

Analyse und Modellrekonstruktion aus Zeitserien: Anwendung auf EKG Systeme

Bachelorarbeit

Embedded Systems Engineering

Franz Ludwig Kosteletzky



Universität Freiburg
Technische Fakultät
IMTEK, Lehrstuhl für Simulation
02.01.2022

Bearbeitungszeitraum

01.10.2021 - 17.01.2022

Gutachter

Dr. Andreas Greiner

Betreuer

Dr. Andreas Greiner

Abstract

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	2
2.1	Das Herz	2
2.2	Elektrokardiografie	4
2.3	Korrelationsanalyse	8
2.4	Frequenzanalyse	9
2.5	Zeitreihen	10
2.6	Zeitableitung der Signale	10
2.7	Rekonstruktionen mit Hilfe von Differentialgleichungen	12
3	Stand der Forschung und Ziel der Arbeit	14
4	EKG Daten	14
5	Methoden und Anwendung	14
6	Diskussion	14
7	Zusammenfassung und Ausblick	14
	Abbildungsverzeichnis	15
	Tabellenverzeichnis	16
	Literaturverzeichnis	17

1 Einleitung

Zeitabhängige Systeme können als eine Menge von zusammenhängenden Zeitserien dargestellt werden. Die Analyse solcher Systeme kann über eben diese Zeitserien erfolgen. Aus ihnen können Modelle gebildet werden, aus denen wiederum Rekonstruktionen erstellt werden können. Mithilfe eines solchen Modells kann ein System charakterisiert werden und es können Aussagen über das zukünftige Verhalten des Systems gemacht werden. Diese Art der Zeitreihenanalyse ermöglicht es, Systeme besser zu verstehen.

Es existieren bereits mehrere Methoden zur Analyse von Systemen. Für zeitliche Systeme kann, unter Annahme, dass es sich durch ein System aus Differentialgleichungen darstellen lässt, eben dieses Differentialgleichungs-System durch einen Least-Square-Fit bestimmen. Bei chaotischen Systemen sind Erweiterungen notwendig, um gute Rekonstruktionen zu erhalten. Um die raumzeitliche Modelle abzudecken, erweitert C.Uhl diese Methode, wendet sie auf EEG-Daten an und erhält Rekonstruktionen, die den ursprünglichen Signalen gut entsprechen [1].

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Analyse von EKG-Zeitserien, Modellbildung aus diesen und Rekonstruktion der ursprünglichen Zeitserien.

2 Grundlagen

2.1 Das Herz

Im Folgenden soll zunächst ein kurzer Überblick über die Anatomie und Elektrophysiologie des Herzens gegeben werden, um danach die Funktionsweise und Anwendungen eines Elektrokardiograms zu beschreiben.

Anatomie des Herzens

Das Herz ist der überlebenswichtige Mittelpunkt des menschlichen Organismus. Zusammen mit der Lunge reichert es das Blut mit Sauerstoff an, indem es in ca. 100'000 Schlägen etwa 7600 Liter am Tag Blut pumpt. Es befindet sich in der Mitte der Brust hinter dem Sternum und über dem Zwerchfell und wiegt etwa 200 bis 425 Gramm. Normalerweise ist es etwa größer als eine geschlossene Faust. [2]

Die Muskeln des Herzens werden Myokard genannt. Die Muskeln bilden vier Kammern: Die rechten und linken Vorhöfe und Kammern. Blut gelangt durch den rechten Vorhof in die rechte Kammer um über die Lungenarterie das Blut in die Lunge zu pumpen. In der Lunge wird das Blut mit Sauerstoff angereichert bevor es über die Lungenvene in den linken Vorhof und darauf in die linke Kammer zu gelangen, um sich über die Aorta im Körper zu verteilen. Die verschiedenen Klappen - oder Ventile - regulieren den Zu- und Abfluss in die verschiedenen Kammern. Siehe Abbildung 1. [2]

Elektrophysiologie des Herzens

Ruhepotenzial Lebende Zellen sind polarisiert. Das Potenzial im Inneren einer Zelle ist negativ geladen zur äußeren Umgebung der Zelle. So sind auch die Herzmuskelzellen geladen. Diese Spannung entsteht durch Konzentrationsgradienten von Ionen (Na^+ , K^+). Der Konzentrationsgradient wird beeinflusst durch die Permeabilität der Zellmembran für die unterschiedlichen Ionen und die Aktivität der Ionenpumpen, die das Potenzial aufrecht erhalten. In der Zellmembran sind Ionenkanäle für Natrium- und Kaliumionen, die abhängig vom Zellpotenzial geöffnet oder geschlossen sind. Im Ruhepotenzial sind die Kanäle für Kaliumionen geöffnet. Dadurch ist die Zellmembran ca. 100-mal durchlässiger für

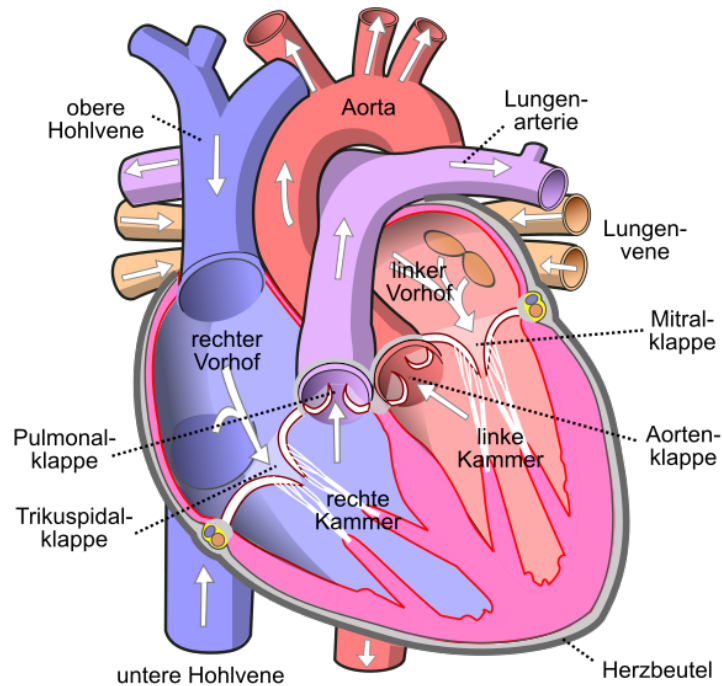


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines menschlichen Herzens. [3]

