Конспект конспекта по матану

Захаренко Артем

28 марта 2021 г.

Оглавление

Определенные интегралы

Обычные интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(f_+(x)) - \sigma(f_-(x))$$

Свойства

- Аддитивность: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Теорема: монотонность интеграла

$$f, g \in C[a,b],\ f(x) \leqslant g(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx$$

Следствие:

$$f \in C[a,b], (b-a)\min_{x\in[a,b]}(f(x)) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)\max_{x\in[a,b]}(f(x))$$

Теорема о среднем

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Определение:

Интеграл с переменным верхним пределом: $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

Теорема Барроу: любая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную

Основная идея: $R(y) = \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)dt = f(c)$

Следствие: на любом промежутке непрерывная функция имеет первообразную

Теорема: формула Ньютона-Лейбница

$f \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

Теорема: линейность интеграла

$f, g \in C[a,b],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x) + \beta\int\limits_a^b g(x)$

Формулы интегрирования по частям и замена переменной

Приложение к формуле Валлиса:

$W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx,$

$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$

$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

$W_{2k} \leqslant W_{2k+1} \leqslant W_{2k+2}$

$\Rightarrow \lim\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\cdot\sqrt{2n+1}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Теорема: Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}\langle a,b\rangle \Rightarrow\ \forall x \in \langle a,b\rangle\ f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Основная идея: индукция + интегрирование по частям

Теорема Ламберта

π и π^2 иррациональны

План доказательства:

$H_j = \frac{1}{j!} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$

Свойства:

- $0 < H_j < \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}$
- $\forall c > 0, \ H_j c^j \to 0$
- $H_0 = 1, H_1 = 2$
- $H_j = (4j-2) H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$ (Интегрирование по частям)
- $\exists P_j, \ \deg(P_j) \leqslant j, \ H_j = P_j \left(\pi^2 \right)$

Дальше в 2 строки следует иррациональность π^2

Интегральные суммы

Определение: равномерная непрерывность

$f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Теорема Кантора

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна.

Основная идея: от противного + строим последовательность и сходящуюся подпоследовательность

Определение: модуль непрерывности

$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta\}$

Свойства:

- $\omega_f(\delta) \geqslant 0$
- $\omega_f(0) = 0$
- ω_f нестрого возрастает
- $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|)$
- f — липшецева с константой $M \Rightarrow \omega_f(\delta) \leqslant M\delta$
- f — равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \omega_f$ непрерывна в 0

Анализ в метрических пространствах

Метрические и нормированные пространства

Определение:

Метрика $\rho : X \times X \to [0, +\inf)$

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравентсво треугольника $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Примеры:

1. Дискретная метрика

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

2. Манхетенская $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
3. $C[a, b]$ $\rho(f, g) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| dx$

   $\rho(f, h) = \int\limits_a^b (|f - h|) \leqslant \int\limits_a^b (|f - g| + |g - h|) = \int\limits_a^b (|f - g|) + \int\limits_a^b (|g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h)$
4. Расстояние в произвольном n-мерном пространстве.

Определение:

(X, ρ) — метрическое пространство.

$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant r\}$

Свойства:

1. $B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) = B_{\min(r_1, r_2)}(x)$

Открытые и замкнутые множества

Определение: открытое множество

$A \subset X$ — открытое, если $\forall a \in A \;\; \exists r > 0 \; : \; B_r(a) \subset A$

Теорема об открытых множествах

1. $X, \varnothing$ — открытые
2. Объединение конечного числа открытых множеств — открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество
4. $B_r(x)$ - открытое множество

Доказательство:

1. Очев
2. Очев
3. Очев
4. $x \in B_R(a)$, берем $r = R - \rho(x, a)$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(x, y) < r = R - \rho(x, y) \Rightarrow R > \rho(x, y) + \rho(a, x) \geqslant \rho(a, y) \Rightarrow y \in B_R(a)$

Определение: внутренняя точка

Пусь (X, ρ) - метрическое пространство, $A \subset X$, $a \in A$. Тогда a - внутренняя $\Leftrightarrow \exists \; r > 0 \; : \; B_r(a) \subset A$

Определение: внутренность множества

Внутренность множества $IntA = \{a \in A : a$ — внутренняя $\}$

Свойства:

1. $IntA \subset A$
2. $IntA = \cup_{C \subset A} C$, C - открытые
   Доказательство:

   Пусть $B := \cup A_i$, A_i — все открытые подмножества A. Если $x \in B \Rightarrow \exists \; A_i : x \in A_i \Rightarrow \exists \; r > 0 : \; B_r(x) \subset A_i \subset A$. Если $x \in IntA \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$, $B_r(x)$ — открытое множество.
3. $IntA$ — открыто
4. $IntA = A \Leftrightarrow A$ — открыто

5. $B \subset A \Rightarrow IntB \subset A$

6. $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$ — очев

7. $IntIntA = IntA$

Определение: замкнутое множество

A — замкнуто, если его дополнение (в X) открыто.

