

Конспект конспекта по матану

Захаренко Артем

28 марта 2021 г.

Оглавление

Определенные интегралы	2
Обычные интегралы	2
Анализ в метрических пространствах	5
Метрические и нормированные пространства	5
Открытые и замкнутые множества	6
Предельные точки	7
Подпространства	8
Нормированные пространства	8
Пределы в метрических пространствах	9

Определенные интегралы

Обычные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx = \sigma(f_+(x)) - \sigma(f_-(x))$$

Свойства

- Аддитивность: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Теорема: монотонность интеграла

$$f, g \in C[a, b], f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Следствие:

$$f \in C[a, b], (b-a) \min_{x \in [a, b]}(f(x)) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]}(f(x))$$

Теорема о среднем

$$f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Определение:

Интеграл с переменным верхним пределом: $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$

Теорема Барроу: любая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную

Основная идея: $R(y) = \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t) dt = f(c)$

Следствие: на любом промежутке непрерывная функция имеет первообразную

Теорема: формула Ньютона-Лейбница

$$f \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Теорема: линейность интеграла

$$f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Формулы интегрирования по частям и замена переменной

Приложение к формуле Валлиса:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx,$$

$$W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

$$W_{2k} \leq W_{2k+1} \leq W_{2k+2}$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \cdot \sqrt{2n+1}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Теорема: Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle \Rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle \quad f(x) = T_{n, x_0} f(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Основная идея: индукция + интегрирование по частям

Теорема Ламберта

π и π^2 иррациональны

План доказательства:

$$H_j = \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

Свойства:

- $0 < H_j < \frac{1}{j!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}$
- $\forall c > 0, H_j c^j \rightarrow 0$
- $H_0 = 1, H_1 = 2$
- $H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$ (Интегрирование по частям)
- $\exists P_j, \deg(P_j) \leq j, H_j = P_j(\pi^2)$

Дальше в 2 строки следует иррациональность π

Анализ в метрических пространствах

Метрические и нормированные пространства

Определение:

Метрика $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Примеры:

1. Дискретная метрика

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

2. Манхетенская \mathbb{R}^2 , $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

3. $C[a, b]$ $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

$$\rho(f, h) = \int_a^b (|f - h|) \leq \int_a^b (|f - g| + |g - h|) = \int_a^b (|f - g|) + \int_a^b (|g - h|) = \rho(f, g) + \rho(g, h)$$

4. Расстояние в произвольном n -мерном пространстве.

Определение:

(X, ρ) — метрическое пространство.

$$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

Свойства:

1. $B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) = B_{\min(r_1, r_2)}(x)$

Открытые и замкнутые множества

Определение: открытое множество

$A \subset X$ — открытое, если $\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$

Теорема об открытых множествах

1. X, \emptyset — открытые
2. Объединение конечного числа открытых множеств — открытое множество
3. Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество
4. $B_r(x)$ — открытое множество

Доказательство:

1. Очев
2. Очев
3. Очев
4. $x \in B_R(a)$, берем $r = R - \rho(x, a)$. Докажем, что $B_r(x) \subset B_R(a)$. $y \in B_r(x) \Rightarrow \rho(x, y) < r = R - \rho(x, a) \Rightarrow R > \rho(x, y) + \rho(a, x) \geq \rho(a, y) \Rightarrow y \in B_R(a)$

Определение: внутренняя точка

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$, $a \in A$. Тогда a — внутренняя $\Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$

Определение: внутренность множества

Внутренность множества $Int A = \{a \in A : a \text{ — внутренняя}\}$

Свойства:

1. $Int A \subset A$
2. $Int A = \cup_{C \subset A} C$, C — открытые

Доказательство:

Пусть $B := \cup A_i$, A_i — все открытые подмножества A . Если $x \in B \Rightarrow \exists A_i : x \in A_i \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset A_i \subset A$. Если $x \in Int A \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$, $B_r(x)$ — открытое множество.

3. $Int A$ — открыто
4. $Int A = A \Leftrightarrow A$ — открыто

5. $B \subset A \Rightarrow \text{Int}B \subset A$
6. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}A \cap \text{Int}B$ — очев
7. $\text{IntInt}A = \text{Int}A$

Определение: замкнутое множество

A — замкнуто, если его дополнение (в X) открыто.

Теорема о свойствах замкнутых множеств

1. X, \emptyset — замкнуты
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнутое (перетаскиваем с открытыми)
3. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое (перетаскиваем с открытыми)
4. $\overline{B_r}(a)$ — замкнутое.