Kaliumionen (K^+) als für Natriumionen (Na^+). Zusätzlich wird die Kaliumkonzentration im Inneren der Zelle durch Na^+/K^+ Ionenpumpen hoch gehalten. Es entsteht ein dominanter Fluss von Kaliumionen vom Inneren der Zelle nach Außen: Es fließen mehr Kaliumionen nach Außen, als Natriumionen nach Innen nachfließen können. Dadurch entsteht ein Ruhepotenzial der Herzmuskelzellen von etwa -90 mV . [2][4]

Aktionspotenzial der Herzmuskelzellen Die Herzmuskelzellen können elektrisch erregt werden, somit wird in der Zelle ein Aktionspotenzial ausgelöst. Dieses hat eine bestimmte Charakteristik. Der zeitliche Verlauf des Aktionspotenzials ist in Abbildung 2 dargestellt. Es kann in vier Phasen unterteilt werden, in den jeweils unterschiedliche Ionenaktivitäten stattfinden. In Phase 0 depolarisiert ein elektrischer Impuls die Zelle sehr rasch auf 0 mV und endet in einem Überschießen (“overshoot”), was als Phase 1 bezeichnet wird. In diesen zwei Phasen werden Natriumionen durch Ionenkanäle, die durch den elektrischen Impuls geöffnet werden, rasch in das Innere der Zelle befördert. Das Plateau in Phase 2 wird durch ein Gleichgewicht von nach Außen strömenden Kaliumionen und nach Innen strömenden Kalziumionen aufrecht erhalten. Die Zelle kehrt in Phase 3 (Repolarisation) durch Verschiebung von Kaliumionen nach Außen zum polarisiertem Zustand zurück. Phase 4 bezeichnet das Ruhepotenzial bis zur nächsten Erregung. [2][4]

Schrittmacherzellen Die sogenannten “Schrittmacherzellen” befinden sich im Sinusknoten des Herzens (s. Abb. 3 “Sinus node”). Diese Zellen sind in der Lage ohne externe elektrische Anregung ein Aktionspotenzial zu erzeugen. Damit steuern diese Zellen die Herzfrequenz. Das Verhalten der Zellen automatisch Aktionspotenziale zu erzeugen, wird durch das sympathische und parasympathische autonome Nervensystem gesteuert. Bei körperlicher Aktivität ist der Sympathikus aktiv und die Herzfrequenz höher, während, wenn die Parasympathikus aktiv ist, die Herzfrequenz niedriger ist, beispielsweise in der Verdauung. Das durch die Schrittmacherzellen generierte elektrische Signal propagiert von dem Sinusknoten über beide Vorhöfe zum AV-Knoten (s. Abb. 3 “AV-node”). [2][5]

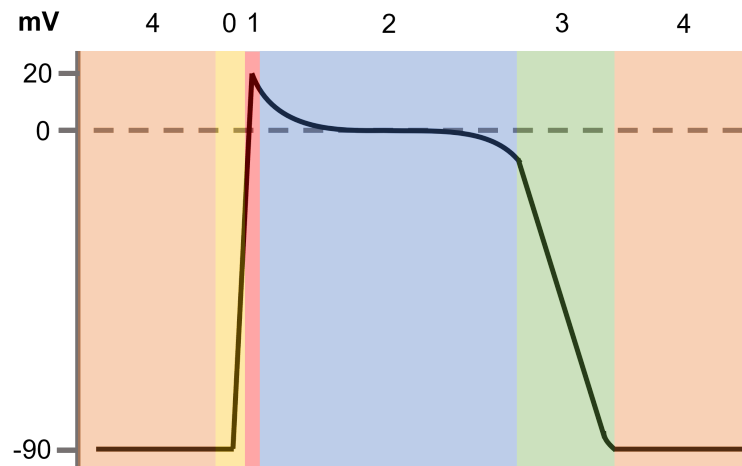


Abbildung 2: Zeitlicher schematischer Verlauf des Aktionspotenzials an einer Herzmuskelzelle in vier Phasen unterteilt.

Reizleitung Der Bereich zwischen den Herzzellen ist sehr leitungsfähig. Das Aktionspotenzial in einer Zelle breitet sich in einer Wellenfront durch alle benachbarten Zellen im Körper aus. [5] Im AV-Knoten werden die elektrischen Signale aus dem Sinusknoten gesammelt und verzögert. Das ermöglicht ein höheres Blutvolumen in den Herzkammern vor der Herzmuskelkontraktion. Über das His-Bündel, das sich zwischen den beiden Herzkammern befindet, wird das Signal an beide Kammern weitergeleitet, sodass diese sich zeitlich koordiniert kontrahieren und relaxieren. [2]

2.2 Elektrokardiografie

Das Elektrokardiogramm (EKG) ist ein hochwertiges und verbreitetes Instrument zur Diagnose von Herzkrankheiten. So existiert beispielsweise für die Diagnose von Arrhythmien kein weiteres praktisches Diagnosemedium als das EKG. Es können sogar akute Myokardinfarkte über das EKG detektiert werden. Aber es können auch Reizleitungsstörungen, wie beispielsweise Elektrolytstörungen, durch das EKG diagnostiziert werden. [4]

Das EKG stellt die raumzeitliche Summe der sich ausbreitenden Aktionspotenziale, die ihren Ursprung im Herzen haben, dar. Mit Hilfe des EKGs werden die verschiedenen elektrischen Phasen des Herzzyklusses beschrieben und es ist ein Maß für den elektrischen Strom, der durch Änderungen in den Aktionspotenzialen im extrazellulären Raum erzeugt wird. Siehe Abbildung 3. [2]

