Problème considéré

Géométrie : On considère Ω comme étant un cercle de rayon r et de centre (x_0, y_0). Pour simplifier, on va considérer que Ω est entièrement contenu dans un carré $\mathcal{O}$ (Figure 1).

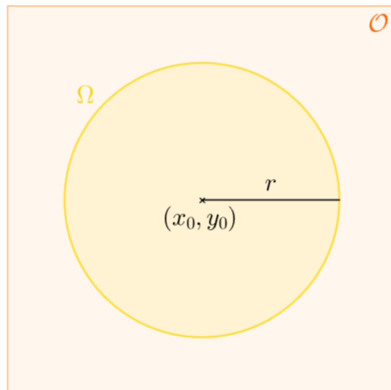

FIGURE 1 – Representation of the first domain considered : the Circle.

Remarque. *On notera qu'un choix simple peut être de prendre le carré* $[x_0 - r - \epsilon, x_0 + r + \epsilon] \times [y_0 - r - \epsilon, y_0 + r + \epsilon]$ *où* $\epsilon > 0$ *est un paramètre fixé dans l but que* Ω *soit entièrement compris dans* $\mathcal{O}$*.*

EDP : On considère le problème de Poisson avec condition de Dirichlet homogène, définie par
Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

avec Δ l'opérateur de Laplace.
Problème : On considère la solution analytique u_{ex} à ce problème, définie par

$$u_{ex}(x, y) = S \times \sin\left(\frac{1}{r^2}\pi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right)$$

Remarque. *On voit bien que sur le cercle, le problème est bien homogène.*

Ce qui nous fournit le terme source f, définie par

$$f(x, y) = \frac{4}{r^4}\pi^2 S((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \sin\left(\frac{1}{r^2}\pi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right) - \frac{4}{r^2}\pi S \cos\left(\frac{1}{r^2}\pi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right)$$