

Meeting's results

LECOURTIER Frédérique

oday

# Table des matières

<b>1 Meeting - Monday 30 October 2023</b>	<b>2</b>
1.1 Variation du terme source $f$ . . . . .	3
1.2 Correction avec $\phi$ -FEM sur la prédiction du modèle sur $w$ entraîné sur le carré . . . . .	4
1.3 Correction sur la prédiction du modèle sur $u$ avec recalage de la fonction levelset . . . . .	5
<b>2 Meeting - Monday 06 November 2023</b>	<b>6</b>
2.1 Correction sur la prédiction du modèle sur $w$ entraîné sur le carré . . . . .	7
2.2 Correction sur la prédiction du modèle sur $u$ avec recalage de la fonction levelset . . . . .	9
2.3 Variation du terme source $f$ . . . . .	10
<b>3 Meeting - Monday 13 November 2023</b>	<b>13</b>
3.1 Calcul des dérivées . . . . .	14
3.1.1 Entraînement du PINNs sur $\Omega$ ( cercle) . . . . .	14
3.1.2 Entraînement du PINNs sur $\mathcal{O}$ ( carré) . . . . .	18
3.2 Test sur le degré de la solution exacte . . . . .	22

# Chapitre 1

Meeting - Monday 30 October 2023

## 1.1 Variation du terme source $f$

On veut faire varier le second membre en prenant  $S \in [0.1, 1]$ . On considère la configuration suivante du modèle (CONFIG 0) où on apprend  $u = \phi w$ .

Configuration	Model parameters		Trainer parameters						Training parameters		
	Layers	Activation Function	Learning rate	Decay	w_data	w_res	w_bc	n_epochs	n_collocation	n_bc_collocation	n_data
0	[20, 20, 20]	sine	0.01	0.99	0.0	0.01	10.0	1000	500	500	0

FIGURE 1.1 – Paramètres du PINNs.

On obtient les résultats d'entraînement suivant pour  $S = 0.55$  (car moyenne des paramètres) avec à gauche avec  $f$  fixé et à droite avec  $f$  qui varie :

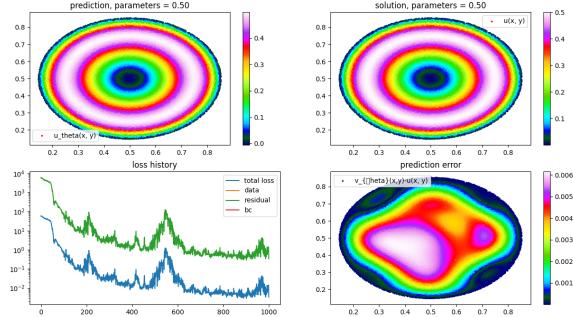


FIGURE 1.2 – Training  $f$  fixé.

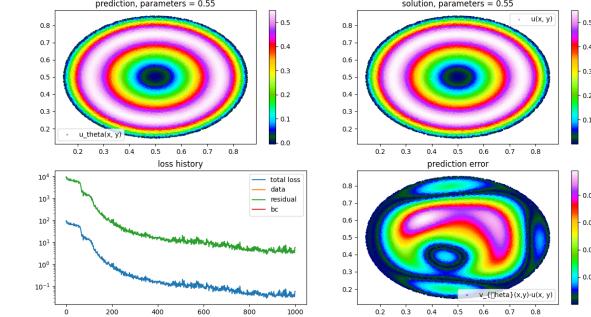


FIGURE 1.3 – Training  $f$  qui varie.

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec FEM :

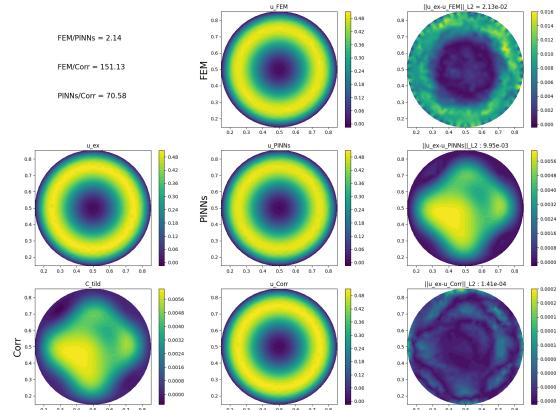


FIGURE 1.4 – Correction avec FEM -  $f$  fixé.

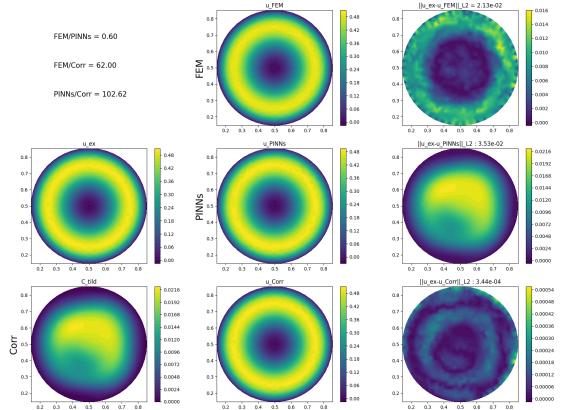


FIGURE 1.5 – Correction avec FEM -  $f$  qui varie.

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec  $\phi$ -FEM :

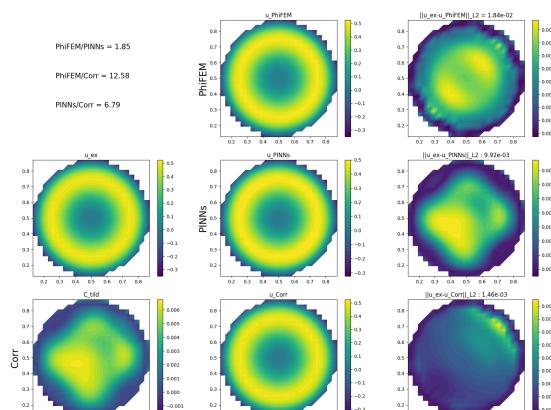


FIGURE 1.6 – Correction avec  $\phi$ -FEM -  $f$  fixé.

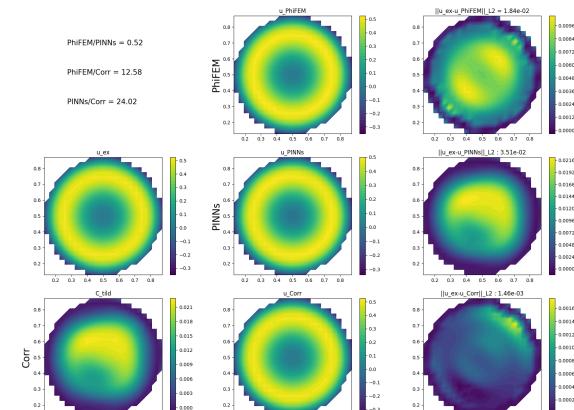


FIGURE 1.7 – Correction avec  $\phi$ -FEM -  $f$  qui varie.

## 1.2 Correction avec $\phi$ -FEM sur la prédiction du modèle sur $w$ entraîné sur le carré

On cherche ici à apprendre la même solution que précédemment mais on va entraîner le PINNs sur le carré tout entier (et pas seulement sur le cercle) dans le but de voir si la correction avec  $\phi$ -FEM est meilleure. On considère les mêmes paramètres que dans le cas précédent mais avec plus de points (car sur le carré 500 n'était pas suffisant) et entraîne le PINNs à déterminer  $u = \phi w$  :

Configuration	Model parameters		Trainer parameters					Training parameters			
	Layers	Activation Function	Learning rate	Decay	w_data	w_res	w_bc	n_epochs	n_collocation	n_bc_collocation	n_data
1	[20, 20, 20, 20]	sine	0.01	0.99	0.0	0.01	10.0	10000	2000	500	0

FIGURE 1.8 – Paramètres du PINNs.

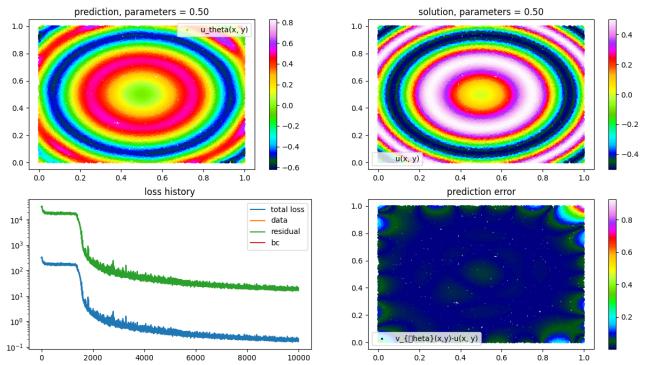


FIGURE 1.9 – Training  $f$  fixé sans le masque.

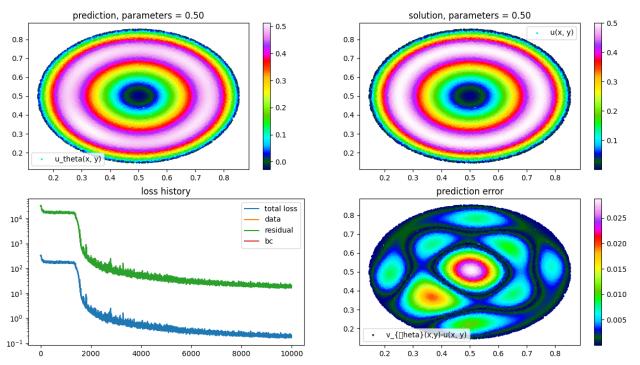


FIGURE 1.10 – Training  $f$  fixé avec le masque.

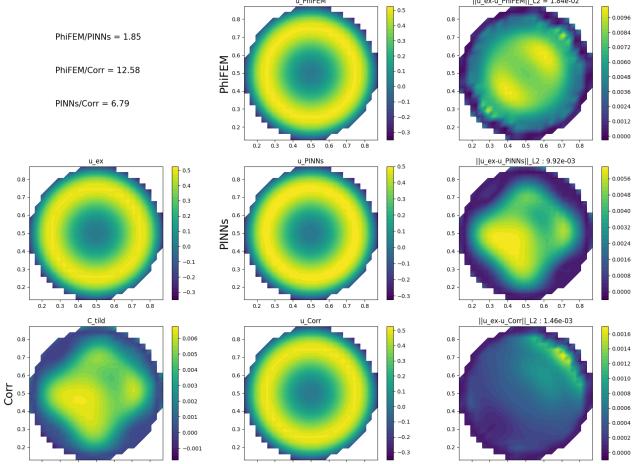


FIGURE 1.11 – Correction avec  $\phi$ -FEM (en apprenant sur le cercle).

