{\phi}} - C_h \right\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} \left| \frac{u + m}{\hat{\phi}} \right|_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{7}$$

De la même manière que (6), on a :

$$\left| \frac{u + m}{\hat{\phi}} \right|_{H^2(\Omega)} = \left\| \left(\frac{u + m}{\hat{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \left(\frac{P}{\hat{\phi}} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} = \epsilon \left\| \left(\frac{P}{\tilde{\phi} + m} \right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{8}$$

Or

$$\left(\frac{P}{\tilde{\phi}} \right)'' = \frac{P'' \tilde{\phi} - P \tilde{\phi}''}{\tilde{\phi}^2} + \frac{2(P \tilde{\phi}' - P' \tilde{\phi}) \tilde{\phi}'}{\tilde{\phi}^3}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' &= \frac{P''(\tilde{\phi}+m) - P\tilde{\phi}''}{(\tilde{\phi}+m)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'(\tilde{\phi}+m))\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3} \\
&= \frac{P''\tilde{\phi} - P\tilde{\phi}''}{(\tilde{\phi}+m)^2} + \frac{2(P\tilde{\phi}' - P'\tilde{\phi})\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3} + \frac{mP''}{(\tilde{\phi}+m)^2} - \frac{2mP'\tilde{\phi}'}{(\tilde{\phi}+m)^3}
\end{aligned}
$$

Alors, pour m suffisamment grand :

$$
\left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' < \left(\frac{P}{\tilde{\phi}}\right)''
$$

Et donc

$$
\left\| \left(\frac{P}{\hat{\phi}}\right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} < \left\| \left(\frac{P}{\tilde{\phi}}\right)'' \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{9}
$$

A COMPLETER : Je n'arrive pas à justifier la phrase suivante car les normes à gauche des inégalités (5) et (7) ne sont pas les mêmes.

On en déduit alors que pour m grand, rehausser la solution permet de diminuer l'erreur $||u - u_c||_{L^2}$ (cf ....).

Résultats numériques

On prend ici la solution analytique suivante

$$
u_{ex}(x, y) = S \times \sin(2\pi f x + p) \times \sin(2\pi f y + p)
$$

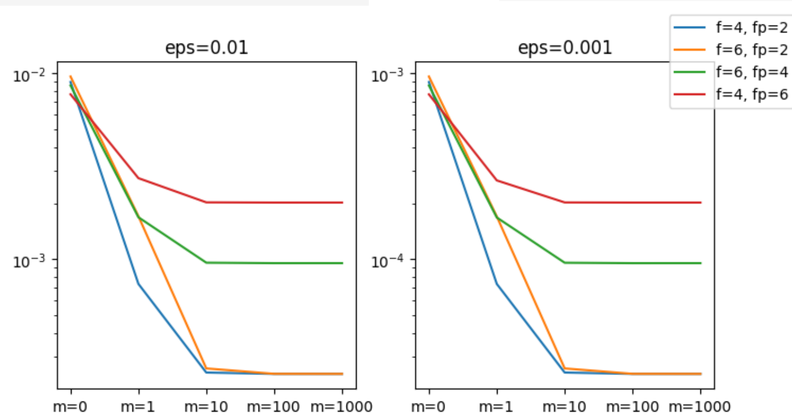
et P la perturbation définie par

$$
P(x, y) = S \times \sin(2\pi f_p x + p_p) \times \sin(2\pi f_p y + p_p)
$$

avec $p_p = 0$ pour que $P = 0$ sur Γ (et donc $u_p = u_{ex}$ sur Γ).
On cherche alors à corriger cette solution avec et sans rehaussement.
On prendra $S = 0.5$ et $p = 0$ (c'est-à-dire $g = 0$). On fera varier ϵ, f et f_p.
Voici les résultats obtenus (avec à gauche les erreurs et à droite les facteurs obtenus en comparant avec l'erreur FEM classique) :

			FEM	Corr	m=1	m=10	m=100	m=1000
FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	0.095196	0.008953	0.000736	0.000246	0.000242	0.000242
		eps=0.001	0.095196	0.000895	0.000074	0.000025	0.000024	0.000024
	f=6, fp=2	eps=0.01	0.201494	0.009584	0.001701	0.000259	0.000242	0.000242
		eps=0.001	0.201494	0.000959	0.000170	0.000026	0.000024	0.000024
	f=6, fp=4	eps=0.01	0.201494	0.008578	0.001679	0.000957	0.000952	0.000952
		eps=0.001	0.201494	0.000858	0.000167	0.000096	0.000095	0.000095
	f=4, fp=6	eps=0.01	0.095196	0.007688	0.002725	0.002020	0.002015	0.002015
		eps=0.001	0.095196	0.000769	0.000265	0.000202	0.000201	0.000201

			Corr	m=1	m=10	m=100	m=1000
FEM	f=4, fp=2	eps=0.01	10.632588	129.268768	387.223595	393.748857	393.742152
		eps=0.001	106.315008	1293.647125	3872.070426	3937.472946	3937.419987
	f=6, fp=2	eps=0.01	21.024327	118.426204	778.838663	832.835214	833.388314
		eps=0.001	210.201187	1187.929347	7788.825049	8328.329635	8333.880044
	f=6, fp=4	eps=0.01	23.489579	119.976882	210.472466	211.708833	211.669409
		eps=0.001	234.912870	1203.206236	2105.810805	2117.086604	2116.692744
	f=4, fp=6	eps=0.01	12.381564	34.934546	47.135628	47.251756	47.245743
		eps=0.001	123.831430	359.222973	471.745833	472.517487	472.457027



Application à ϕ-FEM

On souhaitera par la suite obtenir le même type de résultats avec ϕ-FEM. L'idée décrite ici sera la même mais pour l'instant les résultats obtenus ne sont pas ceux attendus.