

**Analyse raumzeitlicher Daten  
strukturbildender Systeme**

Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
**Christian Uhl**  
aus Garmisch-Partenkirchen

Hauptberichter: Priv.-Doz. Dr. R. Friedrich  
Mitberichter: Prof. Dr. M. Wagner  
Tag der mündlichen Prüfung: 3. Juli 1995

Institut für Theoretische Physik und Synergetik der  
Universität Stuttgart

1995

Berichte aus der Physik

Christian Uhl

Analyse raumzeitlicher  
Daten strukturbildender Systeme

D 93 (Diss. Universität Stuttgart)

Verlag Shaker  
Aachen 1995

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Uhl, Christian:  
Analyse raumzeitlicher Daten strukturbildender Systeme / Christian Uhl. - Als  
Ms. gedr.-  
Aachen : Shaker, 1995  
(Berichte aus der Physik)  
Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 1995  
ISBN 3-8265-0949-8

Copyright Verlag Shaker 1995  
Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, derauszugsweisen  
oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungs-  
anlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISBN 3-8265-0949-8  
ISSN 0945-0963

Shaker Verlag GmbH, Hubertusstr. 40, 52064 Aachen  
Telefon: 0241 / 406351 - Telefax: 0241 / 406354

## Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	4
1 Einleitung	6
<b>I Grundlagen</b>	<b>9</b>
2 Synergetik	11
2.1 Einführung . . . . .	11
2.1.1 Strukturbildung . . . . .	11
2.1.2 Phänomenologische Synergetik . . . . .	12
2.1.3 Anwendungsgebiete . . . . .	13
2.1.4 Wahrnehmungsprozesse und Mustererkennung . . . . .	13
2.2 Mathematische Grundlagen . . . . .	14
2.2.1 Grundgleichungen . . . . .	14
2.2.2 Entwicklung in Eigenfunktionen des linearisierten Problems . . . . .	15
2.2.3 Versklavungsprinzip . . . . .	16
2.2.4 Ordnungsparametergleichungen und Normalformen . . . . .	18
<b>3 Raumzeitliche Datenanalyse</b>	<b>22</b>
3.1 Überblick . . . . .	22
3.1.1 Zeitreihenanalyse . . . . .	22
3.1.2 Räumliche Analyse . . . . .	25
3.1.3 Raumzeitliche Analyse . . . . .	27

## INHALTSVERZEICHNIS

3.2 Vorgehensweise der räumzeitlichen Analyse . . . . .	28
3.3 Ansätze zur Beschreibung der Dynamik . . . . .	30
3.4 Projektion in den relevanten Unterraum . . . . .	31
3.5 Formulierung des Extremalproblems . . . . .	32
3.6 Elimination von Parametern . . . . .	34
3.6.1 Einführung von Korrelationstensoren . . . . .	34
3.6.2 Variation nach $s^+$ , $\{k\}$ . . . . .	35
3.6.3 Variation nach $\{\alpha\}$ . . . . .	36
3.7 Lösung des nichtlinearen Problems . . . . .	37
3.8 Berechnung der räumlichen Moden . . . . .	38
<b>II Anwendungen</b>	<b>41</b>
<b>4 Steady-state Bifurkationen</b>	<b>43</b>
4.1 Simulationen . . . . .	43
4.2 Datenanalyse . . . . .	48
<b>5 Signal mit zwei Ordnungsparametern</b>	<b>59</b>
5.1 Hopf-Bifurkation . . . . .	60
5.1.1 Simulation des Signals . . . . .	60
5.1.2 Untersuchung der Daten . . . . .	63
5.2 Kodimension-II Instabilität . . . . .	67
5.2.1 Simulation . . . . .	67
5.2.2 Datenanalyse . . . . .	70
<b>6 Rayleigh-Bénard Instabilität</b>	<b>73</b>
6.1 Einführung . . . . .	73
6.2 Theoretische Behandlung . . . . .	74
6.2.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen . . . . .	74
6.2.2 Der stationäre Grundzustand . . . . .	76
6.2.3 Die dimensionslosen Grundgleichungen . . . . .	76

## INHALTSVERZEICHNIS

6.2.4 Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	77
6.2.5 Nichtlineare Bewegungsgleichungen der Modenamplituden . . . . .	78
6.3 Raumzeitliche Simulation . . . . .	81
6.4 Datenanalyse . . . . .	81
<b>7 Blinking States</b>	<b>87</b>
7.1 Einführung . . . . .	87
7.2 Theoretisches Modell . . . . .	87
7.3 Raumzeitliche Simulation und Analyse . . . . .	89
<b>8 EEG-Datenanalyse epileptischer Anfälle</b>	<b>93</b>
8.1 Epilepsie: medizinische Grundlagen . . . . .	93
8.2 Elektroenzephalogramme . . . . .	94
8.3 Das Gehirn: ein komplexes System . . . . .	96
8.4 Die EEG-Datensätze . . . . .	96
8.5 Räumliche Analyse: KL-Entwicklung . . . . .	99
8.6 Raumzeitliche Analyse . . . . .	104
<b>9 Zusammenfassung</b>	<b>115</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>117</b>

# Symbolverzeichnis

$a_k^{(0)}$ , $a_0^{(1)}$ , $a_{u,v,w}^{(2)}$ , $a_{u,v,u,v,w}^{(3)}$	Koeffizienten von Ordnungsparametergleichungen	$p(\mathbf{r}, t)$	hydrostatische Druck
$C$	Korrelationsmatrix	$P_r$	Prandtl-Zahl
$C^{(2)}$	Korrelationsmatrix	$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$	raumzeitlicher Zustandsvektor, projiziertes raumzeitliches Signal
$c_x, c_y$	Normierungskonstanten	$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, t)$	raumzeitliches Signal
$\otimes$	dyadiisches Produkt	$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$	raumzeitlicher Zustandsvektor
$\epsilon$	Kontrollparameter	$\mathbf{Q}_0$	stationärer Zustandsvektor
$\eta_j(t)$	Amplitude einer KL-Mode	$\text{Re}$	Realteil
$\eta$	Viskosität einer Flüssigkeit	$\rho(\mathbf{r}, t)$	Massendichte
$F(\mathbf{r}, t)$	Volumenkraftdichte	$R$	Rayleigh-Zahl
$\Gamma_i$	Korrelationstensoren	$\sigma$	Satz von Kontrollparametern
$\Gamma_{k,l,M,P,M^*,P^*}$	Modenkopplungskoeffizient	$\langle \dots, \dots \rangle$	Skalarprodukt
$\Gamma_\pm^+, \Gamma_0^-$	homokline Orbits	$\langle \dots \rangle$	zeitlicher Mittelwert
$\text{Im}$	Imaginärteil	$\bar{s}$	stabile räumliche Mode
$\mathbf{k}$	ebener Wellenvektor	$s$	projizierte stabile räumliche Mode
$k_{x,y,z}^{(2)}, k_{x,y,z,u,v}^{(3)}$	Koeffizienten von Gleichungen zentraler Mansigfaltigkeiten	$s^+$	Bioorthogonal-Mode zu $s$
$\kappa$	Wärmeleitungscoefficient	$T(\mathbf{r}, t)$	Temperaturverteilung
$L[\nabla, \sigma]$	linearer Operator	$\Theta(\mathbf{r}, t)$	Temperaturverteilung
$\lambda_j$	lineare Wachstumsrate, KL-Eigenwert	$U$	Potentialdifferenzen bei EEG-Messungen
$\lambda_t$	Lagrange parameter	$\dot{\mathbf{u}}$	instabile räumliche Mode
$\Lambda_i$	Korrelationstensoren	$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	Geschwindigkeitsfeld
$\lambda(\mathbf{k}, l)$	lineare Wachstumsrate	$\mathbf{u}$	projizierte instabile räumliche Mode
$M$	Matrix	$\mathbf{u}^+$	Bioorthogonal-Mode zu $\mathbf{u}$
$\mathbf{n}[\quad]$	nichtlineare Vektorfunktion	$V$	Potential
$\mathbf{N}[\quad]$	nichtlineare Vektorfunktion	$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$	Geschwindigkeitsfeld
$N^{(2)} : \mathbf{q} : \mathbf{q}$	quadratische Nichtlinearität	$\hat{\mathbf{v}}_j$	KL-Eigenfunktion
$N^{(3)} : \mathbf{q} : \mathbf{q} : \mathbf{q}$	kubische Nichtlinearität	$\mathbf{v}_j(\mathbf{r})$	Eigenfunktion
$\nabla$	Nabla-Operator	$\mathbf{v}^{(u)}$	instabile räumliche Mode
$\Omega_i$	Korrelationstensoren	$\mathbf{v}^{(s)}$	stabile räumliche Mode
		$\xi_j(t)$	Modenamplitude
		$\xi_u(t)$	Ordnungsparameter
		$\xi_v(t)$	versklavte Amplitude
		$\zeta$	komplexer Ordnungsparameter

# Kapitel 1

## Einleitung

Raumzeitliche Strukturbildung ist ein Phänomen, das in verschiedensten Facetten in der belebten und unbelebten Natur auftreten kann. Ursache für die entstehenden Strukturen ist oft ein Selbstorganisationsprozeß innerhalb des musterbildenden Systems. Die nichtlineare Wechselwirkung zwischen den einzelnen Komponenten des Systems führt bei Veränderung äußerer Einflüsse zu unterschiedlichen Strukturen auf der Beobachtungsebene des Systems.

Die Synergetik hat „Werkzeuge“ zur Verfügung gestellt, um diese Phänomene zu beschreiben und zu verstehen. Dabei ist es gelungen, die zugrundeliegenden Mechanismen der selbstorganisierten Strukturbildung durch ein mathematisches Konzept zu beschreiben. So lassen sich für komplexe Systeme in der Nähe von Instabilitäten meist wenige Ordnungsparameter angeben, die die gesamte Dynamik durch die sogenannten Ordnungsparametergleichungen beschreiben. Interessant dabei ist, daß für verschiedenste Systeme gleiche oder ähnliche Ordnungsparametergleichungen auftreten und dadurch eine einheitliche Beschreibung der Strukturbildung möglich ist. Ist die Wechselwirkung der Komponenten des Systems bekannt, so ermöglichen diese mathematischen Methoden die Bestimmung der Ordnungsparameter und der dazugehörigen Gleichungen. Die auftretenden raumzeitlichen Strukturen lassen sich somit herleiten.

In der Natur treten jedoch viele Strukturbildungsphänomene auf, die im Sinne des gerade beschriebenen Zugangs noch nicht verstanden sind. Dies liegt oft daran, daß die Wechselwirkung der Komponenten des untersuchten Systems unklar ist. Mit Hilfe einer Analyse der raumzeitlichen Daten dieser Phänomene erhofft man sich, ein besseres Verständnis für das System und seiner zugrundeliegenden Mechanismen zu gewinnen. Bisher gebräuchliche Methoden zur Datenanalyse konzentrierten sich entweder auf zeitliche oder auf räumliche Aspekte der Analyse. Wir stellen eine

Methode vor, die die Lücke zwischen diesen beiden Ansätzen schließt, da gleichzeitig räumliche und zeitliche Parameter an das Signal angepaßt werden. Dabei bedienen wir uns des Konzepts der Ordnungsparameter und versuchen, diese aus dem Datensatz zu identifizieren und die Ordnungsparametergleichungen zu bestimmen. Die Methode stellt somit ein Werkzeug dar, auftretende raumzeitliche Strukturen auf der Ebene der Ordnungsparameter zu beschreiben ohne die konkrete Wechselwirkung der Komponenten des komplexen Systems zu kennen.

Wir werden zunächst in Kapitel 2 einen Überblick über die Synergetik liefern und die mathematischen Methoden vorstellen. In Kapitel 3 stellen wir, nach einer Skizzierung bisheriger Methoden der Zeitreihenanalyse und der räumlichen Analyse, unsere raumzeitliche Analyse vor. Um das Vorgehen an einfachen Beispielen zu illustrieren und Ergebnisse der Untersuchung zu verifizieren, führen wir die raumzeitliche Analyse zunächst an simulierten Datensätzen einfacher Systeme vor: an Simulationen von „steady-state“-Bifurkationen (in Kapitel 4) und Bifurkationen mit dem Auftreten zweier Ordnungsparameter (Kapitel 5). Anwendungsnahere Beispiele, wie die Analyse aus der Hydrodynamik stammender raumzeitlicher Strukturen, werden in den Kapiteln 6 und 7 vorgestellt. Zum Abschluß der Arbeit (Kapitel 8) präsentieren wir Ergebnisse der Untersuchung raumzeitlich aufgelöst gemessener EEG-Datensätze epileptischer Anfälle und diskutieren die dabei auftretende charakteristische Dynamik. Die abschließende Zusammenfassung ist in Kapitel 9 zu finden.

## **Teil I**

### **Grundlagen**

## Kapitel 2

# Synergetik

### 2.1 Einführung

Synergetik – die Lehre vom Zusammenwirken – ist ein interdisziplinäres Wissenschaftsgebiet, das 1969 von Hermann Haken begründet wurde [43]. Innerhalb der Synergetik treten drei Forschungsschwerpunkte auf:

- Makroskopische Strukturbildung durch Selbstorganisation auf mikroskopischer Ebene
- Phänomenologische Synergetik auf makroskopischer Ebene
- Wahrnehmungsprozesse und Mustererkennung

Diese werden im folgenden kurz beschrieben.

Die vorliegende Arbeit ist dem Bereich der phänomenologischen Synergetik zuzuordnen, aufbauend auf der Theorie der Strukturbildungsphänomene.

#### 2.1.1 Strukturbildung

In der Natur treten in verschiedensten Systemen unabhängig von den mikroskopischen Komponenten des Systems Strukturbildungsprozesse auf. Dabei handelt es sich meist um offene Vielkomponenten-Systeme, d.h. Systeme, die aus vielen Untersystemen bestehen und die einen Durchfluß von Energie oder Materie durch das System zeigen. Erreichen diese äußeren Einflüsse einen kritischen Wert, so kann bei

dem System spontane Selbstorganisation auftreten und auf der makroskopischen Beobachtungsebene können räumliche, raumzeitliche oder strukturelle Muster entstehen. Die Synergetik ermöglicht es, diese Strukturbildungsprozesse zu verstehen und einheitlich darzustellen [37, 39]. Wesentlich dabei ist, daß die Systeme offen sind, im Gegensatz zur Thermodynamik, in der abgeschlossene Systeme behandelt werden, und daß die Wechselwirkung zwischen den Komponenten des Systems nichtlinear ist. Jedes Untersystem für sich zeigt keine Musterbildung, erst das Zusammenwirken der einzelnen Komponenten ermöglicht dies.

Die mathematische Behandlung (Abschnitt 2.2) dieser Systeme auf mikroskopischer Ebene zeigt, daß meist wenige Freiheitsgrade, die sogenannten Ordnungsparameter, genügen, um die auftretenden makroskopischen Strukturen zu erhalten. Diese Reduktion der Freiheitsgrade wird durch das „Versklavungsprinzip der Synergetik“ beschrieben. Interessant ist, daß die zeitliche Entwicklung dieser Ordnungsparameter für verschiedenste Systeme das gleiche Verhalten zeigt und daher typische Gleichungen („Normalformen“) für die Ordnungsparameter („Ordnungsparametergleichungen“) auftreten. Diese charakteristische Eigenschaft ist Anknüpfungspunkt für die phänomenologische Synergetik.

### 2.1.2 Phänomenologische Synergetik

Hier ist der Ausgangspunkt die makroskopische Ebene, ohne die zugrundeliegenden mikroskopischen Gleichungen zu kennen. Wie gerade erläutert, kann makroskopische Strukturbildung für verschiedenste Systeme durch charakteristische Ordnungsparametergleichungen beschrieben werden. Es liegt daher nahe, zu versuchen diese Ordnungsparametergleichungen direkt aus der makroskopischen Struktur zu bestimmen und die zugehörigen Ordnungsparameter und versklavte Moden zu identifizieren. Dies ist Ziel der phänomenologischen Synergetik [40], und man erhofft sich damit

- ein besseres Verständnis für die auftretenden Strukturen,
- eine Modellierung des makroskopischen Verhaltens durch wenige Freiheitsgrade und
- eventuell Rückschlüsse auf die mikroskopische Ebene.

Im Rahmen dieser Zielsetzung behandelten L. Borland und H. Haken [14, 15] stochastische Systeme, während sich unsere Arbeiten [68, 70] mehr auf deterministische Systeme konzentrierten. Die vorliegende Arbeit stellt unser Vorgehen zur Analyse makroskopischer Strukturen in Kapitel 3 vor und demonstriert das Verfahren anhand einiger Beispiele im zweiten Teil der Arbeit.

### 2.1. EINFÜHRUNG

#### 2.1.3 Anwendungsgebiete

Stellvertretend für eine Vielzahl von Anwendungsgebieten der beiden beschriebenen synergetischen Zugänge seien hier folgende Beispiele erwähnt:

- Der Laser ist das Paradebeispiel der Synergetik, an dem ursprünglich die allgemeinen Konzepte entwickelt wurden [43]. Ein Lasersystem ist ein typisches offenes Vielkomponenten-System: Es besteht aus sehr vielen Untersystemen, den laseraktiven Atomen im Kristall oder im Gas, die miteinander über das elektromagnetische Feld nichtlinear wechselwirken, und es wird als offenes System betrieben, da es von außen gepumpt wird und durch halbdurchlässige Spiegel elektromagnetische kohärente Strahlung, das Laserlicht, abgibt. Das Konzept der Versklavung und die Technik der Elimination schnell relaxierender Variablen wurden hier zum ersten mal erfolgreich angewandt [38] und führten zu einer Vielzahl weiterer Ergebnisse im Bereich der Laserphysik (z. B. [27, 56, 57, 72]).
- Ein weiterer Schwerpunkt synergetischer Systeme in der Physik ist die Hydrodynamik [10, 23, 55]. So zeigen z.B. das Bénard-Experiment [8] oder das Taylor-Couette-Experiment [64] auf ihrem Weg vom strukturlosen Zustand im thermodynamischen Gleichgewicht bis hin zur vollentwickelten Turbulenz ein breites Spektrum faszinierender Strömungsformen. In den Kapiteln 6 und 7 werden wir anhand zweier hydrodynamischer Instabilitäten sowohl die Strukturbildung als auch deren Analyse vorstellen.
- In der Chemie treten Strukturbildungsprozesse z.B. bei Oberflächensreaktionen und Reaktions-Diffusions-Systemen, wie z.B. der Belousov-Zhabotinsky Reaktion [45], auf.
- Im Bereich der Medizin kommt es zu interessanten Strukturbildungsscheinungen bei menschlichen Gehirnwellen, die in Form von Elektroenzephalogrammen an der Kopfhaut gemessen werden können [7]. In Kapitel 8 werden wir auf Ergebnisse unserer Analyse von EEG-Datensätzen epileptischer Anfälle [26] ausführlicher eingehen.

#### 2.1.4 Wahrnehmungsprozesse und Mustererkennung

Der dritte Forschungsschwerpunkt beruht auf dem Konzept des synergetischen Computers zur Beschreibung und Realisierung von Wahrnehmungsprozessen, wie z.B.

von Mustererkennungsproblemen [41]. Bei der Mustererkennung liegt i.a. das Problem vor, aus einem verrauschten oder unvollständigen Muster dasjenige Muster zu rekonstruieren, das dem Ausgangsmuster am ähnlichsten ist. Dies kann in Analogie zur Musterbildung gesehen werden, und daher kann der assoziative Prozeß der Mustererkennung mithilfe der Prinzipien der Synergetik behandelt werden [29]: Ausgehend von einem Startwert (dem verrauschten oder unvollständigen Muster) bildet sich das gesuchte zugehörige Prototyp-Muster heraus. Die Prototyp-Muster sind entweder bekannt oder können über einen zusätzlichen dynamischen Prozeß gelernt werden [36]. Weiterentwicklungen dieser Konzepte liefern interessante Ergebnisse zur Modellierung anderer Wahrnehmungsprozesse, wie z.B. des Auftretens von Multistabilität [19] oder räumlicher Wahrnehmung mithilfe der Stereoskopie [60].

## 2.2 Mathematische Grundlagen

Hier werden kurz die mathematischen Konzepte der Synergetik [37, 39] vorgestellt.

### 2.2.1 Grundgleichungen

Ausgangspunkt sind die mikroskopischen Evolutionsgleichungen des Systems, gegeben durch eine partielle nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung für den Zustandsvektor  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ , der den Zustand des Systems charakterisiert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}[\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t), \nabla, \sigma] + \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

mit zu berücksichtigenden Rand- und Anfangswertbedingungen.  $\mathbf{N}$  ist ein nichtlineares Funktional, das vom Zustandsvektor  $\mathbf{Q}_0$ , von räumlichen Ableitungen ( $\nabla$ ) und von einem Satz von Kontrollparametern  $\sigma$  abhängt. Die räumlichen Ableitungen sind für Transport- und Diffusionsprozesse verantwortlich. Die Kontrollparameter beschreiben die äußeren Einflüsse auf das System. Der Term  $\mathbf{F}(t)$  beschreibt stochastische Fluktuationen, die im folgenden vernachlässigt werden, da wir uns auf Strukturbildungsphänomene deterministischer Systeme beschränken wollen. Wir betrachten nun die Instabilität eines Zustandes  $\mathbf{Q}_0$ . Dabei gehen wir von einem stationären Zustand  $\mathbf{Q}_0$  aus. Für eine Erweiterung auf Instabilitäten zeitlich periodischer und quasiperiodischer Zustände verweisen wir auf [39].

### 2.2.2 Entwicklung in Eigenfunktionen des linearisierten Problems

Mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse wird das Verhalten für kleine Auslenkungen  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  aus dem stationären Zustand  $\mathbf{Q}_0$ ,

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{Q}_0 \quad , \quad (2.2)$$

untersucht: Einsetzen in die Evolutionsgl. (2.1) liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{L}[\nabla, \sigma] \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{n}[\mathbf{q}(\mathbf{r}, t), \nabla, \sigma] \quad , \quad (2.3)$$

wobei  $\mathbf{L}$  einen nichtlinearen Operator und  $\mathbf{n}$  ein nichtlineares Funktional darstellt. Der nichtlineare Anteil  $\mathbf{n}[\mathbf{q}(\mathbf{r}, t), \nabla, \sigma]$  kann in Polynome vom  $\mathbf{q}$  geordnet werden:

$$\mathbf{n}[\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)] = N^{(1)} : \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) : \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + N^{(2)} : \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) : \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) : \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad . \quad (2.4)$$

Nach Vernachlässigung der nichtlinearen Terme führt der Ansatz

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_j c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) \quad , \quad (2.5)$$

zu dem linearen Eigenwertproblem,

$$\mathbf{L}[\nabla, \sigma] \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) = \lambda_j[\sigma] \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) \quad . \quad (2.6)$$

Die räumlichen Moden  $\mathbf{v}_j(\mathbf{r})$  bilden einen vollständigen Satz von Funktionen, die ein Biorthogonalsystem besitzen, d.h. es existieren Moden  $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{r})$ , die die Relation

$$\langle \mathbf{v}_i^*(\mathbf{r}), \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) \rangle = \delta_{ij} \quad (2.7)$$

erfüllen. Dabei soll der Ausdruck  $\langle \mathbf{a}(\mathbf{r}), \mathbf{b}(\mathbf{r}) \rangle$  ein Skalarprodukt,

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{r}), \mathbf{b}(\mathbf{r}) \rangle = \int dV \mathbf{a}(\mathbf{r}) \mathbf{b}(\mathbf{r}) \quad , \quad (2.8)$$

darstellen. Der Zustandsvektor  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  kann nun in die Eigenmoden des linearisierten Problems entwickelt werden:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \xi_j(t) \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) \quad , \quad (2.9)$$

wobei sich die Amplituden  $\xi_j(t)$  aus der Projektion von  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  auf  $\mathbf{v}_j^*(\mathbf{r})$  ergeben. Für die Amplituden  $\xi_j(t)$  erhalten wir aus Gl. (2.3) folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j(t) &= \langle \mathbf{v}_j^*(\mathbf{r}), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ \Rightarrow \dot{\xi}_j &= \lambda_j \xi_j + \sum_{k,l} n_{j,k,l}^{(2)} \xi_k \xi_l + \sum_{k,l,m} n_{j,k,l,m}^{(3)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots \quad . \quad (2.10) \end{aligned}$$

Die dabei auftretenden Koeffizienten  $a_{j,k,l}^{(2)}, a_{j,k,l,m}^{(3)}$  ergeben sich mit Hilfe des Skalarprodukts aus dem nichtlinearen Anteil  $n$  der Gl. (2.4):

$$\begin{aligned} a_{j,k,l}^{(2)} &= \langle v_j^+(r), N^{(2)} : v_k(r) : v_l(r) \rangle \\ a_{j,k,l,m}^{(3)} &= \langle v_j^+(r), N^{(3)} : v_k(r) : v_l(r) : v_m(r) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Entwicklung (2.9) zusammen mit den Bewegungsgleichungen (2.10) ist äquivalent zur Evolutionsgleichung (2.1).

### 2.2.3 Versklavungsprinzip

Eine Instabilität zeichnet sich dadurch aus, daß ein stabiler Zustand  $Q_0$  an einem kritischen Punkt  $\sigma_c$  eines Kontrollparameters  $\sigma$  instabil wird, d.h. der Realteil eines oder mehrerer Eigenwerte  $\lambda_i$  ist nahe Null. Die zugehörigen kritischen Modenamplituden  $\xi_u(t)$  sind langsam veränderlich und stellen die Ordnungsparameter  $\xi_s(t)$  des Systems dar. Die restlichen Amplituden  $\xi_v(t)$  der stabilen Moden  $v^{(s)}$  sind schnell veränderlich. Die Bewegungsgleichungen (2.10) lassen sich also in zwei verschiedene Klassen einteilen:

$$Re\lambda_s(\sigma) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\xi}_s(t), v^{(u)} \quad \text{mit} \quad \dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + N^{(u)}(\xi_u, \xi_s) \quad (2.12)$$

$$Re\lambda_s(\sigma) < 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\xi}_s(t), v^{(s)} \quad \text{mit} \quad \dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + N^{(s)}(\xi_u, \xi_s) \quad (2.13)$$

Die schnell veränderlichen Amplituden  $\xi_v(t)$  der stabilen Moden  $v^{(s)}$  relaxieren instantan auf die Bewegung der kritischen Moden  $v^{(u)}$ :

$$\xi_v(t) = \xi_s[\xi_s(t)] \quad . \quad (2.14)$$

Dies ist die zentrale Aussage des Versklavungsprinzips der Synergetik und liefert u.U. eine enorme Reduktion der Freiheitsgrade. Die Berechnung der zentralen Mannigfaltigkeit (2.14) erfolgt näherungsweise über ein Iterationsverfahren: Formal läßt sie sich aus Gl. (2.13) durch Variation der Konstanten berechnen. Vernachlässigt man das Einschwingverhalten (d.h.  $t_0 \rightarrow -\infty$ ), so erhält man

$$\xi_v(t) = \int_{-\infty}^t d\tau e^{\lambda_s(t-\tau)} N_s(\xi_u(\tau), \xi_s(\tau)) \quad . \quad (2.15)$$

Die negative Wachstumsrate  $\lambda_s$  bewirkt, daß der Integrand nur für  $\tau = t$  nennenswerte Beiträge für  $\xi_v(t)$  liefert. Wird die nichtlineare Funktion  $N^{(s)}$  in Polynome der Amplituden entwickelt, so ist sie zunächst in erster Näherung durch Quadrate der kritischen Amplituden  $\xi_u(t)$  gegeben:

$$N_s(\xi_u, \xi_s) = \sum_{u,u'} \gamma_{s,u,u'} \xi_u \xi_{u'} + O(\xi_u \xi_s) \quad . \quad (2.16)$$

### 2.2. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Wird nun noch der oszillierende Anteil der kritischen Amplituden abgespalten,

$$\xi_u(t) = \tilde{\xi}_u(t) \exp(i \operatorname{Im} \lambda_u t) \quad , \quad (2.17)$$

so ergibt sich

$$N_s(\xi_u, \xi_s) \simeq \sum_{u,u'} \gamma_{s,u,u'} \tilde{\xi}_u \tilde{\xi}_{u'} \exp[i \operatorname{Im} (\lambda_u + \lambda_{u'}) t] \quad . \quad (2.18)$$

Die langsam veränderlichen Größen des Integranden (Gl. (2.15)) können nun vor das Integral gezogen werden, und wir erhalten in erster Näherung

$$\begin{aligned} \xi_s(t) &= \sum_{u,u'} \gamma_{s,u,u'} \tilde{\xi}_u(t) \tilde{\xi}_{u'}(t) \int_{-\infty}^t d\tau \exp[\lambda_s(t-\tau) + i \operatorname{Im} (\lambda_u + \lambda_{u'}) \tau] \\ \Rightarrow \quad \xi_s(t) &= \sum_{u,u'} k_{s,u,u'} \xi_u(t) \xi_{u'}(t) \quad \text{mit} \quad k_{s,u,u'} = \frac{\gamma_{s,u,u'}}{i \operatorname{Im} [\lambda_u + \lambda_{u'}] - \lambda_s} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Iterativ können nun Korrekturen der Terme höherer Ordnung in Gl. (2.16) berücksichtigt werden.

Damit sind die stabilen Moden eliminiert und Einsetzen der Gl. (2.14) in Gl. (2.12) ergibt die Ordnungsparametergleichungen:

$$\dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + \sum_{u',u''} a_{u',u''}^{(2)} \xi_{u'} \xi_{u''} + \sum_{u',u'',u'''} a_{u',u'',u'''}^{(3)} \xi_{u'} \xi_{u''} \xi_{u'''} + \dots \quad , \quad (2.20)$$

wobei sich die Koeffizienten  $a^{(i)}$  aus den Koeffizienten  $k^{(i)}$  und  $N^{(u)}$  ergeben.

Der Zustandsvektor  $Q(t)$  läßt sich also als Linearkombination von stabilen ( $v^{(s)}$ ) und instabilen Moden ( $v^{(u)}$ ) schreiben,

$$Q(t) = Q_0 + \sum_u \xi_u(t) v^{(u)} + \sum_s \xi_s(t) v^{(s)} \quad , \quad (2.21)$$

wobei die Dynamik des Systems allein durch die Ordnungsparametergleichung (2.20) gegeben ist. Die Amplituden der stabilen Moden bewegen sich auf den zentralen Mannigfaltigkeiten (2.14). Da meist wenige Ordnungsparameter auftreten ist damit eine große Reduktion der Freiheitsgrade erreicht, und auftretende Instabilitäten bei Selbstorganisationsprozessen können einfach klassifiziert werden. Im folgenden Abschnitt werden die einfachsten auftretenden Instabilitäten erläutert.

Bei den bisherigen Ausführungen beschränkten wir uns auf ein diskretes Eigenwertspektrum der Eigenwertgleichung (2.6). Dies tritt dann auf, wenn die räumlichen Moden durch Randbedingungen selektiert werden. Für diesen Fall erhalten wir abzählbar viele ortsunabhängige Ordnungsparameter. Bei ausgedehnten Systemen, wie den „Large Aspect Ratio“-Systemen der Hydrodynamik, treten jedoch kontinuierliche Eigenwertspektren auf, die zu ortsabhängigen Ordnungsparametern führen. Ausführliche Rechnungen dazu findet man in [39].