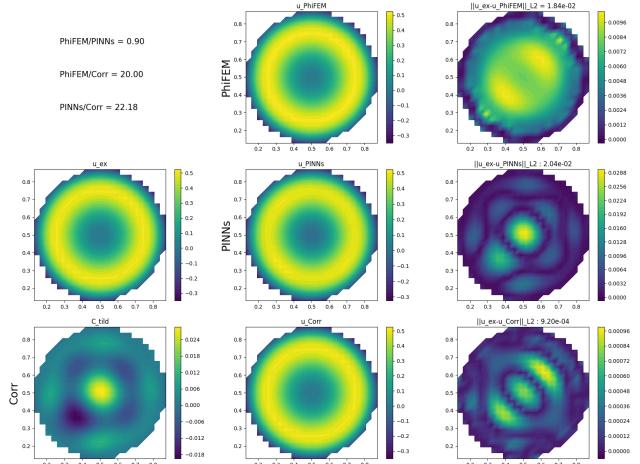


FIGURE 1.12 – Correction avec  $\phi$ -FEM (en apprenant sur le carré).

### 1.3 Correction sur la prédiction du modèle sur $u$ avec recalage de la fonction levelset

On fait une descente de gradient sur un certains nombres d'itérations dans le but de recaler la levelset sur le bord. A la fin la valeur de  $\phi$  en les points choisis (en valeur absolu) est au maximum de 1e-17.

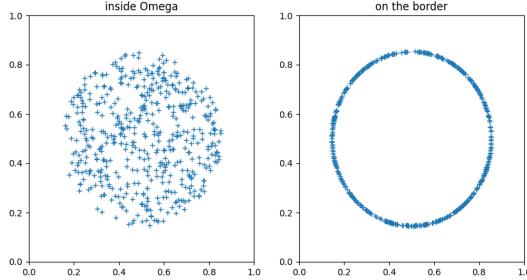


FIGURE 1.13 – Sampling considéré.

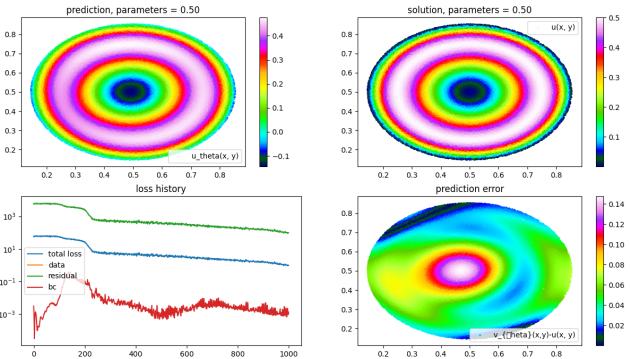


FIGURE 1.14 – Entraînement avec recalage de la levelset.

On va essayer ici de modifier les paramètres et ré-entraîner le modèle de la manière suivante :

Configuration	Model parameters		Trainer parameters					Training parameters			
	Layers	Activation Function	Learning rate	Decay	w_data	w_res	w_bc	n_epochs	n_collocation	n_bc_collocation	n_data
2	[20, 20, 20, 20, 20]	sine	0.01	0.99	0.0	0.01	10.0	1000	10000	2000	0

FIGURE 1.15 – Paramètres du PINNs.

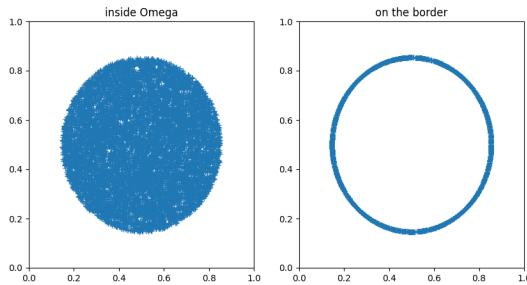


FIGURE 1.16 – Sampling considéré.

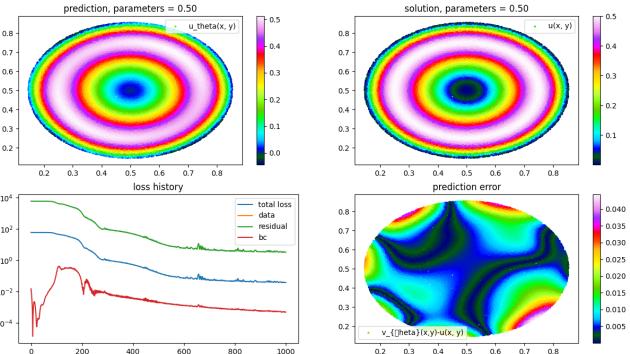


FIGURE 1.17 – Entraînement avec recalage de la levelset.

## Chapitre 2

Meeting - Monday 06 November 2023

## 2.1 Correction sur la prédiction du modèle sur $w$ entraîné sur le carré

Dans le but d'améliorer les résultats de Correction obtenus avec  $\phi$ -FEM, on cherche ici à apprendre la même solution que précédemment mais en entraînant le PINNs sur le carré tout entier (et pas seulement sur  $\Omega$  défini par un cercle). Dans le cas de l'entraînement sur le cercle, on considère les paramètres par défaut (CONFIG 0) pour le modèle :

Configuration	Model parameters		Trainer parameters					Training parameters			
	Layers	Activation Function	Learning rate	Decay	w_data	w_res	w_bc	n_epochs	n_collocation	n_bc_collocation	n_data
0	[20, 20, 20, 20]	sine	0.01	0.99	0.0	0.01	10.0	1000	500	500	0

FIGURE 2.1 – Paramètres du PINNs (entraînement sur le Cercle).

Dans le cas de l'entraînement sur le Carré, on considère les paramètres par défaut sauf pour le nombre de points de collocations (CONFIG 1). On considère en fait plus de points à l'intérieur et sur le bord (car sur le carré les paramètres par défaut n'étaient pas suffisants) :

Configuration	Model parameters		Trainer parameters					Training parameters			
	Layers	Activation Function	Learning rate	Decay	w_data	w_res	w_bc	n_epochs	n_collocation	n_bc_collocation	n_data
1	[20, 20, 20, 20]	sine	0.01	0.99	0.0	0.01	10.0	10000	2000	500	0

FIGURE 2.2 – Paramètres du PINNs (entraînement sur le Carré).

En entraînant le PINNs à déterminer  $u = \phi w$ , on obtient les résultats d'entraînement suivant - à gauche : résultat sur le carré / à droite : application d'un masque :

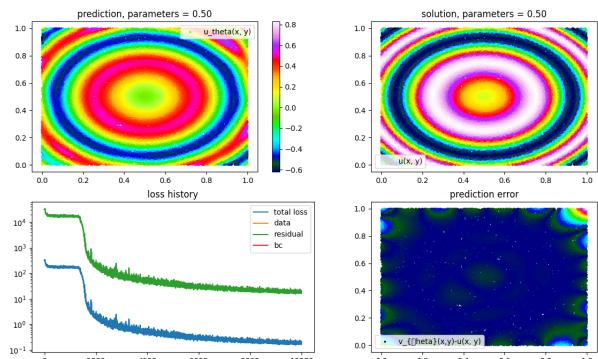


FIGURE 2.3 – Training  $f$  fixé sans le masque.

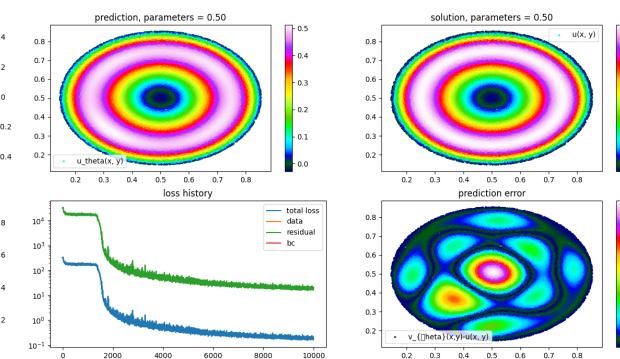


FIGURE 2.4 – Training  $f$  fixé avec le masque.

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec FEM :

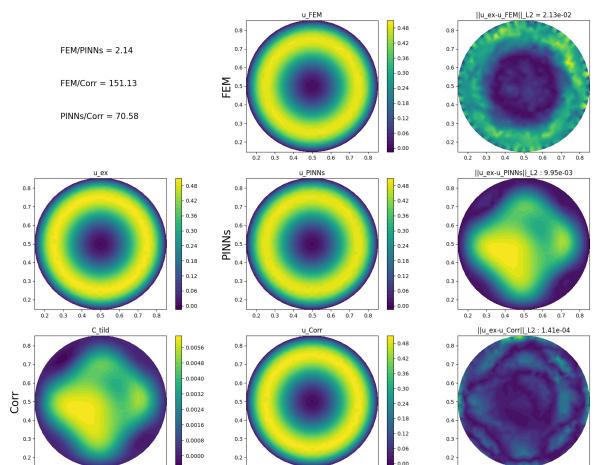


FIGURE 2.5 – Correction avec FEM (en apprenant sur le cercle).

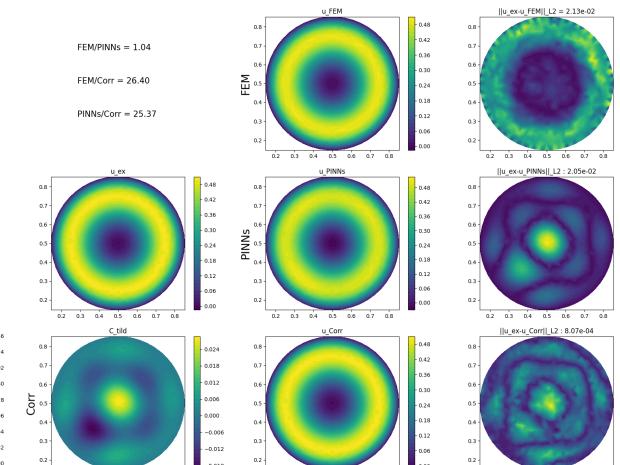


FIGURE 2.6 – Correction avec FEM (en apprenant sur le carré).