Теорема о свойствах замнкутых множеств

1. $X, \varnothing$ — замкнуты

2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнутое (перетащим с открытых)

3. Объединене конечного числа замкнутых множеств — замкнутое (перетащим с открытых)

4. $\overline{B}_r(a)$ — замкнутое.

Доказательство: Тут все должно быть очевидно :)

Определение: замыкание множества

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное — его замыкание (обозначают за $CL(A)$)

Предельные точки

Точка x предельная для множества $A \Leftrightarrow$ если $\forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \varnothing$. A' — множество предельных точек A.

Свойства предельных точек

1. $CL(A) = A \cup A'$

2. Если A замкнуто, то $A' \subset A$

Теорема

$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(x)$ содержит бесконечно много точек из A. (ну это очев, из определения)

Подпространства

(X, ρ)— метрическое пространство
$Y \subset X$
$(Y, \rho|_{Y\times Y})$ — подпространство

Теорема об открытых и замкнутых множествах в подпространстве

(X, ρ) — метрическое пр-во (Y, ρ) — под-во, $A \subset Y$.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G$ открытое в $X \ : A = G \cap Y$
2. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists G$ замкнуто в $X \ : A = G \cap Y$

Нормированные пространства

X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. $||x||$:$X \to \mathbb{R}$ — норма, если:

1. $||x|| \geqslant 0 \forall x \in X$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$
2. $||\lambda x|| = \lambda ||x|| \ \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Скалярное произведение

$\langle . \, . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ — скалярное произведение, если

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0, \ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \lambda \in \mathbb{R}$

Свойства скалярного произведения и нормы

1. Нер-во Коши-Буняковского $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$ Д-во:
   $f(t) := \langle x + ty, x + ty\rangle \geqslant 0$
   $\langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle$ — квдратный трехчлен больший 0, то есть $D \leqslant 0$. Дальше очев.
2. $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — норма. Все очев, нер-во треугольника по Коши-Буняковскому.
3. $\rho(x, y) = ||x - y||$ — метрика.
4. $||x - y|| \geqslant \mid ||x|| - ||y|| \mid$

Пределы в метрических пространствах

$\{x_i\} \in X, \lim x_i = a$. 2 Варианта:

1. Вне любого $B_r(a), r > 0$ лежит конечное число точек из $\{x_i\}$
2. $\forall \epsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n \geqslant N x_n \in B_\epsilon(a)$

В общем-то, все как в $\mathbb{R}$. Стоит отметить, что и свойства такие же:

1. Если перемешать члены последовательности, то предел не изменится
2. У подпоследовательности такой же предел
3. Если каждую точку последовательности взять с конечной кратностью, то предел не изменится
4. Единственность предела

   Доказательство:

   Пусть у нас 2 предела a и b, возьмем $r_a = r_b = \dfrac{\rho(a,b)}{3}$. Тогда вне $B_{r_a}(a)$ конечное число точек последовательности, вне $B_{r_b}(b)$ конечное число точек. Так как они не пересекаются, то во всей последовательности конечно число точек. Ну, так не бывает.
5. **Новое свойство!** $a = \lim x_n \Leftrightarrow \lim \rho(x_n, a) = 0$ Стоит заметить, что оба выражения эквивалентны тому, что $\forall \epsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n \geqslant N \rho(a, x_n) < \epsilon$

Определение: ограниченное множество

$A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре

Теорема: сходящаяся последовательность ограничена

Очев же, как из первого семестра :)

Теорема: про предельные точки

a — предельная точка $A \leftrightarrow \exists x_n \in A \setminus a, \lim(x_n) = a$. Писать много, но все тоже самое, что и в первом семе.

Теорема: про предельные точки

a — предельная точка $A \leftrightarrow \exists x_n \in A \setminus a, \lim(x_n) = a$. Писать много, но все тоже самое, что и в первом семе.

Теорема: про арифметические действия

(X, ρ) — нормированное пространство. $\lim(y_n) = y_0, \lim(x_n) = x_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3. $\lim(\lambda x_n) = \lambda \lim(x_n)$
4. $\lim(||x_n||) = ||x_0||$
5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$

Частный случай: R^d

Обычно норма это $||x|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_d^2}$. Для нее и рассматривают пределы. При этом, можно рассматривать сходимость по-координатно (то есть по каждой координает отдельно рассматривать последовательность из $\mathbb{R}$)

Не трудно видеть, что оба эти предела совпадают, так как пусть $\rho(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow \left(x_n^{(1)} - x_0^{(1)}\right)^2 + \left(x_n^{(2)} - x_0^{(2)}\right)^2 + ... + \left(x_n^{(d)} - x_0^{(d)}\right)^2 \to 0$. Сумма неотрицательных последовательностей стремится к 0, тогда каждая из них по отдельности стремится к 0. В другую сторону (от по-координатно к по норме) еще легче.

Определение: фундаментальная последовательность

Определение почти как в первом семе)

Определение: полное пространство

(X, ρ) — полное, если для любой фундаментальной последовательности она имеет предел

Теорема: R^d — полное

Если x_n — фундаментальная, то $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \forall m, n \geqslant N x_n - x_m < \rho(n, m) < \epsilon$