Zu einer gegebenen Zeit im Herzzyklus depolarisiert (bzw. erzeugen ein Aktionspotenzial) jeweils nur eine bestimmte lokal zusammenhängende Gruppe von Zellen. Die Position der Gruppe depolarisierender Zellen ändert sich zeitlich: Das Aktionspotenzial pflanzt sich fort. Somit kann diese Gruppe als elektrischer Dipol aufgefasst werden. Die sich zeitlich verändernde Position des Dipols kann mit einem Vektor ("QRS-Vektor"), der Richtung und Größenordnung beschreibt, dargestellt werden. Der dominante Hauptvektor, der die mittlere Ausbreitung der Wellenfront beschreibt, ergibt sich aus der Summe aller QRS-Vektoren zu einem bestimmten Zeitpunkt. [2][4]

Ein EKG kann invasiv und nichtinvasiv erfolgen. Invasiv können die elektrischen Prozesse auf zellulärer Ebene beobachtet werden. In der Praxis wird ein EKG nichtinvasiv durch Elektroden auf der Haut aufgenommen, die die sich ausbreitende Wellenfront detektieren. Diese Signale werden für die weitere Verarbeitung verstärkt und verarbeitet. Ein EKG besteht üblicherweise aus 9 Kanälen. [2]

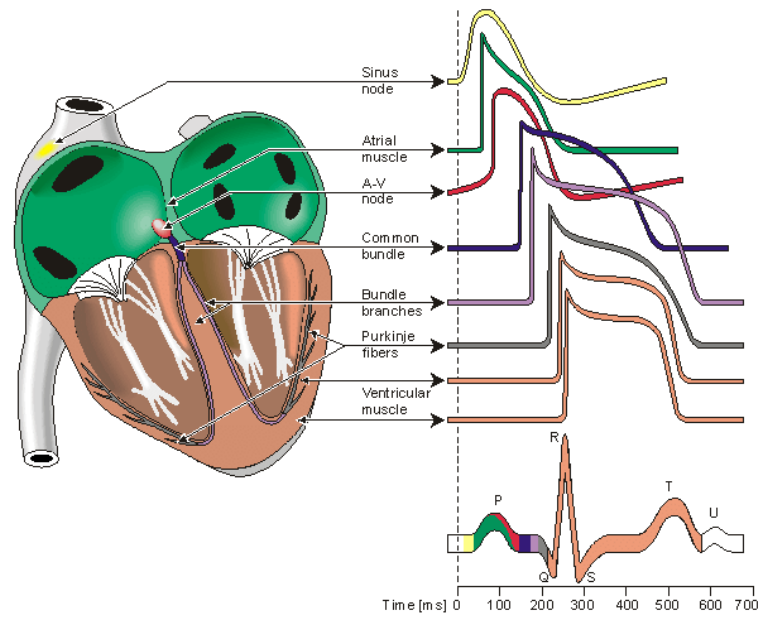


Abbildung 3: Die Entstehung eines EKG Signals. Verschiedene Aktionspotenziale unterschiedlicher Regionen des Herzens. [5]

Für die Erstellung eines EKG existieren verschiedene sogenannte “Ableitungssysteme”. Diese geben an, wie aus den Signalen der Elektroden die Kanäle berechnet werden - prominente Beispiele sind die Einthoven- und Wilson-Ableitungssysteme. [4] Im Folgenden werden nur die für diese Arbeit relevanten Ableitungssysteme vorgestellt. Neben diesen existieren noch weitere Ableitungssysteme.

Ableitung nach Einthoven

Einthoven et al. entwickelte 1913 das Einthoven’sche Ableitungssystem. Es beruht auf der Annahme, dass sich das Herz in der Mitte einer homogenen Kugel, die den Torso darstellen soll, befindet. Von dieser Kugel wird das EKG an drei Punkten über Elektroden abgegriffen, die die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks darstellen: Am rechten Arm (RA), am linken Arm (LA) und am linken Bein (LL). Siehe hierzu Abbildung 4. [6]

Tatsächlich ist das oben genannte Dreieck in der Praxis kein gleichschenkliges. Die Elektroden an den Extremitäten sind jedoch weit genug entfernt um anzunehmen, dass der Abstand zwischen Herz und Elektrode Unendlich nähert. Es ergeben sich aus den Differenzen der Signale der Elektroden drei Kanäle, die folgendermaßen bezeichnet sind: [2]

$$I = \Phi_{LA} - \Phi_{RA} \quad (1)$$

$$II = \Phi_{LL} - \Phi_{RA} \quad (2)$$

$$III = \Phi_{LL} - \Phi_{LA} \quad (3)$$

Die Signale Φ_i bezeichnen die Potenziale, die an den Punkten $i \in \{RA, LA, LL\}$ am Körper aufgenommen wurden. Die Kanäle beschreiben anschaulicherweise die elektrische Aktivität des Herzens in drei unterschiedliche Richtungen, also die Anteile des aktuellen Hauptvektors in die jeweilige Richtung.

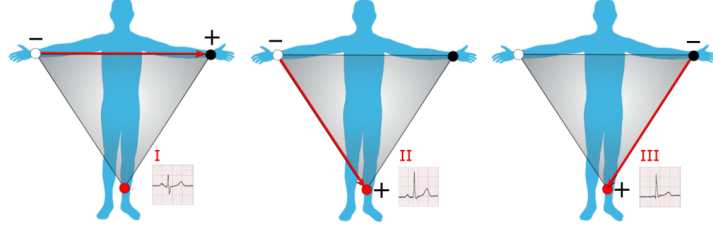


Abbildung 4: Einthovensches Dreieck. Das EKG wird über drei Elektroden abgegriffen. Die Potentialdifferenzen (I , II , III) bilden die jeweiligen EKG Kanäle. [7]

Ableitung nach Wilson

Das “Wilson Central Terminal” (WCT) ist folgendermaßen definiert:

$$\Phi_{WCT} = \frac{\Phi_{RA} + \Phi_{LA} + \Phi_{LL}}{3} \quad (4)$$

Es beschreibt einen gemeinsamen Punkt aller drei Kanäle. Das Potenzial Φ_{WCT} bleibt über den gesamten Herzzyklus näherungsweise konstant. Das WCT stellt das Ruhepotential des gesamten Körpers dar. Es ergeben sich drei weitere Kanäle, siehe Abbildung 5. [2]