**Observation.** Cas entraînement sur le carré (VS entraînement sur le cercle) :

- PINNs ↘
- correction avec FEM sur la prédiction ↘
- précision finale en comparaison de FEM standard ↘

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec  $\phi$ -FEM :

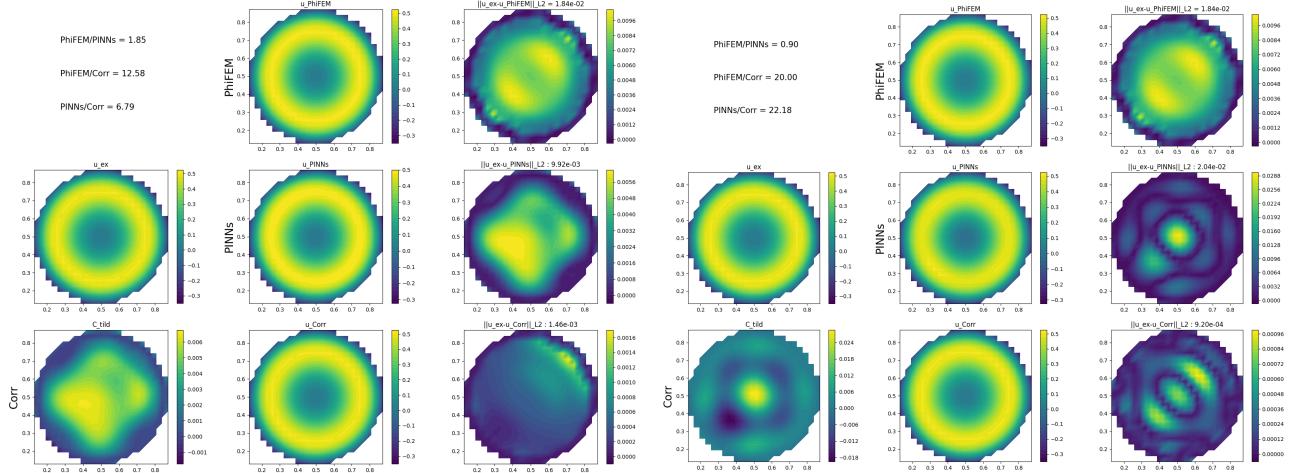


FIGURE 2.7 – Correction avec  $\phi$ -FEM (en apprenant sur le cercle).

**Observation.** Cas entraînement sur le carré (VS entraînement sur le cercle) :

- PINNs ↘ (moins bon que  $\phi$ -FEM standard)
- correction avec  $\phi$ -FEM sur la prédiction ↗
- précision finale en comparaison de  $\phi$ -FEM standard ↗
- + précision finale pour FEM et  $\phi$ -FEM du même ordre

Pour  $\phi$ -FEM on s'intéresse en fait à l'erreur sur  $\Omega$  (et non  $\Omega_h$ ), voici les résultats obtenus en projetant la solution sur  $\Omega$  :

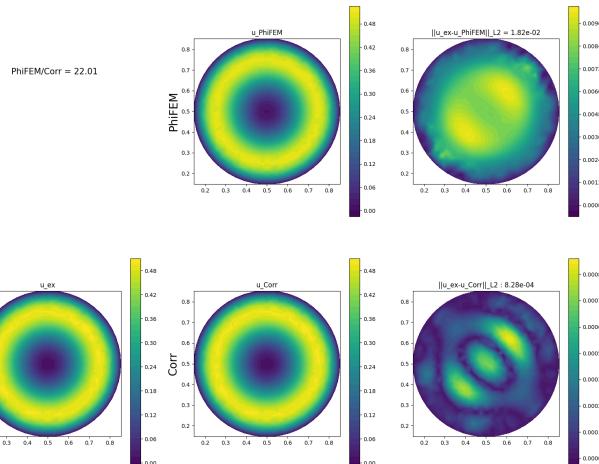


FIGURE 2.8 – Correction avec  $\phi$ -FEM (en apprenant sur le cercle) - projection sur  $\Omega$ .

**Observation.** Résultats assez similaire sur  $\Omega$  et  $\Omega_h$ .

## 2.2 Correction sur la prédiction du modèle sur $u$ avec recalage de la fonction levelset

On sélectionne des points assez proche du bord puis on fait une descente de gradient (en quelque sorte à pas optimale) sur 50 itérations dans le but de recaler la levelset sur le bord :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \phi(x, y) \cdot \nabla \phi(x, y)$$

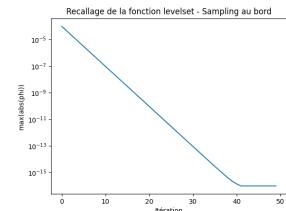


FIGURE 2.10 – Valeur maximale de la level-set en fonction des itérations.

**Observation.** *A la fin, la valeur maximale de  $\phi$  en les points choisis (en valeur absolue) est de 1e-17.*

En entraînant le modèle avec les paramètres par défaut (CONFIG 0) à apprendre  $u$  uniquement sur  $\Omega$  (avec loss = loss résidu + loss bc), on obtient les résultats d’entraînement suivant - à gauche : sans recalage / à droite avec recalage :

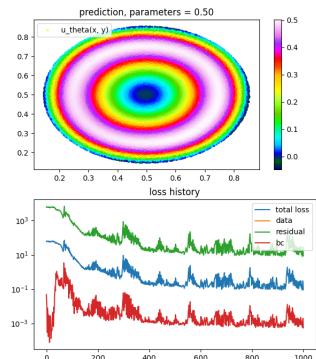


FIGURE 2.11 – Entraînement sans recalage de la level-set.

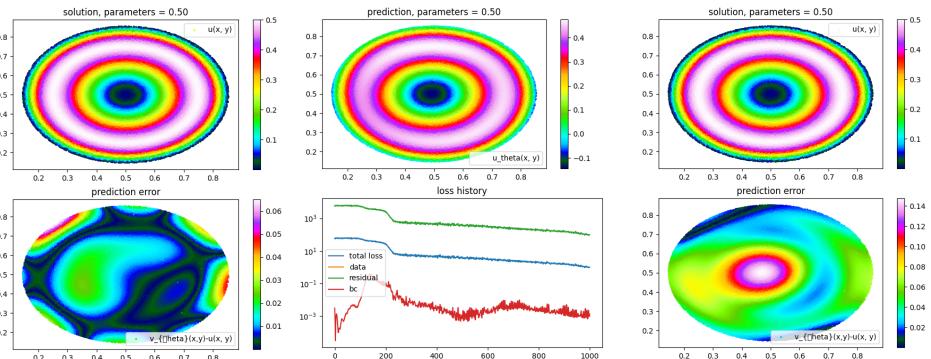


FIGURE 2.12 – Entraînement avec recalage de la level-set.

**Observation.** *Il semblerait que l’entraînement du modèle avec recalage de la levelset ne fournit pas les résultats attendus.*

On essaye de ré-entraîner le modèle en modifiant les paramètres de la manière suivante (CONFIG 2) :

Configuration	Model parameters		Trainer parameters					Training parameters			
	Layers	Activation Function	Learning rate	Decay	w_data	w_res	w_bc	n_epochs	n_collocation	n_bc_collocation	n_data
2	[20, 20, 20, 20, 20]	sine	0.01	0.99	0.0	0.01	10.0	1000	10000	2000	0

FIGURE 2.13 – Paramètres du PINNs.

On obtient les résultats d’entraînement suivant :

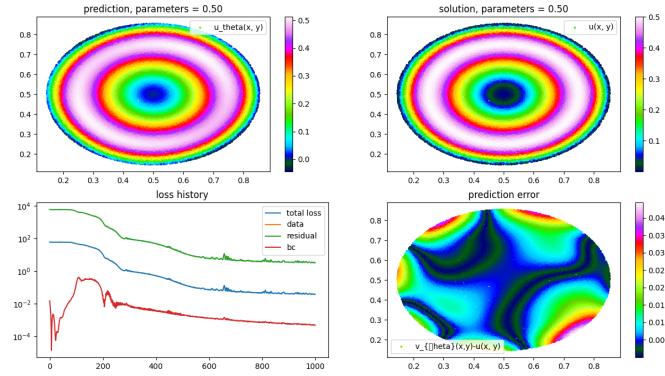


FIGURE 2.14 – Entraînement avec recalage de la levelset.

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec FEM - à gauche : sans recalage (CONFIG 0) / à droite : avec recalage (CONFIG 2) :

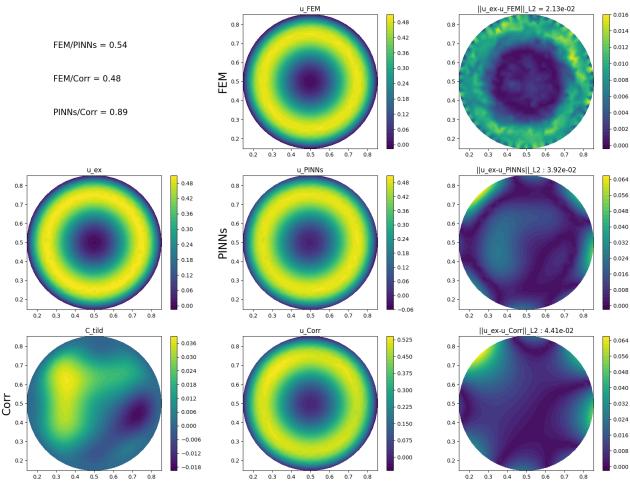


FIGURE 2.15 – Correction avec FEM (sans recalage - CONFIG 0).

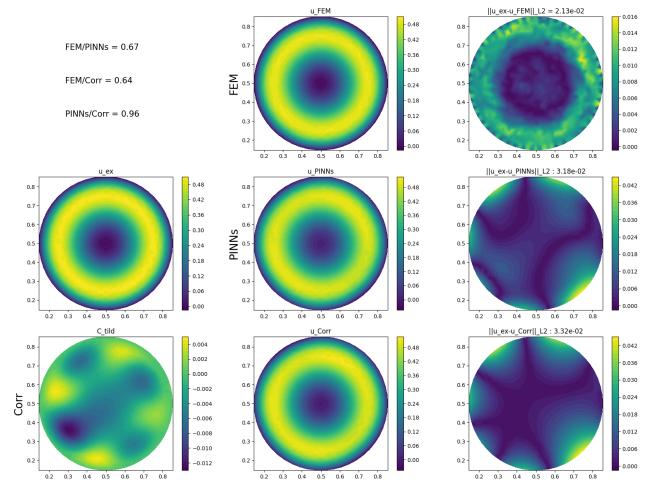


FIGURE 2.16 – Correction avec FEM (avec recalage - CONFIG 2).