### 2.2.4 Ordnungsparametergleichungen und Normalformen

Die Normalform eines dynamischen Systems stellt einen möglichst einfachen Stellvertreter für das System dar. Seine Berechnung erfolgt über eine geeignete nicht-lineare Koordinatentransformation des Zustandsvektors  $q(t)$ . Diese Normalformen ermöglichen es, typische Ordnungsparametergleichungen zu klassifizieren. Ein weiterer wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist der Begriff der „Kodimension“ einer Instabilität. Vereinfachend dargestellt gibt er die Anzahl der Kontrollparameter an, die gleichzeitig den kritischen Wert annehmen, bei dem der Zustand  $Q_0$  instabil wird. Rechnungen zur Theorie der Normalformen und die exakte mathematische Definition der Kodimension findet man z.B. in [2, 4, 35, 71]. Wir möchten hier nur einige typische Ordnungsparametergleichungen angeben, die Normalformen der Kodimension-1 Instabilitäten darstellen.

#### Steady-state Bifurkationen

Im Falle eines reellen Eigenwertes ( $\lambda_n = \epsilon \approx 0$ ) tritt ein reeller Ordnungsparameter  $\xi_n$  auf. Die zugehörigen Normalformen dieser Instabilitäten sind die sogenannten „steady-state“ Bifurkationen. Um die jeweilige Instabilität anschaulicher darzustellen, kann die Ordnungsparametergleichung als überdämpfte Bewegung in einem Potential aufgefasst werden:

$$\dot{\xi}_n = -\frac{\partial V(\xi_n)}{\partial t} \quad (2.22)$$

Es treten drei verschiedene Normalformen auf:

- „Transkritische“ Bifurkation:

$$\dot{\xi}_n = \epsilon \xi_n \pm \xi_n^3 \quad \text{bzw.} \quad V(\xi_n) = -\frac{1}{2}\epsilon \xi_n^2 \mp \frac{1}{3}\xi_n^3 \quad (2.23)$$

- „Pitchfork“-Bifurkation:

$$\dot{\xi}_n = \epsilon \xi_n \pm \xi_n^3 \quad \text{bzw.} \quad V(\xi_n) = -\frac{1}{2}\epsilon \xi_n^2 \mp \frac{1}{4}\xi_n^4 \quad (2.24)$$

- „Sattel-Knoten“-Bifurkation:

$$\dot{\xi}_n = \epsilon \pm \xi_n^2 \quad \text{bzw.} \quad V(\xi_n) = -\epsilon \mp \frac{1}{3}\xi_n^3 \quad (2.25)$$

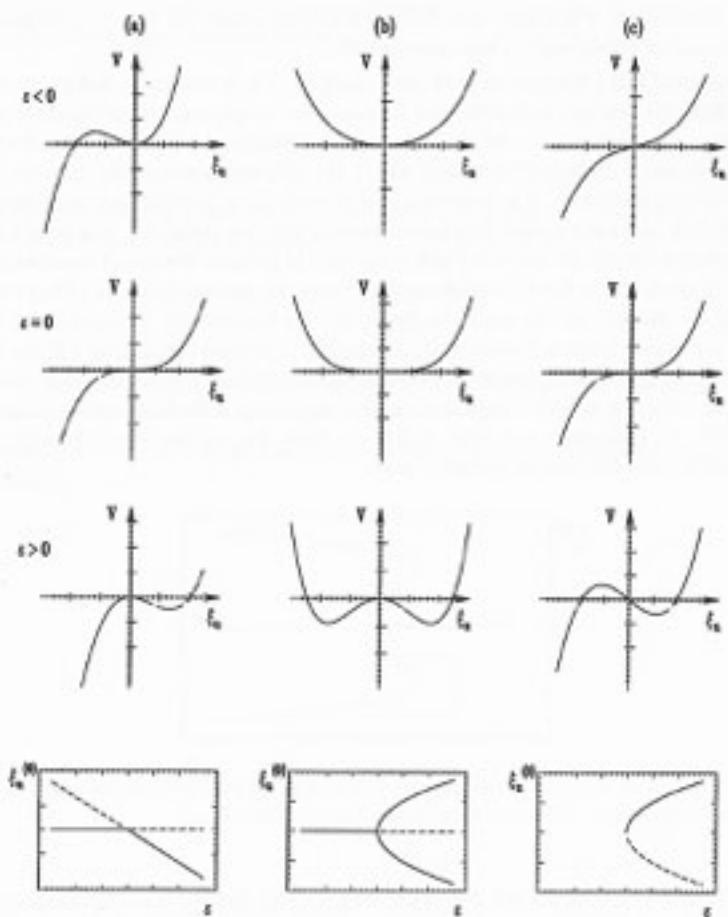


Abbildung 2.1: Potentiale  $V(\xi_n)$ , die die jeweilige Normalform repräsentieren, unterhalb des kritischen Wertes ( $\epsilon < 0$ ), beim kritischen Wert ( $\epsilon = 0$ ) und oberhalb ( $\epsilon > 0$ ), und die zugehörigen Bifurkations-Diagramme der stationären Punkte  $\xi_n^{(0)}$  (durchgehende Linie: stabiler Fixpunkt, gestrichelte Linie: instabiler Fixpunkt). a) transkritische Bifurkation, b) superkritische Pitchfork-Bifurkation, c) superkritische Sattel-Knoten-Bifurkation

Die zugehörigen Potentiale und Bifurkations-Diagramme für die superkritischen Fälle sind in Abbildung 2.1 zusammengefaßt.

Die transkritische Bifurkation (Abb. 2.1a) zeichnet sich dadurch aus, daß unter- und oberhalb der Schwelle zwei stationäre Lösungen mit entgegengesetzter Stabilität existieren. Am kritischen Punkt wechseln beide Fixpunkte ihre Stabilität. Bei der superkritischen Pitchfork-Bifurkation (Abb. 2.1b) existiert unterhalb der Schwelle nur ein stabiler Fixpunkt. Am kritischen Punkt wird dieser instabil und es entstehen zusätzlich zwei neue stabile Fixpunkte symmetrisch zum instabilen. Die superkritische Sattel-Knoten-Bifurkation (Abb. 2.1c) stellt in gewisser Weise eine Besonderheit dar: Unterhalb der Schwelle existiert kein Fixpunkt, erst am kritischen Punkt entsteht ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt. Im Rahmen der Synergetik, bei der wir von einem stabilen Fixpunkt  $Q_0$  ausgehen, tritt diese Bifurkation z.B. im Zusammenhang mit einer subkritischen Pitchfork-Bifurkation auf, bei der auch Terme fünfter Ordnung berücksichtigt werden. Das zugehörige Bifurkations-Diagramm ist in Abb. 2.2 dargestellt und zeigt, daß in der Nähe des stabilen Fixpunktes  $Q_0$  die Sattel-Knoten-Bifurkation auftreten kann.

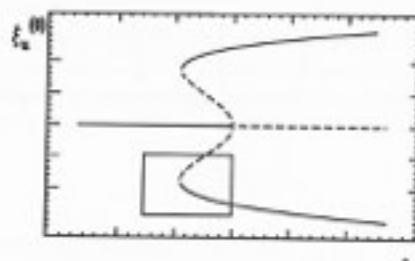


Abbildung 2.2: Bifurkations-Diagramm der subkritischen Pitchfork-Bifurkation mit dem gleichzeitigen Auftreten einer Sattel-Knoten-Bifurkation.

In Kapitel 4 werden wir auf die gerade vorgestellten „steady-state“ Normalformen im Zusammenhang mit der raumzeitlichen Datenanalyse zurückkommen.

#### Hopf Bifurkation

Im Falle eines konjugiert-komplexen Paares eines instabilen Eigenwertes ( $\lambda_u \simeq \pm i\omega$ ) treten zwei reelle Ordnungsparameter  $\xi_1, \xi_2$  mit der folgenden Normalform auf:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= c\xi_1 - \omega\xi_2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)(a\xi_1 - b\xi_2) \\ \dot{\xi}_2 &= \omega\xi_1 + c\xi_2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)(b\xi_1 + a\xi_2)\end{aligned}\quad (2.26)$$

Führt man einen komplexen Ordnungsparameter  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  ein, so erhält man als komplexe Ordnungsparametergleichung:

$$\dot{\zeta} = \alpha\zeta + \beta|\zeta|^2\zeta \quad , \quad (2.27)$$

mit

$$\alpha = c + i\omega \quad , \quad \beta = a + ib \quad . \quad (2.28)$$

Spaltet man den komplexen Ordnungsparameter auf in Betrag  $r$  und Phase  $\phi$ ,  $\zeta = re^{i\phi}$ , so erhält man als Normalform:

$$\dot{r} = cr + ar^2 \quad (2.29)$$

$$\dot{\phi} = \omega + br^2 \quad (2.30)$$

Der Betrag  $r$  durchläuft also den positiven Ast einer Pitchfork-Bifurkation und die Frequenz  $\omega$  der Phase wird durch den Betrag verändert.

In Kapitel 5 wird die Hopf-Bifurkation als ein Beispiel unserer Datenanalyse wieder auftreten.

# Kapitel 3

## Raumzeitliche Datenanalyse

### 3.1 Überblick

Datenanalyse ist in allen wissenschaftlichen Bereichen, die quantifizierbare Phänomene untersuchen, ein wichtiges Hilfsmittel, um ein besseres Verständnis für das System, das den untersuchten Datensatz generiert, zu gewinnen. Einerseits kann es dazu dienen, auftretende Strukturen zu klassifizieren, und damit eine Ordnung in verschiedenen Datensätzen gleicher oder ähnlicher Systeme zu erkennen. Andererseits ist es von Bedeutung für Systeme, für die die Wechselwirkung seiner Komponenten untereinander noch unklar ist und die mit Hilfe der Datenanalyse besser verstanden werden soll.

In diesem Abschnitt werden zunächst kurz bekannte Methoden zur Datenanalyse vorgestellt, die entweder die zeitliche oder die räumliche Abhängigkeit des Signals bei der Untersuchung betonen. Das von uns entwickelte Verfahren, das danach ausführlich dargelegt wird, soll die Lücke zwischen diesen beiden Methoden schließen, indem es gleichzeitig räumliche und zeitliche Aspekte des Signals berücksichtigt.

#### 3.1.1 Zeitreihenanalyse

Bei der Untersuchung von Zeitserien gibt es einerseits statistische Methoden, um chaotische Signale zu charakterisieren, andererseits Methoden, die eine möglichst gute Rekonstruktion des Signals mit Hilfe von Differentialgleichungen zum Ziel haben.

### 3.1. ÜBERBLICK

#### Charakterisierung

Die am häufigsten verwendeten Größen zur Charakterisierung eines Signals sind Ljapunov-Exponenten und fraktale Dimensionen. Eine Einführung dieser Größen ist in den gängigen Lehrbüchern zur Chaos-Theorie (z.B. [61]) und in Übersichtsartikeln (z.B. [1]) zu finden.

Die Ljapunov-Exponenten  $\lambda$  sind ein Maß für die Abhängigkeit der Zeitserien von Anfangsbedingungen. Werden zwei benachbarte Trajektorien  $v(t)$  und  $w(t)$  betrachtet, d.h.  $w(t_0) = \epsilon + v(t_0)$ , so sind die Ljapunov-Exponenten definiert als,

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|w(t) - v(t)|}{\epsilon} . \quad (3.1)$$

Für verschiedene Richtungen von  $\epsilon$  können verschiedene Ljapunov-Exponenten existieren. Anhand der Vorzeichen der Ljapunov-Exponenten können die Zeitserien charakterisiert werden, z.B.:

1. Stabiler Fixpunkt: alle Exponenten sind negativ.
2. Stabiler Grenzyklus: ein Exponent ist Null, alle anderen negativ.
3. Stabiler Torus: zwei bzw. mehrere Exponenten sind Null, alle anderen negativ.
4. Chaotischer Attraktor: ein Exponent ist positiv, einer ist Null, alle anderen negativ. „Chaotisch“, weil für bestimmte benachbarte Anfangsbedingungen die Trajektorien exponentiell auseinander laufen ( $\lambda > 0$ ), d.h. eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen besteht, und „Attraktor“, weil die negativen Exponenten dafür sorgen, daß die Trajektorie in einen Bereich des Phasenraums gezogen wird und diesen nicht mehr verläßt.

Ein Maß für die Geometrie dieser chaotischen Attraktoren ist z.B. durch die Hausdorff-Dimension  $D_h$  gegeben,

$$D_h = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} . \quad (3.2)$$

Dabei ist  $N(\epsilon)$  die Anzahl der „Würfel“ der Kantenlänge  $\epsilon$ , die benötigt werden, um die untersuchte Trajektorie  $q(t)$  zu überdecken („box-counting“ Methode). Die Dimensionalität dieser Würfel entspricht dabei der Anzahl der Vektorkomponenten  $q(t)$ . Eine verallgemeinerte fraktale Dimension  $D_f$  dient bei der sogenannten multifraktalen Analyse zur Bestimmung von Inhomogenitäten innerhalb des Attraktors und ist durch die Definition,

$$D_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f-1} \frac{\ln (\sum_{i=0}^{N(\epsilon)} p_i^f)}{\ln \epsilon} , \quad (3.3)$$

gegeben. Dabei ist  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit einen Punkt des Attraktors im „Würfel“  $i$  zu finden. Für  $f = 0$  ergibt sich die bereits erwähnte Hausdorff-Dimension  $D_0$ , für  $f = 1$  die sogenannte Informations-Dimension  $D_1$ ,

$$D_1 = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (3.4)$$

mit der Information  $S(\epsilon) = -\sum_{i=0}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i$  und für  $f = 2$  ergibt sich die sogenannte Korrelations-Dimension.

Zur numerischen Berechnung dieser Größen für nur eine Zeitserie ist ein Theorem von Takens [66] sehr hilfreich: Ist  $\xi(t)$  die Zeitserie einer Variable eines  $d$ -dimensionalen Differentialgleichungssystems, so liefert der Vektor  $x(t)$ ,

$$x(t) = (\xi(t = t_0), \xi(t = t_0 + \tau), \dots, \xi(t = t_0 + (2d+1)\tau)) \quad , \quad (3.5)$$

die gleichen geometrischen Eigenschaften wie das ursprüngliche Differentialgleichungssystem. Darauf aufbauend haben Grassberger und Procaccia ein Verfahren [34] angegeben, um die Korrelations-Dimension  $D_2$  aus der Zeitserie einer Variable anzugeben. Zur Berechnung von Ljapunov-Exponenten aus der Zeitserie verweisen wir auf [73].

Bei der praktische Anwendung dieser Methoden zur Charakterisierung von Zeitserien treten verschiedene Probleme auf. Einerseits ist oft die Anzahl der Meßpunkte nicht ausreichend, um eine genaue Berechnung der Exponenten und Dimensionen zu gewährleisten ([20, 53]). Andererseits ist für manche Anwendungen die Aussagekraft dieser Größen gering, da sie nur eine Charakterisierung über statistische Größen ermöglicht.

### Rekonstruktion

Sind nicht nur statistische Größen zur Charakterisierung einer Zeitserie  $x(t)$  gefragt, sondern auch der Mechanismus, der dem Signal zugrunde liegt, so ist die Rekonstruktion der Zeitserie durch eine Differentialgleichung,

$$\dot{y} = f(y) \quad , \quad (3.6)$$

Ziel der Untersuchung. Gesucht ist eine Funktion  $f(y)$ , so daß eine Lösung  $y(t)$  der Dgl. (3.6) möglichst gut dem Signal  $x(t)$  entspricht. Um die Funktion  $f$  zu bestimmen, kann die Methode der Minimierung der Summe der quadratischen Fehlerabweichungen benutzt werden, d.h. bei gegebenem  $x(t)$  (und daraus  $\dot{x}(t)$ ) soll die Funktion  $f$  so bestimmt werden, daß  $W$ ,

$$W = \langle (\dot{x}(t) - f(x(t)))^2 \rangle \quad , \quad (3.7)$$

### 3.1. ÜBERBLICK

minimal wird. Dabei stellen die eckigen Klammern  $\langle \dots \rangle$  eine Zeitmittelung dar:

$$\langle F(t) \rangle := \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad . \quad (3.8)$$

Wird für  $f(x)$  ein Ansatz mit Polynomen  $\phi_i(x)$ ,

$$f(x) = \sum_i a_i \phi_i(x) \quad , \quad (3.9)$$

gewählt, so sind die optimalen Koeffizienten  $a_i$  aus der Bedingung

$$\frac{\partial W}{\partial a_j} = 0 \quad (3.10)$$

gegeben als

$$a_i = \langle \dot{x} \phi_i(x) \rangle D_{ji}^{-1} \quad \text{mit} \quad D_{ij} = \langle \phi_i(x) \phi_j(x) \rangle \quad . \quad (3.11)$$

War der Ansatz  $f(x) = \sum_i a_i \phi_i(x)$  gut gewählt, liefert die Integration der Gl. (3.6) mit den Koeffizienten aus Gl. (3.11) ein Signal  $y(t)$ , das der Zeitserie  $x(t)$  gut entspricht. Das gleiche Verfahren läßt sich auch auf Differentialgleichungssysteme übertragen, indem zusätzliche Koeffizienten zur Berücksichtigung der Kopplung zwischen den Differentialgleichungen eingeführt werden. Bei chaotischen Zeitserien ist jedoch auf die richtige Wahl der Anfangsbedingung zu achten, d.h. gegebenenfalls sollte anstelle der Anfangsbedingung  $x(t_0)$  diejenige gewählt werden, die den Ausdruck  $\langle (y(t) - z(t))^2 \rangle$  minimiert. In diese Richtung zielt auch ein Algorithmus von Baake et al. [5]. Dort wird die Zeitserie in kleine Intervalle unterteilt und für alle Intervalle die Funktion  $f$  optimiert unter der Nebenbedingung, daß die Intervalle stetig und differenzierbar ineinander übergehen.

Um die Inversion der Matrix  $D$  in Gl. (3.11) zu vermeiden, können orthonormierte Funktionen  $\hat{\phi}_i(x)$  ( $\langle \hat{\phi}_i(x) \hat{\phi}_j(x) \rangle = \delta_{ij}$ ) für den Ansatz Gl. (3.9) gewählt werden [32]. Die Funktionen  $\hat{\phi}_i(x)$  können aus den Funktionen  $\phi_i(x)$  über ein Kramer-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren gewonnen werden. Die Koeffizienten  $a_i$  sind dann einfach gegeben durch  $a_i = \langle \dot{x} \hat{\phi}_i(x) \rangle$ .

Bei höherdimensionalen nichtlinearen Differentialgleichungssystemen sind die vorgestellten Rekonstruktionsverfahren u.U. sehr schwierig zu handhaben, da die Anzahl der anzupassenden Koeffizienten nichtlinear mit der Dimension des Systems zunimmt.

#### 3.1.2 Räumliche Analyse

Zur Analyse hochdimensionaler Zeitserien  $\tilde{q}(t)$ , bzw. raumzeitlichen Signale  $\tilde{q}(x, t)$  gibt es ein Verfahren, das auf Karhunen und Loève [48] zurückgeht. Es ist auch

unter den Namen „principal component analysis (PCA)“, „proper orthogonal decomposition (POD)“, „singular value decomposition (SVD)“ und „empirical orthogonal function (EOF)“-Zerlegung gebräuchlich. Dieses Verfahren kommt in den unterschiedlichsten wissenschaftlichen Bereichen zur Anwendung, z.B. in der Hydrodynamik zur Beschreibung turbulenter Strömungen [13], in der Meteorologie zur Untersuchung atmosphärischer Strömungen [59], und in der Biologie bei der Analyse raumzeitlicher EEG- und MEG-Datensätze [30, 25]. Diese Karhunen-Loève (KL) Entwicklung soll hier kurz vorgestellt werden.

Ausgangspunkt ist ein mehrdimensionales Signal  $\hat{q}(t)$ . Liegt ein raumzeitliches Signal  $\hat{q}(\mathbf{x}, t)$  vor, so kann dieses zeitabhängige Skalarfeld auch als ein zeitabhängiger Vektor  $\hat{q}(t)$  geschrieben werden, indem eine räumliche Diskretisierung vorgenommen wird und für jeden diskreten Raumpunkt  $\mathbf{x}_i$  eine Vektorkomponente  $\hat{q}_i(t)$  definiert wird:

$$\hat{q}(\mathbf{x}_i, t) \rightarrow \hat{q}_i(t) \quad , \quad (3.12)$$

Ziel der KL-Entwicklung ist es, das raumzeitliche Signal  $\hat{q}(t)$  in eine Linearkombination von zeitabhängigen Amplituden  $\eta_i(t)$  und räumlichen Moden  $\hat{v}_i$  zu zerlegen, so daß die Entwicklung möglichst schnell gegen das Signal  $\hat{q}(t)$  konvergiert. D.h. die relative quadratische Abweichung  $R_n$ ,

$$R_n = \frac{\langle (\hat{q}(t) - \sum_{i=1}^n \eta_i(t)\hat{v}_i)^2 \rangle}{\langle \hat{q}^2(t) \rangle} \quad , \quad (3.13)$$

soll für jedes  $n$  minimal werden. Variation von  $R_n$  nach den Moden  $\hat{v}_i$  ergibt als Bestimmungsgleichung für die Vektoren  $\hat{v}_i$  das Eigenwertproblem,

$$C\hat{v}_i = \lambda_i \hat{v}_i \quad , \quad (3.14)$$

Dabei ist  $C$  die Korrelationsmatrix des Signals:

$$C_{ij} = N \langle \hat{q}_i(t) \hat{q}_j(t) \rangle \quad , \text{ mit} \quad N = \frac{1}{\langle \hat{q}^2(t) \rangle} \quad . \quad (3.15)$$

Da die Korrelationsmatrix  $C$  symmetrisch ist, sind ihre Eigenvektoren orthogonal. Die Amplituden  $\eta_i(t)$  sind daher gegeben als

$$\eta_i(t) = \hat{v}_i \hat{q}(t) \quad , \quad (3.16)$$

und die Korrelationen verschiedener Amplituden verschwinden:

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t) \rangle = \delta_{ij} \lambda_i \quad . \quad (3.17)$$

### 3.1. ÜBERBLICK

Offensichtlich sind die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Gl. (3.14) ein Maß für den Beitrag der Moden  $\hat{v}_i$  zum Signal. Werden die Moden in einer Reihe absteigender Eigenwerte sortiert,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots \quad , \quad (3.18)$$

so ergibt dies die gesuchte, möglichst schnell konvergierende Entwicklung des Signals  $\hat{q}(t)$ :

$$\hat{q}(t) = \sum_i \eta_i(t) \hat{v}_i \quad . \quad (3.19)$$

Eine Schwäche der KL-Entwicklung ist, daß über die zugrundeliegende dynamische Wechselwirkung der Amplituden  $\eta_i$  nichts ausgesagt werden kann. In Bezug auf die Dynamik kann diese Modenentwicklung u.U. auch eine ungeschickte Wahl darstellen (vgl. Abschnitt 3.1.3).

Eine Weiterentwicklung der KL-Analyse ist durch Entwicklung in die sogenannten Sobolev-Eigenfunktionen gegeben [49]. Dabei wird eine Entwicklung gesucht, die nicht berücksichtigt der Repräsentation des Signals, sondern auch zusätzlich bezüglich räumlicher Ableitungen optimiert ist. Die gesuchten Moden ergeben sich dann aus dem Eigenwertproblem,

$$C' \hat{v}_i = \lambda_i \hat{v}_i \quad , \quad (3.20)$$

wobei  $C'$  eine verallgemeinerte Korrelationsmatrix darstellt:

$$C' = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle \frac{\partial^i}{\partial x^i} \hat{q} \otimes \frac{\partial^i}{\partial x^i} \hat{q} \rangle \quad . \quad (3.21)$$

Aber auch dieser Zugang liefert keine Information über die zugrundeliegende Modenwechselwirkung und stellt i.A. berücksichtigt der Dynamik keine optimale Wahl dar.

#### 3.1.3 Raumzeitliche Analyse

Die raumzeitliche Analyse [68] - [70], die im folgenden dargelegt wird, schließt die Lücke zwischen der zeitlichen Analyse und der räumlichen, indem gleichzeitig Koeffizienten für die Dynamik und für räumliche Moden berechnet werden. Diese simultane Optimierung ist nützlich, da einerseits, wie bereits erwähnt, die rein zeitliche Analyse für hochdimensionale Differentialgleichungssysteme aufgrund der nichtlinearen Zunahme der Koeffizienten rechentechnisch sehr schwierig ist. Wird andererseits für ein raumzeitliches Signal zunächst eine KL-Entwicklung durchgeführt, und für die ersten KL-Moden eine zeitliche Rekonstruktion versucht, können zusätzliche Probleme dadurch auftreten, daß Moden, die zum Signal wenig beitragen, vernachlässigt werden, obwohl sie für die Dynamik von Bedeutung sind. Genau dies ist

bei vielen synergetischen Systemen der Fall: die stabilen Moden tragen meist wenig zum Signal bei, ihre Dynamik aber wirkt sich oft stabilisierend auf die Ordnungsparameter aus!

In [44, 51] wird von K. Hasselmann und F. Kwasniok ein Verfahren zur Analyse raumzeitlicher Daten vorgestellt, das methodisch unserem Verfahren ähnelt. Es werden über ein least-square-fit Verfahren räumliche und zeitliche Koeffizienten an den Datensatz angepaßt. Die zugrundeliegende Idee unterscheidet sich jedoch von unserem Zugang, da in [44, 51] versucht wird, mit möglichst wenig räumlichen Moden die Dynamik des raumzeitlichen Signals zu erfassen. Unser Zugang dagegen berücksichtigt die mathematischen Konzepte der Strukturbildung und zielt auf eine Identifikation der Ordnungsparameter, der versklavten Amplituden und ihrer Dynamik ab. Rechentechnisch führt dies einerseits dazu, daß unser Potentialausdruck weniger anpassende Parameter enthält als der Ausdruck von K. Hasselmann. Andererseits erlaubt die Berücksichtigung des Versklavungsprinzips eine analytische Elimination vieler weiterer Parameter unseres Potentials und damit eine starke Reduktion der Dimensionalität des nichtlinearen Problems.

### 3.2 Vorgehensweise der raumzeitlichen Analyse

In diesem Abschnitt wird unsere Vorgehensweise der Untersuchung raumzeitlicher Daten vorgestellt, ohne dabei auf technische Details einzugehen. Die Details werden in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels ausführlicher behandelt.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist ein entweder experimentell oder aus einer Simulation gewonnenes Signal  $\hat{q}(t)$ . Die zeitabhängigen Vektorkomponenten sollen experimentell zugängliche Größen oder aber ein raumzeitliches Signal  $\hat{q}(\mathbf{x}_i, t)$  im Sinne von Gl. (3.12) darstellen.

In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf Datensätze, die ihren Ursprung in komplexen strukturbildenden Systemen in der Nähe einer Instabilität haben. Die folgenden Ausführungen lassen sich jedoch auch auf andere Anwendungen übertragen.

Die Synergetik lehrt uns, wie in Kap. 2.2 dargelegt, daß eine Darstellung des Signals  $\hat{q}(t)$ , durch folgende Modenentwicklung gegeben ist (vgl. Gl. 2.21):

$$\hat{q}(t) = \hat{q}_0 + \sum_u \xi_u(t) \hat{u} + \sum_s \xi_s(t) \hat{s} \quad . \quad (3.22)$$

Dabei genügen die Amplituden  $\xi_s(t)$  den Ordnungsparametergleichungen,

$$\dot{\xi}_s(t) = f_s(\{\xi_s(t)\}) \quad , \quad (3.23)$$

### 3.2. VORGEHENSWEISE DER RAUMZEITLICHEN ANALYSE

und die Amplituden  $\xi_u(t)$  der stabilen Moden bewegen sich auf zentralen Mannigfaltigkeiten,

$$\dot{\xi}_u(t) = f_u(\{\xi_u(t)\}) \quad . \quad (3.24)$$

Ziel der raumzeitlichen Analyse ist es nun, die instabilen ( $\hat{u}$ ) und die stabilen Moden ( $\hat{s}$ ) zu identifizieren und gleichzeitig die Funktionen  $f_u$  und  $f_s$  der Ordnungsparametergleichungen und der zentralen Mannigfaltigkeiten zu bestimmen.

Dabei nehmen wir zunächst an, die Anzahl der auftretenden Ordnungsparameter zu kennen. Unter dieser Voraussetzung führen wir unsere raumzeitliche Analyse durch und überprüfen danach die Richtigkeit unserer Annahme. Sollte sie sich als falsch herausstellen, kann eine andere Anzahl der Ordnungsparameter angenommen werden und das Verfahren wiederholt werden. Dabei kommt uns zugute, daß in vielen Fällen nur wenige Ordnungsparameter auftreten und zu einem komplexen raumzeitlichen Signal führen. Ein mathematisches Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Ordnungsparameter steht noch aus und wird Ziel weiterer Arbeiten darstellen.

Die Vorgehensweise der raumzeitlichen Analyse läßt sich in mehrere Schritte einteilen:

#### 1. Annahme über Anzahl der Ordnungsparameter

und Aufstellen eines Ansatzes für die Funktionen  $f_u$  und  $f_s$ .

In der Nähe von Instabilitäten lassen sich die Funktionen meist als Polynomsätze niedriger Ordnung darstellen. Unter Umständen lassen sich auch die Funktionen aufgrund von Symmetrie- und anderer theoretischer Überlegungen weiter spezifizieren.

#### 2. Projektion in den relevanten Unterraum

Der raumzeitliche Datensatz  $\hat{q}(t)$  kann als Trajektorie in einem Raum  $\Gamma_n$  aufgefaßt werden. Dabei bewegt sich die Trajektorie oft in einem Unterraum  $\Gamma_m \subseteq \Gamma_n$ . Bei hochdimensionalen Datensätzen ist die Projektion in diesen Unterraum einerseits von rechentechnischer Bedeutung. Andererseits muß im Laufe des Verfahrens die Inverse einer Korrelationsmatrix berechnet werden, die nur bei einer Projektion in den Unterraum existiert.

#### 3. Formulierung des Extremalproblems

Über ein least-square-fit Potential sollen die dem Datensatz entsprechenden räumlichen Moden und Koeffizienten der Funktionen  $f_u$  und  $f_s$  angepaßt werden. Dazu werden zu bestimmende Biorthogonal-Moden eingeführt.

#### 4. Elimination von Parametern

Außer den instabilen Biorthogonal-Moden lassen sich alle Koeffizienten analytisch als Funktion dieser Moden darstellen. Dies führt zu einer Reduktion der anzupassenden Variablen und dadurch zu einem niederdimensionalen nichtlinearen Potential.

#### 5. Lösung des nichtlinearen Problems

Dem globalen Minimum des verbleibenden Potentials entspricht die optimale Wahl der räumlichen Biorthogonal-Moden und der Koeffizienten der Funktionen  $f_u$  und  $f_v$ . Das Minimum wird i.A. durch ein Gradientenverfahren bestimmt. Der Potentialwert des Minimums ist ein Maß für die Qualität der Anpassung.

#### 6. Berechnung der räumlichen Moden aus den Biorthogonal-Moden

Über ein weiteres least-square-fit Potential werden die räumlichen Moden gesucht, die, zusammen mit den bereits bestimmten Amplituden, das Signal optimal repräsentieren. Die Lösung läßt sich analytisch angeben, und auch hier ist der Potentialwert des Minimums ein Maß für die Güte der Rekonstruktion des raumzeitlichen Signals.

Im folgenden werden die einzelnen Schritte ausführlich diskutiert.

