LECOURTIER Frédérique 12 juin 2023

Estimation d'erreur - Problème rehaussé.

On se place ici dans le cadre de FEM standard.
Problème initital :
On considère initialement le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène ou non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

Problème considéré :
Dans notre cas, on souhaite appliquer une correction à la sortie d'un FNO. On va considérer ici que l'on possède une solution analytique u_{ex} et qu'après une utilisation du FNO, on obtient une solution du type

$$\tilde{\phi}(x,y) = u_{ex}(x,y) - \epsilon P(x,y)$$

avec P la perturbation (tel que $P=0$ sur Γ) et ϵ petit.
On considère

$$\hat{\phi} = \tilde{\phi} + m = u_{ex} - \epsilon P + m = \widehat{u_{ex}} - \epsilon P$$

avec $\widehat{u_{ex}} = u_{ex} + m$ et m une constante.
On souhaite alors résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(\hat{\phi}C) = f & \Omega \\ (\hat{\phi}C) = g + m & \Gamma \end{cases} \tag{$\mathcal{C}$}$$

On pose alors

$$\hat{u} = \hat{\phi}C$$

But du document :
Démonter la propriété suivante :

$$||\hat{u} - \hat{u_h}||_0 \leq ch^{k+1}|\hat{\phi}|_{1,\infty}\,|C|_{k+1} \tag{1}$$

Problèmes variationnels :

Problème variationnel :

$$\text{Trouver } \hat{u} \in V \text{ tel que } a(\hat{u}, v) = l(v),\ \forall v \in V$$

Problème variationnel approché :

$$\text{Trouver } \hat{u_h} \in V_h \text{ tel que } a(\hat{u_h}, v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V_h$$

1 Partie 1 : norme H^1

Comme V_h est un sous espace vectoriel de V, en posant $v = v_h$, on obtient :

$$a(\hat{\phi}C, \hat{\phi}v_h) - a(\hat{\phi}C_h, \hat{\phi}v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

On a alors l'orthogonalité de Galerkin : (ATTENTION : Abus de notation sur v_h !)

$$a(\hat{u} - \hat{u_h}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\nu||\hat{u} - \hat{u_h}||_1^2 &\leq \alpha a(\hat{u} - \hat{u_h}, \hat{u} - \hat{u_h}) && \text{par coercivité} \\
&= \alpha a(\hat{u} - \hat{u_h}, \hat{u} - I_h\hat{u} + I_h\hat{u} - \hat{u_h}) \\
&= \alpha a(\hat{u} - \hat{u_h}, \hat{u} - I_h\hat{u}) && \text{par orthogonalité de Galerkin en prenant } v_h = \hat{u_h} - I_h\hat{u} \\
&\leq \alpha|\hat{u} - \hat{u_h}|_1|\hat{u} - I_h\hat{u}|_1 && \text{par continuité} \\
&\leq \alpha||\hat{u} - \hat{u_h}||_1|\hat{u} - I_h\hat{u}|_1
\end{aligned}$$

Ainsi

$$||\hat{u} - \hat{u_h}||_1 \leq \alpha|\hat{u} - I_h\hat{u}|_1$$

Or

$$|\hat{u} - I_h\hat{u}|_1 = |(C - I_hC)\hat{\phi}|_1$$

et

$$\begin{aligned}
|(C - I_hC)\hat{\phi}|_1 &= ||(C - I_hC)'\hat{\phi}'||_0 \\
&\leq \max_{\Omega} \hat{\phi}' \times \sqrt{\int_{\Omega} ((C - I_hC)')^2} \\
&= ||\hat{\phi}'||_{\infty}|C - I_hC|_1 \\
&\leq |\hat{\phi}|_{1,\infty}||C - I_hC||_1
\end{aligned}$$

Finalement en utilisant l'inégalité d'interpolation, on obtient

$$\boxed{||\hat{u} - \hat{u_h}||_1 \leq \alpha h^k|\hat{\phi}|_{1,\infty}|C|_{k+1}} \tag{2}$$

2 Partie 2 : norme L^2

On applique la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche. On considère le problème dual :
Soit $\hat{z} \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\hat{z} = \hat{e_h} & \text{dans } \Omega \\ \hat{z} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec $\hat{e_h} = \hat{u} - \hat{u_h}$. Alors

$$a(u, v) = -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

et comme $e_h \in H_0^1(\Omega)$

$$a(\hat{z}, \hat{e_h}) = \int_{\Omega} (-\Delta\hat{z}) \cdot \hat{e_h} = \int_{\Omega} \hat{e_h}^2 = ||\hat{e_h}||_0^2 \tag{3}$$

De plus, par les propriétés de régularité :

$$\hat{z} \in H^2(\Omega) \tag{4}$$

et

$$||\hat{z}||_2 \leq \alpha||\hat{e_h}||_0 = \alpha||\hat{u} - \hat{u_h}||_0 \tag{5}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
||\hat{u} - \hat{u_h}||_0^2 &= ||\hat{e_h}||_0^2 \\
&= a(\hat{z}, \hat{e_h}) && \text{par } 3 \\
&= a(\hat{z} - I_h\hat{z}, \hat{e_h}) && \text{par orthogonalité de Galerkin} \\
&\leq \alpha|\hat{z} - I_h\hat{z}|_1|\hat{e_h}|_1 && \text{par continuité} \\
&\leq \alpha h|\hat{z}|_2|\hat{e_h}|_1 && \text{par } 4 \text{ et par inégalité d'interpolation} \\
&\leq \alpha \cdot h|\hat{z}|_2 \cdot h^k|\hat{\phi}|_{1,\infty}|C|_{k+1} && \text{par } 2 \\
&\leq \alpha h^{k+1}||\hat{u} - \hat{u_h}||_0|\hat{\phi}|_{1,\infty}|C|_{k+1} && \text{par } 5
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{||\hat{u} - \hat{u_h}||_0 \leq \alpha h^{k+1}|\hat{\phi}|_{1,\infty}|C|_{k+1}} \tag{6}$$

Remarque. *On notera que*

$$||\hat{u} - \hat{u_h}||_0 = ||u + m - (u_h + m)||_0 = ||u - u_h||_0$$