**Observation.** Cas avec recalage (VS sans recalage) :

- PINNs ↗ (moins bon que FEM standard)
- correction avec FEM sur la prédiction ↗
- précision finale en comparaison de FEM standard ↗

On remarque tout de même que les résultats sont très insuffisant mais très similaire.

ATTENTION : On ne compare pas les mêmes modèles ici (pas les mêmes configs).

## 2.3 Variation du terme source $f$

On veut faire varier le second membre en prenant  $S \in [0.1, 1]$ . On considère la configuration par défaut et on apprend  $u = \phi w$ .

Pour  $S = 0.55$  (car moyenne des paramètres), on obtient les résultats d'entraînement suivant - à gauche : avec  $f$  fixé / à droite : avec  $f$  qui varie :

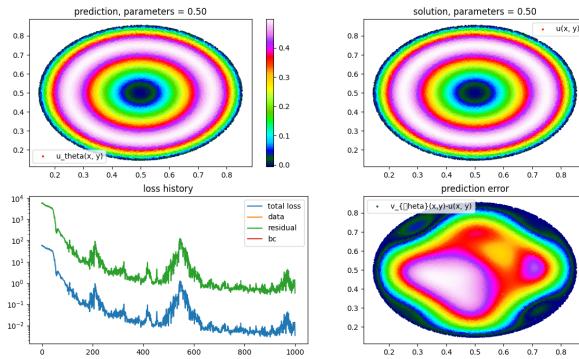


FIGURE 2.17 – Training  $f$  fixé.

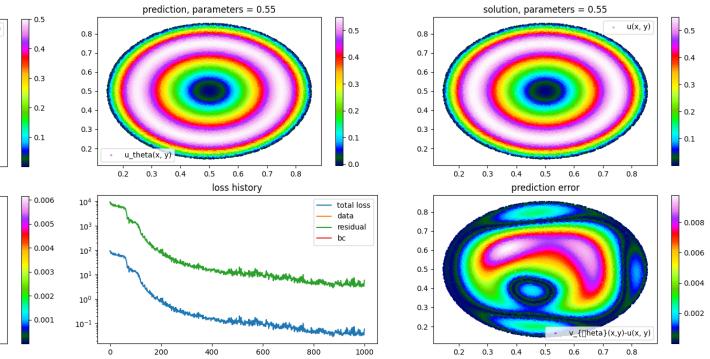


FIGURE 2.18 – Training  $f$  qui varie.

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec FEM :

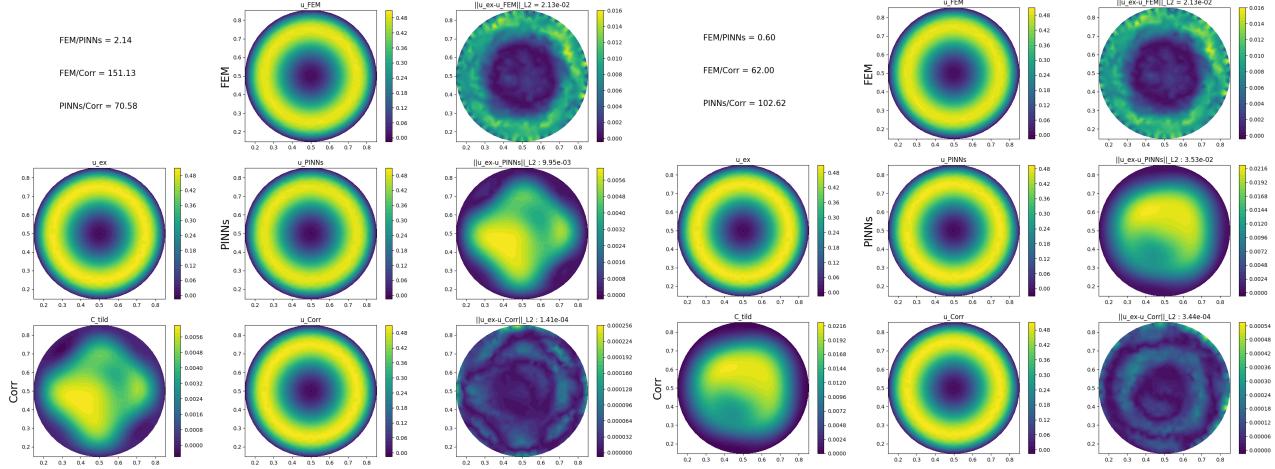


FIGURE 2.19 – Correction avec FEM -  $f$  fixé.

**Observation.** Cas  $f$  qui varie (VS cas  $f$  fixé) :

- PINNs ↘ (moins bon que FEM standard)
- correction avec FEM sur la prédiction ↗
- précision finale en comparaison de FEM standard ↘

Pour  $S = 0.5$ , on obtient les résultats suivants pour la correction par addition avec  $\phi$ -FEM :

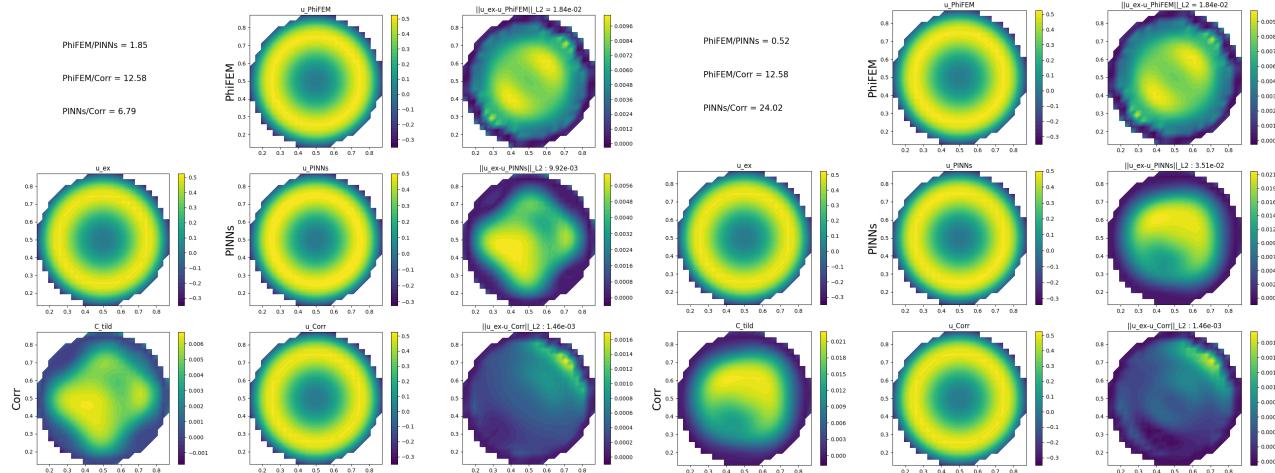


FIGURE 2.21 – Correction avec  $\phi$ -FEM -  $f$  fixé.

**Observation.** Cas  $f$  qui varie :

- PINNs ↘ (moins bon que FEM standard)
- correction avec  $\phi$ -FEM sur la prédiction ↗
- précision finale en comparaison de FEM standard = (peut être due au fait que seul  $S$  varie ?  $\Rightarrow$  tester ajout de nouveaux paramètres dans l'entraînement comme la fréquence)

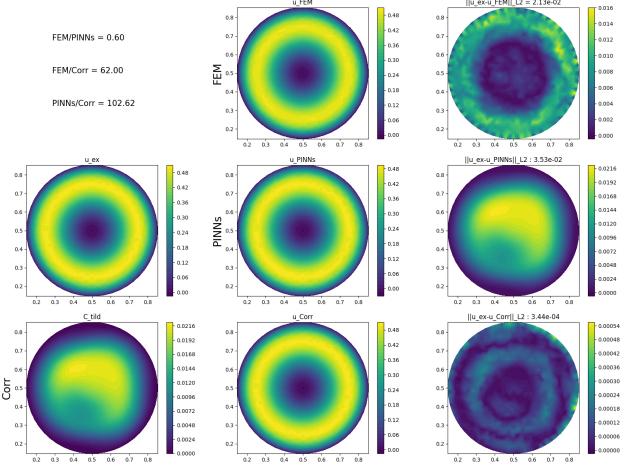


FIGURE 2.20 – Correction avec FEM -  $f$  qui varie.

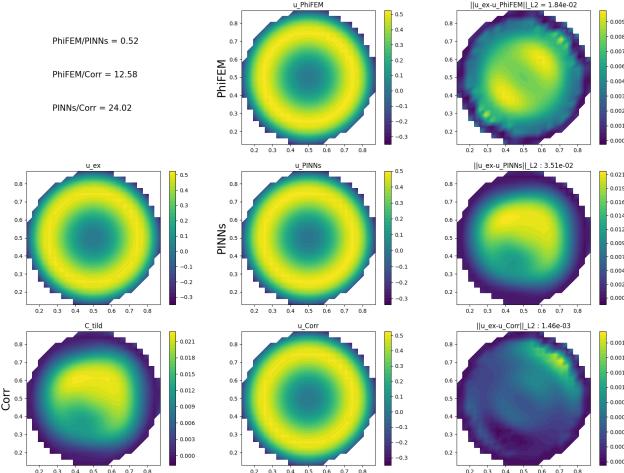


FIGURE 2.22 – Correction avec  $\phi$ -FEM -  $f$  qui varie.