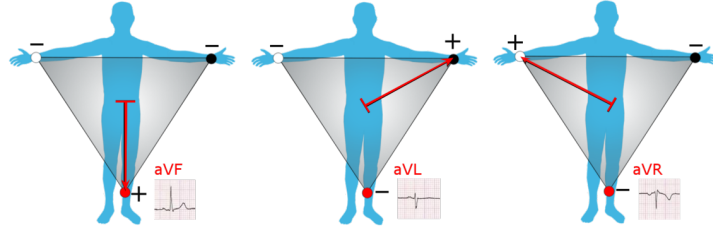


Abbildung 5: Einthovensches Dreieck mit Wilson Central Terminal (WCT) in der Mitte des Körpers. Das EKG wird über drei Elektroden abgegriffen. Die Potentialdifferenzen zum Ruhepotential WCT (aVF , aVL , aVR) bilden die jeweiligen EKG Kanäle. [7]

Unipolare Brustwandableitung Für die Unipolare Brustwandableitung werden sechs weitere Elektroden V_i am Torso befestigt. Diese werden nahe am Herzen befestigt, siehe Abbildung 6. Als Referenzpotential wird das Wilson Central Terminal verwendet. Die resultierenden Kanäle W_i werden folgendermaßen berechnet: [2]

$$W_1 = \Phi_{V_1} - \Phi_{WCT}$$

$$W_2 = \Phi_{V_2} - \Phi_{WCT}$$

$$W_3 = \Phi_{V_3} - \Phi_{WCT}$$

$$W_4 = \Phi_{V_4} - \Phi_{WCT}$$

$$W_5 = \Phi_{V_5} - \Phi_{WCT}$$

$$W_6 = \Phi_{V_6} - \Phi_{WCT}$$

Die Kanäle W_1 und W_2 repräsentieren die Aktivität in den rechten Kammern, Kanäle W_3 und W_4 die Aktivität der vorderen Wand der linken Kammer. Für Kanäle W_5 und W_6 ist es analog die der

seitlichen Wand der linken Kammer. [2]

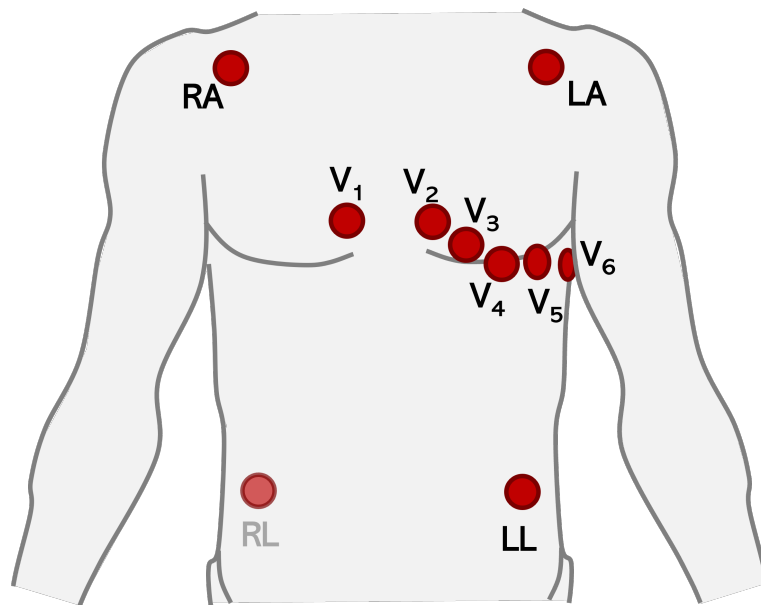


Abbildung 6: Positionen der Elektroden V_i der unipolaren Brustwandableitung mit Positionen für RA , LA , RL und LL nach Manson und Likar.

Ableitung nach Manson und Likar 1966 wurde von Mason und Likar festgestellt, dass sich die Position der Elektroden der Extremitäten (LA , RA , LL) verändern lässt, ohne die Qualität des Signales zu beeinflussen. Diese neuen Positionen erlauben einen kompakteren Messaufbau. Sie sind in Abbildung 6 vermerkt. [2]

Charakteristika eines EKGs

Ein aufgenommenes EKG kann weist viele Komponenten auf, anhand derer es charakterisiert werden kann. Mit Hilfe der Charakterisierung des EKGs können erfahrene Ärzte Rückschlüsse auf die Gesundheit des Patienten ziehen. Ein schematisches EKG mit benannten Komponenten ist in Abbildung 7 dargestellt. In diesem Abschnitt soll ein Überblick über diese Komponenten und deren Ursprung, aus denen das EKG besteht, gegeben werden.

Der Abschnitt ist kurz gehalten, detailliertere Erklärungen finden sich in [4].

Sinusrhythmus Das normale Herz schlägt in einem Sinusrhythmus, mit 50 bis 90 Schlägen pro Minute. Abweichungen sind möglich, besonders bei sportlichen Aktivitäten. Der Sinusrhythmus entsteht durch die Depolarisation des Gesamten Herzens, angeregt durch den Sinusknoten. [4]

P-Welle Die P-Welle ist der erste Ausschlag im Herzzyklus. Er wird durch die Depolarisation in den Vorhöfen erzeugt. Spektral besteht die P-Welle aus niedrigen Frequenzen (10 - 10 Hz). [2]

PQ-Intervall Das PQ-Intervall wird von Beginn der P-Welle bis zu Beginn des QRS-Komplexes gemessen. In einem gesunden Herz beträgt es 130 - 200 ms. Es beschreibt die Zeit, die die Wellenfront benötigt um vom Sinusknoten zum AV-Knoten zu propagieren. [4]

QRS-Komplex Die Depolarisation in den Herzkammern wird im QRS-Komplex sichtbar. Er ist üblicherweise sehr kurz und konzentriert mit Frequenzen im Bereich von 10 - 50 Hz. [2]

