Математическая статистика, Пятый семестр, ДЗ №2, Группа №1

Захаренко Артем Олегович

27 сентября 2022 г.

Задание №1

$l(t) = \frac{t^{n+1}-(t-1)^{n+1}}{t^n-(t-1)^n}$

$T = l(X_{(n)})$ – статистика из условия. $P(X_{(n)} = k) = \left(\frac{k}{\theta}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\theta}\right)^n$

$E(\phi(l(X_{(n)}))) = \sum\limits_{k=1}^{\theta} \left(\left(\frac{k}{\theta}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\theta}\right)^n\right) \phi\left(\frac{k^{n+1}-(k-1)^{n+1}}{k^n-(k-1)^n}\right) = \frac{1}{\theta^n} \sum\limits_{k=1}^{\theta} \left(k^n - (k-1)^n\right) \phi\left(\frac{k^{n+1}-(k-1)^{n+1}}{k^n-(k-1)^n}\right).$
Если $\phi = id$, то сумма телескопическая и матожидание равно θ. Несмещенность есть.
Чтобы доказать эффективность достаточно доказать достаточность и полноту.
Достаточность:
Так как X_i может принимать только натуральные значения, то в теореме Неймана-Фишера можем считать что все числа уже натуральные:

$f(x_1, ...x_n, \theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant \theta\}\frac{1}{\theta} = \{X_{(n)} \leqslant \theta\}\frac{1}{\theta^n}$. Видно, что $X_{(n)}$ достаточная статистика. Заметим, что l монотонная при $t \geqslant 1$, поэтому по $l(X_n)$ однозначно можно определить $X_{(n)}$, а значит и $l(X_{(n)})$ тоже достаточная.

Для полноты посмотрим на выражение ниже:
$\forall \theta \in \mathbb{N} \ \sum\limits_{k=1}^{\theta} \left(k^n - (k-1)^n\right) (\phi \circ l)(k) = 0.$
Очевидно что при $\theta = 1$ $(\phi \circ l)(1) = 0$. Дальше по индукции можно легко показать, что это верно для любых k (постепенно увеличивая θ). Поэтому $\phi(T) = 0$ почти наверное, а значит полнота доказана.