## Chapitre 3

Meeting - Monday 13 November 2023

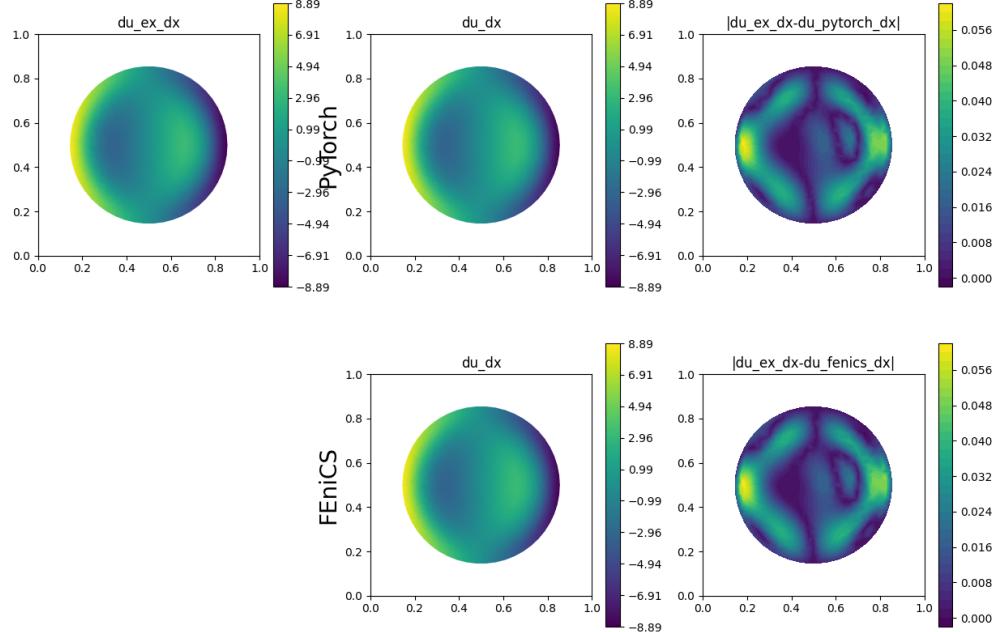
### 3.1 Calcul des dérivées

#### 3.1.1 Entraînement du PINNs sur $\Omega$ ( cercle)

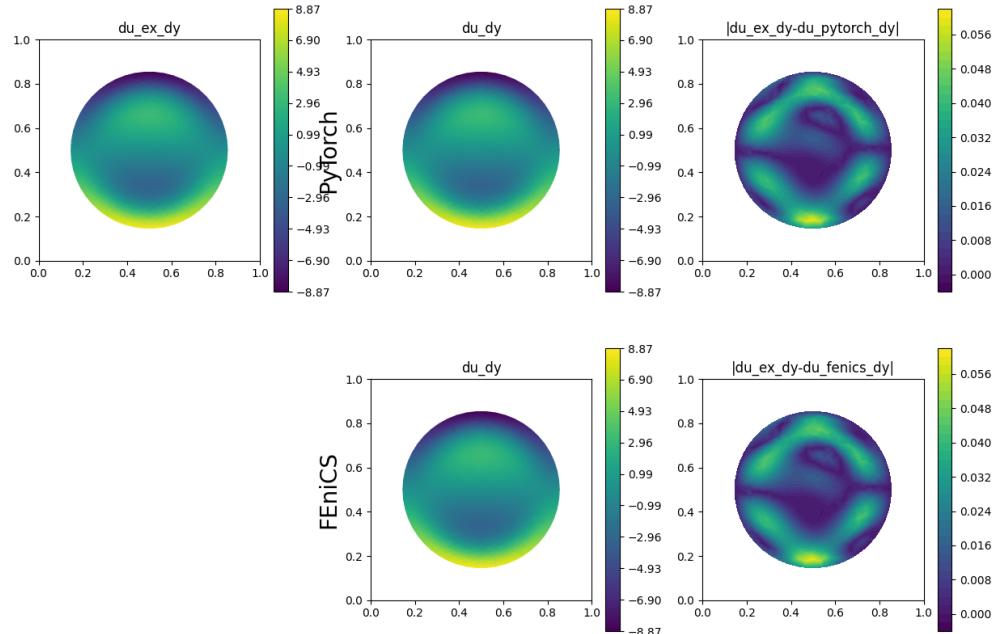
Prédiction sur  $\Omega$

Dérivées premières :

Dérivées premières selon x

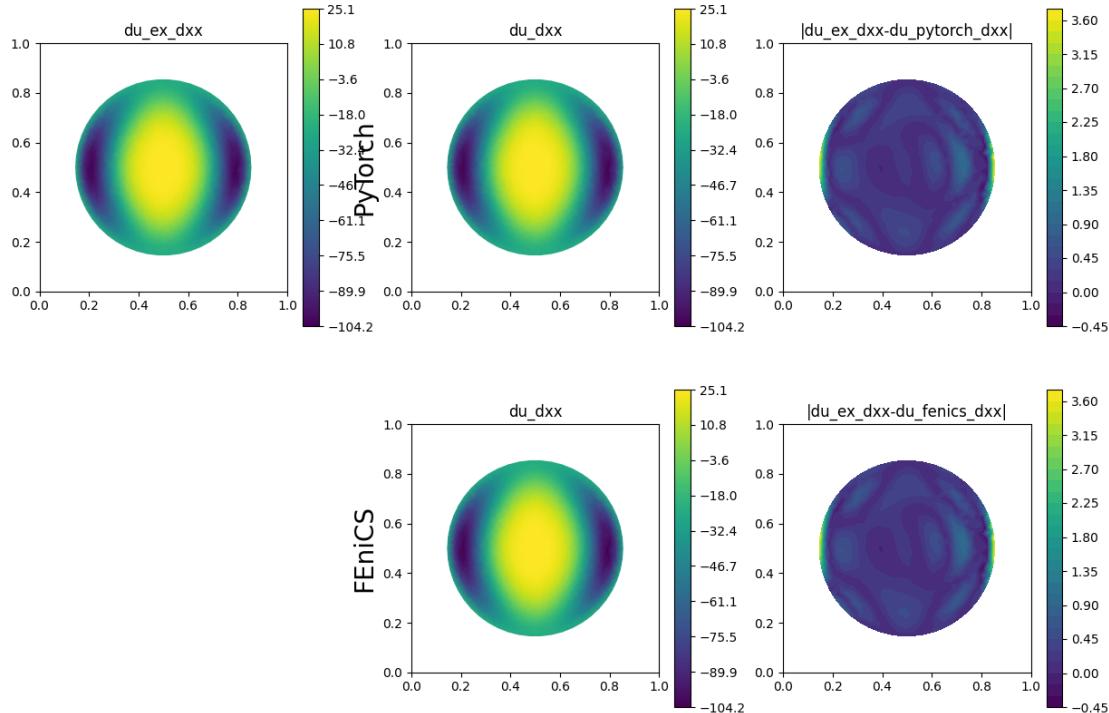


Dérivées premières selon y

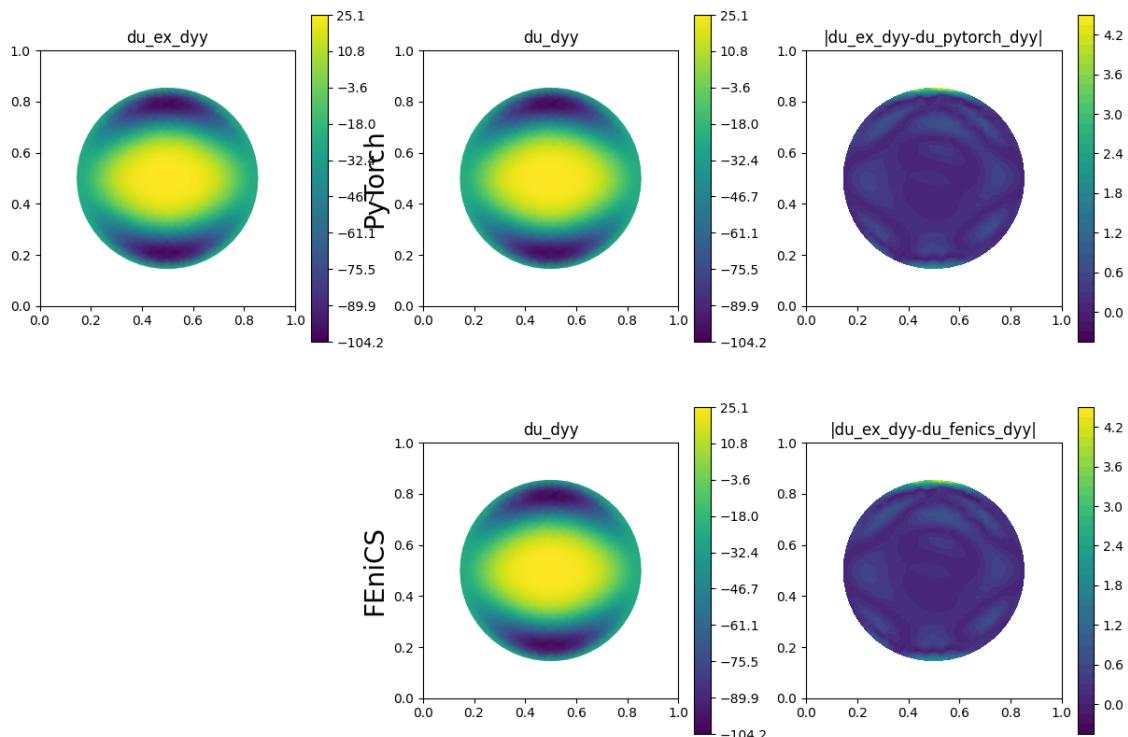


Dérivées secondes :