ST-Strecke Die ST-Strecke liegt zwischen dem QRS-Komplex und dem Beginn der T-Welle. Sie stellt die Zeit dar, die vergeht zwischen Depolarisation und Repolarisation der Herzkammern. Das EKG in diesem Bereich ist üblicherweise konstant. Hebungen und Senkungen in diesem Bereich werden mit pathologischen Herzen in Verbindung gebracht. [2][4]

T-Welle Die T-Welle präsentiert die Repolarisation der Herzkammern. Der Ausschlag der T-Welle sthet im Verhältnis zum QRS-Komplex. [2] In einem normalen Herzen ist die T-Welle asymmetrisch: Der Anstieg ist langsam, der Abstieg schneller. [4]

QT-Intervall Das QT-Intervall ist die Dauer, die von Beginn des QRS-Komplexes bis zum Ende der T-Welle vergeht. Das QT-Intervall ist abhängig von der Herzfrequenz: Wenn die Frequenz höher ist, ist das QT-Intervall kürzer; bei niedriger Frequenz länger. [4]

U-Welle Späte Repolarisation in Purkinje-Zellen (s. Abb. 3) werden mit der U-Welle in Verbindung gebracht. Es ist nicht unüblich, dass die U-Welle fehlt. [4]

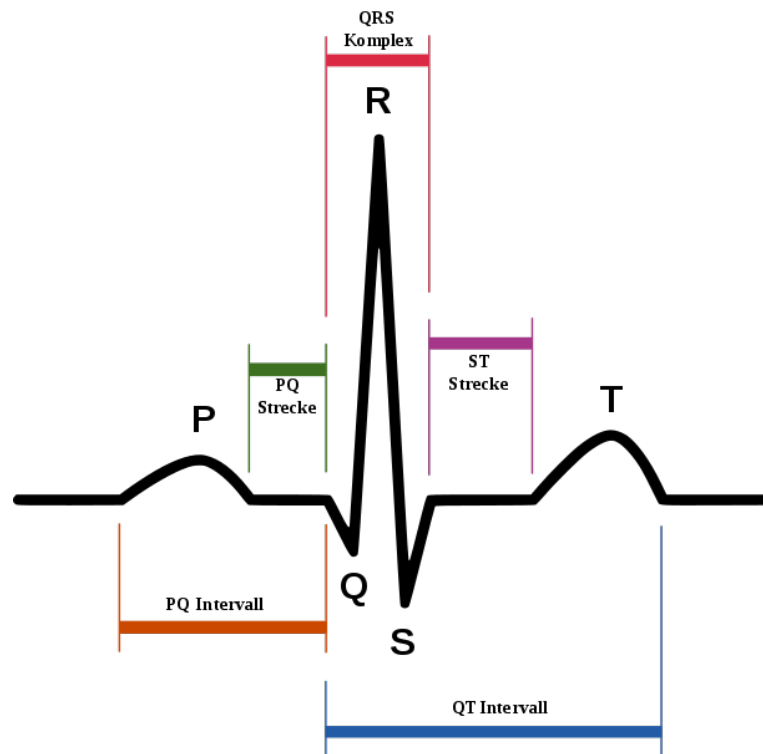


Abbildung 7: Schematische Darstellung einer EKG-Aufnahme eines gesunden Herzens. Es ist ein Herzschlag dargestellt. [8]

2.3 Korrelationsanalyse

Die Kreuzkorrelation zweier Signale x und y ist folgendermaßen definiert:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau)dt \quad (5)$$

Sie gibt an, wie sehr sich zwei Funktionen oder Signale ähneln, wenn sie zueinander um τ zeitlich verschoben sind. Mit ihr können ohne Annahme über die Form der Funktionen Aussagen über Ähn-

lichkeit und zeitlicher Verschiebung getroffen werden. Bei gegebener Korrelationsfunktion und wenn ein Signal bekannt ist, lässt sich damit über Gleichung (5) das andere Signal berechnen.

Für zwei ähnliche Funktionen, die um eine Dauer von τ_1 verschoben sind, wird die Korrelationsfunktion ein Maximum bei τ_1 aufweisen. Bildlich wird dieser Zusammenhang in Abbildung 8 dargestellt. In der Anwendung treten Funktionen als diskrete Zeitserien auf. Eine Zeitserie x aus N Zeitpunkten besteht also aus Werten x_i mit $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

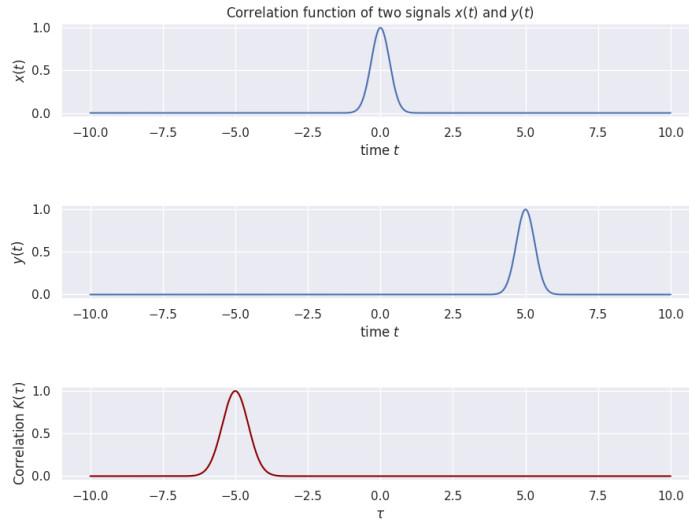


Abbildung 8: Die Signale x und y sind sich ähnlich und zeitlich verschoben. Die Korrelationsfunktion $K(\tau)$ weist ein Maximum bei $\tau = -5$ auf. Wir schließen daraus, dass Funktion x zu Funktion y zeitlich um $dt = -5$ verschoben ist.