### 3.3 Ansätze zur Beschreibung der Dynamik

Da wir raumzeitliche Signale in der Nähe von Instabilitäten behandeln, lassen sich die Funktionen  $f_u$  und  $f_v$  als Polynome der Amplituden ansetzen. So lassen sich die Ordnungsparametergleichungen schreiben als

$$\dot{\xi}_u(t) = f_u[\{\xi_u\}] = a_u^{(0)} + a_u^{(1)} \xi_v + \sum_{u',v'} a_{u'v'u}^{(2)} \xi_{u'} \xi_{v'} + \sum_{u',v',u''} a_{u'v'u''v}^{(3)} \xi_{u'} \xi_{v'} \xi_{u''} \xi_{v''} + \dots , \quad (3.25)$$

und die zentralen Mannigfaltigkeiten als

$$\dot{\xi}_v(t) = f_v[\{\xi_v\}] = \sum_{u,u'} k_{uu'}^{(2)} \xi_u \xi_{u'} + \sum_{u,v',v''} k_{v'v''u}^{(3)} \xi_u \xi_{v'} \xi_{v''} + \dots . \quad (3.26)$$

Der Anteil der stabilen Moden zum Signal,

$$\sum_s \xi_s(t) \hat{s} = \sum_s f_s[\{\xi_s(t)\}] \hat{s} , \quad (3.27)$$

### 3.4. PROJEKTION IN DEN RELEVANTEN UNTERRAUM

kann nach Einsetzen von Gl. (3.26) in Polynome von  $\xi_u$  zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} \sum_s f_s[\{\xi_s(t)\}] \hat{s} &= \sum_s \left( \sum_{u,v} k_{uu'}^{(2)} \xi_u \xi_{u'} + \sum_{u,v',v''} k_{v'v''u}^{(3)} \xi_u \xi_{v'} \xi_{v''} + \dots \right) \hat{s} \\ &= \sum_{u,v} \xi_u \xi_{u'} \left( \sum_s k_{uu'}^{(2)} \hat{s} \right) + \sum_{u,v',v''} \xi_u \xi_{v'} \xi_{v''} \left( \sum_s k_{v'v''u}^{(3)} \hat{s} \right) + \dots \\ &= \sum_{u,v} k_{uu'}^{(2)} \xi_u \xi_{u'} \hat{s}_{uu'} + \sum_{u,v',v''} k_{v'v''u}^{(3)} \xi_u \xi_{v'} \xi_{v''} \hat{s}_{v'v''u} + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die auftretenden Moden  $\hat{s}_{uu'}, \hat{s}_{uu'u''}, \dots$ , können als effektive stabile Moden  $\hat{s}^{(e)}$  aufgefaßt werden mit zugehörigen Amplituden  $f_s^{(e)}(t)$ , die durch einen Polynomterm  $f_s^{(e)}[\{\xi_u\}]$  verklart sind:

$$\sum_s \xi_s(t) \hat{s} = \sum_s \xi_s^{(e)}(t) \hat{s}^{(e)} \quad (3.29)$$

mit

$$\xi_s^{(e)}(t) = f_s^{(e)}[\{\xi_s(t)\}] = \begin{cases} k_{uu'}^{(2,e)} \xi_u \xi_{u'} \\ k_{v'v''u}^{(3,e)} \xi_u \xi_{v'} \xi_{v''} \\ \dots \end{cases} \quad (3.30)$$

Unter der Annahme der Kenntnis der Anzahl der Ordnungsparameter des Systems versuchen wir in selbstkonsistenter Weise sowohl die instabilen Moden  $\hat{u}$  und die effektiven stabilen Moden  $\hat{s}^{(e)}$  als auch deren Dynamik, d.h. die Koeffizienten der Ordnungsparametergleichungen  $f_u[\{\xi_u\}]$  und der „effektiven“ zentralen Mannigfaltigkeiten  $f_s^{(e)}[\{\xi_u\}]$  zu bestimmen.

Im gesamten weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir auf den Index  $^{(e)}$  verzichten, um eine möglichst einfache Darstellung zu erhalten.

### 3.4 Projektion in den relevanten Unterraum

Besitzt das Signal  $\hat{q}(t)$   $n$  Vektorkomponenten so kann es als Trajektorie in einem  $n$ -dimensionalen Raum  $\Gamma_n$  aufgefaßt werden. Anhand der Modenentwicklung (Gl. (3.22)) wird jedoch klar, daß sich das Signal unter Umständen in einem Unterraum,  $\Gamma_m \subseteq \Gamma_n$ , bewegt. Es genügt daher, das Signal in diesem Unterraum zu untersuchen.

Eine Möglichkeit, diesen Unterraum zu bestimmen, ist durch die KL-Entwicklung (vgl. Kap. 3.1.2) gegeben. Die Eigenvektoren,  $\hat{v}_i$ , mit nicht vernachlässigbaren Eigenwerten der Korrelationsmatrix  $\hat{C} = \langle \hat{q} \otimes \hat{q} \rangle$  spannen den gesuchten Unterraum

$\Gamma_{\alpha}$  auf. Projektion in diesen Unterraum liefert das weiter zu verarbeitende Signal  $\hat{q}(t)$ :

$$\hat{q}(t) \rightarrow q(t) \quad \text{mit} \quad q(t) = \Psi_i \cdot \hat{q}(t) \quad . \quad (3.31)$$

Diese Projektion in den Unterraum ist einerseits erforderlich, da im weiteren Verlauf unserer Untersuchung die Inverse der Korrelationsmatrix  $C = \langle q \otimes q \rangle$  berechnet werden muß, andererseits ermöglicht sie eine Verringerung des Rauschanteils im Signal  $\hat{q}(t)$  durch Vernachlässigung von KL-Moden mit geringem Beitrag zum Signal, d.h. Eigenvektoren der Korrelationsmatrix  $\tilde{C}$  mit kleinem Eigenwert.

Die Bestimmung des Untervektorraums kann auch mit anderen Methoden erfolgen, z.B. über Sobolev-Eigenfunktionen, die bereits in Kap. 3.1.2 erwähnt wurden.

### 3.5 Formulierung des Extremalproblems

Die simultane Bestimmung der räumlichen Moden und der zugrundeliegenden Dynamik erfolgt über ein Extremalprinzip.

Zunächst führen wir formal ein Biorthogonalsystem  $\{s^+, u^+\}$  zu den noch unbekannten Moden  $\{s, u\}$  ein, d.h. Moden, die folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} u^+ \cdot u' &= \delta_{u,u'} \quad , \quad s^+ \cdot u = 0 \quad , \\ u^+ \cdot s &= 0 \quad , \quad s^+ \cdot s' = \delta_{s,s'} \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die gesuchten Amplituden  $\xi_s(t)$  und  $\xi_u(t)$  sind also als Projektion des Signals  $q(t)$  auf die zu bestimmenden Vektoren  $s^+$  und  $u^+$  gegeben,

$$\xi_s(t) = s^+ \cdot q(t) \quad , \quad \xi_u(t) = u^+ \cdot q(t) \quad . \quad (3.33)$$

Einfachheitshalber sind wir dabei von  $q_0 = 0$  in Gl. (3.22) ausgegangen. Für  $q_0 \neq 0$  modifiziert sich Gl. (3.33) zu

$$\xi_s(t) = s^+ \cdot q(t) - \xi_s^0 \quad , \quad \xi_u(t) = u^+ \cdot q(t) - \xi_u^0 \quad , \quad (3.34)$$

wobei die Konstanten  $\xi_s^0 = s^+ q_0$  und  $\xi_u^0 = u^+ q_0$  als weitere zu bestimmende Parameter in den folgenden Algorithmen eingehen.

Zur simultanen Berechnung der räumlichen Moden,  $s^+$ ,  $u^+$ , und den Koeffizienten, die deren Dynamik beschreiben, d.h. die Koeffizienten der Gl. (3.25), (3.30), wird die Summe der quadratischen Abweichungen minimiert, die in einem Potential  $V$  zusammengefaßt sind:

$$V = \sum_s \frac{\langle (\xi_s - f_s[\{\xi_u\}])^2 \rangle}{\langle \xi_s^2 \rangle} + \sum_u \frac{\langle (\xi_u - f_u[\{\xi_s\}])^2 \rangle}{\langle \xi_u^2 \rangle} \quad . \quad (3.35)$$

Die auftretenden Nenner garantieren die gleiche Gewichtung der einzelnen Terme des Potentials. Nach Einsetzen der Polynome für  $f_s$  und  $f_u$ , Gl. (3.25), (3.30), ergibt sich ein Potential  $V$ ,

$$V = V[\{u^+\}, \{s^+\}, \{k_{u^+ u^+}^{(1)}\}, \dots, \{a_u^{(0)}\}, \{a_u^{(1)}\}, \{a_{u^+ u^+}^{(2)}\}, \dots] \quad , \quad (3.36)$$

in Abhängigkeit von den Biorthogonal-Moden  $u^+$ ,  $s^+$  und den Koeffizienten der zentralen Mannigfaltigkeit  $\{k\}$  und den der Ordnungsparametergleichungen  $\{a\}$ . Das globale Minimum des Potentials  $V$  bezüglich dieser Größen liefert die gesuchte Dynamik des raumzeitlichen Signals mit Hilfe von Ordnungsparametern und versklavten Amplituden und deren zugehörigen räumlichen adjungierten Moden  $u^+$ ,  $s^+$ . Mit Hilfe einer weiteren Extremalforderung (vgl. Abschnitt 3.8) können schließlich die räumlichen Moden  $u$ ,  $s$  aus den Biorthogonal-Moden  $u^+$ ,  $s^+$  berechnet werden und die gesuchte Entwicklung (3.22) ist damit bestimmt.

Die zentrale Mannigfaltigkeit (Gl. (3.30)) und die Ordnungsparametergleichungen (Gl. (3.25)) sind nicht eindeutig, da die Amplituden  $\xi_s$  mit einem beliebigen Faktor skaliert werden können und die Amplituden  $\xi_u$  u.U. als Linearkombination aller Ordnungsparameter dargestellt werden können. Um diese Mehrdeutigkeit zu vermeiden, können Nebenbedingungen bei der Bestimmung des Potentialminimums gefordert werden. Für die stabilen Moden fordern wir

$$\langle \xi_s^2 \rangle = c_s \quad . \quad (3.37)$$

Diese Nebenbedingung, die auch ein Verschwinden der Nenner der ersten Summe in Gl. (3.35) verhindert, wird mit einem Lagrangeparameter  $\lambda_s$  im Potential berücksichtigt. Als Nebenbedingung für die Ordnungsparameter werden wir je nach Beispiel eine geeignete Bedingung fordern, und sie bei der Suche nach dem Potentialminimum explizit berücksichtigen.

Ausgangspunkt für weitere Rechnungen ist also das Potential  $V$ ,

$$\begin{aligned} V &= V_s + V_u \quad (3.38) \\ V_s &= \sum_s \left\{ \frac{1}{c_s} \langle (s^+ q(t) - f_s[\{u^+ q\}])^2 \rangle + \lambda_s \langle (s^+ q(t))^2 \rangle - c_s \right\} \\ V_u &= \sum_u \frac{\langle (u^+ q - f_u[\{u^+ q\}])^2 \rangle}{\langle (u^+ q)^2 \rangle} \quad . \end{aligned}$$

Die Minima des Potentials bzgl. den oben genannten Größen, die zu einem Vektor  $X$ ,

$$X = (\{u^+\}, \{s^+\}, \{k_{u^+ u^+}^{(1)}\}, \dots, \{a_u^{(0)}\}, \{a_u^{(1)}\}, \{a_{u^+ u^+}^{(2)}\}, \dots) \quad , \quad (3.39)$$

zusammengefaßt werden können, ergeben sich formal aus den Gleichungen,

$$\frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial X_i} = 0 \quad . \quad (3.40)$$

Da die Parameter  $\{s^+\}, \{k\}, \{\alpha\}$  quadratisch im Potential auftreten, können sie analytisch als Funktion von  $\{u^+\} (= X_1)$  angegeben werden ( $X_i = X_i(X_1), i > 1$ ). Diese Rechnung wird im nächsten Abschnitt vorgestellt. Die verbleibende Gleichung ( $\frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial X_1} = 0$ ) kann nicht analytisch gelöst werden. Sie wird mit Hilfe einer Gradientendynamik,

$$\dot{X}_1 = -\frac{dV(X_1, X_i(X_1))}{dX_1} \quad . \quad (3.41)$$

bestimmt. Die stationäre Lösung dieser Gleichung,

$$\frac{dV(X_1, X_i(X_1))}{dX_1} = \frac{\partial V}{\partial X_1} dX_1 + \sum_{i>1} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial X_i}}_{=0} dX_i = \frac{\partial V}{\partial X_1} dX_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad (3.42)$$

liefert die gesuchte Lösung. D.h. zur numerischen Bestimmung der Maxima des Potentials, wird Gl. (3.41) numerisch integriert bis die Lösung  $X_1(t)$  ihren stationären Wert  $X_1^{(0)}$  annimmt. Dieser Wert repräsentiert ein Minimum des Potentials:

$$V_{min} = V(X_1^{(0)}, X_i(X_1^{(0)})) \quad . \quad (3.43)$$

In Abschnitt 3.7 wird detaillierter auf dieses Lösungsverfahren eingegangen.

## 3.6 Elimination von Parametern

### 3.6.1 Einführung von Korrelationstensoren

Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, werden zunächst Korrelationstensoren definiert und eine abkürzende Notation eingeführt: Korrelationstensoren  $\Gamma_\alpha$  der Ordnung  $\alpha$  des Signals  $q(t)$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} (\Gamma_2)_{ij} &= \langle q_i(t)q_j(t) \rangle \quad , \\ (\Gamma_3)_{ijk} &= \langle q_i(t)q_j(t)q_k(t) \rangle \quad , \\ (\Gamma_4)_{ijkl} &= \langle q_i(t)q_j(t)q_k(t)q_l(t) \rangle \quad , \\ &\dots \quad . \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.6. ELIMINATION VON PARAMETERN

Korrelationen, die in einer Komponente eine zeitliche Ableitung des Signals berücksichtigen, werden mit  $\Lambda_\alpha$  abgekürzt, Korrelationen in zwei Komponenten der zeitlichen Ableitung mit  $\Omega_\alpha$ :

$$\begin{aligned} (\Lambda_2)_{ij} &= \langle \dot{q}_i(t)q_j(t) \rangle \quad , \\ (\Lambda_3)_{ijk} &= \langle \dot{q}_i(t)q_j(t)q_k(t) \rangle \quad , \\ (\Lambda_4)_{ijkl} &= \langle \dot{q}_i(t)q_j(t)q_k(t)q_l(t) \rangle \quad , \\ &\dots \\ (\Omega_2)_{ij} &= \langle \ddot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Um eine Schreibweise ohne Indizes zu ermöglichen, führen wir Abkürzungen folgender Art ein:

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{-1}\Gamma_3 : u^+ : u'^+ &= \sum_{ijk} (\Gamma_2^{-1})_{ij}(\Gamma_3)_{jkl} u_k^+ u_l'^+ \quad , \\ \Gamma_4(: u^+)^4 &= \sum_{ijkl} (\Gamma_4)_{ijkl} u_i^+ u_j^+ u_k^+ u_l^+ \quad , \\ \Gamma_2\Gamma_2^{-1}\Gamma_3(: u^+ : u'^+)^2 &= \sum_{ijklmn} (\Gamma_2)_{ijk}(\Gamma_2^{-1})_{lm}(\Gamma_3)_{mn} u_i^+ u_j^+ u_m^+ u_n'^+ \quad . \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.6.2 Variation nach $s^+, \{k\}$

Variation von Gl. (3.38) nach  $s^+$  liefert:

$$\frac{\partial V}{\partial s^+} = 0 \Rightarrow \langle (s^+ q - f_s(\{u^+ q\})) q \rangle + \lambda_s \langle (s^+ q) q \rangle = 0 \quad . \quad (3.47)$$

Nach  $s^+$  aufgelöst, ergibt sich

$$s^+[\{u^+\}] = N_s \Gamma_2^{-1} \langle f_s(\{u^+ q\}) q \rangle \quad \text{mit} \quad N_s = \frac{1}{1 + \lambda_s} \quad . \quad (3.48)$$

Aus der Nebenbedingung  $\Gamma_2(: s^+)^2 = c$ , ergibt sich die Normierung  $N_s$ :

$$N_s = \left[ \frac{c_s}{\langle f_s(\{u^+ q\}) q \rangle \Gamma_2^{-1} \langle f_s(\{u^+ q\}) q \rangle} \right]^{1/2} \quad . \quad (3.49)$$

Für  $f_s = k_{u,q}^{(2)}(u^+ q)(u'^+ q)$  ist somit  $s^+$  gegeben durch:

$$s^+[\{u^+\}] = \left[ \frac{c_s}{\Gamma_2\Gamma_2^{-1}\Gamma_3(: u^+ : u'^+)^2} \right]^{1/2} \Gamma_2^{-1}\Gamma_3 u^+ u'^+ \quad . \quad (3.50)$$

Variation von Gl. (3.38) nach  $k_{\omega\omega'}^{(2)}$  ergibt:

$$\frac{\partial V}{\partial k_{\omega\omega'}^{(2)}} = 0 \Rightarrow \langle s^+ q - k_{\omega\omega'}^{(2)}(u^+ q)(u'^+ q) \rangle (u^+ q)(u'^+ q) = 0 \quad . \quad (3.51)$$

Gl. (3.50) eingesetzt und nach  $k_{\omega\omega'}^{(2)}$  aufgelöst liefert

$$k_{\omega\omega'}^{(2)}[\{u^+\}] = \frac{[c_s \Gamma_3 \Gamma_3^{-1} \Gamma_3(u^+ : u'^+)]^{1/2}}{\Gamma_4(u^+ : u'^+)^2} \quad . \quad (3.52)$$

Analog ergibt sich für  $f_s = k_{\omega\omega' u''}^{(2)}(u^+ q)(u'^+ q)(u''+ q)$ :

$$s^+[\{u^+\}] = \left[ \frac{c_s}{\Gamma_4 \Gamma_3^{-1} \Gamma_4(u^+ : u'^+ : u''+)^2} \right]^{1/2} \Gamma_3^{-1} \Gamma_4 u^+ u'^+ u''+ \quad (3.53)$$

$$k_{\omega\omega' u''}^{(2)}[\{u^+\}] = \left[ \frac{c_s \Gamma_4 \Gamma_3^{-1} \Gamma_4(u^+ : u'^+ : u''+)^2}{\Gamma_6(u^+ : u'^+ : u''+)^2} \right]^{1/2} \quad . \quad (3.54)$$

### 3.6.3 Variation nach $\{a\}$

Variation des Potentials (Gl. (3.38)) nach den Koeffizienten der Ordnungsparametergleichungen,  $a_u^{(0)}$ ,  $a_u^{(1)}$ ,  $a_{u_1 u_2}^{(2)}$ ,  $a_{u_1 u_2 u_3}^{(3)}$ , liefert:

$$\begin{aligned} & \langle (q u^+ - f_a[\{q u^+\}]) \rangle = 0 \\ & \langle (q u^+ - f_a[\{q u^+\}]) q u^+ \rangle = 0 \\ & \langle (q u^+ - f_a[\{q u^+\}]) (q u_1^+) (q u_2^+) \rangle = 0 \\ & \langle (q u^+ - f_a[\{q u^+\}]) (q u_1^+) (q u_2^+) (q u_3^+) \rangle = 0 \quad . \quad (3.55) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Variablen  $a$ ,

$$a = (a_u^{(0)}, a_u^{(1)}, a_{u_1 u_2}^{(2)}, a_{u_1 u_2 u_3}^{(3)})^T \quad , \quad (3.56)$$

als Funktion von  $\{u^+\}$ :

$$M[\{u^+\}] a = y[\{u^+\}] \quad , \quad (3.57)$$

wobei  $M[\{u^+\}]$  formal eine symmetrische Matrix darstellt mit den Elementen  $M_{ij} = M_{ji}$ ,

$$\begin{aligned} M_{11} &= 1 \\ M_{12} &= \Gamma_1 : u^+ \end{aligned}$$

### 3.7 LÖSUNG DES NICHTLINEAREN PROBLEMS

$$\begin{aligned} M_{13} &= \Gamma_2 : u'^+ : u''+ \\ M_{14} &= \Gamma_3 : u'^+ : u''+ : u'''+ \\ M_{22} &= \Gamma_2 (u^+)^2 \\ M_{23} &= \Gamma_3 : u'^+ : u''+ : u^+ \\ M_{24} &= \Gamma_4 : u'^+ : u''+ : u'''+ : u^+ \\ M_{33} &= \Gamma_4 : u'^+ : u''+ : u_1^+ : u_2^+ \\ M_{34} &= \Gamma_5 : u'^+ : u''+ : u'''+ : u_1^+ : u_2^+ \\ M_{44} &= \Gamma_6 : u'^+ : u''+ : u'''+ : u_1^+ : u_2^+ : u_3^+ \quad , \end{aligned} \quad (3.58)$$

und  $y[\{u^+\}]$  formal ein Vektor,

$$y[\{u^+\}] = (\Lambda_1 : u^+, \Lambda_2 : (u^+)^2, \Lambda_3 : u_1^+ : u_2^+ : u^+, \Lambda_4 : u_1^+ : u_2^+ : u_3^+ : u^+)^T \quad . \quad (3.59)$$

Für Vektoren  $\{u^+\}$  mit  $\det M[\{u^+\}] \neq 0$ , kann Gl. (3.57) invertiert werden, und wir erhalten die Variablen,  $a_u^{(0)}$ ,  $a_u^{(1)}$ ,  $a_{u_1 u_2}^{(2)}$ ,  $a_{u_1 u_2 u_3}^{(3)}$ , als Funktion von  $\{u^+\}$ :

$$a = a[\{u^+\}] = M^{-1}[\{u^+\}] y[\{u^+\}] \quad . \quad (3.60)$$

### 3.7 Lösung des nichtlinearen Problems

Als letzte Bestimmungsgleichung für das Minimum des Potentials gilt es die Gleichung,

$$\frac{\partial V}{\partial u^+} = 0 \quad , \quad (3.61)$$

aufzustellen, die Größen  $s^+[\{u^+\}]$ ,  $f_s[\{u^+\}]$  und  $a[\{u^+\}]$  in die Gl. (3.61) einzusetzen und die Lösungen für  $u^+$  – unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen – zu bestimmen. Dies stellt ein nichtlineares Problem dar und ist i.A. nicht analytisch lösbar. Ein möglicher Zugang zur Lösung der Gleichung ist in einem iterativen Vorgehen, vergleichbar mit der Hartree-Fock Rechnung in der Festkörperphysik, gegeben. Problematisch bei diesem iterativen Vorgehen ist jedoch die Konvergenz der Lösungen zur gesuchten Lösung.

Ein alternativer Zugang ist, wie bereits in Abschnitt 3.5 erwähnt, durch eine Gradientendynamik gegeben, d.h. die stationäre Lösung der Differentialgleichung,

$$\dot{u}^+ = - \frac{\partial V}{\partial u^+} \quad , \quad (3.62)$$

liefert das gewünschte Minimum. Dabei sind im Potential  $V$  bereits die Parameter  $s^+$ ,  $\{k\}$  und  $\{a\}$  als Funktion von  $u^+$  in das Potential eingesetzt (Gl. (3.50), (3.52),

(3.53), (3.54), (3.60) in Gl. (3.35)):

$$\begin{aligned} V[\{\mathbf{u}^+\}] &= V_r[\{\mathbf{u}^+\}] + V_s[\{\mathbf{u}^+\}] \\ V_r[\{\mathbf{u}^+\}] &= \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{u}'} \left\{ 1 - \frac{\Gamma_2 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3 (\mathbf{u}^+ : \mathbf{u}'^+)^2}{\Gamma_4 (\mathbf{u}^+ : \mathbf{u}'^+)^2} \right\} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}''} \left\{ 1 - \frac{\Gamma_4 \Gamma_2^{-1} \Gamma_4 (\mathbf{u}^+ : \mathbf{u}'^+ : \mathbf{u}''^+)^2}{\Gamma_6 (\mathbf{u}^+ : \mathbf{u}'^+ : \mathbf{u}''^+)^2} \right\} + \dots \\ V_s[\{\mathbf{u}^+\}] &= \sum_{\mathbf{s}} \left\{ 1 - \frac{M^{-1}[\{\mathbf{u}^+\}] (\mathbf{y}[\{\mathbf{u}^+\}])^2}{\Omega(\mathbf{u}^+)^2} \right\} . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Numerische Integration der Gl. (3.62) mit Startwerten  $\{\mathbf{u}^+(t_0)\}$  liefert zeitabhängige Vektoren  $\{\mathbf{u}^+(t)\}$ , die im Laufe der Zeit in einen stationären Wert  $\{\mathbf{u}_{(0)}^+\}$  relaxieren. Dieser Wert repräsentiert ein Minimum des Potentials bezüglich  $\{\mathbf{u}^+\}$  und damit auch den Parametern  $\{s^+\}$ ,  $\{k\}$  und  $\{\alpha\}$ :

$$V_{\min} = V(\mathbf{u}_0^+, s^+[\{\mathbf{u}_0^+\}], k[\{\mathbf{u}_0^+\}], \alpha[\{\mathbf{u}_0^+\}]) . \quad (3.64)$$

Wir haben damit simultan räumliche Moden und Koeffizienten, die die zeitliche Entwicklung beschreiben, an den raumzeitlichen Datensatz angepaßt. Der Wert des Minimums  $V_{\min}$  ist ein Maß für die Qualität der Anpassung, d.h. je kleiner das Minimum, desto besser die Anpassung bezüglich der quadratischen Abweichung. Um das globale Minimum des Potentials zu finden, müssen u.U. verschiedene Startwerte verwendet werden und das kleinste eventuell auftretender lokaler Minima bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit zur Elimination möglicher Nebenminima besteht in der Methode des „simulated annealing“ [65], bei der durch kontrolliertes Überlagern von Fluktuationen das globale Minimum bestimmt werden kann.

### 3.8 Berechnung der räumlichen Moden $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$

Ist die Anzahl  $d$  der bestimmten linear unabhängigen Vektoren  $\mathbf{u}^+$  und  $\mathbf{s}^+$  gleich der Dimensionalität des Vektorraums  $\Gamma_m$ , in dem sich die Trajektorie  $\mathbf{q}(t) \in \Gamma_n$  bewegt, so lassen sich die Moden  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{s}$  einfach aus den Biorthogonal-Moden  $\mathbf{u}^+$  und  $\mathbf{s}^+$  durch Lösung der Gleichungen (3.32) berechnen. Spannt dagegen das Biorthogonal-System  $\{\mathbf{u}^+, \mathbf{s}^+\}$  nicht den gesamten Vektorraum  $\Gamma_m$  auf ( $d < m$ ), so ist eine eindeutige Lösung der Gleichungen (3.32) nicht möglich. Dies erlaubt die Wahl der Moden  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{s}$  über eine weitere Extremalforderung des folgenden Potentials  $W$ :

$$W = \langle \mathbf{q}(t) - \sum_i \xi_i(t) \mathbf{u} - \sum_j \xi_j(t) \mathbf{s} \rangle . \quad (3.65)$$

Der Einfachheit halber fassen wir die Moden  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{s}$  zu den Moden  $\mathbf{w}$  zusammen. Variation von  $W$  nach  $w_i$  ergibt dann den Ausdruck:

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^m C^{(t)}_{ij}^{-1} \langle \xi_j \mathbf{q} \rangle , \quad (3.66)$$

wobei die Korrelationsmatrix  $C^{(t)}$  gegeben ist durch

$$C^{(t)}_{ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle . \quad (3.67)$$

Zur Probe multiplizieren wir Gl. (3.66) mit  $\mathbf{w}_k^T$  und erhalten die gewünschte Biorthogonalitäts-Beziehungen:

$$\mathbf{w}_i \mathbf{w}_k^T = \sum_j C^{(t)}_{ij}^{-1} \langle \xi_j \mathbf{q} \rangle \mathbf{w}_k^T = \sum_j C^{(t)}_{ij}^{-1} \langle \xi_j \xi_k \rangle = \sum_j C^{(t)}_{ij}^{-1} C^{(t)}_{jk} = \delta_{ik} . \quad (3.68)$$

Ist die Dimensionalität des Vektorraumes gleich der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren ( $d = m$ ), so entspricht Gl. (3.66) der eindeutigen Lösung von Gl. (3.32). Dazu betrachten wir die  $k$ -te Komponente  $w_{ik}$  des Vektors  $\mathbf{w}_i$ . Gl. (3.66) lautet dann in Komponenten-Schreibweise:

$$w_{ik} = (w_i^+ \langle q_i q_m \rangle w_m^+)^{-1} w_m^+ \langle q_m q_k \rangle \quad (3.69)$$

und in indexfreier Darstellung:

$$W = (W^+ C(W^+)^T)^{-1} W^+ C . \quad (3.70)$$

Spannen die Vektoren  $\mathbf{w}^+$  den Vektorraum  $\Gamma_m$  auf, so ist  $W^+$  eine invertierbare Matrix und Gl. (3.70) läßt sich umschreiben zu

$$W = ((W^+)^T)^{-1} C^{-1} (W^+)^{-1} W^+ C = ((W^+)^T)^{-1} , \quad (3.71)$$

bzw. in Komponenten-Schreibweise

$$w_{ik} = w_{ik}^{+ -1} . \quad (3.72)$$

Dies entspricht der Lösung von Gl. (3.32), womit wir die „Verträglichkeit“ dieser Lösung mit der Bestimmung der Moden  $\mathbf{w}_i$  aus der Extremalforderung (3.65) gezeigt haben.

Zur Berechnung der räumlichen Moden  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $\hat{\mathbf{s}}$  müssen nun nur noch die Moden  $\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \Gamma_m$  in den ursprünglichen Vektorraum  $\Gamma_n$  transformiert werden (vgl. Kap. 3.4). Dies erfolgt einfach durch Multiplikation der Komponenten von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{s}$

mit den Basisvektoren, die den Untervektorraum  $\Gamma_m$  aufspannten, also den entsprechenden KL-Moden aus Kap. 3.4:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \sum_i u_i \hat{v}_i \\ \hat{s} &= \sum_i s_i \hat{v}_i\end{aligned}\quad . \quad (3.73)$$

Damit haben wir nun auch die räumlichen Moden  $u$  und  $s$  eindeutig bestimmt und somit unser Ziel erreicht, das raumzeitliche Signal  $q(t)$  nach instabilen und stabilen räumlichen Moden zu zerlegen und die auftretende Dynamik mittels Ordnungsparametergleichungen und zentralen Mannigfaltigkeiten zu beschreiben.

Im zweiten Teil der Arbeit, wird die in allgemeiner Form dargestellte Methode anhand von Beispielen erläutert. Zunächst wird dazu die Anwendbarkeit der Methode mithilfe von simulierten Beispielen demonstriert und danach werden Ergebnisse der Untersuchung von EEG-Datensätzen epileptischer Anfälle vorgestellt.

## Teil II

### Anwendungen

## Kapitel 4

### Steady-state Bifurkationen

Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir simulierte raumzeitliche Signale  $\hat{q}(t)$ , die die in Abschnitt 2.2.4 vorgestellten Instabilitäten von steady-state Bifurkationen zeigen. Mit unserem Verfahren zur Analyse raumzeitlicher Daten wollen wir einerseits die dem Signal  $\hat{q}(t)$  zugrundeliegenden stabilen und instabilen räumlichen Moden und deren Dynamik bestimmen und andererseits die auftretende Bifurkation klassifizieren, d.h. die Instabilität des raumzeitlichen Signals identifizieren.

#### 4.1 Simulationen

Zur Simulation erzeugen wir Datensätze  $\hat{q}(t)$  als Überlagerung von zwei räumlichen Moden  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  gewichtet durch zeitabhängige Amplituden  $x(t)$  und  $y(t)$ :

$$\hat{q}(t) = x(t)\hat{X} + y(t)\hat{Y} \quad . \quad (4.1)$$

Die für unsere Beispiele verwendeten Moden  $\hat{X}, \hat{Y}$  sind in Abb. 4.1 als Grauwertbilder dargestellt.