### Dérivées secondes selon x



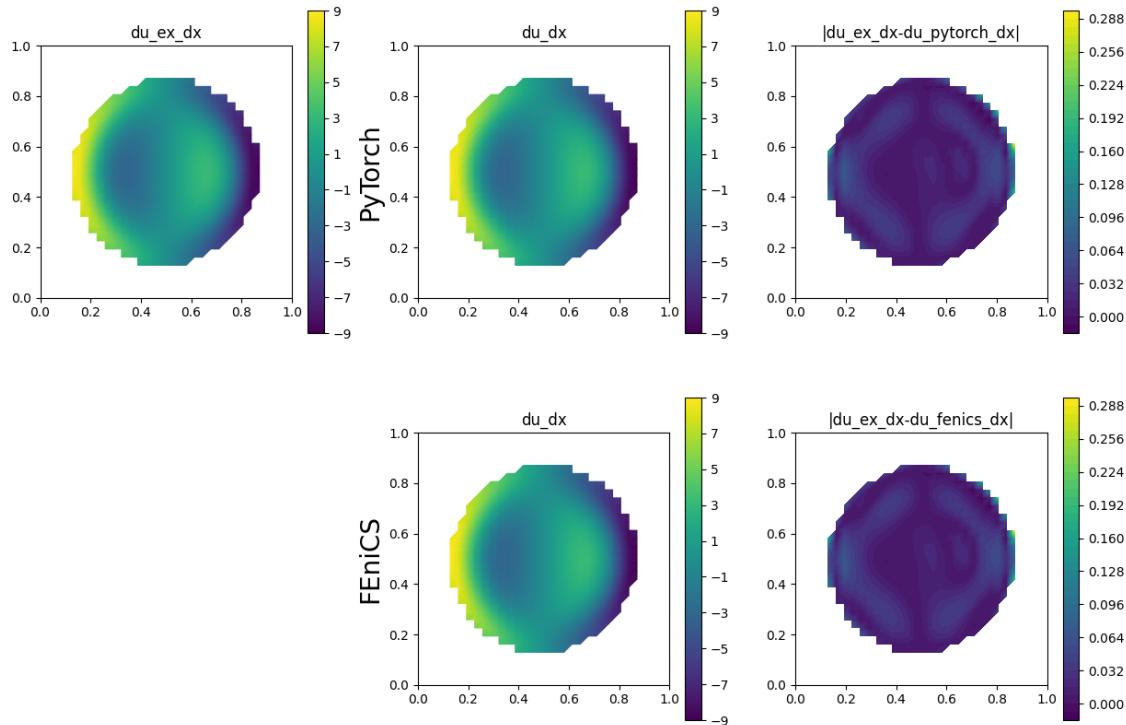
### Dérivées secondes selon y



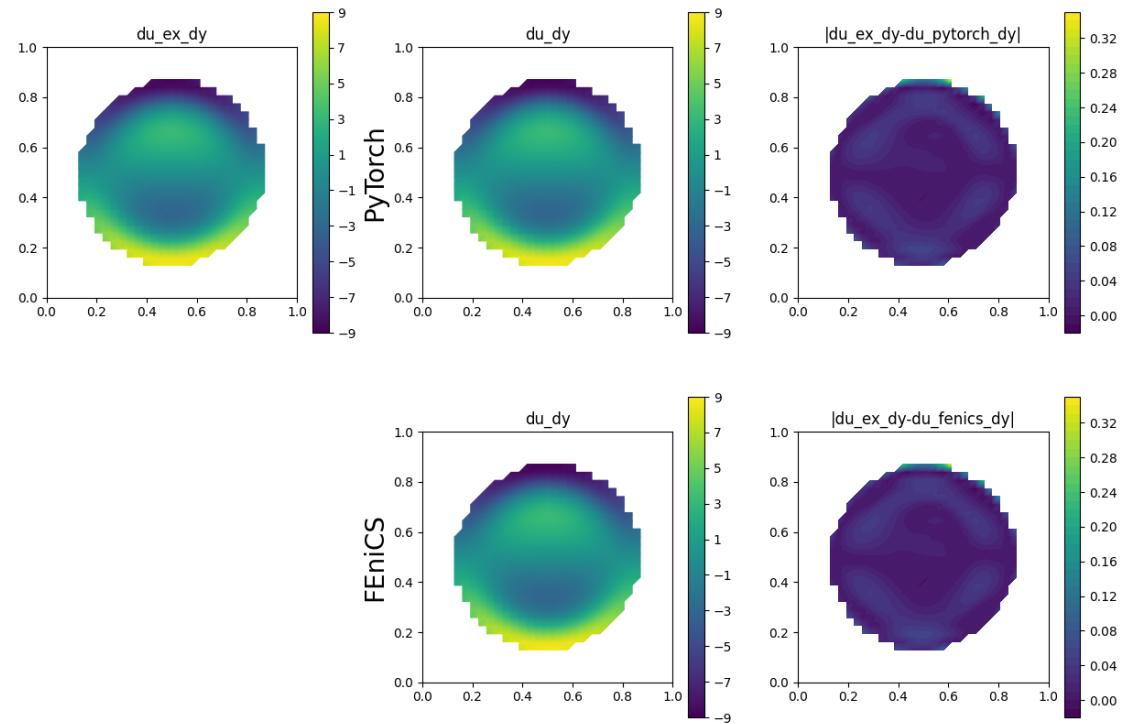
Prédiction sur  $\Omega_h$

Dérivées premières :

### Dérivées premières selon x

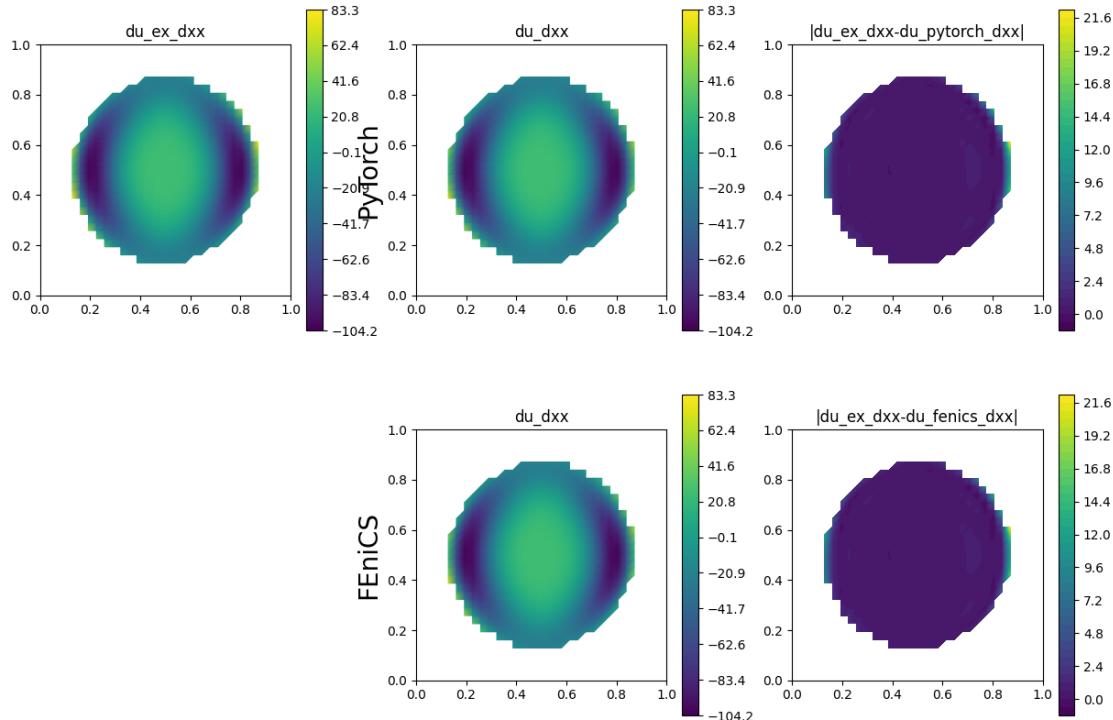


### Dérivées premières selon y

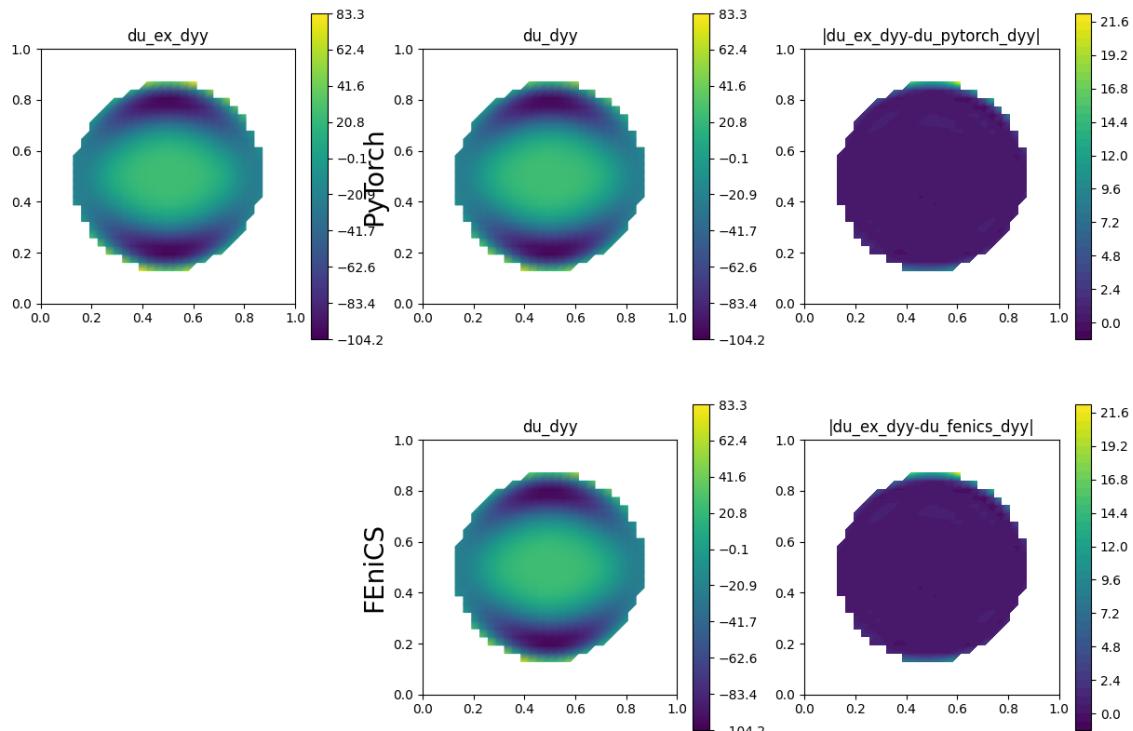


Dérivées secondes :