2.4 Frequenzanalyse

Mit Hilfe der Fourier-Transformation kann das Spektrum einer Funktion oder eines Signals berechnet werden. Sie ist ein Funktional und wird auf eine Funktion angewandt. Die Fourier Transformierte gibt die Amplituden der Frequenzanteile dieser Funktion an. Aus ihr abgeleitet wurde die "Discrete Fourier Transform" (DFT), die die Fourier Transformation auf diskrete Zeitserien erweitert. Sie ist für eine Funktion $f(t)$ folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega t} f(t) dt \quad (6)$$

Die inverse Fourier-Transformation erlaubt aus einem Frequenzspektrum - der Fourier-Transformierten - das ursprüngliche Signal wieder zu berechnen:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\omega t} f(t) dt \quad (7)$$

Eine beispielhafte Fourier-Transformation ist in Abbildung 9 dargestellt. Die Funktion $F(\omega)$ wird Fourier-Transformierte genannt. Über die Transformierte können Einblicke in die Zusammensetzung der Frequenz einer Funktion gewonnen werden. So weisen beispielsweise viele Transformierte von Zeitserien, die von elektronischen Schaltungen aufgenommen wurden, einen Peak bei 50 Hz auf, der

Netzfrequenz. Mit dieser Erkenntnis kann durch einen Frequenzfilter diese Störfrequenz entfernt werden.

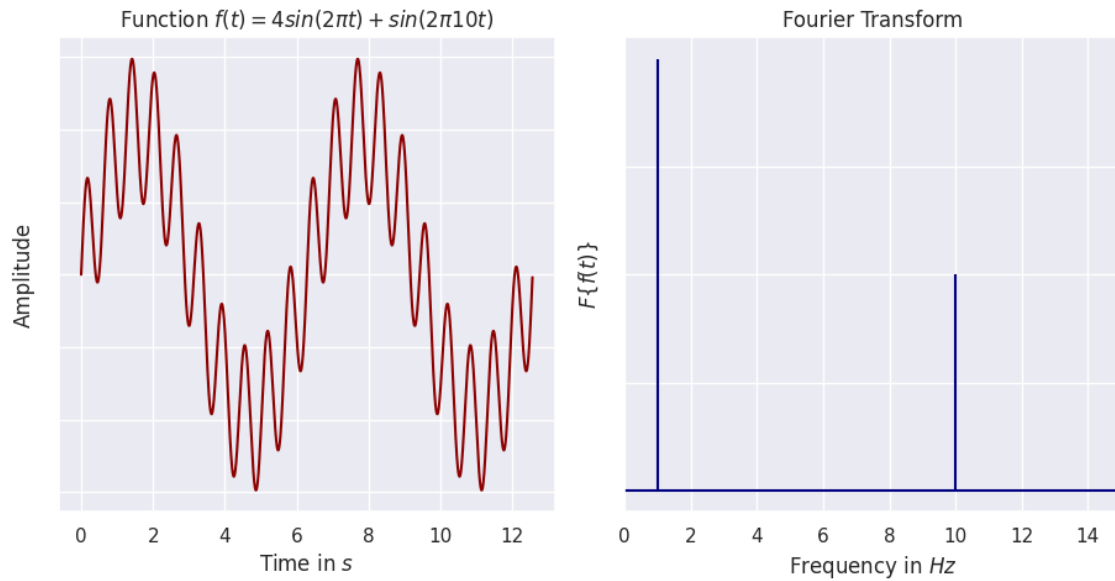


Abbildung 9: Links das ursprüngliche Signal: Zwei überlagerte Sinusschwingungen. Rechts die Fouriertransformation dieses Signals: Sie weist zwei Peaks auf. Diese Frequenzen wurden im ursprünglichen Signal zur Überlagerung verwendet.

Neben dieser Spektralanalyse von Zeitserien hat die Fourier-Transformation Anwendungen in der Analyse von (partiellen) Differentialgleichungen und weitere. [9]

2.5 Zeitserien

Eine Zeitserie x_t ist eine Menge an Beobachtungen zu definierten Zeitpunkten $t \in T_0$. Die Menge an Beobachtungszeitpunkten kontinuierlicher Zeitserien ist kontinuierlich, beispielsweise $T_0 = [0, 1]$. In diesem Fall - um Verwechslungen zu vermeiden - wird die Zeitserie mit $x(t)$ bezeichnet. Handelt es sich um eine diskrete Zeitserie, so ist die Menge an Beobachtungszeitpunkten T_0 eine diskrete. In dieser Arbeit treten nur diskrete Zeitserien auf. [10]

Ein beliebiges Beispiel einer diskreten Zeitserie ist in Abbildung 10 dargestellt.

2.6 Zeitableitung der Signale

Die numerische Ableitung von (diskreten) Zeitserien gestaltet sich mitunter schwierig. Die Relevanz einer korrekten Ableitung ist aber unumstreitbar, insbesondere für das Lösen von Differentialgleichungen. [11]

Für eine endliche diskrete Zeitserie x mit N Werten x_i lässt sich die Ableitung nicht einfach als Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte realisieren, da die resultierende Ableitung einen Zeitschritt kürzer wäre, als die Zeitserie:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$$

Um diesen Problemen zu entgehen kann der zentrale Differenzenquotient (“central point derivative”)