Die Amplituden  $x(t)$  und  $y(t)$  erhalten wir durch numerische Integration von Differentialgleichungssystemen. Dabei sind diese Gleichungen so gewählt, daß ihre Behandlung mit den Methoden der Synergetik (vgl. Abschnitt 2.2) eine Zerlegung in instabile und stabile Moden liefert,

$$\dot{q}(t) = \xi_s(t)\dot{u} + \xi_i(t)\dot{s} \quad , \quad (4.2)$$

die auftretenden Ordnungsparametergleichungen den drei Normalformen der steady-state Bifurkationen (vgl. Abschnitt 2.2.4) entsprechen und eine quadratische zentrale Mannigfaltigkeit,  $\xi_s(t) \propto \xi_i^2(t)$ , auftritt.



Abbildung 4.1: Räumliche Moden  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$  der simulierten raumzeitlichen Signale  $\hat{q}(t)$  (Gl. (4.1)). Den Komponenten der Vektoren entsprechen die Pixel der Grauwertbilder.

Im folgenden sind die numerisch integrierten Differentialgleichungssysteme und die daraus resultierenden Ordnungsparametergleichungen und zentralen Mannigfaltigkeiten angegeben. Der Kontrollparameter  $\epsilon$  soll jeweils nahe dem kritischen Wert der Instabilität sein ( $\epsilon \ll 1$ ).

### 1. Pitchfork-Bifurcation

Als Differentialgleichungssystem verwenden wir das Haken-Zwanzig Modell,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_u &= \epsilon \xi_u + \gamma \xi_u \xi_s \\ \dot{\xi}_s &= -\xi_s + k \xi_u^2\end{aligned}, \quad (4.3)$$

das in erster Näherung eine quadratische zentrale Mannigfaltigkeit und als Ordnungsparametergleichung die Normalform der Pitchfork-Bifurcation liefert:

$$\begin{aligned}\xi_v(t) &\simeq k(1-2\epsilon)\xi_u^2(t) + \mathcal{O}(\xi_u^4) \\ \dot{\xi}_v &\simeq \epsilon \xi_u + \gamma k(1-2\epsilon)\xi_u^3 + \mathcal{O}(\xi_u^5)\end{aligned}. \quad (4.4)$$

Als stabile ( $\hat{s}$ ) und instabile ( $\hat{u}$ ) räumliche Moden ergeben sich die ursprünglichen der Simulation,

$$\hat{u} = \hat{X}, \quad \hat{s} = \hat{Y}, \quad (4.5)$$

da der lineare Anteil des Haken-Zwanzig Modells bereits Diagonalform besitzt.

### 2. Transkritische Bifurcation

Hier gehen wir von einem Differentialgleichungssystem aus, dessen linearer Anteil nicht diagonal ist:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon x + \gamma y \\ \dot{y} &= -y + kx^2\end{aligned}. \quad (4.6)$$

Die Behandlung mit den Methoden der Synergetik ergibt die transkritische Bifurcation als Ordnungsparametergleichung und die quadratische zentrale Mannigfaltigkeit:

$$\begin{aligned}\xi_v(t) &\simeq k(1-2\epsilon)\xi_u^2(t) + \mathcal{O}(\xi_u^4) \\ \dot{\xi}_u &\simeq \epsilon \xi_u + \gamma k(1-2\epsilon)\xi_u^3 + \mathcal{O}(\xi_u^5)\end{aligned}. \quad (4.7)$$

Aufgrund des nicht-diagonalen Linearteils, ergeben sich die stabilen und instabilen Moden z.T. als Linearkombination der Moden  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$ :

$$\hat{u} = \hat{X}, \quad \hat{s} \simeq (\epsilon - 1)\hat{X} + \hat{Y}. \quad (4.8)$$

Sie sind in Abb. 4.2 dargestellt.



Abbildung 4.2: Die theoretischen räumlichen Moden  $\hat{u}$  und  $\hat{s}$  des simulierten Signals  $\hat{q}(t)$  für die transkritische Bifurcation

### 3. Sattel-Knoten Bifurcation

Hier gehen wir direkt von der Normalform der Sattel-Knoten Bifurcation und einer quadratischen zentralen Mannigfaltigkeit aus:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon + \gamma x^2 \\ \dot{y} &= kx^2\end{aligned}. \quad (4.9)$$

Der Ordnungsparameter und die versklavte Amplitude sind daher durch die Amplituden  $x(t)$  und  $y(t)$  gegeben,

$$\xi_o(t) = x(t) \quad , \quad \xi_s(t) = y(t) \quad , \quad (4.10)$$

die stabile und instabile Mode durch die Vektoren  $\hat{X}$  und  $\hat{Y}$ :

$$\hat{u} = \hat{X} \quad , \quad \hat{s} = \hat{Y} \quad . \quad (4.11)$$

Abb. 4.3 zeigt die Amplituden  $x(t)$  und  $y(t)$ , gewonnen aus einer Simulation der Pitchfork-Bifurkation. Das daraus resultierende raumzeitliche Signal  $\hat{q}(t)$  (Gl. (4.1))

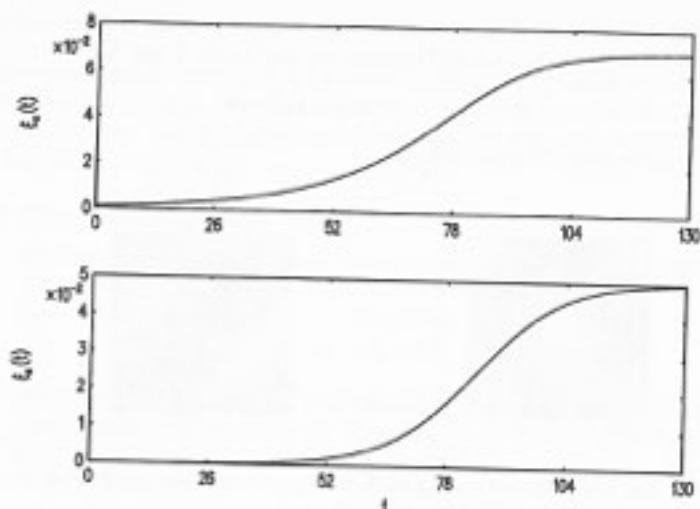


Abbildung 4.3: Amplituden  $x(t)$  und  $y(t)$ : Lösung der Gl. (4.3) mit den Koeffizienten  $\epsilon = 0,05$ ,  $\gamma = -1$  und  $k = 10$ .

ist in Abb. 4.4a) dargestellt. Abb. 4.4b) und c) zeigt die raumzeitlichen Signale  $\hat{q}(t)$  der zwei simulierten Beispiele, die die zwei restlichen Normalformen als Ordnungsparametergleichung demonstrieren. Die räumliche Auflösung der simulierten Daten beträgt jeweils  $10 \times 10$  Pixel und die zeitliche Auflösung 1000 Punkte.

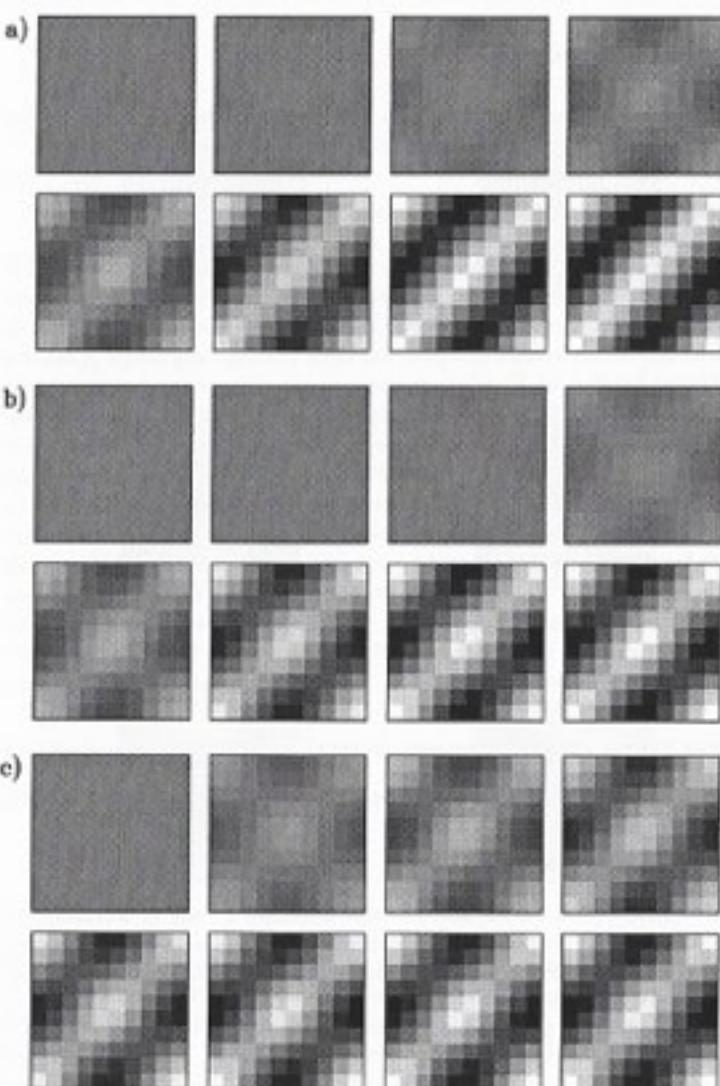


Abbildung 4.4: Simulierte raumzeitliche Signale  $\hat{q}(t)$ . a) Pitchfork Bifurkation ( $\epsilon = 0,05$ ,  $\gamma = -1$ ,  $k = 10$ ), b) transkritische Bifurkation ( $\epsilon = 0,15$ ,  $\gamma = -0,3$ ,  $k = 10$ ) und c) Sattel-Knoten Bifurkation ( $\epsilon = 0,05$ ,  $\gamma = -1$ ,  $k = 2$ ).

## 4.2 Datenanalyse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Anwendung der raumzeitlichen Datenanalyse aus Kap. 3 auf die simulierten Datensätze vorgestellt.

### Projektion in den relevanten Unterraum

Im ersten Schritt erfolgt eine Projektion in den relevanten Unterraum. Wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, läßt sich der Unterraum durch die Eigenvektoren der Korrelationsmatrix  $\hat{C} = \langle \hat{q}(t) \otimes \hat{q}(t) \rangle$  aufspannen, deren Eigenwerte ungleich Null sind. Da die simulierten raumzeitlichen Signale aus einer Überlagerung zweier räumlicher Moden entstanden sind, ist der relevante Unterraum zweidimensional. Abb.4.5 zeigt für die drei simulierten Datensätze die entsprechenden zwei Eigenvektoren  $\hat{v}_1$  und  $\hat{v}_2$  der Korrelationsmatrix  $\hat{C}$ . Die auftretenden Eigenwerte der Korrelationsmatrix sind für den größten Eigenwert von der Größenordnung 1, für den zweiten von der Größenordnung  $10^{-2} - 10^{-3}$  und für die restlichen  $10^{-7}$  und kleiner. Dies ist ein Zeichen dafür, daß bei diesen simulierten Beispielen eine effektive Mode stark dominiert, wie bereits aus den Zeitserien der raumzeitlichen Signale  $\hat{q}(t)$  (Abb.4.4) rein optisch ersichtlich. Zur Rekonstruktion des Signals, insbesondere zur Identifizierung der Ordnungsparameter, ist es jedoch von entscheidender Bedeutung auch die zweite KL-Mode mit zu berücksichtigen. Die Eigenwerte der Größenordnung  $10^{-7}$  und kleiner können vernachlässigt werden. Sie sind auf rechnerbedingte Ungenauigkeiten zurückzuführen.

Die weitere Analyse erfolgt mit dem projizierten zweidimensionalen Signal  $\hat{q}(t)$  mit

$$q_1(t) = \hat{q}(t)\hat{v}_1, \quad q_2(t) = \hat{q}(t)\hat{v}_2. \quad (4.12)$$

### Least-square-fit Potential

Im zweiten Schritt muß das zu minimierende Potential  $V$ , wie in Abschnitt 3.5 dargestellt, spezifiziert werden. Als anzupassende Ordnungsparametergleichung, die alle drei Instabilitäten der steady-state Bifurkationen berücksichtigt, ist ein Polynomansatz dritter Ordnung erforderlich:

$$\xi_u = a_0 + a_1\xi_u + a_2\xi_u^2 + a_3\xi_u^3. \quad (4.13)$$

Da das Signal zweidimensional ist, kann nur noch eine stabile Mode auftreten. Als Ansatz für ihre Amplitude wählen wir eine quadratische Abhängigkeit von der instabilen Amplitude,

$$\xi_s(t) = k\xi_u^2(t). \quad (4.14)$$

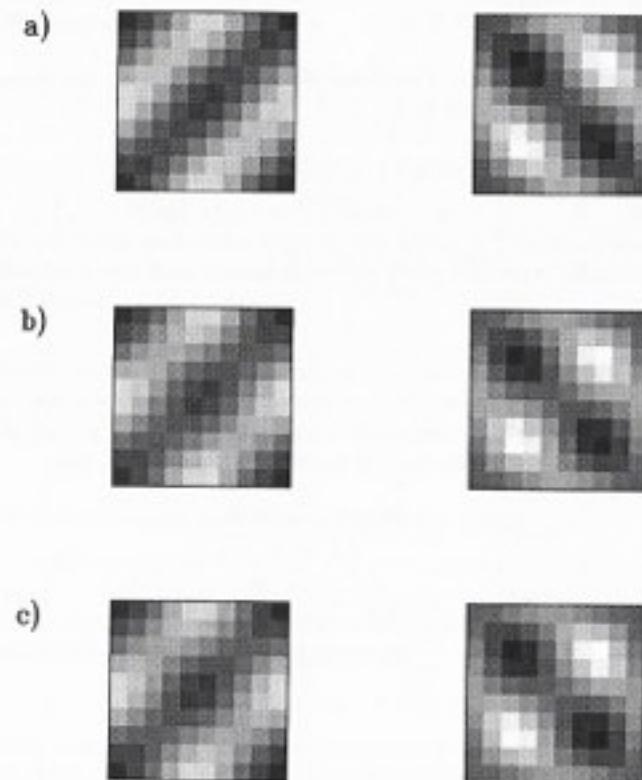


Abbildung 4.5: Die Eigenvektoren  $\hat{v}_1$  und  $\hat{v}_2$  der Korrelationsmatrix  $\hat{C}$ , die den relevanten Untervektorraum der simulierten Signale  $\hat{q}(t)$  aufspannen: a) Pitchfork Bifurkation, b) transkritische Bifurkation und c) Sattel-Knoten Bifurkation.

Als Nebenbedingung für die stabile Mode fordern wir die Normierung

$$\langle \xi_s^2 \rangle = c_s , \quad (4.15)$$

die über einen Lagrange-Parameter  $\lambda$  im Potential berücksichtigt wird. Mit diesen Ansätzen erhalten wir das Potential  $V$ ,

$$\begin{aligned} V(\{a_i\}, k, s^+, u^+) &= V_s(k, s^+, u^+) + V_u(\{a_i\}, u^+) \\ \text{mit } V_s &= \frac{1}{c_s} \langle (qs^+ - k(qu^+)^2)^2 \rangle + \lambda_s (\langle (qs^+)^2 \rangle - c_s) \\ V_u &= \frac{\langle (\dot{q}u^+ - \sum_i a_i(\dot{q}u^+)_i)^2 \rangle}{\langle (\dot{q}u^+)^2 \rangle} \end{aligned} \quad (4.16)$$

### Elimination von Parametern

Im dritten Schritt wird das Minimum von  $V$  bezüglich den Größen  $k, s^+, \{a_i\}$  als Funktion von  $u^+$  berechnet. Die Rechnungen aus Abschnitt 3.6 ergeben hier

$$\begin{aligned} k(u^+) &= \sqrt{c_s [\Gamma_2 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3 (: u^+)^4]^{1/2}} \\ s^+(u^+) &= \sqrt{c_s [\Gamma_2 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3 (: u^+)^2]} \\ a_i(u^+) &= \sum_j M_{ij}^{-1}(u^+) y_j(u^+) \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei  $M(u^+)$  die Matrix,

$$M(u^+) = \begin{pmatrix} 1 & \Gamma_1(: u^+) & \Gamma_2(: u^+)^2 & \Gamma_3(: u^+)^3 \\ \Gamma_1(: u^+) & \Gamma_2(: u^+)^2 & \Gamma_3(: u^+)^3 & \Gamma_4(: u^+)^4 \\ \Gamma_2(: u^+)^2 & \Gamma_3(: u^+)^3 & \Gamma_4(: u^+)^4 & \Gamma_5(: u^+)^5 \\ \Gamma_3(: u^+)^3 & \Gamma_4(: u^+)^4 & \Gamma_5(: u^+)^5 & \Gamma_6(: u^+)^6 \end{pmatrix} , \quad (4.18)$$

und  $y(u^+)$  den Vektor,

$$y(u^+) = (\Lambda_1(: u^+), \Lambda_2(: u^+)^2, \Lambda_3(: u^+)^3, \Lambda_4(: u^+)^4)^T , \quad (4.19)$$

repräsentiert. Die auftretenden Korrelationstensoren,  $\Gamma_i$ ,  $\Lambda_i$  und  $\Omega_i$ , wurden in Abschnitt 3.6.1 definiert.

### 4.2. DATENANALYSE

#### Nichtlineares Problem

Nach Einsetzen der Gleichungen (4.17) in Gl. (4.16) erhalten wir das Potential  $V$  in Abhängigkeit von  $u^+$ :

$$\begin{aligned} V(u^+) &= V_s(u^+) + V_u(u^+) \\ V_s(u^+) &= 1 - \frac{\Gamma_2 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3 (: u^+)^4}{\Gamma_4 (: u^+)^4} \\ V_u(u^+) &= 1 - \frac{1}{\Omega_2 (: u^+)^2} M^{-1}[u^+] (y[u^+])^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Bei der Suche nach einem Wert für den Vektor  $u^+$ , der das Potential minimiert, kann noch eine Nebenbedingung für die Skalierung von  $u^+$  berücksichtigt werden. Wir fordern

$$\langle \xi_s^2 \rangle = c_s . \quad (4.21)$$

Da der Untervektoraum des Signals  $q(t)$  bei unseren Beispielen nur zweidimensional ist, lässt sich  $u^+$  als zweikomponentiger Vektor schreiben:

$$u^+ = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \quad (4.22)$$

Die Nebenbedingung kann daher umgeschrieben werden zu:

$$\langle \xi_s^2 \rangle = \langle (q(t)u^+)^2 \rangle = \langle q_1^2 \rangle x_1^2 + 2 \langle q_1 q_2 \rangle x_1 x_2 + \langle q_2^2 \rangle x_2^2 = c_u . \quad (4.23)$$

Da das Signal  $\tilde{q}(t)$  durch die KL-Entwicklung in den Unterraum projiziert wurde, sind die Korrelationen  $\langle q_i q_j \rangle$  gegeben als

$$\langle q_i q_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} , \quad (4.24)$$

wobei  $\lambda_i$  die Eigenwerte der Korrelationsmatrix  $\tilde{C}$  darstellen (vgl. Abschnitt 4.2). Gl. (4.23) beschreibt daher die Normalform einer Ellipse in der Ebene. Wird der Vektor  $u^+$  in Polarkoordinaten dargestellt,

$$u^+ = \begin{pmatrix} r_1 \cos \phi \\ r_2 \sin \phi \end{pmatrix} , \quad (4.25)$$

erhalten wir für die Halbachsen  $r_1, r_2$  aus Gl. (4.23) die Ausdrücke:

$$r_1 = [c_u / \lambda_1]^{1/2} , \quad r_2 = [c_u / \lambda_2]^{1/2} . \quad (4.26)$$

Das Potential  $V$  (Gl. (4.20)) hängt nun nur noch von einem Parameter ab, dem Winkel  $\phi$ :

$$V(\phi) = V_s(\phi) + V_u(\phi) . \quad (4.27)$$

Das Minimum des Potentials  $V(\phi)$  kann durch ein Gradientenverfahren, wie im Abschnitt 3.7 beschrieben, bestimmt werden. Die stationäre Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (4.28)$$

liefert einen Wert für  $\phi$ , der  $V(\phi)$  minimiert. Da das Potential  $V(\phi)$  eindimensional ist, kann es einfach graphisch dargestellt werden und das Minimum kann daran direkt abgelesen werden. Dabei genügt es den Potentialverlauf in einem Intervall der Länge  $\pi$  zu betrachten, da das Potential  $V(\phi)$  invariant unter Translation um  $\pi$  ist, d.h.  $V(\phi) = V(\phi + \pi)$ . Dies entspricht einer Skalierung von  $u^+$  mit dem Faktor  $-1$ .

Abb. 4.6 zeigt die Potentialterme  $V_u(\phi)$  (gestrichelt),  $V_s(\phi)$  (gepunktet) und die Summe  $V(\phi) = V_u(\phi) + V_s(\phi)$  für  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  der drei Simulationen. In allen drei Fällen tritt ein ausgeprägtes Minimum auf. Dabei fällt auf, daß der Potentialterm  $V_s$ , der die verdeckten Moden berücksichtigt, Uneindeutigkeiten des Potentialterms  $V_u$  beseitigt. Die Uneindeutigkeiten von  $V_u$  treten auf, da bestimmte Linearkombinationen der beiden Differentialgleichungen für die instabile und stabile Amplitude ebenfalls durch eine Differentialgleichung der Form Gl. (4.13) gut darstellbar sind. Die Potentialminima haben Werte zwischen  $10^{-4}$  und  $10^{-10}$ , d.h. die Anpassung ist gut gelungen. Die beste Anpassung wurde bei der Simulation c) erreicht, da hier die Ordnungsparametergleichung und die Gleichung für die verdeckten Amplituden exakt mit den Ansätzen (Gl. (4.13) und Gl. (4.14)) übereinstimmen. In den beiden anderen Fällen treten bei der Ordnungsparametergleichung und der zentralen Mannigfaltigkeit Polynome höherer Ordnung auf, die durch unsere Ansätze nicht berücksichtigt wurden. Daher sind die Werte dieser Minima nicht ganz so klein wie im Fall c). Die Simulation a) hat ein tieferes Minimum als das der Simulation b), da wir bei b) weiter von der Instabilität entfernt waren und daher vernachlässigte Terme höherer Ordnung eine größere Rolle spielen, wie bei a).

#### 4.2. DATENANALYSE

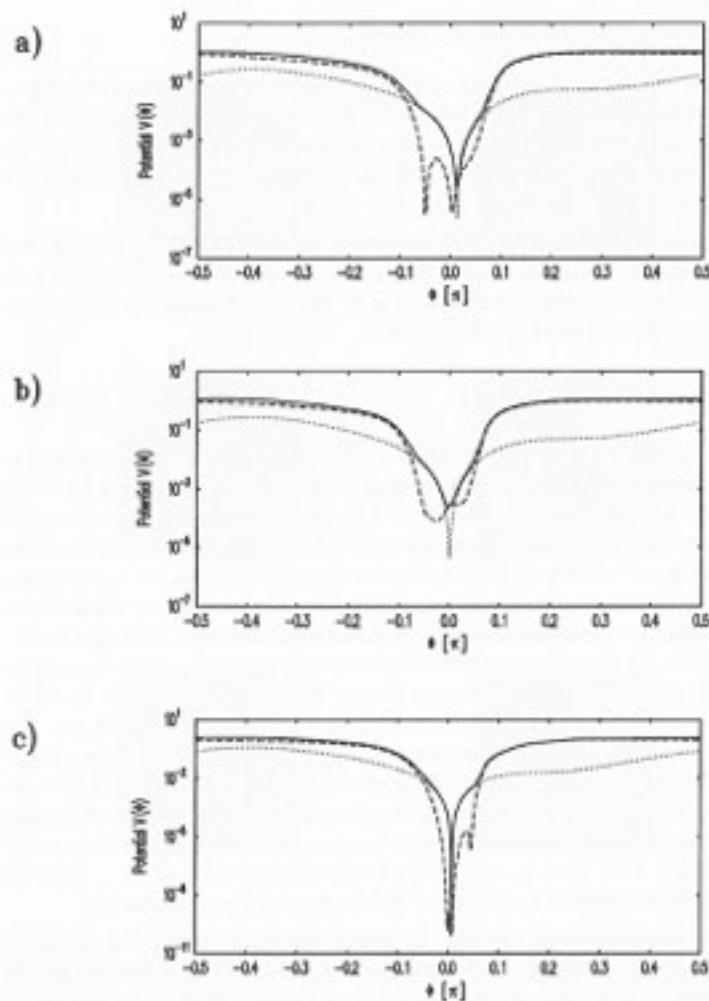


Abbildung 4.6: Potential  $V(\phi) = V_u(\phi) + V_s(\phi)$  für  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  der Simulationen: a) Pitchfork Bifurkation, b) transkritische Bifurkation und c) Sattel-Knoten Bifurkation. (Durchgezogene Linie: Potential  $V$ , gestrichelte Linie:  $V_u$ , gepunktete Linie:  $V_s$ .)

### Rekonstruktion der räumlichen Moden

Wie in Kap. 3.8 dargestellt, werden aus den Minima der Potentiale die entsprechenden räumlichen Moden  $\hat{u}$  und  $\hat{s}$  bestimmt. Sie sind in Abb. 4.7 dargestellt. Sie zeigen eine gute Übereinstimmung mit den theoretischen Moden aus Abb. 4.1 (für die Beispiele a) und c)) und aus Abb. 4.2 (für die Simulation b)) und stellen damit eine Verbesserung der KL-Moden (vgl. Abb. 4.5) dar.

Damit haben wir die räumliche Rekonstruktion im Hinblick auf die instabile und stabile räumliche Mode der raumzeitlichen Signale  $\hat{q}(t)$  demonstriert. Daß auch simultan die zugrundeliegende Dynamik, d.h. die Identifikation der Normalform gelungen ist, wird im folgenden dargestellt.

### Identifikation der Normalform

Die Abbildungen 4.8, 4.9 und 4.10 zeigen die Koeffizienten  $a_i$  der angepaßten Ordnungsparametergleichung (4.13) in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$ , der nach Gl. (4.25) den Vektor  $u^+$  parametrisiert. Die gestrichelte Linie repräsentiert den Wert Null für den jeweiligen Koeffizienten und die gepunktete Linie markiert den Wert für  $\phi$ , der das Potential minimiert (vgl. Abb. 4.16). Das kleine Kreuz stellt den theoretischen Wert für die jeweiligen Koeffizienten dar. Die Übereinstimmung des theoretischen Wertes mit dem von uns bestimmten Werten ist klar zu erkennen. Daß die Übereinstimmung für die Simulationen a) und b) nicht immer perfekt ist, liegt einerseits an der bereits erwähnten Vernachlässigung höherer Terme in den Ansätzen Gl. (4.13) und Gl. (4.14) und andererseits an dem allgemeinen Ansatz von Gl. (4.13). Wir sind also nicht von der entsprechenden Normalform ausgegangen, sondern haben die drei Normalformen in einer Gleichung zusammengefaßt. Die Identifikation der jeweils zugrundeliegenden Normalform ist gelungen, da die Minima der Potentiale genau die Koeffizienten zum Verschwinden bringen, die für die jeweilige Normalform verantwortlich sind:  $a_0 = a_2 = 0$  für die Pitchfork-Bifurkation a),  $a_0 = 0$  für die transkritische Bifurkation b) und  $a_1 = 0$  für die Sattel-Knoten Bifurkation.

Wir haben damit unser Ziel erreicht, die räumlichen Moden der simulierten raumzeitlichen Datensätze zu bestimmen und die zugrundeliegenden Normalformen zu identifizieren. Im nächsten Kapitel überprüfen wir unsere Methode an simulierten raumzeitlichen Signalen, die sich aus zwei Ordnungsparametern zusammensetzen.

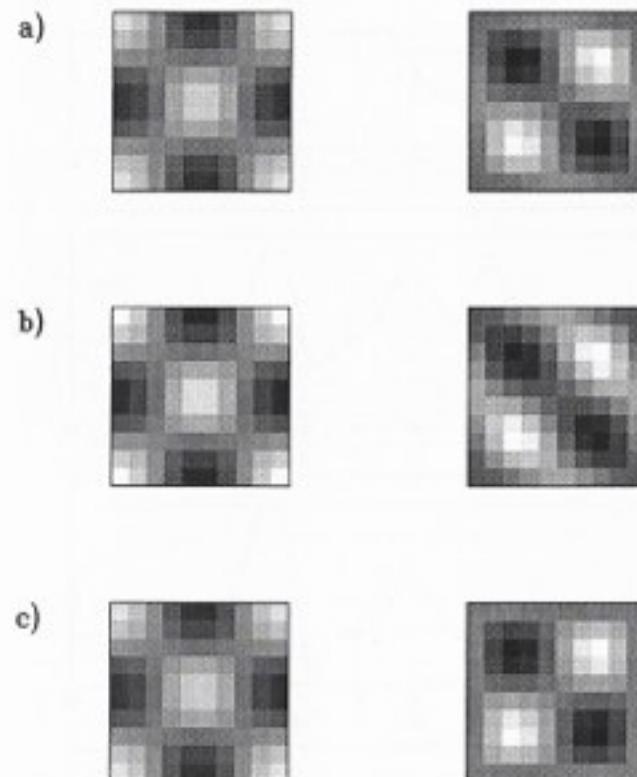


Abbildung 4.7: Räumliche Moden  $\hat{u}$  und  $\hat{s}$ , die zu den Minima der Potentiale aus Abb. (4.6) korrespondieren: a) Pitchfork Bifurkation, b) transkritische Bifurkation und c) Sattel-Knoten Bifurkation.

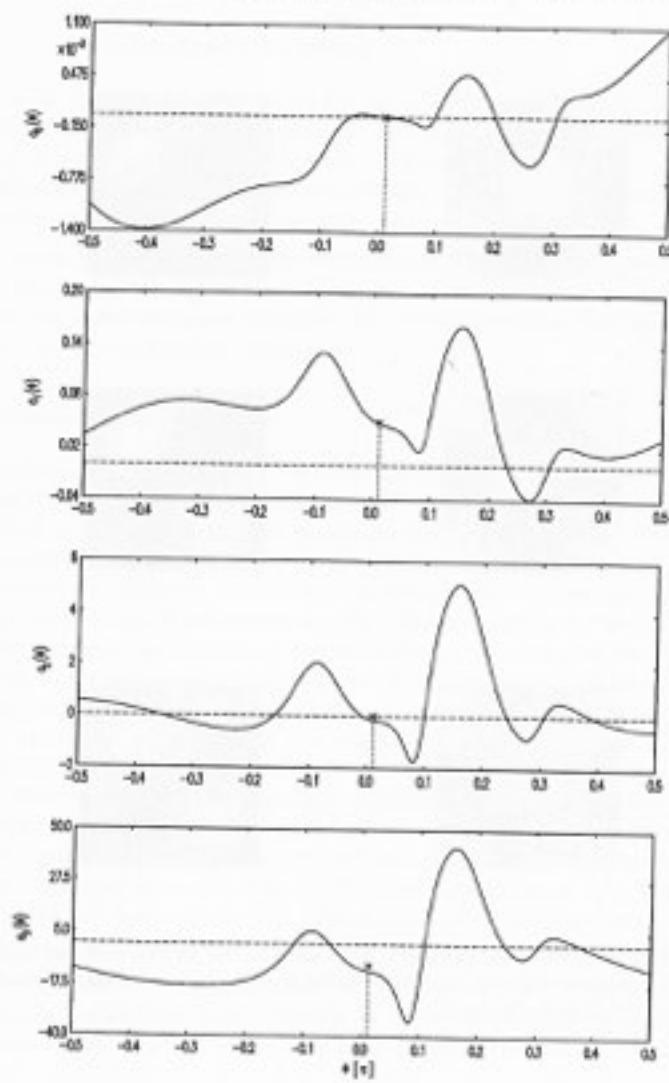


Abbildung 4.8: Koeffizienten  $a_i$  der Gl. (4.17) in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  für die Pitchfork-Bifurkation. Die gestrichelte Linie repräsentiert den Wert Null, die gepunktete Linie das Minimum des Potentials  $V(\phi)$ .