### Dérivées secondes selon x



### Dérivées secondes selon y

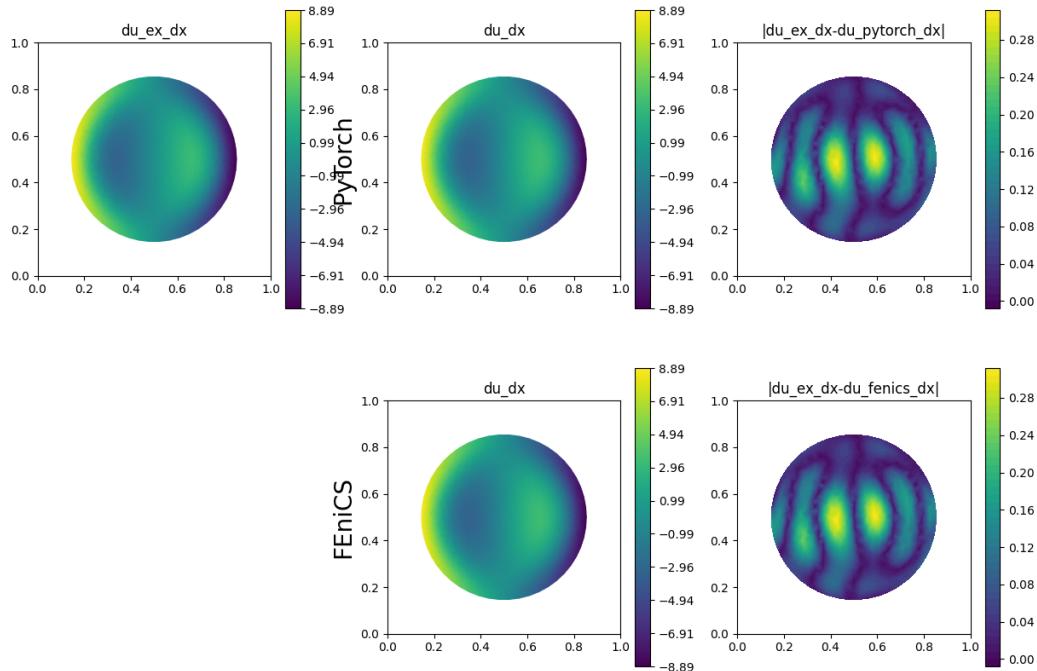


### 3.1.2 Entraînement du PINNs sur $\mathcal{O}$ (carré)

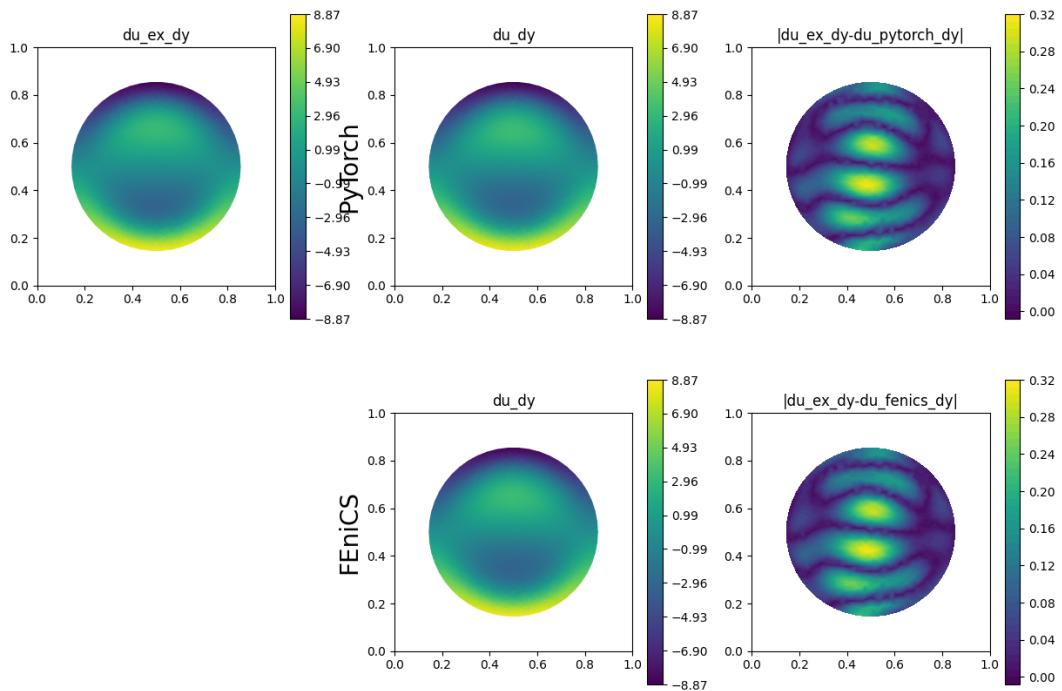
Prédiction sur  $\Omega$

Dérivées premières :

Dérivées premières selon x

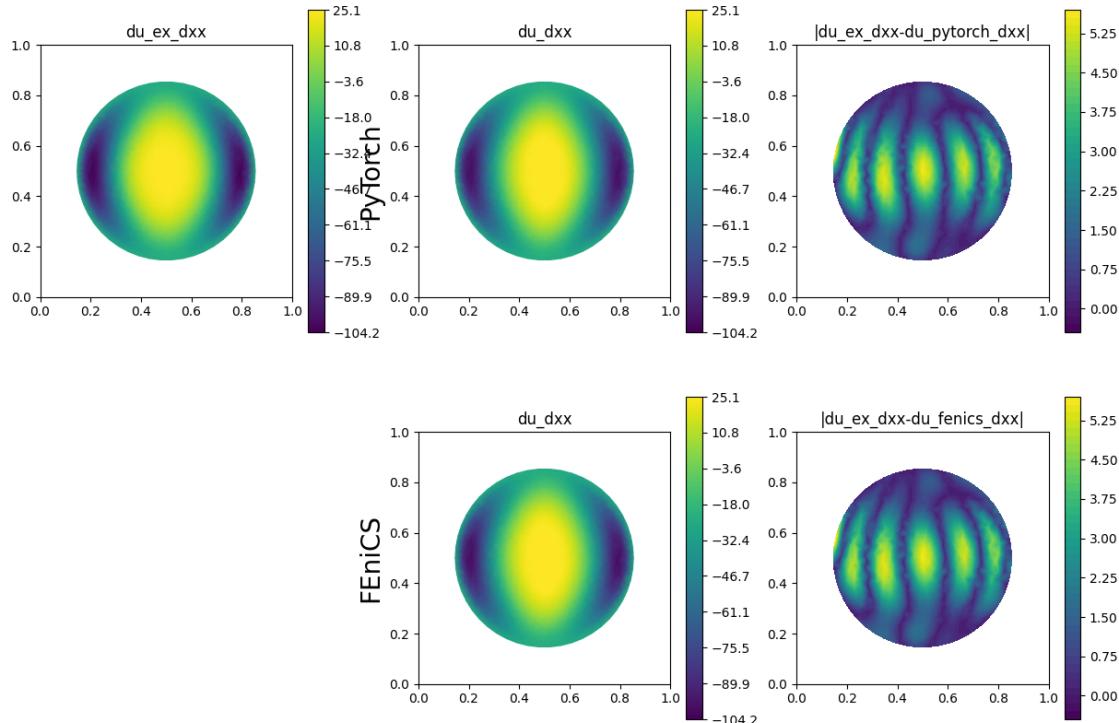


Dérivées premières selon y

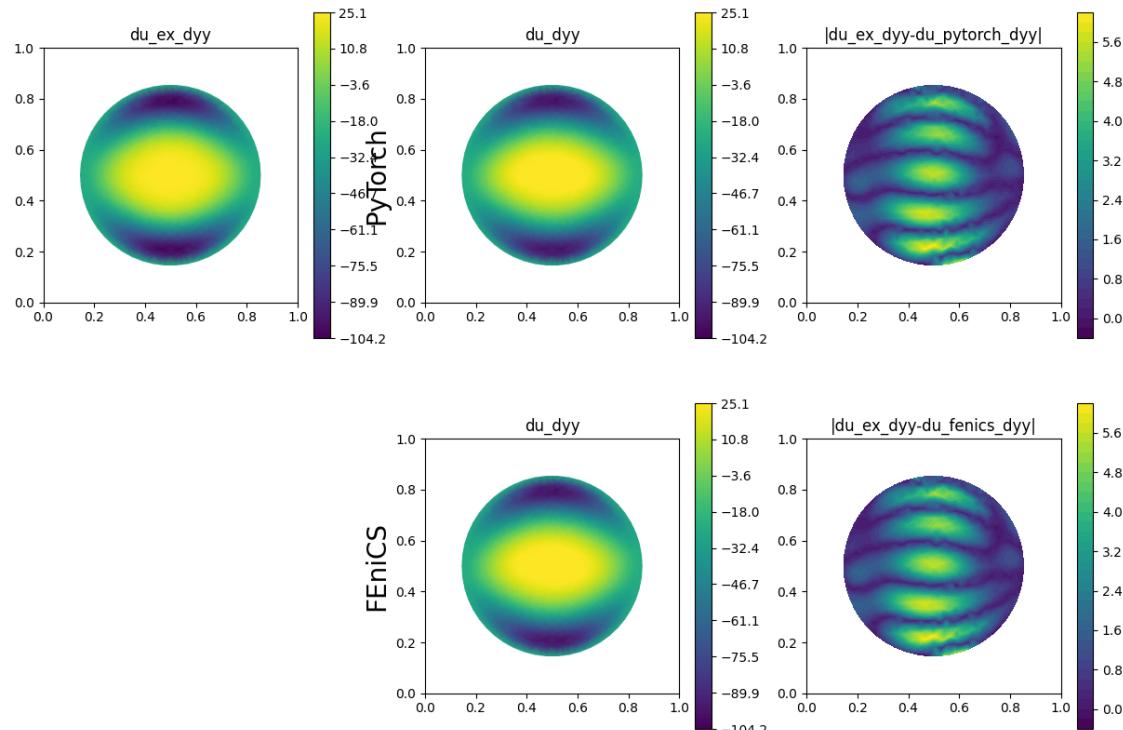


Dérivées secondes :