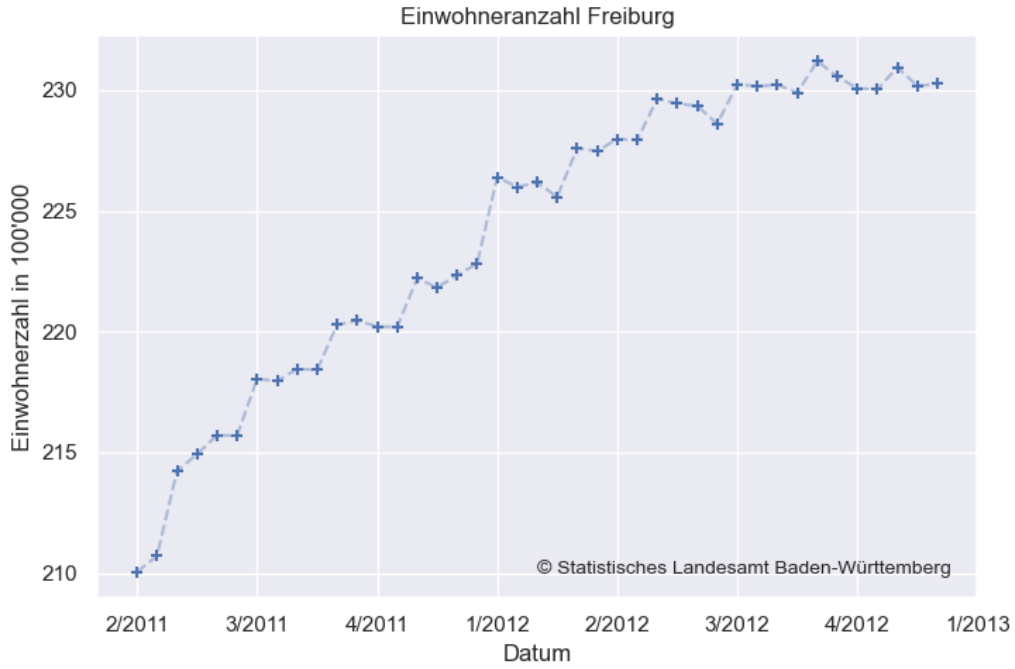


Abbildung 10: Zeitserie der Einwohnerzahl in Freiburg im Breisgau in den Jahren 2011 bis 2013. Die Daten, die für diese Grafik genutzt wurden, stammen vom Statistischen Landesamt Baden-Württemberg. Es handelt sich um einen diskreten Datensatz: Datenpunkte sind mit einem Plus gekennzeichnet.

mit rechts- und linksseitigen Ableitungen an den Rändern verwendet werden. Der zentrale Differenzenquotient kann für verschiedene Grade aus den finiten Differenzen hergeleitet werden. Für Grad 1 lautet er: [12]

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (8)$$

Die linksseitige Ableitung, also die Ableitung in zeitlich positiver Richtung, ist in Gleichung (9) definiert. Sie wird am rechten Rand einer Zeitserie verwendet.

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \quad (9)$$

Analog wird die rechtsseitige Ableitung am linken Rand einer Zeitserie genommen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (8, 9, 10) folgt also für die Ableitung:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \begin{cases} \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} & \text{für } i = 0 \\ \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} & \text{für } 0 < i < N \\ \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} & \text{für } i = N \end{cases} \quad (11)$$

Gleichung (11) vereinigt die Differenzenquotienten vom Grad 1. Diese existieren für höhere Grade, die weitere umliegende Werte berücksichtigen. Die Python-Bibliotheksfunktion `numpy.gradient()` verwendet beispielsweise die Differenzenquotienten vom Grad 2 analog zu Gleichung (11).

2.7 Rekonstruktionen mit Hilfe von Differentialgleichungen

Zeitreihen können als Lösung einer Differentialgleichung verstanden werden. Es ist also eine Funktion $f(y)$ gesucht, sodass die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} = f(y) \quad (12)$$

möglichst gut der ursprünglichen Zeitserie x_i entspricht. Besteht ein System aus mehreren Zeitserien \vec{z} kann ein System aus Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt werden:

$$\dot{\vec{y}} = f_i(\vec{y}) \quad (13)$$

Für die Funktion f kann ein polynominaler Ansatz bis zum Grad N genommen werden:

$$f(y) = \sum_k^N p_k \Phi_k(y) \quad (14)$$

Mit den Polynomen Φ . Für ein System aus zwei Zeitserien sähe Gleichung (13) folgendermaßen aus für einen polynominalen Ansatz bis zum Grad $N = 2$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(\vec{y}) = p_0 y_1 + p_1 y_2 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1 y_2 + p_4 y_2^2 \\ \dot{y}_2 &= f_2(\vec{y}) = q_0 y_1 + q_1 y_2 + q_2 y_1^2 + q_3 y_1 y_2 + q_4 y_2^2 \end{aligned}$$

Die Funktionen \vec{f} können mit der Methode der kleinsten Quadrate ("least squares") bestimmt werden. Aus den gegebenen Zeitserien x_i können deren Ableitungen \dot{x}_i numerisch berechnet werden. Die Funktion f_i , beziehungsweise ihre Koeffizienten \vec{p} , soll so bestimmt werden, dass die Funktion

$$W = \langle (\dot{x}_i - f_i(x))^2 \rangle \quad (15)$$

minimal wird. $\langle \dots \rangle$ ist definiert als der arithmetische Mittelwert. Wir können die optimalen Koeffizienten \vec{p} aus der Bedingung

$$\frac{\partial W}{\partial p_k} = 0$$

erhalten, die wir Gleichung (15) anwenden. Wir erhalten:

$$\sum_i (\dot{y}_i - f_i(\vec{y})) \frac{\partial}{\partial p_k} f_i(\vec{y}) = 0 \quad (16)$$

Aus (16) können wir die Koeffizienten \vec{p} bestimmen mit

$$A\vec{p} = \langle \dot{y}\Phi_j(\vec{y}) \rangle \quad (17)$$

wobei

$$A = \langle \Phi_i(\vec{y})\Phi_j(\vec{y}) \rangle \quad (18)$$

Eine Integration des so aufgestellten Differentialgleichungssystems liefert in geeigneten Fällen eine Lösung, die den ursprünglichen Zeitserien sehr ähnlich ist. [1][13]

Gewichteter Least Square Fit

In oben beschriebenen Verfahren können verschiedene Zeitpunkte der Zeitserien gewichtet werden, was bedeutet, dass die Koeffizienten \vec{p} so bestimmt werden, sodass die Residualwerte in höher gewichteten Bereichen kleiner sind. Wir führen eine Gewichtsfunktion w_t ein, die wir in (15) einfügen:

$$W = \langle w_i(\dot{x}_i - f_i(x))^2 \rangle \quad (19)$$

für $w_i = \text{const.}$ kann die Gewichtsfunktion ignoriert werden, s. (20). [13]