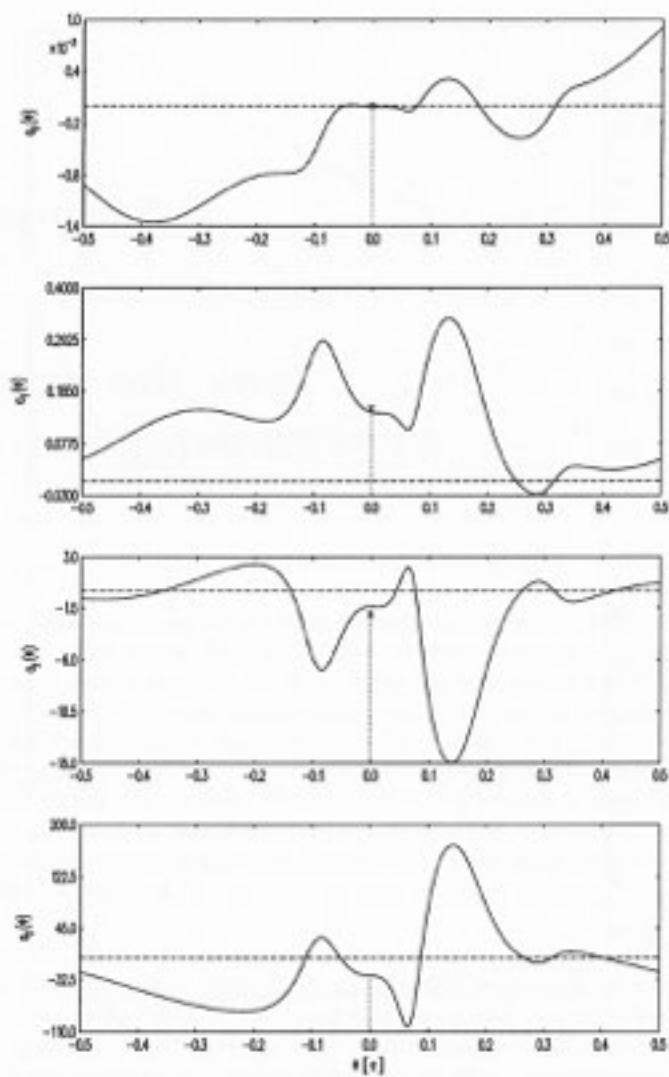


Abbildung 4.9: wie Abb. 4.8 für die transkritische Bifurkation

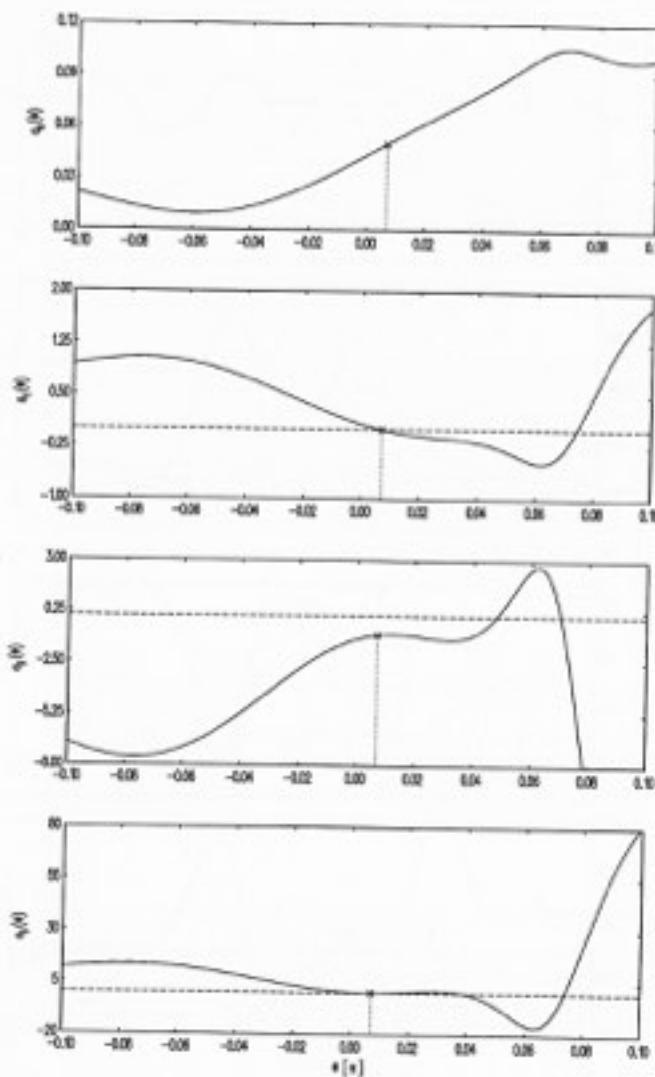


Abbildung 4.10: wie Abb. 4.8 für die Sattel-Knoten Bifurkation

## Kapitel 5

### Signal mit zwei Ordnungsparametern

Um die Rechnungen aus Kapitel 3 für komplexere raumzeitliche Signale zu illustrieren, wollen wir in diesem Abschnitt Daten behandeln, deren Dynamik durch zwei Ordnungsparameter bestimmt ist. Dabei ist zu beachten, daß es zwei Möglichkeiten für das Auftreten zweier Ordnungsparameter gibt: Einerseits kann der Realteil eines komplex-konjugierten Eigenwertpaars des linearisierten Problems (vgl. Abschnitt 2.2.2) verschwinden. Diese oszillatorische Kodimension-I Instabilität wird Hopf-Bifurkation genannt (vgl. Abschnitt 2.2.4). Andererseits können zwei Ordnungsparameter durch das Verschwinden zweier reeller Eigenwerte realisiert werden, durch eine sogenannte Kodimension-II Instabilität. Diese beiden Beispiele werden im folgenden diskutiert.

Um die auftretenden least-square-fit Potentiale grafisch veranschaulichen zu können, werden wir bei den beiden Beispielen auf versklavte Moden verzichten. Der Unterraum, in dem sich die Trajektorie des Signals bewegt, ist dann zweidimensional. Nach Berücksichtigung der Normierungsbedingungen für die zwei instabilen Moden resultiert daraus ein Potential das von zwei Parametern abhängt und somit grafisch darstellbar ist.

## 5.1 Hopf-Bifurkation

### 5.1.1 Simulation des Signals

Das simulierte raumzeitliche Signal setzt sich aus den zwei Ordnungsparametern  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$  und den dazugehörigen räumlichen Moden  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  zusammen:

$$\hat{q}(t) = \xi_1(t)\hat{u}_1 + \xi_2(t)\hat{u}_2 \quad . \quad (5.1)$$

Die zur Simulation verwendeten räumlichen Moden  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  sind in Abb. 5.1 dargestellt.



Abbildung 5.1: Räumliche Moden  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  des simulierten raumzeitlichen Signals der Hopf-Bifurkation mit einer räumlichen Auflösung von  $10 \times 10$  Bildpunkten

Durch numerische Integration des Differentialgleichungssystems der Hopf-Bifurkation (vgl. Abschnitt 2.2.4),

$$\dot{\xi}_1 = -\epsilon\xi_1 - \omega\xi_2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)(a\xi_1 - b\xi_2) \quad (5.2)$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega\xi_1 + \epsilon\xi_2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)(b\xi_1 + a\xi_2) \quad (5.3)$$

simulieren wir die Dynamik der Amplituden. Abb. 5.2 zeigt das Phasenportrait der Amplituden  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$ . Die Parameterwerte sind so gewählt, daß wir uns im superkritischen Bereich befinden, d.h. der Fokus  $(0,0)$  ist instabil und die Trajektorie bewegt sich auf den stabilen Grenzzyklus zu.

Daraus resultiert ein raumzeitliche Signal  $\hat{q}(t)$ , wie es für ein kurzes Zeitintervall in Abb. 5.3 dargestellt ist. Es diente uns als Ausgangspunkt für die nun folgende Datenanalyse.

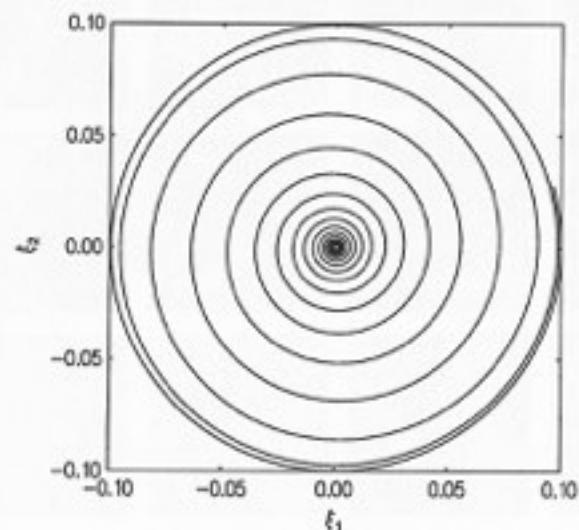


Abbildung 5.2: Phasenportrait der Amplituden der simulierten Hopf-Bifurkation,  $\epsilon = 0,05$ ,  $\omega = 1$ ,  $a = -5$ ,  $b = 75$  (zeitliche Auflösung: 1000 Punkten).

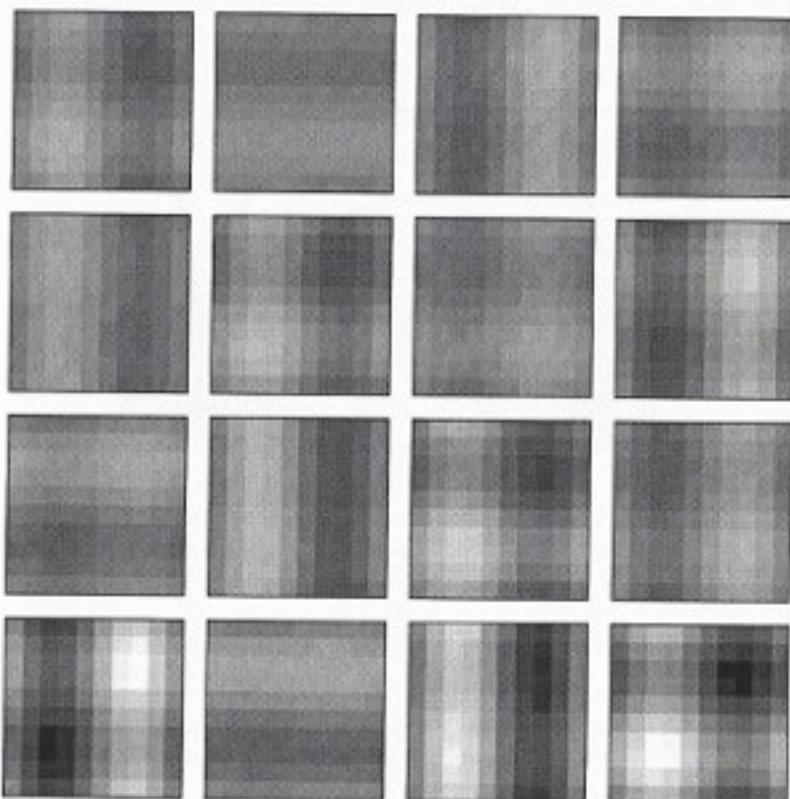


Abbildung 5.3: Ausschnitt des raumzeitlichen Signals der simulierten Hopf-Bifurkation

### 5.1.2 Untersuchung der Daten

#### Projektion in den relevanten Unterraum

Der Untervektorraum der Trajektorie ist zweidimensional, da sich das simulierte Signal aus den zwei Vektoren  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  zusammensetzt. Die Bestimmung des relevanten Vektorraumes erfolgt wieder über die Eigenvektoren mit nichtverschwindenden Eigenwerten der Korrelationsmatrix  $\hat{C} = \langle \hat{q} \otimes \hat{q} \rangle$ . Abb. 5.4 zeigt die erhaltenen Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_1 = 0,847$  und  $\lambda_2 = 0,153$ .



Abbildung 5.4: Eigenvektoren der Korrelationsmatrix  $\hat{C}$ , die den Vektorraum des simulierten raumzeitlichen Signals aufspannen

Die weitere Verarbeitung des Signals erfolgt in dem durch die beiden KL-Moden aufgespannten Vektorraum, d.h. das projizierte Signal  $q(t)$  ist zweidimensional.

#### Least-square-fit Potential

In diesem Beispiel wollen wir das least-square-fit Potential für eine vermutete Hopf-Bifurkation angeben. Wir gehen dazu zunächst von der Normalform des komplexen Ordnungsparameters  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  aus, vgl. Gl. (2.27) in Abschnitt 2.2.4, und erhalten als least-square-fit Potential  $V_\zeta$ ,

$$V_\zeta = \frac{\langle |\dot{\zeta} - \alpha\zeta - \beta|\zeta|^2\zeta|^2 \rangle}{\langle |\zeta|^2 \rangle} . \quad (5.4)$$

Nach Einführung der Polardarstellung,  $\zeta(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ , lässt sich das Potential  $V_\zeta$  in zwei Terme zerlegen:

$$V_\zeta = V_r + V_\theta ,$$

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\langle (\dot{r} - \epsilon r - ar^2)^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle + \langle r^2 \dot{\phi}^2 \rangle}, \\ V_\phi &= \frac{\langle (r\dot{\phi} - \omega r - br^2)^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle + \langle r^2 \dot{\phi}^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Interessant ist der Zähler des Terms  $V_\phi$  und der für beide Terme auftretende Nenner, da sie von der vielleicht erwarteten Form,

$$V'_r = \frac{\langle (\dot{r} - \epsilon r - ar^2)^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle}, \quad V'_\phi = \frac{\langle (\dot{\phi} - \omega - br^2)^2 \rangle}{\langle \dot{\phi}^2 \rangle}, \quad (5.6)$$

abweichen. Der Ausdruck für das Potential  $V_\zeta$ , wie in den Gl. (5.5) angegeben, führt aber bei der Elimination der Parameter – im Gegensatz zu dem Potential  $V'_\zeta = V'_r + V'_\phi$  aus Gl. (5.6) – dazu, daß die auftretenden Gleichungen als Funktion von Korrelationstensoren geschrieben werden können.

#### Elimination von Parametern und das resultierende nichtlineare Problem

Nach Variation des Potentials  $V_\zeta$  (Gl. (5.5)) bzgl. den Größen  $\epsilon$ ,  $\omega$ ,  $a$  und  $b$  lassen sich diese als Funktion von  $u_1^+$ ,  $u_2^+$  schreiben. Werden diese Gleichungen wieder in das Potential eingesetzt, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$V_\zeta(u_1^+, u_2^+) = 1 - \frac{1}{\langle r^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \rangle} M_H^{-1} \left( \langle y_1^2 \rangle + \langle y_2^2 \rangle \right), \quad (5.7)$$

wobei die Matrix  $M$  und die Vektoren  $y_1$  und  $y_2$  definiert sind als

$$M_H = \begin{pmatrix} \langle r^2 \rangle & \langle r^4 \rangle \\ \langle r^4 \rangle & \langle r^6 \rangle \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} \langle r\dot{r} \rangle \\ \langle r^2 \dot{\phi} \rangle \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} \langle r^2 \dot{\phi} \rangle \\ \langle r^4 \dot{\phi} \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Die auftretenden Korrelationen  $\langle \dots \rangle$  lassen sich, wie bereits erwähnt, als Multilinearformen von Korrelationstensoren und den Vektoren  $u_1^+$  und  $u_2^+$  schreiben:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \langle \xi_1^2 + \xi_2^2 \rangle = \Gamma_2 \left( \langle u_1^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^2 \right) \\ \langle r^4 \rangle &= \langle (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \rangle = \Gamma_4 \left( \langle u_1^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^2 \right)^2 \\ \langle r^6 \rangle &= \langle (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 \rangle = \Gamma_6 \left( \langle u_1^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^2 \right)^3 \\ \langle r\dot{r} \rangle &= \langle \xi_1 \dot{\xi}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2 \rangle = \Lambda_2 \left( \langle u_1^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^2 \right) \\ \langle r^2 \dot{\phi} \rangle &= \langle (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1 \dot{\xi}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2) \rangle \\ &= \Lambda_4 \left( \langle u_1^+ \rangle^4 + \langle u_1^+ \rangle^2 \langle u_2^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^2 \langle u_1^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^4 \right) \end{aligned}$$

#### 5.1. HOPF-BIFURKATION

$$\begin{aligned} \langle r^2 \dot{\phi} \rangle &= \langle \xi_1 \dot{\xi}_2 - \xi_1 \xi_2 \rangle = \Lambda_2 \left( \langle u_2^+ \rangle \langle u_1^+ \rangle - \langle u_1^+ \rangle \langle u_2^+ \rangle \right) \\ \langle r^4 \dot{\phi} \rangle &= \langle (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1 \dot{\xi}_2 - \xi_1 \xi_2) \rangle \\ &= \Lambda_4 \left( \langle u_1^+ \rangle \langle u_1^+ \rangle^3 - \langle u_1^+ \rangle^3 \langle u_2^+ \rangle + \langle u_2^+ \rangle^3 \langle u_1^+ \rangle - \langle u_1^+ \rangle \langle u_2^+ \rangle^3 \right) \\ \langle r^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \rangle &= \langle \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 \rangle = \Omega_2 \left( \langle u_1^+ \rangle^2 + \langle u_2^+ \rangle^2 \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Da sich das Signal  $q(t)$  in einem zweidimensionalen Raum bewegt, können die gesuchten Vektoren  $u_1^+$  und  $u_2^+$  als zweidimensionale Vektoren geschrieben werden:

$$u_1^+ = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad u_2^+ = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Um eine Skalierung und eine Rotation der Ordnungsparameter  $\xi_1$  und  $\xi_2$  eindeutig festzulegen fordern wir als Nebenbedingungen:

$$\langle r^2 \rangle = \langle \xi_1^2 + \xi_2^2 \rangle = c_r, \quad \phi(t_0) = 0 = \xi_1(t_0). \quad (5.11)$$

Aus der zweiten Nebenbedingung  $\xi_1(t_0) = 0$  folgt sofort:

$$x_1 = \gamma y_1, \quad \gamma = -\frac{q_2(t_0)}{q_1(t_0)}. \quad (5.12)$$

Schreibt man die verbleibenden Größen  $x_2$ ,  $y_1$  und  $y_2$  formal mit Polarkoordinaten um, so erhält man aus der ersten Nebenbedingung  $\langle r^2 \rangle = c_r$ :

$$\begin{aligned} x_2 &= \left[ \frac{c_r}{\lambda_1} \right]^{1/2} \cos \phi \sin \theta \\ y_1 &= \left[ \frac{c_r}{\gamma^2 \lambda_1 + \lambda_2} \right]^{1/2} \sin \phi \sin \theta \\ y_2 &= \left[ \frac{c_r}{\lambda_2} \right]^{1/2} \cos \theta \end{aligned} \quad (5.13)$$

wobei  $\lambda_i$  die Eigenwerte der Korrelationsmatrix darstellen. Das nun resultierende Potential ist also zweidimensional, da es nur noch von den Winkeln  $\phi$  und  $\theta$  abhängt. Das Potential  $V_\zeta(\phi, \theta)$  zeigt die folgenden Spiegel- und Translationssymmetrien:

$$\begin{aligned} V_\zeta(\pi + \phi, \theta) &= V_\zeta(\pi - \phi, \theta), \\ V_\zeta\left(\frac{\pi}{2} + \phi, \frac{\pi}{2} + \theta\right) &= V_\zeta\left(\frac{\pi}{2} - \phi, \frac{\pi}{2} - \theta\right), \\ V_\zeta(\phi, \theta) &= V_\zeta(\phi, \theta + \pi) \end{aligned} \quad (5.14)$$

aufgrund der noch möglichen Skalierung von  $u_1^+$ ,  $u_2^+$  oder beiden mit  $-1$ . Es ist daher ausreichend das Minimum des Potentials in dem Bereich  $0 \leq \phi \leq \pi$  und  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  zu bestimmen. Abb. 5.5 zeigt das Potential in diesem Bereich für unsere Simulation. Es zeigt ein glattes Potential mit einem ausgeprägten Minimum ohne das Auftreten weiterer Nebenminima.

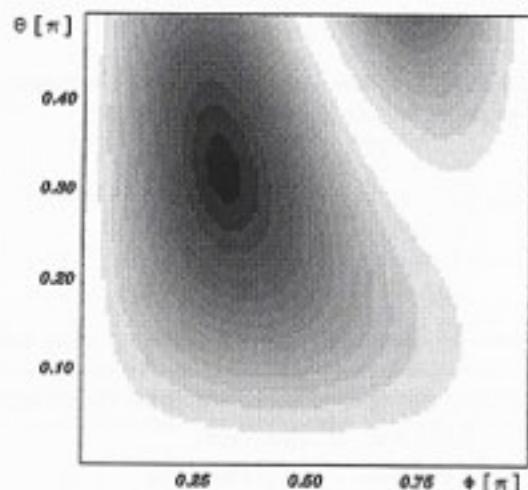
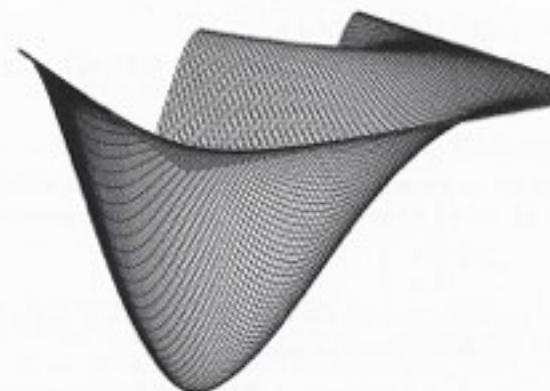


Abbildung 5.5: Potential  $V_c(\phi, \theta)$  für das simulierte raumzeitliche Signal einer Hopf-Bifurkation, unten als Grauwertbild: der maximale Potentialwert ist schwarz dargestellt, der minimale Potentialwert weiß, Werte dazwischen in entsprechender Graustufung und oben als Zentralprojektion des dreidimensionalen Bildes

### Rekonstruktion der räumlichen Moden

Abb. 5.6 zeigt die räumlichen Moden, die dem Minimum des Potentials entsprechen und die exakt mit ursprünglichen Moden der Simulation übereinstimmen. Auch die Koeffizienten der Dynamik entsprechen genau den Koeffizienten der Simulation. Dies liegt natürlich daran, daß sich das Signal nur aus den beiden gesuchten Moden



Abbildung 5.6: Aus der Simulation rekonstruierte räumliche Moden des Signals.

zusammensetzt und die Dynamik mit der gesuchten übereinstimmt. Wie bereits anfangs des Kapitels erwähnt, sollte diese Darstellung aber dazu dienen das Potential einer gesuchten Hopf-Bifurkation vorzustellen und grafisch zu illustrieren, um insbesondere das glatte Verhalten des Potentials zu zeigen. Realitätsnähere Beispiele werden in den folgenden Kapiteln, mit Anwendungsmöglichkeiten in der Hydrodynamik (Kapitel 6 und Kapitel 7) und in der Medizin (Kapitel 8), dargestellt.

## 5.2 Kodimension-II Instabilität

### 5.2.1 Simulation

Ausgangspunkt ist wieder ein Signal  $\dot{q}(t)$ , das aus zwei räumlichen Moden  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  besteht:

$$\dot{q}(t) = \xi_1(t)\hat{u}_1 + \xi_2(t)\hat{u}_2 \quad , \quad (5.15)$$

wobei die räumlichen Moden den Moden aus der Simulation der Hopf-Bifurkation entsprechen (vgl. Abb. 5.1). Die Amplituden  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$  erhalten wir aus numerischer Integration einer Kodimension-II Normalform, der eine Spiegelsymmetrie zugrundeliegt:

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_2$$

$$\dot{\xi}_1 = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + c \xi_1^3 + d \xi_1^2 \xi_2 \quad . \quad (5.16)$$

Abb. 5.7 zeigt das Phasenporträt der Amplituden unseres simulierten Beispiels.

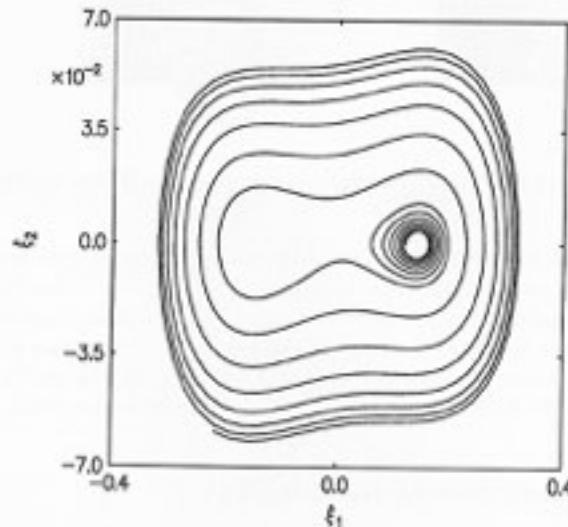


Abbildung 5.7: Phasenporträt der numerisch integrierten Kodimension-II Instabilität (Gl. (5.16) mit Koeffizienten  $\mu_1 = 0,02$ ,  $\mu_2 = 0,03$ ,  $c = -1$ ,  $d = -1$  )

Die Trajektorie entfernt sich vom instabilen Fokus und bewegt sich auf einen periodischen Grenzyklus zu. Ein Ausschnitt des resultierenden raumzeitlichen Signals  $\tilde{q}(t)$  ist in Abb. 5.8 dargestellt.

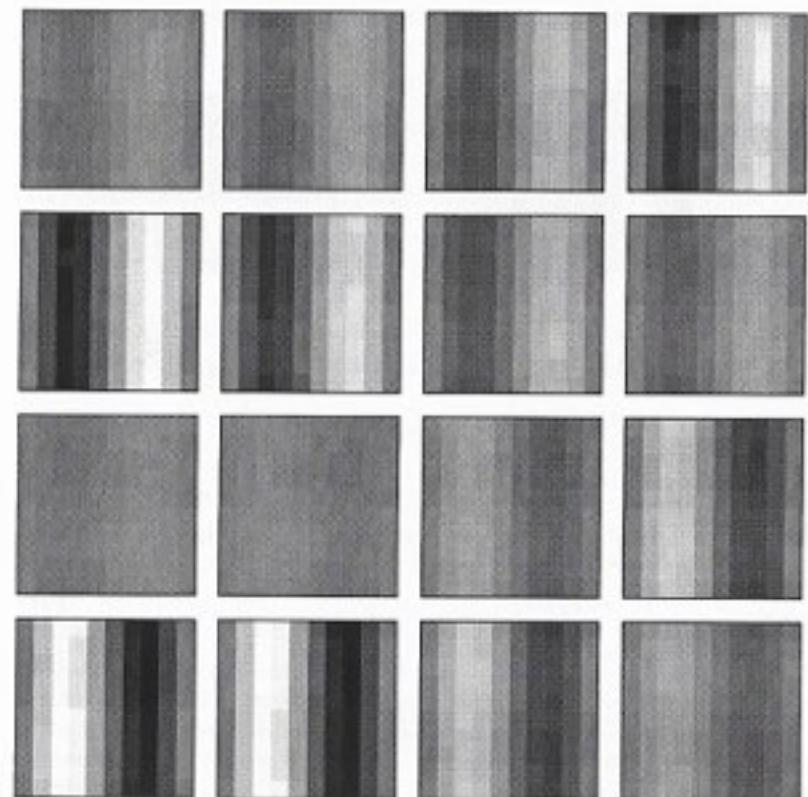


Abbildung 5.8: Ausschnitt des simulierten raumzeitlichen Signals der Kodimension-II Instabilität.

### 5.2.2 Datenanalyse

#### Relevanter Unterraum

Der zweidimensionale relevante Unterraum wird wieder durch zwei KL-Moden aufgespannt. Sie sind in Abb. 5.9 dargestellt. Ihre Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 0,987$  und  $\lambda_2 = 0,013$ .



Abbildung 5.9: KL-Moden des simulierten Datensatzes.

#### Aufstellen des Potentials

Für eine angenommene Kodimension-II Instabilität mit der entsprechenden Spiegel-Symmetrie erhalten wir als least-square-fit Potential  $V$ ,

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ V_1 &= \frac{\langle (\dot{\xi}_1 - r\xi_2)^2 \rangle}{\langle \dot{\xi}_1^2 \rangle} \\ V_2 &= \frac{\langle (\dot{\xi}_2 - \mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2 - c\xi_1^2 - d\xi_1^2 \xi_2)^2 \rangle}{\langle \dot{\xi}_2^2 \rangle} \end{aligned} \quad (5.17)$$

#### Nichtlineares Problem

Nach Elimination der Koeffizienten  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $c$  und  $d$  und Einsetzen in das Potential  $V$  erhalten wir folgende Terme:

$$\begin{aligned} V_1(u_1^+, u_2^+) &= 1 - \frac{\langle \dot{\xi}_1 \xi_2 \rangle^2}{\langle \dot{\xi}_1^2 \rangle \langle \dot{\xi}_2^2 \rangle} \\ V_2(u_1^+, u_2^+) &= 1 - \frac{1}{\langle \dot{\xi}_2^2 \rangle} M^{-1}[u_1^+, u_2^+] (\langle y[u_1^+, u_2^+] \rangle)^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

### 5.2. KODIMENSION-II INSTABILITÄT

mit

$$y[u_1^+, u_2^+] = \left( \langle \dot{\xi}_2 \xi_1 \rangle, \langle \dot{\xi}_1 \xi_2 \rangle, \langle \dot{\xi}_1 \xi_1^2 \rangle, \langle \dot{\xi}_2 \xi_2^2 \rangle \right)^T \quad (5.19)$$

und

$$M[u_1^+, u_2^+] = \begin{pmatrix} \langle \dot{\xi}_1^2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1 \xi_2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^4 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^2 \xi_2 \rangle \\ \langle \dot{\xi}_1 \xi_2 \rangle & \langle \dot{\xi}_2^2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^3 \xi_2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^2 \xi_2^2 \rangle \\ \langle \dot{\xi}_1^4 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^3 \xi_2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^6 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^3 \xi_2 \rangle \\ \langle \dot{\xi}_1^2 \xi_2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^2 \xi_2^2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^3 \xi_2 \rangle & \langle \dot{\xi}_1^4 \xi_2^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Die auftretenden Korrelationen können wieder als Multilinearformen von Korrelationsoren und den Moden  $u_1^+$  und  $u_2^+$  geschrieben werden.

Als Nebenbedingungen, die die mögliche Skalierung der Amplituden  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$  festlegen, können wir fordern:

$$\langle \xi_1^2 \rangle = c_1, \quad \langle \xi_2^2 \rangle = c_2. \quad (5.21)$$

Für die zweidimensionalen Vektoren  $u_1^+$  und  $u_2^+$  ergeben sich nach Berücksichtigung der Nebenbedingungen die Vektoren als Funktion von zwei Winkeln  $\phi$  und  $\theta$ :

$$u_1^+ = \sqrt{c_1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1/2} \cos \phi \\ \lambda_2^{-1/2} \sin \phi \end{pmatrix}, \quad u_2^+ = \sqrt{c_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1/2} \cos \theta \\ \lambda_2^{-1/2} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

wobei  $\lambda_i$  die Eigenwerte der KL-Entwicklung darstellen.

Das Potential  $V(\phi, \theta)$  hängt somit nur noch von den beiden Winkeln ab und zeigt die Symmetrien eines Torus:

$$V_u(\phi, \theta) = V_u(\phi + \pi, \theta) = V_u(\phi, \theta + \pi). \quad (5.23)$$

In Abb. 5.10 ist das resultierende Potential  $V(\phi, \theta)$  im Bereich  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  und  $0 < \theta < \pi$  dargestellt. Deutlich zu erkennen ist wieder ein ausgeprägtes Minimum in der glatten Potentiallandschaft. Sowohl die dem Minimum entsprechenden Koeffizienten als auch die räumlichen Moden stimmen exakt mit denen der Simulation überein.