## Dérivées secondes selon x



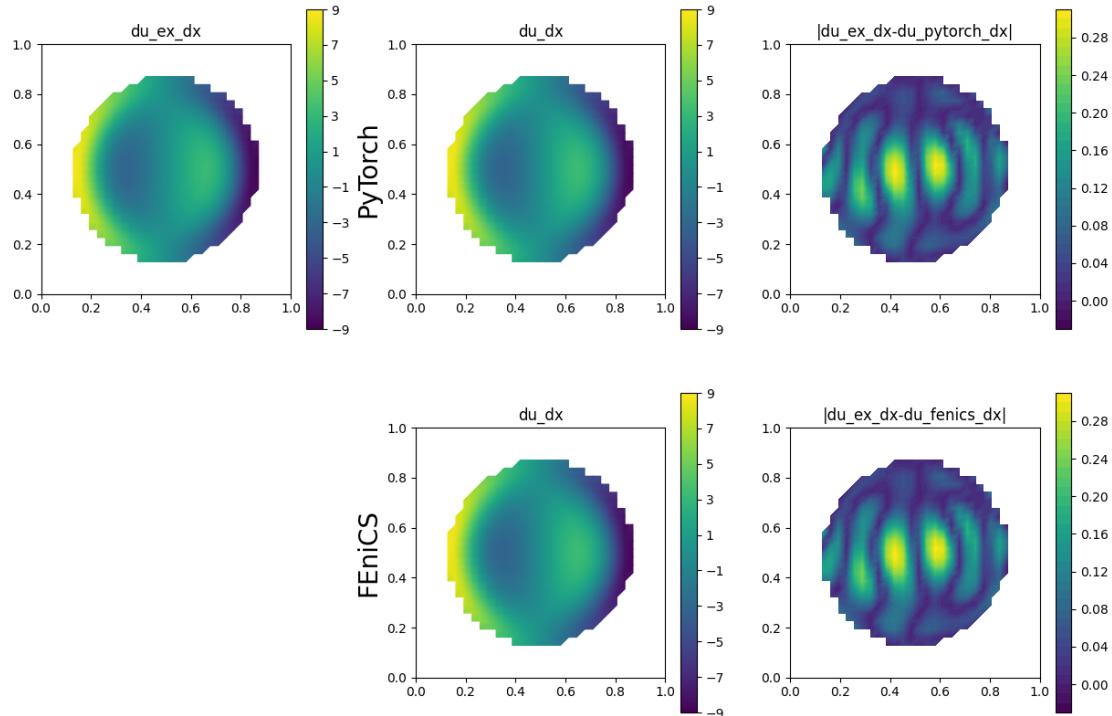
## Dérivées secondes selon y



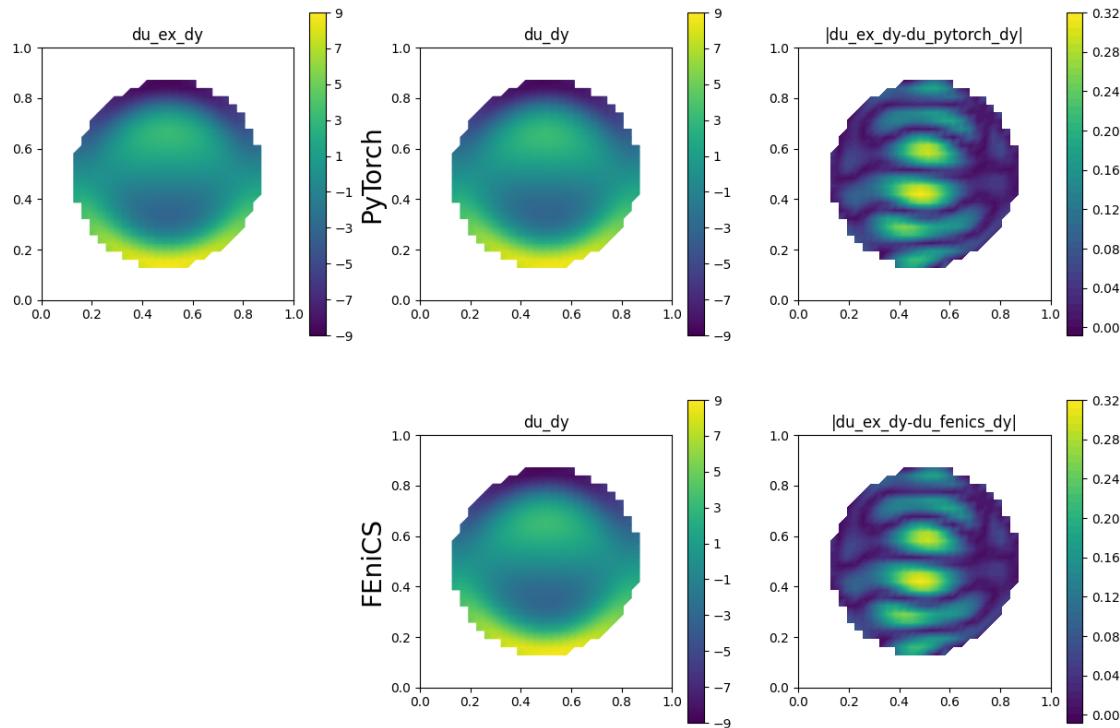
Prédiction sur  $\Omega_h$

Dérivées premières :

### Dérivées premières selon x

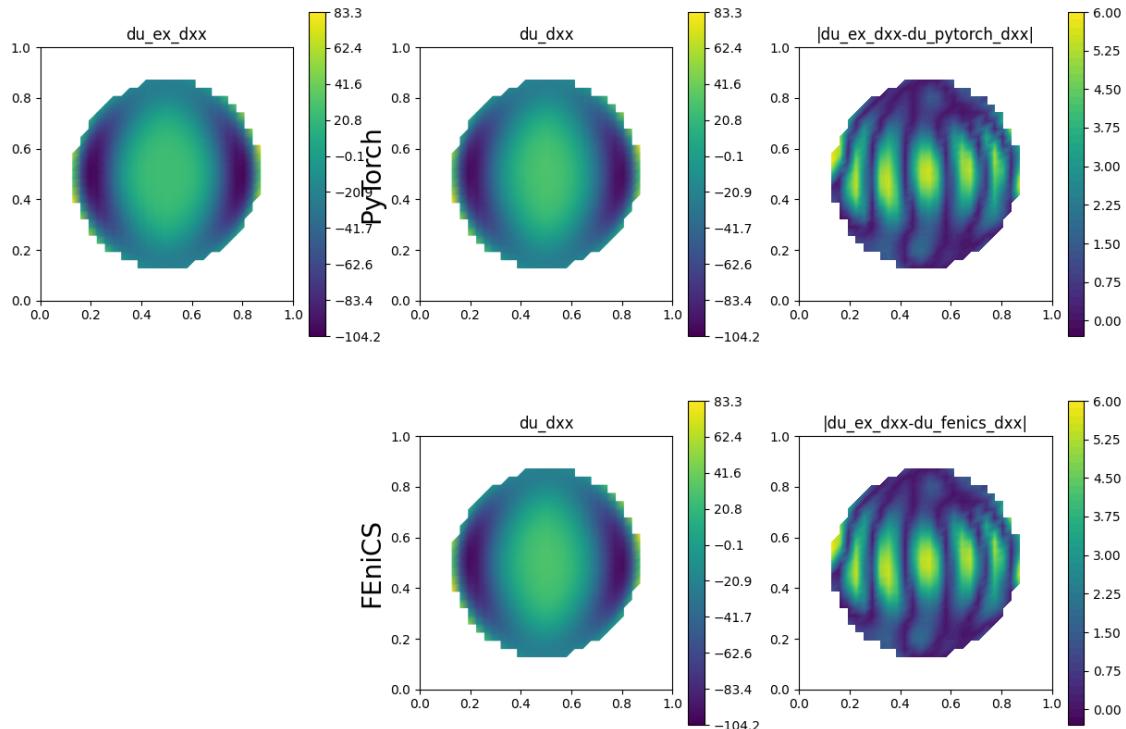


### Dérivées premières selon y

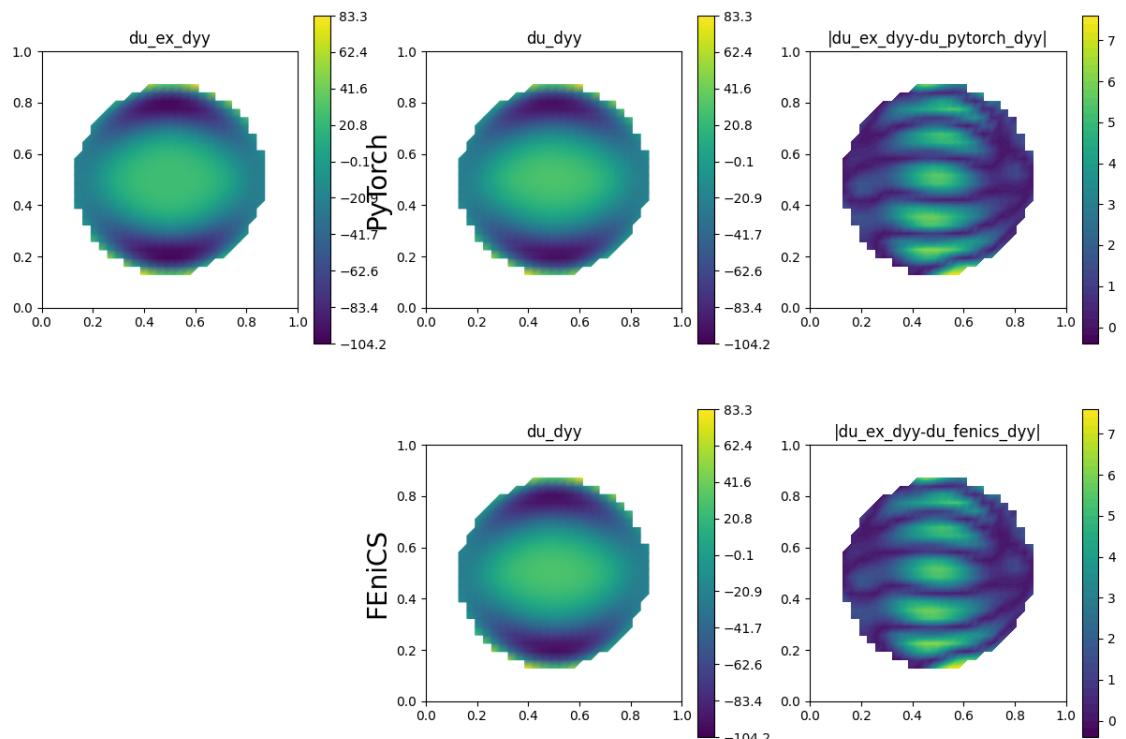


Dérivées secondes :

### Dérivées secondes selon x



### Dérivées secondes selon y



### 3.2 Test sur le degré de la solution exacte

$$\deg(u_\theta)=10 \quad V=Space(\deg(u)) \quad V_{phi}=Space(\deg(u_\theta))$$

$\deg(u)=1$	$\deg(u_{ex})$	no proj	$u$ project on				
			1	2	3	4	$\deg(u_\theta)$
<b>FEM</b>	$\deg(u)$	0.00741611817993274	0.007416118179931677	0.007416118179935782	0.007416118179932973	0.007416118179932941	
	$\deg(u_\theta)$	0.02130646160952785	0.021306461609527597	0.021306461609526366	0.021306461609530095	0.021306461609527795	0.021306461609527382
<b>Corr add (FEM)</b>	$\deg(u)$	0.01674761243360696	0.015265611153217071	0.01674371508690137	0.016747605247132074	0.016747612427473926	0.01674761243360725
	$\deg(u_\theta)$	0.00014098518106003534	0.006800307566283219	0.00038656350163388697	0.00014191717280804126	0.00014098576336019688	0.00014098518105995825