Доказательство: Тут все должно быть очевидно :)

Определение: замыкание множества

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное — его замыкание (обозначают за $CL(A)$)

Предельные точки

Точка x предельная для множества $A \Leftrightarrow$ если $\forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. A' — множество предельных точек A .

Свойства предельных точек

1. $CL(A) = A \cup A'$
2. Если A замкнуто, то $A' \subset A$

Теорема

$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(x)$ содержит бесконечно много точек из A . (ну это очев, из определения)

Подпространства

(X, ρ) — метрическое пространство

$Y \subset X$

$(Y, \rho|_{Y \times Y})$ — подпространство

Теорема об открытых и замкнутых множествах в подпространстве

(X, ρ) — метрическое пр-во (Y, ρ) — под-во, $A \subset Y$.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G$ открытое в X : $A = G \cap Y$
2. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists G$ замкнуто в X : $A = G \cap Y$

Нормированные пространства

X — векторное пространство над \mathbb{R} . $\|x\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ — норма, если:

1. $\|x\| \geq 0 \forall x \in X, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Скалярное произведение

$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярное произведение, если

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$

Свойства скалярного произведения и нормы

1. Нер-во Коши-Буняковского $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ Д-во:
 $f(t) := \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$
 $\langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle$ — квадратный трехчлен больший 0, то есть $D \leq 0$.
Дальше очев.
2. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма. Все очев, нер-во треугольника по Коши-Буняковскому.
3. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика.
4. $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

Пределы в метрических пространствах

$\{x_i\} \in X, \lim x_i = a$. 2 Варианта:

1. Вне любого $B_r(a), r > 0$ лежит конечное число точек из $\{x_i\}$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N x_n \in B_\epsilon(a)$

В общем-то, все как в \mathbb{R} . Стоит отметить, что и свойства такие же:

1. Если перемешать члены последовательности, то предел не изменится
2. У подпоследовательности такой же предел
3. Если каждую точку последовательности взять с конечной кратностью, то предел не изменится
4. Единственность предела

Доказательство:

Пусть у нас 2 предела a и b , возьмем $r_a = r_b = \frac{\rho(a, b)}{3}$. Тогда вне $B_{r_a}(a)$ конечное число точек последовательности, вне $B_{r_b}(b)$ конечное число точек. Так как они не пересекаются, то во всей последовательности конечно число точек. Ну, так не бывает.

5. **Новое свойство!** $a = \lim x_n \Leftrightarrow \lim \rho(x_n, a) = 0$ Стоит заметить, что оба выражения эквивалентны тому, что $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rho(a, x_n) < \epsilon$

Определение: ограниченное множество

$A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре

Теорема: сходящаяся последовательность ограничена

Очев же, как из первого семестра :)

Теорема: про предельные точки

a — предельная точка $A \Leftrightarrow \exists x_n \in A \setminus a, \lim(x_n) = a$. Писать много, но все тоже самое, что и в первом семе.

Теорема: про предельные точки

a — предельная точка $A \Leftrightarrow \exists x_n \in A \setminus a, \lim(x_n) = a$. Писать много, но все тоже самое, что и в первом семе.

Теорема: про арифметические действия

(X, ρ) — нормированное пространство. $\lim(y_n) = y_0, \lim(x_n) = x_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3. $\lim(\lambda x_n) = \lambda \lim(x_n)$
4. $\lim(\|x_n\|) = \|x_0\|$
5. Если в X есть скалярное произведение, то $\lim\langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

Частный случай: R^d

Обычно норма это $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$. Для нее и рассматривают пределы. При этом, можно рассматривать сходимость по-координатно (то есть по каждой координате отдельно рассматривать последовательность из \mathbb{R})

Не трудно видеть, что оба эти предела совпадают, так как пусть $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow (x_n^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + (x_n^{(2)} - x_0^{(2)})^2 + \dots + (x_n^{(d)} - x_0^{(d)})^2 \rightarrow 0$. Сумма неотрицательных последовательностей стремится к 0, тогда каждая из них по отдельности стремится к 0. В другую сторону (от по-координатно к по норме) еще легче.

Определение: фундаментальная последовательность

Определение почти как в первом семестре)

Определение: полное пространство

(X, ρ) — полное, если для любой фундаментальной последовательности она имеет предел

Теорема: R^d — полное

Если x_n — фундаментальная, то $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N x_n - x_m < \rho(n, m) < \epsilon$