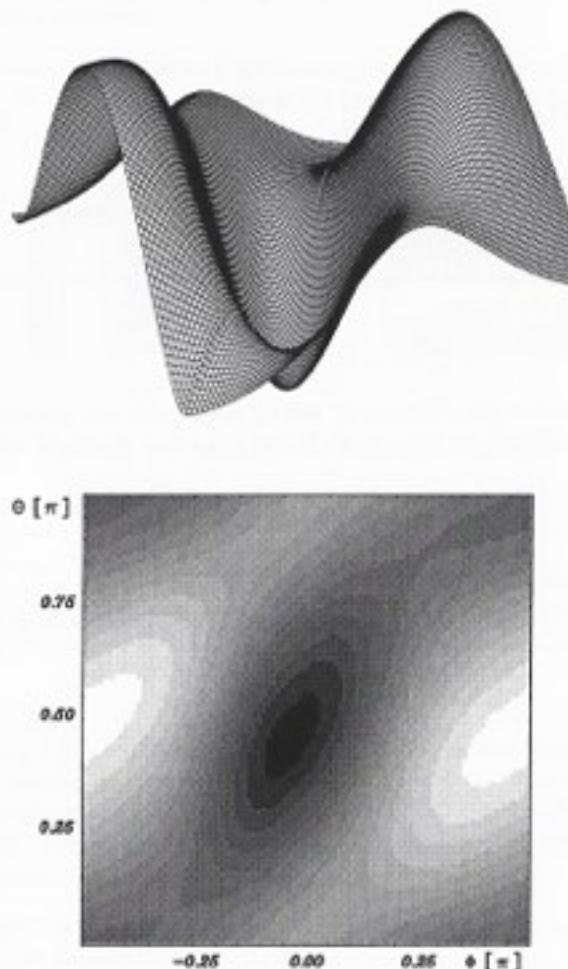


Abbildung 5.10: Das Potential  $V(\phi, \theta)$  des simulierten Beispiels in Grauwertdarstellung und als Zentralprojektion der dreidimensionalen Darstellung.

## Kapitel 6

### Rayleigh-Bénard Instabilität

In diesem und dem nächsten Kapitel wollen wir anwendungsnähere Beispiele unserer raumzeitlichen Datenanalyse vorführen. Wir wählen dazu Beispiele aus der Hydrodynamik, da dies eine Paradodisziplin zum Studium von Strukturbildung komplexer selbstorganisierter Systeme darstellt und daher auch im Rahmen der Synergetik ein Schwerpunkt der Forschung bildet [10, 23, 55].

Wir werden exemplarisch zwei hydrodynamische Instabilitäten vorstellen – in diesem Kapitel die Rayleigh-Bénard Instabilität mit dem Auftreten eines Ordnungsparameters und im nächsten Kapitel eine Instabilität zweier Ordnungsparameter, die zu den sogenannten „blinking-states“ führt. Nach ihrer theoretischen Behandlung werden wir unsere raumzeitliche Analyse auf simulierte Daten dieser Instabilitäten demonstrieren [68, 70].

#### 6.1 Einführung

Das zugrundeliegenden Experiment geht auf Bénard um das Jahr 1900 [8] zurück: Erhitzt man eine Flüssigkeitsschicht, die sich zwischen zwei horizontalen Platten befindet, von unten, so können sich ab einem kritischen Temperaturgradienten  $\beta_c$  spontan Strukturen in der Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit ausbilden (vgl. schematische Abbildung 6.1). In Abhängigkeit von der Geometrie der Platten können Rollenmuster oder hexagonale Muster entstehen.

Der zugrundeliegende physikalische Mechanismus ist klar: Die wärmeren Flüssigkeitsteilchen in der Nähe der unteren Platte haben die Tendenz aufzusteigen, die kälteren Flüssigkeitsteilchen an der oberen Platte die Tendenz abzusinken. Unterhalb des kritischen Temperaturgradienten sind die Auftriebskräfte zu gering, um die

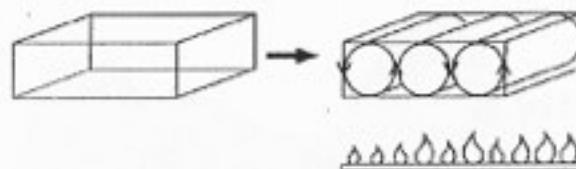


Abbildung 6.1: Schematische Versuchsaufbau des Bénard-Experiments

innere Reibung der Flüssigkeit zu überwinden, der Wärmetransport von der unteren zu der oberen Platte findet nur durch Wärmeströmung statt, makroskopisch gesehen bleibt die Flüssigkeit dabei in Ruhe. Oberhalb des kritischen Temperaturgradienten überwiegen die Auftriebskräfte die Reibungskräfte und der Wärmetransport erfolgt über eine Bewegung der Flüssigkeit. Interessant ist, daß diese Flüssigkeitbewegung geordnet stattfindet und daß sich Rollen oder Hexagone ausbilden. Im Rahmen der synergetischen Behandlung wird ersichtlich, wie es zu dieser Strukturbildung kommt.

## 6.2 Theoretische Behandlung

Die mathematische Behandlung erfolgt mit den Methoden der Synergetik, wie sie in Abschnitt 2.2 vorgestellt wurden. Dabei orientieren wir unsere Ausführungen an [24, 37].

### 6.2.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Ausgangspunkt sind die Grundgleichungen der Hydrodynamik, die sich aus Erhaltungssätzen ableiten lassen [52]:

1. Aus der Impulserhaltung folgt die Navier-Stokes-Gleichung, die Bewegungsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(r, t)$ ,

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F} \quad , \quad (6.1)$$

## 6.2. THEORETISCHE BEHANDLUNG

wobei  $\rho(r, t)$  die Massendichte,  $p(r, t)$  der hydrostatische Druck und  $\mathbf{F}(r, t)$  die Volumenkraftdichte darstellen. Sie ist im folgenden  $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$ , da wir unser System im Schwerfeld der Erde betrachten.  $\eta$  ist eine Materialkonstante, die die Viskosität der Flüssigkeit beschreibt.

2. Aus der Energieerhaltung folgt die Wärmeleitungsgleichung,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T \quad , \quad (6.2)$$

für die Temperaturverteilung  $T(r, t)$  in Abhängigkeit von einer zweiten Materialkonstante, dem Wärmeleitungscoefficienten  $\kappa$ .

3. Aus der Massenerhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (6.3)$$

Im folgenden gehen wir von der Boussinesq-Näherung aus [16, 18], d.h. wir vernachlässigen sowohl die Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten  $\eta$  und  $\kappa$  als auch der Dichte  $\rho$  mit Ausnahme des Kraftterms  $\rho \mathbf{F}$ , in der eine lineare Temperaturabhängigkeit,

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_u)) \quad , \quad (6.4)$$

angenommen wird. Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich dann zu einer Inkompressibilitätsbedingung,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(r, t) = 0 \quad . \quad (6.5)$$

Um das sich später ergebende lineare Eigenwertproblem exakt lösen zu können, nehmen wir für die untere ( $z_0 = 0$ ) und obere Platte ( $z_0 = d$ ) freie Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld an:

$$v_z(z_0) = \frac{\partial v_z}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial v_z}{\partial x}(z_0) = 0 \quad \text{für} \quad z_0 = 0, d \quad . \quad (6.6)$$

Für die Temperaturverteilung an unterer und oberer Platte soll gelten:

$$T(z_0 = 0) = T_u \quad , \quad T(z_0 = d) = T_o \quad . \quad (6.7)$$

In  $x$ - und  $y$ -Richtung nehmen wir periodische Randbedingungen an.

### 6.2.2 Der stationäre Grundzustand

Der Zustandsvektor  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$  des Systems ist durch das Geschwindigkeits-, das Temperatur- und das Druckfeld gegeben:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \\ T(\mathbf{r}, t) \\ p(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} . \quad (6.8)$$

Als stationärer Grundzustand  $\mathbf{Q}_0$  ergibt sich,

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{r}) &= 0 \\ T_0(z) &= T_0 - \beta z \\ p_0(z) &= p(0) - g\rho_0 z(1 + \frac{\alpha\beta}{2}z) \end{aligned} , \quad (6.9)$$

mit dem Temperaturgradienten  $\beta = (T_v - T_s)/d$ . Im folgenden werden Abweichungen aus diesem stationären Zustand behandelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ T(\mathbf{r}, t) &= T_0(z) + \Theta(\mathbf{r}, t) \\ p(\mathbf{r}, t) &= p_0(z) + \rho_0 w(\mathbf{r}, t) \end{aligned} . \quad (6.10)$$

Aus den Gleichungen (6.1) - (6.3) ergeben sich die Grundgleichungen für diese Abweichungen zu:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla w + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho_0 g \alpha \Theta \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \Theta &= \kappa \Delta \Theta + \beta u_z \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} . \quad (6.11)$$

### 6.2.3 Die dimensionslosen Grundgleichungen

In der Hydrodynamik ist es üblich dimensionslose Gleichungen zu behandeln. Dies hat den Vorteil theoretische Aussagen für beliebige Flüssigkeiten und Gefäßdimensionen treffen zu können. Skaliert werden die Zeit, die Längen, Geschwindigkeit, Temperatur- und Druckabweichungen mit Systemparametern wie der vertikalen Diffusionszeit, der Schichtdicke, dem Temperaturgradienten und der Viskosität. Die Transformationsgleichungen lauten [18]

$$t = \frac{d^2}{\kappa} t' , \quad z_i = dx'_i , \quad u_i = \frac{\kappa}{d} u'_i , \quad \Theta = \beta d \Theta' , \quad w = \frac{\eta \kappa}{d^2} . \quad (6.12)$$

### 6.2. THEORETISCHE BEHANDLUNG

Daraus ergeben sich die dimensionslosen Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla w + \Delta \mathbf{u} + R \Theta \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \Theta &= \Delta \Theta + u_z \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} , \quad (6.13)$$

wobei die Striche wieder weggelassen wurden und die dimensionslosen Größen Prandtl-Zahl  $Pr$  und Rayleigh-Zahl  $R$  eingeführt wurden:

$$Pr = \frac{\eta}{\rho_0 \kappa} , \quad R = \frac{\rho_0 \alpha \beta g d^4}{\eta \kappa} . \quad (6.14)$$

Die Prandtl-Zahl hängt nur von der Flüssigkeit ab, die Rayleigh-Zahl ist proportional zum Temperaturgradienten  $\beta$  und kann daher als Kontrollparameter des Systems angesehen werden.

### 6.2.4 Lineare Stabilitätsanalyse

Wir wollen hier den Fall großer Prandtl-Zahlen behandeln ( $Pr \rightarrow \infty$ ), was einer adiabatischen Elimination der Navier-Stokes-Gleichung entspricht. Die linearisierten Gleichungen in dieser Näherung lauten:

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla w + R \Theta \mathbf{e}_z = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \Delta \Theta - u_z = 0 \quad (6.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (6.17)$$

Folgender Ansatz löst die linearen Gleichungen (6.15), (6.16) und (6.17), unter Berücksichtigung der freien Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u_{1,l} &= U_{1,k_l} \cos(\pi l z) e^{ikx} e^{\lambda t} \\ u_3 &= U_{3,k_l} \sin(\pi l z) e^{ikx} e^{\lambda t} \\ \Theta &= \theta_{k_l} \sin(\pi l z) e^{ikx} e^{\lambda t} \\ w &= W_{k_l} \cos(\pi l z) e^{ikx} e^{\lambda t} \end{aligned} , \quad (6.18)$$

mit  $l = 1, 2, \dots$  und den zweidimensionalen Vektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \quad (6.19)$$

Aus den Gleichungen der ersten und zweiten Komponente der Gl. (6.15) und der Gl. (6.17) folgt für  $W_{k,l}$ :

$$k^2 W_{k,l} = -\pi l U_{2k,l} (k^2 + \pi^2 l^2) \quad . \quad (6.20)$$

Eingesetzt in die dritte Komponente der Gl. (6.15) erhalten wir folgende Beziehung:

$$U_{2k,l} = \frac{k^2}{(k^2 + \pi^2 l^2)^2} R \Theta \quad . \quad (6.21)$$

Berücksichtigen wir diese Gleichung in Gl. (6.16) ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung für  $\Theta$  mit dem Eigenwertspektrum  $\lambda(k, l)$ ,

$$\lambda(k, l) = -(k^2 + \pi^2 l^2) + \frac{R k^2}{(k^2 + \pi^2 l^2)^2} \quad . \quad (6.22)$$

Der homogene stationäre Zustand wird instabil, wenn ein Eigenwert verschwindet, d.h.  $\lambda = 0$ , woraus sich die kritische Rayleigh-Zahl  $R_c$  ergibt zu

$$R_c = \frac{(k^2 + \pi^2 l^2)^2}{k^2} \quad . \quad (6.23)$$

Die Berechnung der ersten Instabilität bei Erhöhung des Kontrollparameters  $R$  liefert  $l = 1$ , und wir erhalten aus der Extremalforderung,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial k^2} = 0 \quad , \quad (6.24)$$

die kritische Wellenzahl  $k_c$  und die kritische Rayleigh-Zahl  $R_c$ ,

$$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad , \quad R_c = \frac{27}{4} \pi^4 \quad . \quad (6.25)$$

### 6.2.5 Nichtlineare Bewegungsgleichungen der Modenamplituden

Im Grenzfall großer Prandtl-Zahlen erhalten wir als einzige nichtlineare Gleichung (vgl. Gl. (6.13)), die Gleichung für die Wärmeleitung,

$$\dot{\Theta}(\mathbf{r}, t) = \Delta \Theta(\mathbf{r}, t) + u_0 - (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \nabla) \Theta(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (6.26)$$

Stellt man das Temperaturfeld  $\Theta(\mathbf{r}, t)$  und das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in den Moden des linearen Problems dar,

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k,l} \xi_{k,l}(t) \Theta_{k,l}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k,l} \xi_{k,l}(t) \mathbf{u}_{k,l}(\mathbf{r}) \quad , \end{aligned} \quad (6.27)$$

### 6.2. THEORETISCHE BEHANDLUNG

und setzt es in die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} \dot{\xi}_{k,l}(t) \Theta_{k,l}(\mathbf{r}) &= \sum_{k,l} \lambda(k, l) \xi_{k,l}(t) \Theta_{k,l}(\mathbf{r}) \\ &- \sum_{k' \neq k} \sum_{l' \neq l} \xi_{k',l'}(t) \xi_{k'+l'}(t) (\mathbf{u}_{k',l'} \nabla) \Theta_{k'+l'}(\mathbf{r}) \quad . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Summe über  $k$  auch negative  $k$ -Werte berücksichtigt. Mit Hilfe des Orthogonalitätsbeziehungen,

$$\langle \Theta_{k,l} \Theta_{k',l'} \rangle = \int d^3 r \Theta_{k,l}^*(\mathbf{r}) \Theta_{k',l'}(\mathbf{r}) = \delta_{kk'} \delta_{ll'} \quad , \quad (6.29)$$

lassen sich nun die gekoppelten nichtlinearen Gleichungen der Modenamplituden angeben:

$$\dot{\xi}_{k,l} = \lambda(k, l) \xi_{k,l} - \sum_{k',l'} \sum_{k'',l''} \Gamma_{k,l;k',l''} \xi_{k',l'} \xi_{k'',l''} \quad , \quad (6.30)$$

wobei die Modenkopplung  $\Gamma_{k,l;k',l''}$  durch folgendes Skalarprodukt gegeben ist:

$$\Gamma_{k,l;k',l''} = \langle \Theta_{k,l} (\mathbf{u}_{k',l'} \nabla) \Theta_{k',l''} \rangle \quad . \quad (6.31)$$

Die Auswertung des Skalarprodukts ergibt eine Auswahlregel für die Wellenvektoren,

$$\Gamma_{k,l;k',l''} \propto \delta_{k,k'} \delta_{l,l''} \quad (6.32)$$

und kompliziertere Ausdrücke für  $k, l, l'$  aufgrund des Integrals,

$$\int_0^1 dz \sin(\pi l z) \sin(\pi l' z) \cos(\pi l'' z) = \frac{1}{4} (\delta_{l,l'-l''} - \delta_{l,l'-l''} + \delta_{l,l'+l''}) \quad . \quad (6.33)$$

Wie bereits bei der linearen Analyse gezeigt, ist die erste Instabilität bei Erhöhung des Temperaturgradienten durch  $k = k_c$  und  $l = 1$  gegeben. Daraus resultiert ein Satz von entarteten instabilen Moden, die sich durch verschiedene Richtungen des Vektors  $\mathbf{k}$  mit  $|\mathbf{k}| = k_c$  unterscheiden: verschieden orientierte Rollen in der  $x$ - $y$ -Ebene. Wir wollen uns hier auf das Auftreten nur einer instabilen Mode beschränken, um die Diskussion zu vereinfachen. Dies entspricht einer rechteckigen Berandung der horizontalen Platten, wobei eine Kante sehr viel kürzer als die andere ist. In diesem Fall werden die Rollen parallel zur kürzeren Achse zuerst instabil. Als einzigen Ordnungsparameter des Systems erhalten wir somit:

$$\xi_v = \xi_{k,1} = \xi_{-k,1} \quad . \quad (6.34)$$

Als versklavte stabile Mode, die an den Ordnungsparameter  $\xi_v$  ankoppelt, ergibt sich aufgrund obiger Auswahlregeln die Mode mit  $k = 0$  und  $l = 2$ :

$$\xi_s = \xi_{0,2} \quad . \quad (6.35)$$

Das zugehörige Differentialgleichungssystem lässt sich dann schreiben als,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_u &= \lambda_u \xi_u - \Gamma_{u,uu} \xi_u \xi_s, \\ \dot{\xi}_s &= \lambda_s \xi_s - \Gamma_{s,uu} \xi_u^2 .\end{aligned}\quad (6.36)$$

Die stabile Mode ist vom Ordnungsparameter versklavt, und wir erhalten in erster Näherung eine quadratische Abhängigkeit von  $\xi_u$ :

$$\xi_s \propto \xi_u^2 .\quad (6.37)$$

Daraus resultiert eine Ordnungsparametergleichung mit der Normalform einer Pitchfork-Bifurkation:

$$\dot{\xi}_u = \lambda_u \xi_u - \gamma \xi_u^3 .\quad (6.38)$$

Die Temperaturverteilung  $\Theta(r,t)$  lässt sich somit darstellen als

$$\Theta(r,t) = \xi_u(t) u(r) + \xi_s(t) s(r) ,\quad (6.39)$$

wobei die räumlichen Moden gegeben sind als

$$u(r) = \cos(k_c r) \cos(\pi z) , \quad s(r) = \cos(2\pi z) .\quad (6.40)$$

Wir haben dabei den Wellenvektor  $k_c$  in Richtung der x-Achse gewählt. Die Moden sind in Abb. 6.2 als Schnitt senkrecht zu den Rollen (Schnitt entlang der x-Achse) dargestellt.

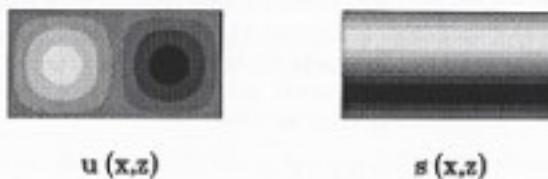


Abbildung 6.2: Die räumlichen Moden  $u(r)$  und  $s(r)$  der Temperaturverteilung  $\Theta(r,t)$ .

### 6.3 Raumzeitliche Simulation

Zur Simulation der raumzeitlichen Temperaturverteilung  $\Theta(r,t)$  für verschiedene Rayleigh-Zahlen  $R = R_c(1+\epsilon)$  haben wir die partielle Differentialgleichung (6.26) numerisch integriert. Dazu wurde zunächst die Gleichung im  $k$ -Raum integriert (Gl. (6.28)) und dann in die x-z-Ebene zurück transformiert. Abb. 6.3 zeigt die zeitliche Entwicklung des räumlichen Temperaturfeldes für verschiedene  $\epsilon$ -Werte. Für fünf verschiedene Zeitpunkte ist die Temperaturverteilung  $\Theta(x,z)$  als Grauwertbild dargestellt. Die Startwerte sind oben dargestellt, die zeitliche Entwicklung läuft von oben nach unten. Für  $\epsilon = -0,10$ , d.h. unterhalb der Schwelle, haben wir als Anfangswert zwei Rollen gewählt. Sie sterben im Laufe der Zeit aus: Unterhalb der kritischen Rayleigh-Zahl ist der homogene stationäre Zustand stabil. Bei den beiden anderen raumzeitlichen Temperaturverteilungen wählten wir den homogenen Zustand als Startwert, und im Laufe der Zeit bilden sich die erwarteten Rollenstrukturen aus.

Diese raumzeitlichen Signale (Auflösung in der Zeit: 1000 Punkte, im Raum:  $20 \times 10$  Punkte) sind Ausgangspunkt für die Datenanalyse, deren Ergebnisse jetzt vorgestellt werden.

### 6.4 Datenanalyse

Zunächst spannen wir wieder den relevanten Unterraum durch die (KL-)Eigenvektoren der Korrelationsmatrix auf. Dabei ergeben sich für alle drei Simulationen zwei KL-Moden mit Eigenwerten der Größenordnung  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 10^{-2}$ . Die restlichen KL-Moden können vernachlässigt werden, da ihre Beiträge zum Signal zu gering sind. Die KL-Moden  $v_1$  und  $v_2$  sind in Abb. 6.4 (die oberen zwei Moden) dargestellt.

Als zu minimierendes least-square-fit Potential  $V$  wählen wir [68]:

$$\begin{aligned}V(s^+, k, \epsilon, \gamma, u^+) &= V_d(s^+, k, u^+) + V_u(\epsilon, \gamma, u^+) \quad (6.41) \\ V_d(s^+, k, u^+) &= \frac{\langle (qs^+ - k(qu^+))^2 \rangle}{\langle (qs^+)^2 \rangle} \\ V_u(\epsilon, \gamma, u^+) &= \frac{\langle (qu^+ - \epsilon qu^+ - \gamma(qu^+)^2) \rangle}{\langle (qu^+)^2 \rangle} ,\end{aligned}$$

d.h. die Summe der quadratischen Abweichungen von einer quadratischen zentralen Mannigfaltigkeit und von einer angenommenen Pitchfork-Bifurkation als Ordnungsparametergleichung. Diese Annahme wird durch die Symmetrie des Systems

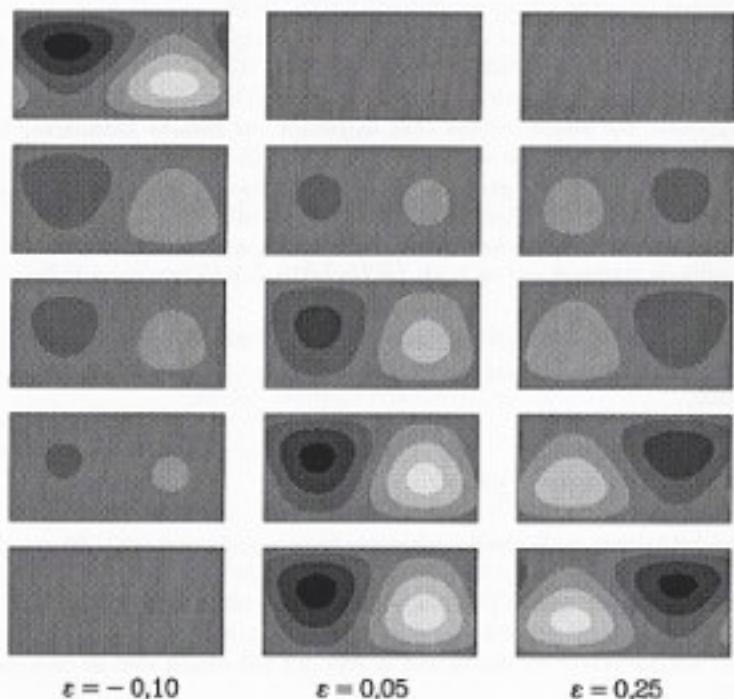


Abbildung 6.3: Zeitliche Entwicklung des räumlichen Temperaturfeldes  $\Theta(x, z, t)$  für verschiedene Rayleigh-Zahlen  $R = R_c(1 + \epsilon)$

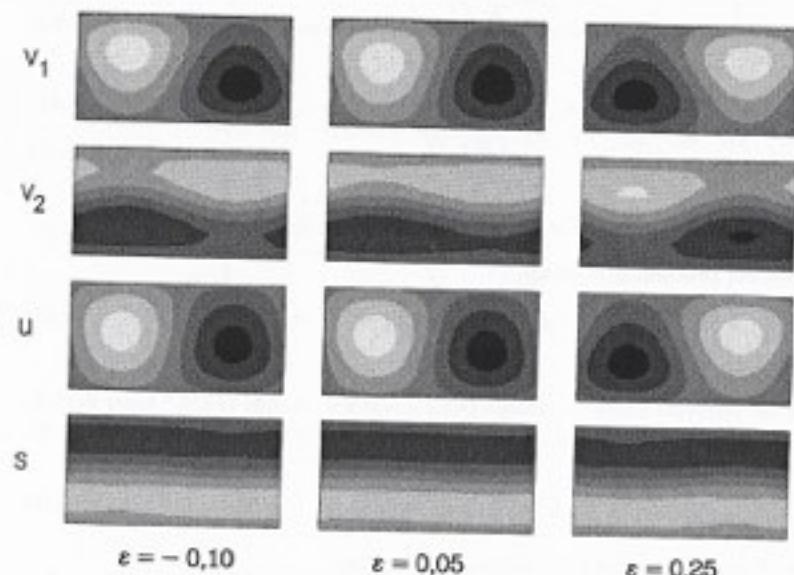


Abbildung 6.4: Die KL-Moden  $v_1$ ,  $v_2$  und die Moden  $u$  und  $s$  als Resultat unserer Analyse.

motiviert. Es kann jedoch auch problemlos ein quadratischer Term in der Ordnungsparametergleichung berücksichtigt werden.

Nach Elimination der Parameter  $s^+, k, \epsilon, \gamma$  als Funktion des instabilen Mode  $u^+$ ,

$$s^+, k, \epsilon, \gamma = F[u^+] \quad , \quad (6.42)$$

ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (6.41) das nichtlineare zweidimensionale Potential  $V = V(u^+)$ :

$$V(u^+) = V_s(u^+) + V_u(u^+) \quad (6.43)$$

$$V_s(u^+) = 1 - \frac{\Gamma_3 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3'}{\Gamma_4'} \quad (6.44)$$

$$V_u(u^+) = 1 - \frac{\Gamma_6'(\Lambda_2')^2 - 2\Gamma_4'\Lambda_4'\Lambda_2' + \Gamma_2'(\Lambda_4')^2}{\Omega_2'(\Gamma_6'\Gamma_2' - (\Gamma_4')^2)}$$

wobei die abkürzende Notation,

$$\Gamma_3 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3' = \Gamma_3 \Gamma_2^{-1} \Gamma_3(: u^+)^4 \quad , \quad \Gamma_4' = \Gamma_4(: u^+)^4 \quad , \quad \dots \quad (6.45)$$

verwendet wurde.

Da der relevante Untervektorraum zweidimensional ist, lässt sich  $u^+$  unter Berücksichtigung der Nebenbedingung,  $\Gamma_2(: u^+)^2 = c_u$ , durch eine Variablen  $\phi$  parametrisieren:

$$u^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{c_u/\lambda_1} \cos \phi \\ \sqrt{c_u/\lambda_2} \sin \phi \end{pmatrix} \quad . \quad (6.46)$$

Das Potential ist somit eindimensional:  $V = V(\phi)$ .

Abb. 6.5 zeigt die berechneten Potentiale  $V(\phi) = V_s(\phi) + V_u(\phi)$  für die verschiedenen Simulationen. Es tritt in allen Fällen ein ausgeprägtes Minimum auf. In den Fällen a) und b) ist das Minimum deutlich tiefer als im Fall c). Dies liegt an der Wahl des Kontrollparameters  $\epsilon = 0,25$ : Vernachlässigte Terme höherer Ordnung in der Ordnungsparametergleichung und der Gleichung der zentralen Mannigfaltigkeit sind hier von größerer Bedeutung als bei den Simulationen  $\epsilon = -0,10$  und  $\epsilon = 0,05$ . Dies äußert sich auch in der Verschiebung der Minima der Terme  $V_s$  und  $V_u$  des Datensatzes c).

Die unteren zwei Moden der Abb. 6.4 repräsentieren die Moden, die dem Minimum der Potentiale  $V(\phi)$  entsprechen. Sie sind in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Moden (vgl. Abb. 6.2) und stellen eine Verbesserung der KL-Moden dar. Die stärkere Abweichung von den theoretischen Moden im Fall  $\epsilon = 0,25$  liegt an der erwähnten Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und der dadurch bedingten „falschen“ Lage des Potentialminimums. Um eine bessere Übereinstimmung

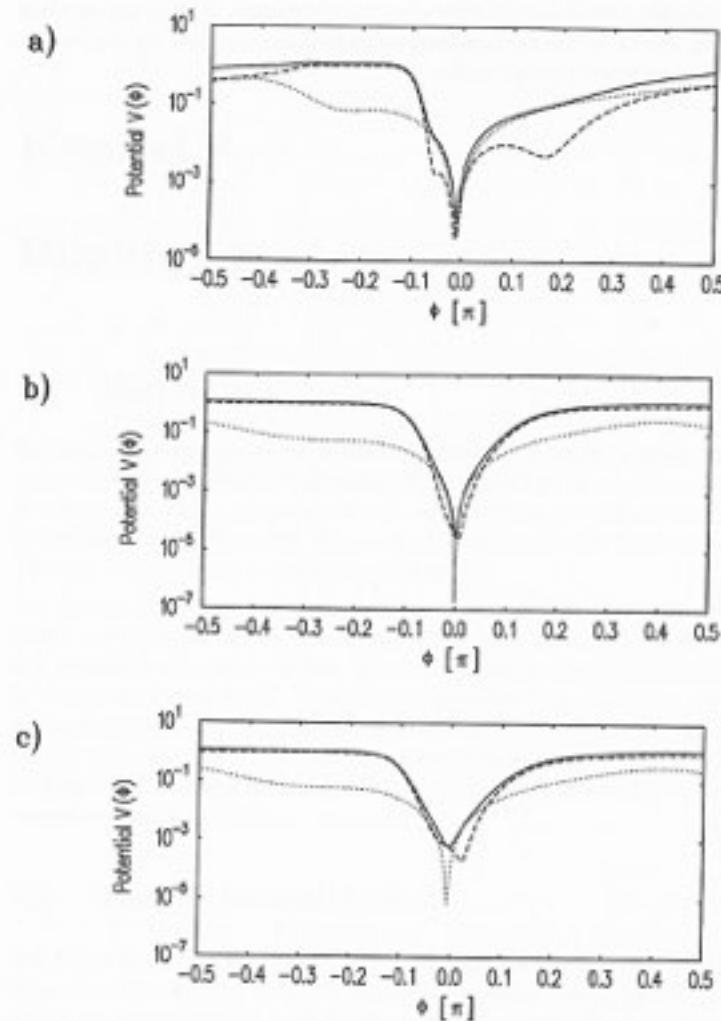


Abbildung 6.5: Potential  $V(\phi) = V_s(\phi) + V_u(\phi)$  für  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  der Simulationen: a)  $\epsilon = -0,10$ , b)  $\epsilon = 0,05$ , c)  $\epsilon = 0,25$ . (Durchgehenden Linie: Potential  $V$ , gestrichelte Linie:  $V_s$ , gepunktete Linie:  $V_u$ .)

mit den theoretischen Moden im Falle  $\epsilon = 0,25$  zu erhalten, müßten höhere Nichtlinearitäten sowohl in der Ordnungsparametergleichung als auch für die zentrale Mannigfaltigkeit berücksichtigt werden.