Beispiel

Gegeben sind zwei Zeitserien x und v aus einem System - der harmonische Oszillator. Wir wollen aus diesen Zeitserien ein System rekonstruieren. Wir stellen nach Gleichung (13) dieses auf:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(\vec{y}) = p_0 y_1 + p_1 y_2 \\ \dot{y}_2 &= f_2(\vec{y}) = q_0 y_1 + q_1 y_2 \\ \text{mit } \vec{y} &= \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es kann ein polynominaler Ansatz vom Grad $N = 1$ gewählt werden. Mit Gleichung (19) erhalten wir für Funktion f_j :

$$\begin{pmatrix} \sum_j w_j x_j^2 & \sum_j w_j x_j v_j \\ \sum_j w_j x_j v_j & \sum_j w_j v_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j w_j \dot{x}_j x_j \\ \sum_j w_j \dot{x}_j v_j \end{pmatrix} \quad (20)$$

Wir sehen sofort, dass

$$\begin{aligned} p_0 &= q_1 = 0 \\ p_1 &= -q_0 = 1 \end{aligned}$$

womit das System aufgestellt werden kann als:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -x$$

3 Stand der Forschung und Ziel der Arbeit

4 EKG Daten

- Ursprung und Data cleaning

5 Methoden und Anwendung

- Beschreibung was jetzt gleich gemacht wird, quasi als Einleitung: "Jetzt wird gleich das gemacht und die Ergebnisse stehen im folgenden"
- Korrelation der Kanäle
- Frequenzanalyse
- Modifikationen des Signals: Filter, Tilt
- Unterteilung in Intervalle
- Fit der einzelnen Intervalle
- Blending der Koeffizienten
- Periodische Fortsetzung der Rekonstruktion

6 Diskussion

- Es gibt noch einen anderen Prozess im Herzen
- System unvollständig

7 Zusammenfassung und Ausblick

- Was geht da noch?
- Im Rahmen dieser Arbeit ist Repository entstanden

Abbildungsverzeichnis

1	Schematischer Aufbau eines menschlichen Herzens. [3]	3
2	Zeitlicher schematischer Verlauf des Aktionspotenzials an einer Herzmuskelzelle in vier Phasen unterteilt.	4
3	Die Entstehung eines EKG Signals. Verschiedene Aktionspotenziale unterschiedlicher Regionen des Herzens. [5]	5
4	Einthovensches Dreieck. Das EKG wird über drei Elektroden abgegriffen. Die Potentialdifferenzen (I , II , III) bilden die jeweiligen EKG Kanäle. [7]	6
5	Einthovensches Dreieck mit Wilson Central Terminal (WCT) in der Mitte des Körpers. Das EKG wird über drei Elektroden abgegriffen. Die Potentialdifferenzen zum Ruhepotential WCT (aVF , aVL , aVR) bilden die jeweiligen EKG Kanäle. [7]	6
6	Positionen der Elektroden V_i der unipolaren Brustwandableitung mit Positionen für RA , LA , RL und LL nach Manson und Likar.	7
7	Schematische Darstellung einer EKG-Aufnahme eines gesunden Herzens. Es ist ein Herzschlag dargestellt. [8]	8
8	Die Signale x und y sind sich ähnlich und zeitlich verschoben. Die Korrelationsfunktion $K(\tau)$ weist ein Maximum bei $\tau = -5$ auf. Wir schließen daraus, dass Funktion x zu Funktion y zeitlich um $dt = -5$ verschoben ist.	9
9	Links das ursprüngliche Signal: Zwei überlagerte Sinusschwingungen. Rechts die Fouriertransformation dieses Signals: Sie weist zwei Peaks auf. Diese Frequenzen wurden im ursprünglichen Signal zur Überlagerung verwendet.	10
10	Zeitreihe der Einwohnerzahl in Freiburg im Breisgau in den Jahren 2011 bis 2013. Die Daten, die für diese Grafik genutzt wurden, stammen vom Statistischen Landesamt Baden-Württemberg. Es handelt sich um einen diskreten Datensatz: Datenpunkte sind mit einem Plus gekennzeichnet.	11

Tabellenverzeichnis

Literatur

- [1] Christian Uhl. *Analyse raumzeitlicher Daten strukturbildender Systeme*. Verlag Shaker, 1995.
- [2] Antoun Khawaja. “Automatic ECG analysis using principal component analysis and wavelet transformation”. Englisch. Diss. 2007. ISBN: 978-3-86644-132-3. URL: <http://dx.doi.org/10.5445/KSP/1000006642>.
- [3] Jakov. *Diagram of the human heart (cropped) de*. [online - abgerufen 24.12.2021]. 2008. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_the_human_heart_\(cropped\)_de.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_the_human_heart_(cropped)_de.svg).
- [4] Marc Gertsch. *Das EKG*. Bd. 2. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-79122-5>.
- [5] Jaakko Malmivuo und Robert Plonsey. “Bioelectromagnetism. 6. The Heart”. In: Jan. 1995, S. 119–130. ISBN: 978-0195058239.
- [6] Jaakko Malmivuo und Robert Plonsey. “Bioelectromagnetism. 15. 12-Lead ECG System”. In: Jan. 1975, S. 277–289. ISBN: 978-0195058239.
- [7] Nicholas Patchett. *Limb leads of EKG*. [online - abgerufen 25.12.2021]. 2015. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Limb_leads_of_EKG.png.
- [8] Anthony Atkielski. *Sinusrythmus, beschriftet*. [online - abgerufen 28.12.2021]. 2019. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SinusRythmus_beschriftet.svg.
- [9] Ronald Bracewell. *The Fourier Transform And Its Applications*. McGraw-Hill, 2000.
- [10] Peter J. Brockwell und Richard A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer, New York, NY, 1991.
- [11] Richard Fitzpatrick. *Upwind differencing*. [online - abgerufen 30.12.2021]. 2006. URL: <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node93.html>.
- [12] Emek Abali Bilen und Çakıroğlu Celal. *Numerische Methoden für Ingenieure*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2020.
- [13] U.S. Department of Commerce, NIST/SEMATECH. *e-Handbook of Statistical Methods*. [online - abgerufen 03.01.2022]. URL: <http://dx.doi.org/10.18434/M32189>.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel verwendet habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe. Darüber hinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, bereits für eine andere Prüfung angefertigt wurde.

Ort, Datum

Unterschrift