## Kapitel 7

### Blinking States

#### 7.1 Einführung

Experimentell kann man bei der Konvektion binärer Mischungen interessante Phänomene von laufenden Wellen beobachten [9]. So kann z.B. in schmalen rechteckigen Behältern Konvektion eintreten, die nur auf eine Hälfte der Schicht beschränkt ist („Confined State“): Im linken Teil des Behälters entsteht eine linkslaufende Welle, während die Flüssigkeit in der anderen Hälfte ruht.

Die nächste Bifurkation zeigt eine Oszillation dieser Confined States. Linkskoalisierte linkslaufende Wellen und rechtskoalisierte rechtslaufende Wellen wechseln sich periodisch ab. Diese Struktur wurde als „Blinking State“ bezeichnet [21, 50]. In diesem Kapitel wird eine Ordnungsparametergleichung vorgestellt, die sich aus den hydrodynamischen Grundgleichungen mit den Methoden der Synergetik ableiten läßt [10] - [12] und die die Phänomene der Blinking States zeigt. Mithilfe dieser Modellgleichung werden wir ein raumzeitliches Signal simulieren und die Daten mit unserer vorgestellten Methode analysieren [70].

#### 7.2 Theoretisches Modell

Wir folgen hier den Ausführungen in [10]. Ausgangspunkt sind die hydrodynamischen Grundgleichungen, die wir in Kapitel 6 eingeführt haben. Um die binäre Mischung zu charakterisieren, muß eine zusätzliche Zustandsgröße eingeführt werden, z.B. die relative Konzentration  $C$  einer Komponente der Flüssigkeit. Die erweiterte Boussinesq-Näherung für die Dichte der Mischung lautet:

$$\rho(C, T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) - \gamma(C - C_0)) \quad , \quad (7.1)$$

wobei  $C_u$  die relative Konzentration an der unteren Platte darstellt.  $\gamma$  gibt die konzentrationsabhängige Dichteänderung an. Der Soret-Effekt [58] sorgt für eine Kopplung des Konzentrationsgradienten mit dem Temperaturgradienten:

$$\Delta C = -s_T \Delta T \quad . \quad (7.2)$$

Die Proportionalitätskonstante  $s_T$  wird als Soret-Koeffizient bezeichnet. Eine Skalierung auf die zugehörige dimensionslose Größe liefert den sogenannten „separation-ratio“  $S$ ,

$$S = \frac{\alpha}{\gamma} s_T \quad , \quad (7.3)$$

und stellt einen zweiten Kontrollparameter des Systems dar.

Um separierte Randbedingungen zu erhalten, ist es von Nutzen, das sogenannte zusammengesetzte Feld  $\eta$ ,

$$\eta = -C - \Theta \quad , \quad (7.4)$$

einzuführen. Die hydrodynamischen Grundgleichungen lauten nun,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Re_3[(1+S)\Theta - S\eta] \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \Theta &= \Delta \Theta + v_z \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \eta &= L \Delta \eta - \Delta \Theta \\ \nabla \mathbf{v} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (7.5)$$

wobei die Lewis-Zahl  $L$  das Verhältnis von Massendiffusion zu Wärmediffusion angibt.

In [10] wird eine komplexe Ordnungsparametergleichung mit einer eindimensionalen Ortsabhängigkeit angegeben, die sich unter gewissen Näherungen aus den hydrodynamischen Grundgleichungen herleiten lässt. Es handelt sich dabei um folgende partielle Differentialgleichung:

$$\partial_t \Psi(x, t) = [\epsilon + i\omega - i\alpha(1 + \partial_x^2) - (1 + \partial_x^2)^2] \Psi(x, t) + F[\Psi, \Psi^*, \partial_x^m \Psi, \partial_x^m \Psi^*] \quad . \quad (7.6)$$

Dabei beschreibt der Realteil von  $\Psi$  die Temperaturabhängigkeit  $\Theta(x, t)$ . Wählt man für das nichtlineare Funktional  $F[\Psi, \Psi^*, \partial_x^m \Psi, \partial_x^m \Psi^*]$  den kubischen Term  $F = -|\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t)$  und integriert obige partielle Differentialgleichung numerisch mit den Randbedingungen,

$$\Psi(x_0, t) = \partial_x \Psi(x_0, t) = 0 \quad , \quad x_0 = 0, l \quad , \quad (7.7)$$

so lassen sich bei entsprechender Wahl der Koeffizienten die in Abschnitt 7.1 beschriebenen Phänomene modellieren. Wir werden uns im folgenden auf die Blinking States beschränken.

### 7.3 Raumzeitliche Simulation und Analyse

Abb. 7.1 zeigt den Realteil des simulierten raumzeitlichen Signals,  $\text{Re}(\Psi(x, t))$ , für die Parameterwerte  $\epsilon = 0, 1$ ,  $\alpha = 0, 4$ ,  $\omega_c = 1, 2$  und  $l = 31$  (mit einer räumlichen Diskretisierung von 50 Punkten). Das beschriebene oscillatorische Wechselspiel zwischen linksorientierter linkslaufender Welle und rechtsorientierter rechtslaufender Welle ist gut zu erkennen.

Eine theoretische Untersuchung [11], [12] des Modells liefert zwei instabile Moden ( $u_1(x)$  und  $u_2(x)$ ) mit unterschiedlicher Parität, die die Dynamik des Systems beschreiben,

$$\Psi(x, t) = \xi_1(t) u_1(x) + \xi_2(t) u_2(x) + \mathcal{O}(\xi_a^3) \quad . \quad (7.8)$$

Die Amplitudendynamik der instabilen Moden ist durch folgendes gewöhnliches Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= [\lambda_1 - a_{11} |\xi_1(t)|^2 - a_{12} |\xi_2(t)|^2] \xi_1(t) - b_1 \xi_1^2(t) \xi_1''(t) + \mathcal{O}(\xi_a^3) \\ \dot{\xi}_2(t) &= [\lambda_2 - a_{21} |\xi_1(t)|^2 - a_{22} |\xi_2(t)|^2] \xi_2(t) - b_2 \xi_2^2(t) \xi_2''(t) + \mathcal{O}(\xi_a^3) \end{aligned} \quad . \quad (7.9)$$

Untersucht man das raumzeitliche Signal mithilfe der KL-Entwicklung, so erhält man zwei dominante räumliche Moden  $v_1(x), v_2(x)$ , deren zugehörige komplexe Amplituden in Abb. 7.2 dargestellt sind. Abb. 7.3 zeigt den Beitrag der KL-Moden zum Signal. Es ist keine Symmetrie der KL-Moden erkennbar, und sie entsprechen auch nicht den theoretischen Moden. Es ist daher sinnvoll das Signal mit der von uns vorgestellten Methode zu untersuchen. Wir haben dazu ein least-square-fit Potential aufgestellt und die mittleren quadratischen Abweichungen von den erwarteten Ordnungsparametergleichungen (7.9) minimiert. Abb. 7.4 zeigt die aus dem Minimum erhaltenen komplexen Amplituden  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$  und in Abb. 7.5 sind die Beiträge der aus dem Minimum berechneten Moden zum Signal dargestellt. Die Moden entsprechen den theoretisch vorhergesagten, wobei auch die Symmetrie der Moden klar erkennbar ist.

Dieses Beispiel zeigt somit eine weitere Stärke unseres Verfahrens im Vergleich zur Analyse mithilfe der KL-Entwicklung: Die Symmetrie der Moden kann bei der KL-Entwicklung verloren gehen. Damit ist eine (physikalische) Interpretation der Moden sehr viel schwieriger als im Fall unserer Analyse, bei der gleichzeitig räumliche Moden und Koeffizienten, die die zugrundeliegende Dynamik beschreiben, gesucht werden.

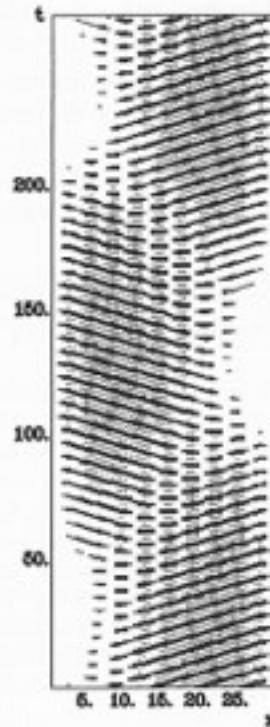


Abbildung 7.1: Realteil des simulierten raumzeitlichen Signals  $\text{Re}(\Psi(x,t))$ . Die Darstellung erfolgt in drei Graustufen: weiß für Werte nahe Null, schwarz für große, positive Werte, und grau für kleine, negative Werte.

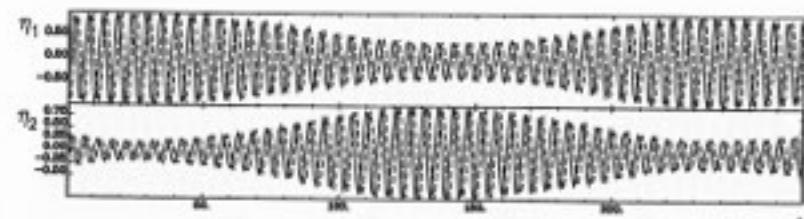


Abbildung 7.2: Komplexe Amplituden  $\eta_1(t)$  und  $\eta_2(t)$  der KL-Moden. Realteil: durchgezogene Linie, Imaginärteil: gestrichelt.

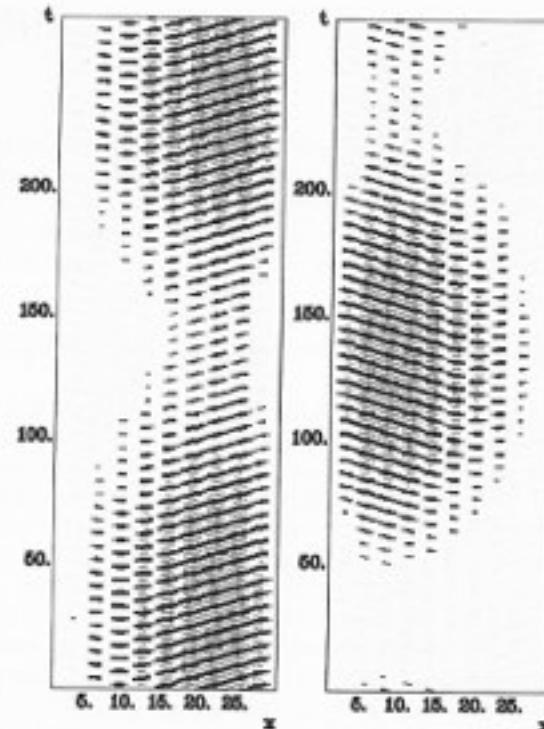


Abbildung 7.3: Realteil der Beiträge der KL-Moden  $\text{Re}(\eta_1(t)v_1(x))$  und  $\text{Re}(\eta_2(t)v_2(x))$  zum Signal  $\text{Re}(\Psi(x,t))$

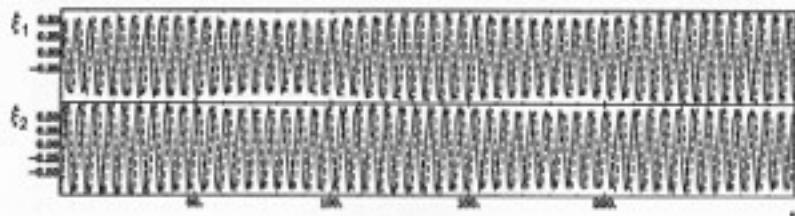


Abbildung 7.4: Komplexe Amplituden  $\xi_1(t)$  und  $\xi_2(t)$  der Moden aus der raumzeitlichen Analyse. Realteil: durchgezogene Linie, Imaginärteil: gestrichelt.

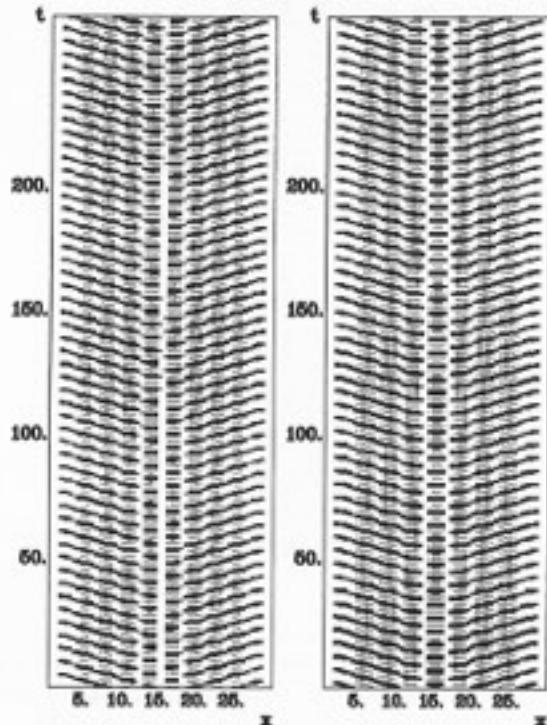


Abbildung 7.5: Realteil der Beiträge der aus dem least-square-fit bestimmten Moden  $\text{Re}(\xi_1(t)u_1(x))$  und  $\text{Re}(\xi_2(t)u_2(x))$  zum Signal  $\text{Re}(\Psi(x,t))$ .

## Kapitel 8

# EEG–Datenanalyse epileptischer Anfälle

Bevor wir die Ergebnisse der Untersuchung der Daten präsentieren (Abschnitt 8.5, 8.6), gehen wir zunächst auf allgemeine medizinische Grundlagen der Epilepsie ein [54, 63] und beschreiben kurz elektroenzephalographische Messungen. In Abschnitt 8.3 erläutern wir als Motivation einen Zugang zum Verständnis des menschlichen Gehirns auf der Grundlage der Theorie komplexer Systeme.

## 8.1 Epilepsie: medizinische Grundlagen

Epilepsie leitet sich aus dem griechischen Ausdruck für „über etwas hereinbrechen“ ab und weist damit auf Symptome der Krankheit hin: plötzlich einsetzende, vorübergehende Funktionsstörungen des Organismus. Diese Störungen können sowohl die Muskeltätigkeit als auch den Bereich der Wahrnehmung und die vegetativen Versorgungs- und Entsorgungssteile des Organismus betreffen. Sie ist eine relativ häufig auftretende Krankheit, v.a. im Kindesalter und der Adoleszenz. So besteht bei ca. 10 % der Menschen die lateste Bereitschaft zum Ausbruch, 4 - 5 % erleiden tatsächlich einen Anfall. Ungefähr 3/4 dieser Anfälle sind akute Epilepsien: Das sind Krämpfe, die zusätzlich zu einer Grunderkrankung, wie z.B. bei fiebigen Erkrankungen, Stoffwechselstörungen oder Hirnhautentzündungen, auftreten und mit dem Abklingen der Grunderkrankung verschwinden. Die restlichen 1% leiden an chronischen Epilepsien: die erwähnten Symptome treten hier sehr viel häufiger auf und können den Patienten sein Leben lang begleiten.

Das Auftreten der Epilepsie ist durch Fehlleistungen des Gehirns bedingt, deren Ursachen noch unklar sind. Ziel der Epilepsieforschung ist es, diese Ursachen zu

verstehen und Behandlungsmöglichkeiten zu verbessern. Ein Bereich der Epilepsieforschung beschäftigt sich mit der Klassifikation epileptischer Anfälle, die einerseits auf die Analyse von EEG-Daten, andererseits auf Beobachtung der Verhaltensstörungen des Patienten beruhen. Es wird grob zwischen zwei Klassen unterschieden: Partialanfälle und generalisierte Anfälle. Die Partialanfälle, die auch als fokale oder lokale Anfälle bezeichnet werden, zeichnen sich durch eine anfängliche Beschränktheit der epileptischen Aktivität auf einen begrenzten Teil der Hirnhemisphäre aus. Dagegen erstreckt sich die epileptische Aktivität bei generalisierten Anfällen von Beginn an auf alle Bereiche beider Hirnhemisphären. Wir untersuchten zwei EEG-Datensätze von „Absences“, die den generalisierten Anfällen zugeordnet werden. Eine einfache Absence zeichnet sich durch eine „Bewußtseinspause“ aus, in der der Patient seine gerade ausgeübte Tätigkeit plötzlich unterbricht und nach dem Ende des Anfalls wieder aufnimmt. Der Patient verliert dabei die Erinnerung (Amnesie) an den Zeitraum des Anfalls, der in der Regel nicht länger als 20 - 30 Sekunden andauert. Um die Absence von größeren Krämpfen abgrenzen, wird auch häufig der Begriff des „petit mal“ benutzt.

## 8.2 Elektroenzephalogramme

Wie gerade beschrieben ist das Elektroenzephalogramm (EEG) ein wichtiges Hilfsmittel für die Diagnose von Epilepsien. Dazu werden Elektroden auf der Kopfhaut fixiert und die auftretenden Potentialdifferenzen gemessen, die aus intra- und extrazellulären Ionenströmen resultieren. Diese entstehen durch lokale Potentialgradienten, die einerseits durch transmembranöse Ionenströme und andererseits durch synaptische Prozesse verursacht werden. Über die an der Kopfhaut abgeleiteten Potentiale lassen sich Aussagen über den aktuellen Funktionszustand der Hirnrinde (Cortex) treffen.

Abb. 8.1 veranschaulicht die Zuordnung der einzelnen Elektroden zu den verschiedenen Bereichen des Cortex. (A) zeigt die Zuordnung sensorischer und motorischer Systeme zu Bereichen des Cortex. (B) zeigt die verschiedenen Felder der Hirnrinde, eingeteilt nach topographischen Gesichtspunkten. In (C) ist die Anordnung der Elektroden nach dem internationalen 10 - 20 System dargestellt. Die Punkte in (B) verdeutlichen die Bereiche, die durch die einzelnen Elektroden repräsentiert werden.

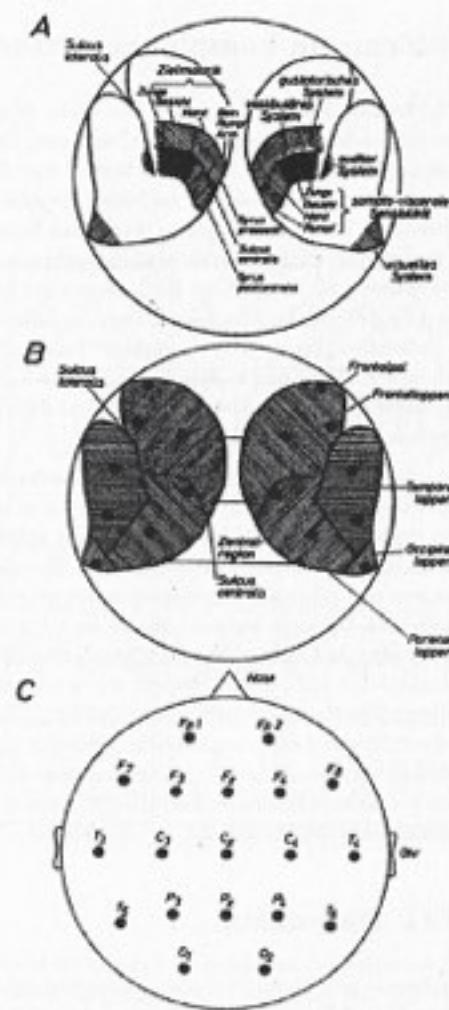


Abbildung 8.1: (A) Beziehung zwischen der corticalen Repräsentation des sensorischen und motorischen Systems, (B) den Hirnrindenfeldern und (C) den Elektrodenpositionen für EEG-Ableitungen von der Schädeloberfläche nach dem internationalen 10 - 20 System (aus [63]).

### 8.3 Das Gehirn: ein komplexes System

H. Haken zeigte in [42] formale Analogien zwischen dem Laser, einem physikalischen Beispiel eines strukturbildenden komplexen Systems, und dem Gehirn. Einerseits stellt das menschliche Gehirn ein äußerst komplexes System dar: Es besteht aus ca. zehn Milliarden Komponenten, den Neuronen. Im Mittel ist jedes dieser Neuronen mit 10000 anderen Neuronen über die sogenannten Axone und Synapsen verbunden. Andererseits treten auch formal ähnliche Strukturbildungsphänomene auf: z.B. das Auftreten kohärenter Wellen („ $\alpha$ -Wellen“ bei EEG-Messungen von ruhenden entspannten Probanden und als formales Analogon kohärentes Laserlicht) und pulsartige Erecheinungen (kollektive „Spitze-Welle-Komplexe“ beim epileptischen Anfall und Pulstätigkeit des Lasers). Diese und weitere Analogien lassen den Schluss zu, daß es u.U. möglich sein könnte spezielle Phänomene des Gehirns mithilfe synergetischer Konzepte zu beschreiben.

Da keine mikroskopischen oder mesoskopischen Gleichungen für das komplexe System des menschlichen Gehirns angegeben werden können, ist es sinnvoll, zunächst von makroskopischen Beobachtungen, wie es z.B. EEG - oder MEG - Daten darstellen, auszugehen und diese zu untersuchen. So wurden z.B. Datensätze im Hinblick auf fraktale Dimensionen und Ljapunov-Exponenten untersucht [6, 31]. Zum Studium der zugrundeliegenden Dynamik wurden mithilfe der KL-Entwicklung sowohl EEG-Daten von  $\alpha$ -Wellen und epileptische Anfällen untersucht [22, 25, 28, 67] als auch Phasenübergänge bei MEG-Daten [30, 46] von Koordinationsexperimenten studiert. Bei neueren Arbeiten zur Untersuchung von EEG-Daten epileptischer Anfälle [26] wurde das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren zur Analyse raumzeitlicher Daten verwandt, mit einem leicht modifizierten least-square-fit Potential auch für MEG-Daten von Koordinationsexperimenten [47]. In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse aus [26] dargestellt.

### 8.4 Die EEG-Datensätze

Ausgangspunkt sind zwei raumzeitliche EEG-Datensätze, abgeleitet während eines epileptischen „petit mal“ Anfalls, die in Abb. 8.2 und Abb. 8.3 durch die durchgezogene Linie dargestellt sind. Die gestrichelte Linie stellt das Ergebnis unseres Modells dar und wird später erklärt.

Die beiden Datensätze wurden uns freundlicher Weise von Prof. D. Lehmann zur Verfügung gestellt. Deutlich zu erkennen bei beiden Datensätzen ist einerseits das charakteristische „spike-wave“ (Spitze-Welle) Verhalten, andererseits das Auftreten

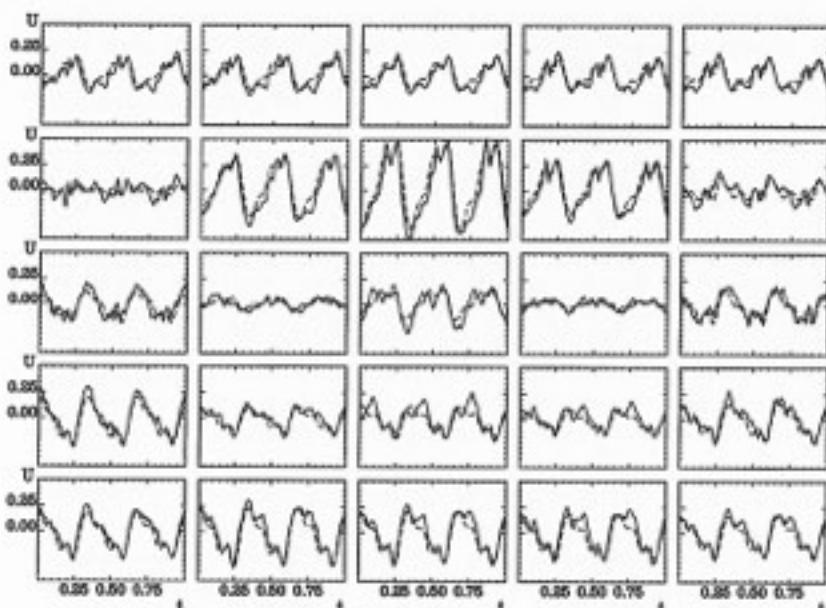


Abbildung 8.2: Erster Datensatz (A): Zeitserien des Potentials  $U$  an 25 Elektroden während einer Absence (durchgezogene Linie) und das Ergebnis unseres Modells (gestrichelte Linie).

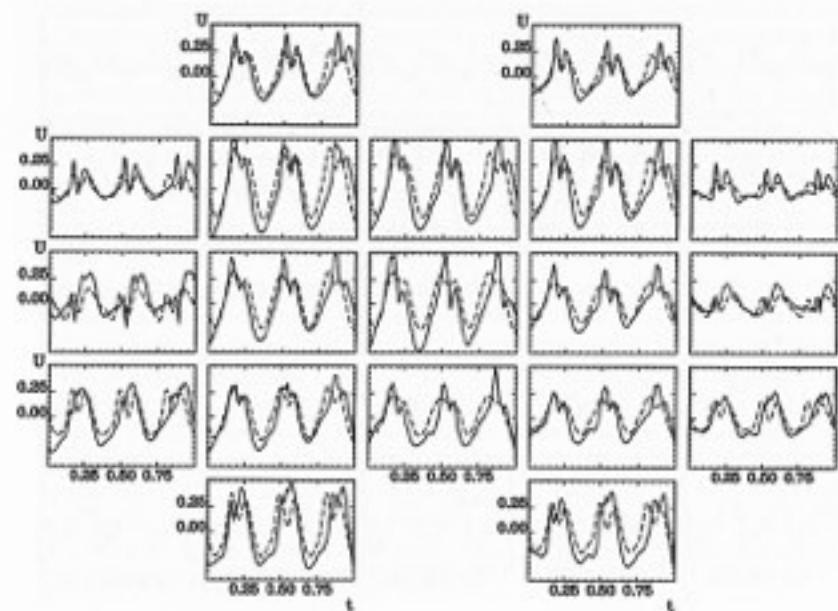


Abbildung 8.3: Zweiter Datensatz (B): Zeitserien des Potentials  $U$  an 19 Elektroden während einer Absence (durchgezogene Linie) und das Ergebnis unseres Modells (gestrichelte Linie).

dieses charakteristischen Verlaufs an allen Elektroden, also über den gesamten Cortex verteilt.

Um einen prägnanteren Eindruck von der raumzeitlichen Dynamik zu erhalten, ist es von Vorteil, das Signal räumlich zu interpolieren und die Potentialwerte zu jedem Zeitschritt graucodiert darzustellen. Abb. 8.4 und Abb. 8.5 zeigt für die jeweiligen Datensätze (A) und (B) die entsprechende Darstellung.

Datensatz B ist räumlich etwas homogener als Datensatz A, aber bei beiden Datensätzen erkennt man bereits rein optisch, daß es möglich sein müßte, das Signal durch wenig Moden darzustellen. Interessant ist auch das räumliche Verhalten im Bereich der „Doppelspitze“. Es kommt dort zu einer leichten Oszillation im oberen Bereich der Darstellung.

## 8.5 Räumliche Analyse: KL-Entwicklung

Werden nun die Datensätze mithilfe der KL-Entwicklung dargestellt, so bestätigt sich die gerade erwähnte Vermutung, daß die beiden raumzeitlichen Signale durch wenige räumliche Moden darstellbar sind. Abb. 8.6 zeigt das Eigenwertspektrum der Korrelationsmatrix in logarithmischer Darstellung. In beiden Fällen ist der größte Eigenwert  $\lambda_1 > 0,8$ , d.h. der jeweils zugehörige Eigenvektor trägt mehr als 80 % (bzl. der  $L_2$ -Norm) zum Signal bei. Der zweite Eigenvektor trägt ungefähr 10 % zum Signal bei. Alle weiteren Beiträge der Eigenvektoren fallen nahezu exponentiell ab.

Abb. 8.7 zeigt die ersten 15 Eigenvektoren der jeweiligen Korrelationsmatrizen. Es fällt auf, daß die ersten KL-Moden beider Datensätze eine ähnliche Struktur zeigen und großflächige Strukturen zur Darstellung des Signals wichtiger sind als kleinere. Auch dies ist ein Indiz dafür, daß es sich hier um generalisierte epileptische Anfälle handelt, wie es die „petit mal“ - Anfälle darstellen.

Um die Dynamik des Signals zu verstehen, kann man versuchen Koeffizienten eines Differentialgleichungssystems, die die Amplituden der ersten KL-Moden miteinander koppeln, anzupassen. Dies stellt sich als eine äußerst schwierige Aufgabe heraus (wie bereits in Abschnitt 3.1.3 beschrieben), da unklar ist, wieviele KL-Moden berücksichtigt werden sollen, mit dem zusätzlichen Problem, daß die Zahl der anzupassenden Koeffizienten nichtlinear mit der Anzahl der KL-Moden zunimmt. Werden allerdings zu viele Moden vernachlässigt, so kann das Problem auftreten, daß diese vernachlässigten Moden zwar wenig zum Signal beitragen, aber die zugrundeliegende Dynamik stabilisieren, d.h. ein Vernachlässigen zu vieler Moden kann zu einem instabilen Differentialgleichungssystem führen. Als Ausweg aus diesem Problem, kann

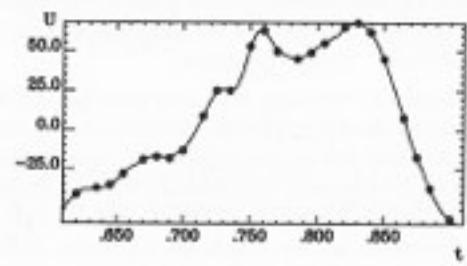
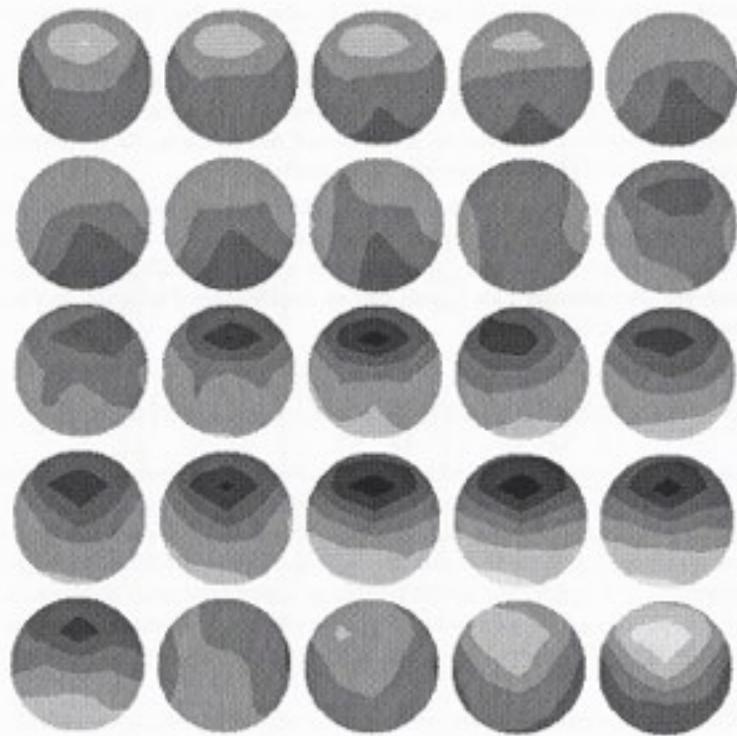


Abbildung 8.4: Graphische, räumlich interpolierte Darstellung eines Spitzewelle-Komplexes des Datensatzes A mit dem entsprechenden Zeitverlauf an der achten Elektrode (die Punkte markieren die Zeitpunkte, der einzelnen räumlichen Darstellungen).

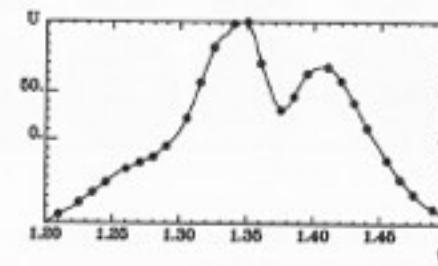
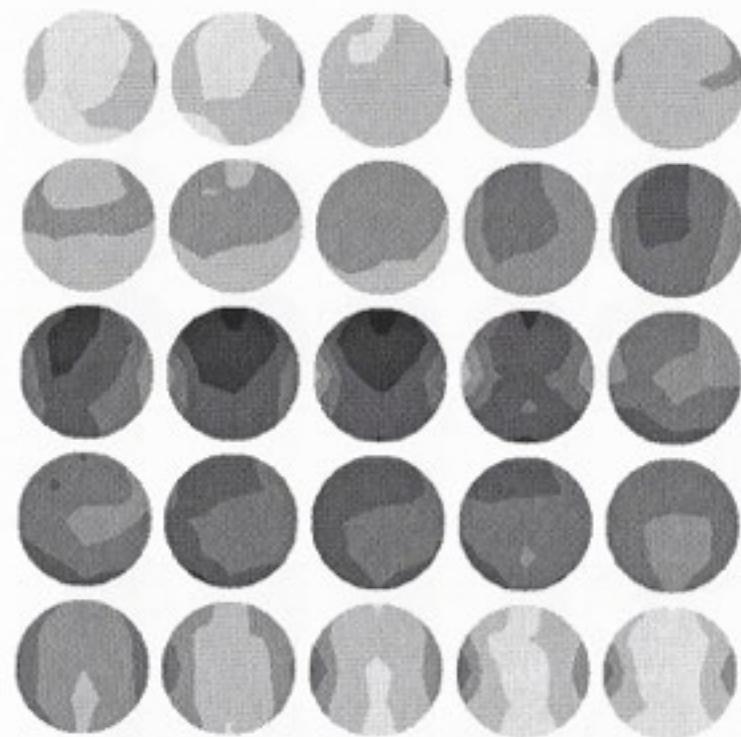


Abbildung 8.5: Graphische, räumlich interpolierte Darstellung eines Spitzewelle-Komplexes des Datensatzes B mit dem entsprechenden Zeitverlauf an der fünften Elektrode.

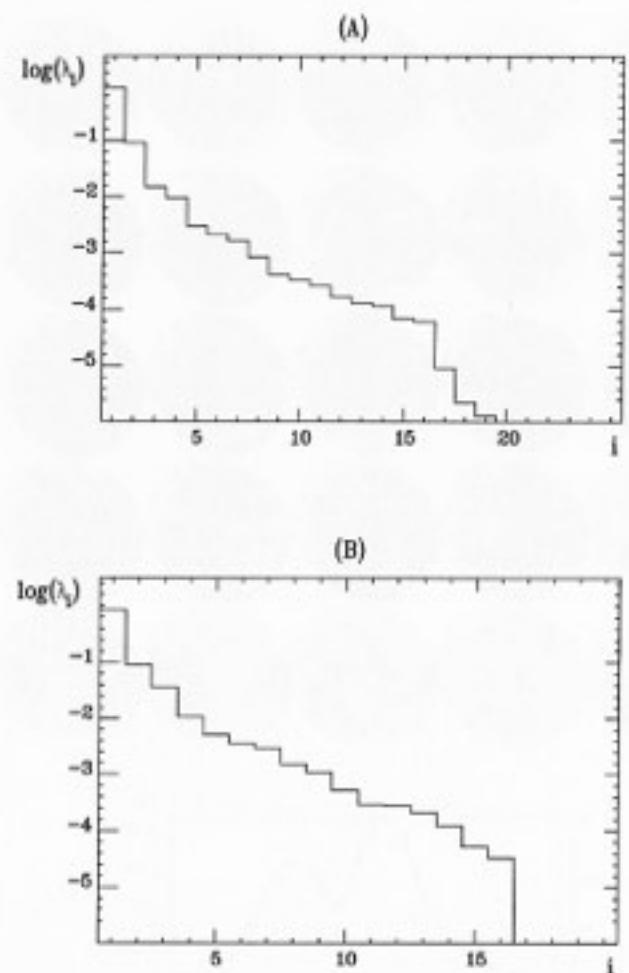


Abbildung 8.6: Eigenwertspektrum der Korrelationsmatrizen der raumzeitlichen EEG-Datensätze in logarithmischer Darstellung.

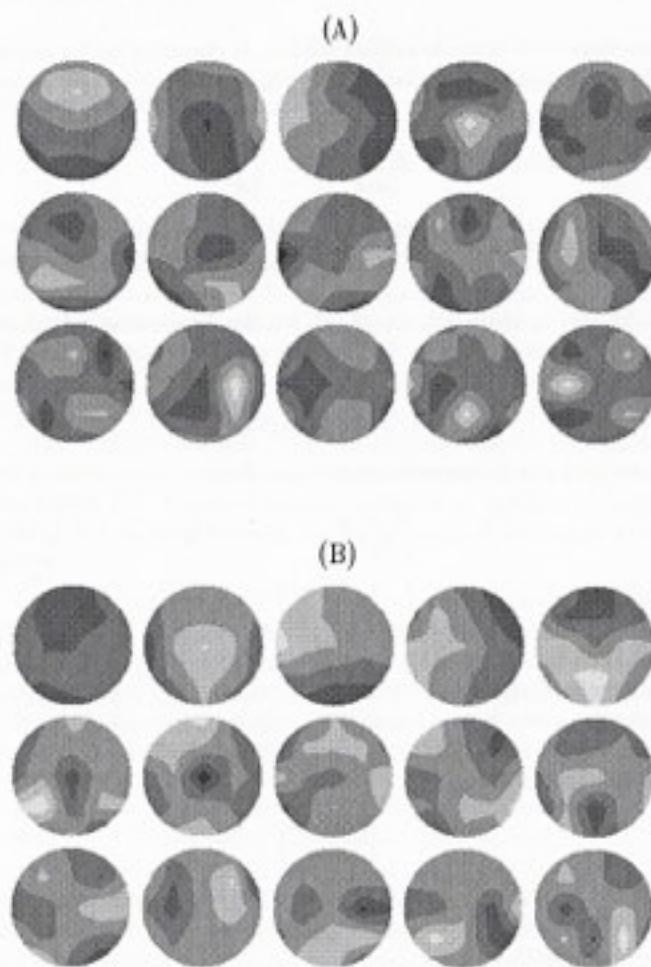


Abbildung 8.7: Eigenvektoren der Korrelationsmatrizen (KL-Moden) der raumzeitlichen EEG-Datensätze in graphischer Darstellung.

die von uns vorgestellte Methode gesehen werden, da räumliche Moden und Koeffizienten, die die Dynamik beschreiben, gleichzeitig an das System angepaßt werden.

## 8.6 Raumzeitliche Analyse

Für die nun folgende Untersuchung der Datensätze führen wir jeweils einen Vektor  $\tilde{q}(t)$  ein, dessen Komponenten die Potentialverläufe der einzelnen Elektroden repräsentieren.

Aufgrund früherer Arbeiten [22, 25, 28, 67] lag der Verdacht nahe, daß die zugrundeliegende Dynamik der EEG-Daten durch ein „Modenskelett“ dreier Moden dargestellt werden kann:

$$\tilde{q} = x(t)\tilde{u}_1 + y(t)\tilde{u}_2 + z(t)\tilde{u}_3 \quad . \quad (8.1)$$

Als Dynamik wird eine Modenwechselwirkung der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= f[x, y, z] \end{aligned} \quad (8.2)$$

zagrunde gelegt. Für die Funktion  $f(x, y, z)$  wählten wir einen Polynomansatz mit Potenzen bis zur vierten Ordnung in  $x$ , bis zur zweiten Ordnung in  $y$  und linear in  $z$ . Das Differentialgleichungssystem 8.2 läßt sich natürlich in eine Differentialgleichung dritter Ordnung umschreiben, und es ist daher möglich ein least-square-fit - Potential  $V_1$  anzugeben, das von den Koeffizienten der Funktion  $f$  und von einer räumlichen Biorthogonal-Mode  $u_1^+$  abhängt:

$$V_1 = \frac{\langle (\partial_t^2 q u_1^+ - f[q u_1^+, d_t q u_1^+, d_t^2 q u_1^+])^2 \rangle}{\langle d_t^2 q u_1^+ \rangle^2} \quad (8.3)$$

Das Signal  $q(t)$  stellt dabei die in den relevanten Unterraum projizierte Trajektorie  $\tilde{q}(t)$  dar. Als Unterraum wählen wir jeweils den Raum, der durch die ersten zehn KL-Moden aufgespannt wird.

Die Koeffizienten der Funktion  $f$  lassen sich wieder analytisch als Funktion des Vektors  $u_1^+$  darstellen, so daß das Minimum des Potentials bezüglich  $u_1^+$  sowohl optimale Koeffizienten als auch einen optimalen Vektor  $u_1^+$  darstellt. Um die verbleibenden Biorthogonal-Moden  $u_2^+$  und  $u_3^+$  zu bestimmen, können die least-square-fit - Potentiale  $V_2$  und  $V_3$ ,

$$V_2 = \frac{\langle (q u_2^+ - q u_1^+)^2 \rangle}{\langle q u_2^+ \rangle^2}$$

## 8.6. RAUMZEITLICHE ANALYSE

$$V_3 = \frac{\langle (q u_3^+ - q u_1^+)^2 \rangle}{\langle q u_3^+ \rangle^2} \quad , \quad (8.4)$$

minimiert werden. Als Lösung ergeben sich die Vektoren

$$\begin{aligned} u_2^+ &= \Gamma_2^{-1} \Lambda_2 u_1^+ \\ u_3^+ &= \Gamma_3^{-1} \Lambda_3 u_1^+ \end{aligned} \quad . \quad (8.5)$$

Abb. 8.8 zeigt für beide Datensätze die erhaltenen Vektoren  $u_1^+$ ,  $u_2^+$  und  $u_3^+$  mit den zugehörigen Zeitserien, deren mittlere quadratische Abweichung minimiert wurde. Der Ansatz war gut gewählt, die Übereinstimmung ist für alle Biorthogonal-Moden recht gut. Wir haben dazu zunächst das Potential  $V_1$  bzgl.  $u_1^+$  über ein Gradientenverfahren minimiert, wobei wir als Startwert jeweils die erste KL-Mode wählten. Es zeigt sich, daß in beiden Fällen dieser gewählte Startwert bereits recht gut das Potential minimiert und nur noch kleine Variationen nötig waren. Dies bestätigt damit unsere früheren Arbeiten. Doch wurde gerade für die erste KL-Mode eine wie hier angenommene Dynamik vermutet. Bei den Moden  $u_2^+$  und  $u_3^+$ , die mithilfe der Gleichungen (8.5) berechnet wurden, erkennt man, daß hier KL-Moden höherer Ordnung mit ins Spiel kommen, um die angegebenen Potentiale  $V_2$  und  $V_3$  zu minimieren.

In der Abb. 8.9 und 8.10 sind die Phasenportraits der erhaltenen Amplituden dargestellt. Für beide Datensätze ist eine Spiralbewegung erkennbar, allerdings mit einer unterschiedlichen Charakteristik: Beim Datensatz (A) spiralt die Trajektorie auf einen Fokus zu, bevor sie diese Ebene wieder in eine andere Richtung verläßt, beim Datensatz (B) dagegen ist eine Spiralbewegung nach außen erkennbar. Diese Charakteristik ist ein Indiz für eine zugrundeliegende Dynamik, die zu den sogenannten Sil'nikov - Attraktoren führt. Dies wird bei der späteren Betrachtung des Phasenportraits des numerisch integrierten Differentialgleichungssystems sehr viel deutlicher.

Im nächsten Schritt ist nun die Frage zu klären, ob die durch die Funktion  $f(x, y, z)$  gewonnene Differentialgleichung ein Signal liefert, das den Datensatz repräsentiert. Dies ist eine durchaus berechtigte Frage, da durch das least-square-fit Verfahren zwar die Differentialgleichung an das Signal angepaßt wird, aber das Lösungsverhalten der Differentialgleichung zunächst unklar ist. Insbesondere bei chaotischen Systemen stellt dies ein Problem dar, da bei kleinen Abweichungen ein anderes Lösungsverhalten auftreten kann. Auch bei der von uns gewünschten Differentialgleichung stellte sich dieses Problem, da sich das System als äußerst kritisch gegenüber kleinsten Veränderungen darstellte. Durch Variation der Startwerte gelang es uns aber Trajektorien als Lösung des Differentialgleichungssystems zu gewinnen, die eine gute Übereinstimmung mit den EEG-Datensätzen liefern.

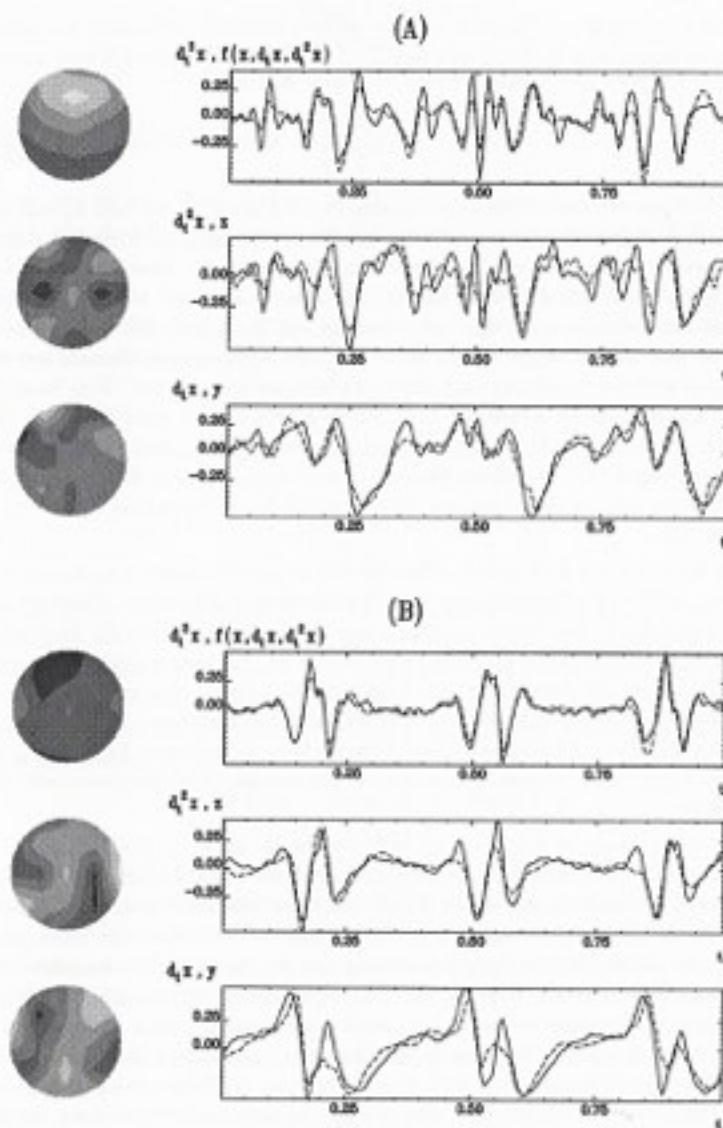


Abbildung 8.8: Die angepaßten Biorthogonal-Moden  $u_1^+$ ,  $u_2^+$  und  $u_3^+$  mit den jeweiligen Funktionen, deren mittlerer quadratischer Abstand minimiert wurde.

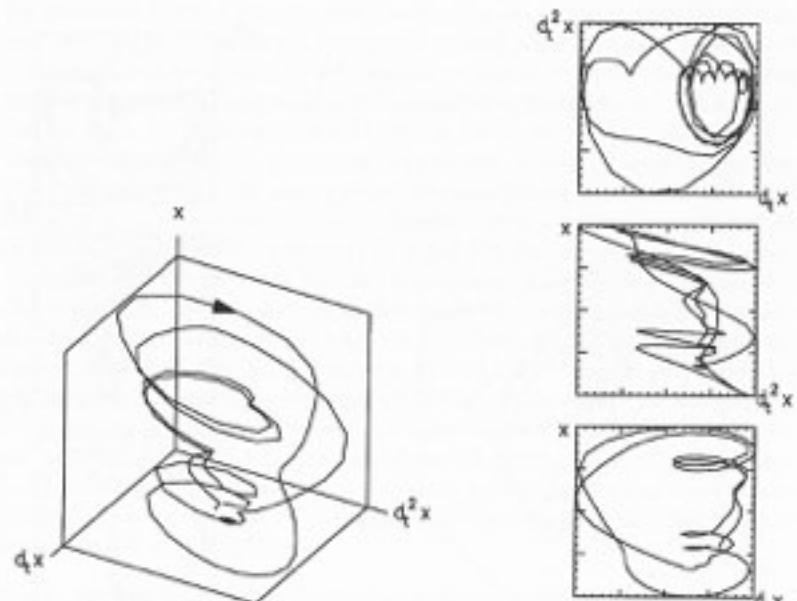


Abbildung 8.9: Die aus dem Datensatz (A) ermittelte Trajektorie  $x(t)$  im Phasenraum, aufgespannt durch die Koordinaten  $x$ ,  $y = d_1 x$  und  $z = d_1^2 x$ .

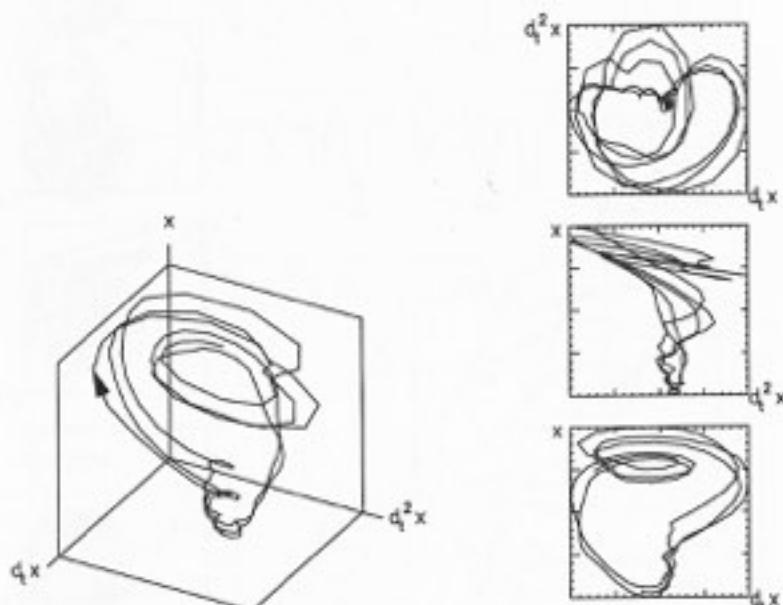


Abbildung 8.10: Die aus dem Datensatz (B) ermittelte Trajektorie  $x(t)$  im Phasenraum, aufgespannt durch die Koordinaten  $x$ ,  $y = d_1 x$  und  $z = d_1^2 x$ .

Abb. 8.11 zeigt die aus der numerischen Integration erhaltenen Zeitserien  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$ . Die zugehörigen Moden  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$  und  $\hat{u}_3$  wurden nach dem in Abschnitt 3.8 angegebenen Verfahren berechnet. Sie sind auf der linken Seite in Abb. 8.11 dargestellt.

Die erhaltenen Moden zeigen eine ähnliche Struktur wie die dominanten KL-Moden (vgl. Abb. 8.7) und das für die „petit mal“-Anfälle charakteristische „spike-wave“ Verhalten ist bei der Amplitude  $x(t)$  deutlich zu erkennen. Durch die Bestimmung des Differentialgleichungssystems und der räumlichen Moden  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$  und  $\hat{u}_3$  ist es uns gelungen, ein makroskopisches Modell im Sinne der Gl. (8.1) für die EEG-Datensätze anzugeben. Die gestrichelte Linie in Abb. 8.2 und 8.3 zeigt das aus dem Modell erhaltene Signal in relativ guter Übereinstimmung mit den EEG-Daten. Bezuglich der  $L_2$ -Norm ergibt sich eine Repräsentation des Signals von über 80 % im Fall des Datensatzes (A) und ca. 65 % im Fall (B). Die Ursache für das Auftreten dieser unterschiedlichen Werte wird bei Betrachtung der Abbildungen 8.2 und 8.3 klar. Im Fall (B) unterscheidet sich die Simulation vom ursprünglichen Signal durch die etwas unterschiedliche Verhältnisse von der „Verweildauer“ der Trajektorie im linearen Bereich zu dem im nichtlinearen Bereich. Dies führt zu dem schlechteren Wert der Repräsentation des Signals bezüglich der  $L_2$ -Norm. Die schlechteren Werte verglichen mit der Darstellung der Signale durch die ersten drei KL-Moden sind natürlich darauf zurückzuführen, daß die KL-Entwicklung bezüglich der  $L_2$ -Norm ein Minimum repräsentiert. Im Gegensatz zur KL-Entwicklung liefert unsere Analyse jedoch ein dynamisches Modell mit den zugehörigen räumlichen Moden zur Rekonstruktion der EEG-Daten.

Um ein besseres anschauliches Verständnis in die zugrundeliegende Dynamik zu erhalten, sind in Abb. 8.12 und 8.13 die Phasenportraits der Trajektorie des numerisch integrierten Differentialgleichungssystems dargestellt. Hier ist jetzt deutlicher die bereits erwähnte charakteristische Spiralsbewegung mit der unterschiedlichen Orientierung im Falle (A) und (B) zu erkennen.

Die erhaltenen Phasenportraits zeigen ein Verhalten, das in einem Theorem von Šil'nikov [62] untersucht wurde und Grundlage vieler weiterer Arbeiten (s.B. [3, 17, 33]) darstellt. Ausgangspunkt ist ein dynamisches System, das als Lösung einen homoklinen Orbit mit einem Sattel-Fokus als Fixpunkt liefert. Dabei können zwei verschiedene Fälle auftreten: eine zweidimensionale stabile verknüpft mit einer eindimensionalen instabilen invarianten Mannigfaltigkeit ( $\Gamma_s^+$ ) und der umgekehrte Fall einer zweidimensionalen instabilen und eindimensionalen stabilen invarianten Mannigfaltigkeit ( $\Gamma_u^-$ ). Die beiden Fälle sind in Abb. 8.14 dargestellt. Die Eigenwerte des Sattel-Fokus seien durch  $\rho \pm i\omega$  und  $\lambda$  gegeben. Unter diesen Voraussetzungen

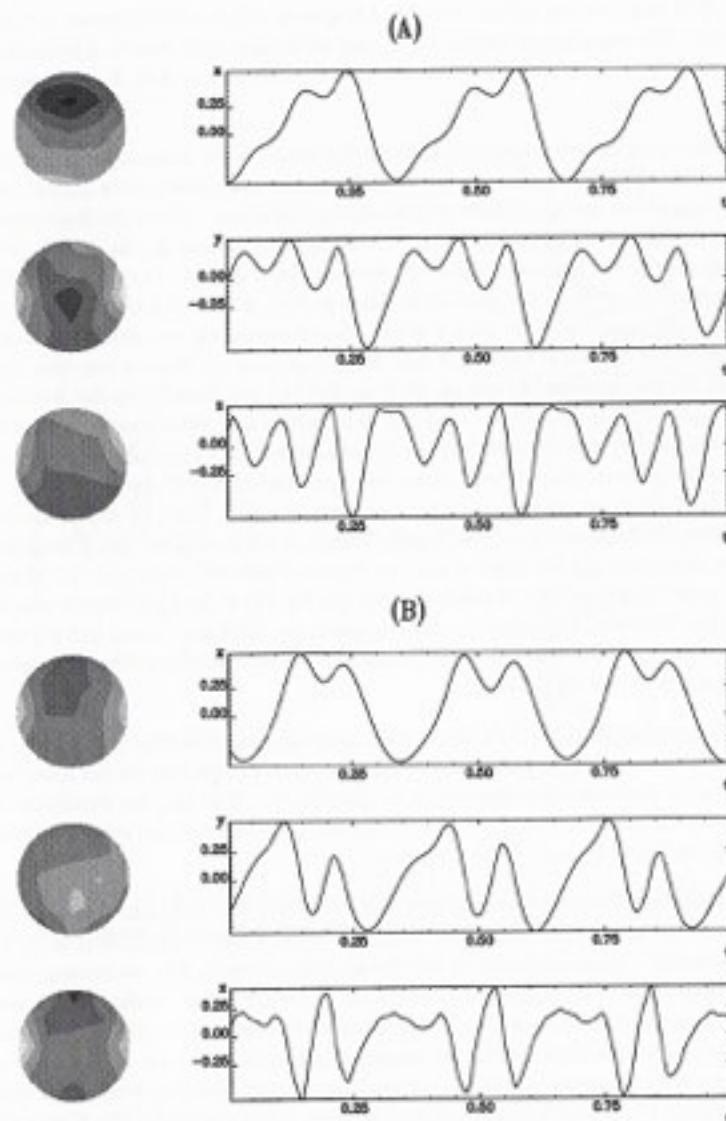


Abbildung 8.11: Die Moden  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$  und  $\hat{u}_3$  und die zugehörigen Amplituden als Lösung des berechneten Differentialgleichungssystems.

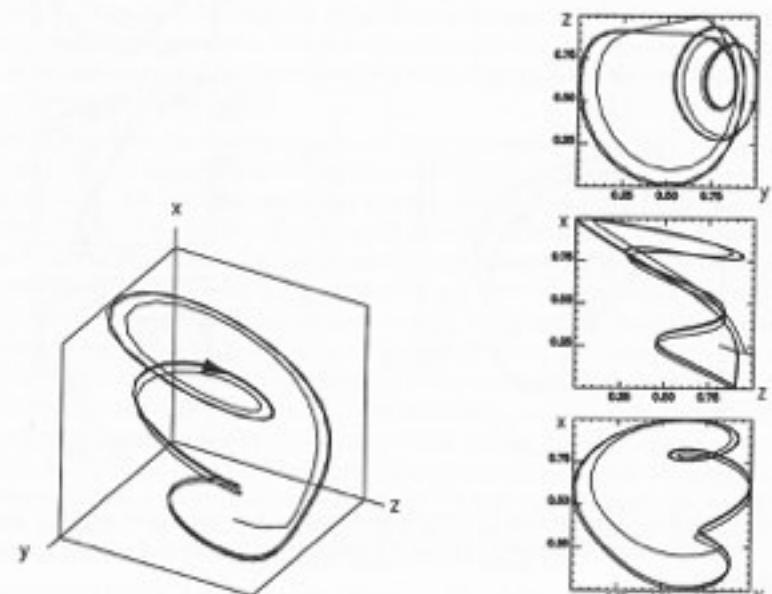


Abbildung 8.12: Die aus dem Differentialgleichungssystem (berechnet aus (A)) numerisch gewonnene Trajektorie  $x(t)$  im Phasenraum, aufgespannt durch die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

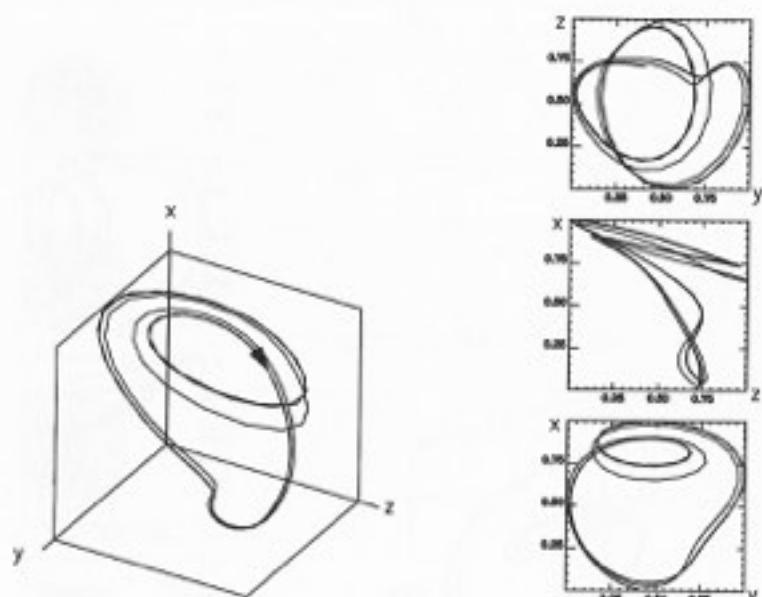


Abbildung 8.13: Die aus dem Differentialgleichungssystem (berechnet aus (B)) numerisch gewonnene Trajektorie  $z(t)$  im Phasenraum, aufgespannt durch die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ .



Abbildung 8.14: Die homoklinen Orbits  $\Gamma_0^+$  und  $\Gamma_0^-$ .

läßt sich zeigen [33, 62], daß es in jeder Umgebung des homoklinen Orbits im Falle

$$|\lambda| > |\rho| \quad (8.6)$$

abzählbar unendlich viele hyperbolische periodische Orbits gibt. Ist die Bedingung nicht erfüllt tritt eine endliche Anzahl dieser instabilen periodischen Orbits auf. In beiden Fällen können chaotische Attraktoren auftreten: Die Trajektorie kann sich auf einen dieser instabilen Orbits zu bewegen und sich in eine andere Richtung wieder entfernen, um dort wieder entlang einer stabilen Richtung von einem Orbit angezogen zu werden, usw. .

Betrachtet man die Phasenportraits aus Abb. 8.12 und 8.13 liegt die Vermutung nahe, daß die zugrundeliegende Dynamik mit diesem Šil'nikov - Attraktoren assoziiert ist. Im Fall (A) scheint der zugrundeliegende homokline Orbit vom Typ eines  $\Gamma_0^-$ , im Fall (B) vom Typ eines  $\Gamma_0^+$  zu sein. Berechnet man die Fixpunkte aus der Funktion  $f(x, y, z)$  so erhält man für beide Datensätze Fixpunkte im erwarteten Bereich. Die lineare Stabilitätsanalyse um diese Fixpunkte liefert in beiden Fällen die vermuteten Charakteristiken eines  $\Gamma_0^-$  im Falle des Datensatzes (A) und eines  $\Gamma_0^+$  im Falle (B). Die Šil'nikov - Bedingung ist bei (A) erfüllt ( $\lambda = -0,21$ ,  $\rho = 0,08$ ), während die Funktion  $f(x, y, z)$  des Datensatzes (B) die Bedingung nicht erfüllt ( $\lambda = 0,04$ ,  $\rho = -0,12$ ). Dies läßt im Fall (A) auf das Auftreten einer unendlichen Anzahl instabiler periodischer Orbits und im Fall (B) auf eine endliche Anzahl schließen. Beim Ausklingen des epileptischen Anfalls verläßt die Trajektorie diesen Bereich des dynamischen Systems und die Gehirntätigkeit gelangt wieder in den „normalen“ Bereich. Weitere Untersuchungen der Ursache für das Verlassen des Attraktors könnten von großer medizinischer Bedeutung sein.

Interessant ist das Auftreten beider Typen von homoklinen Orbits bei „petit mal“ - Anfällen, da in einem mathematischen Theorem [17] das Auftreten von  $\Gamma_0^+$  und  $\Gamma_0^-$  in einem dynamischen System durch eine Bifurkation erklärt werden kann: Dazu betrachten wir ein System mit zwei Fixpunkten. Ein Fixpunkt besitze eine zweidimensionale instabile und eine eindimensionale stabile invariante Mannigfaltigkeit, beim anderen Fixpunkt trete eine zweidimensionale stabile und eine eindimensionale instabile invariante Mannigfaltigkeit auf. Bei geeigneter Wahl eines Kontrollparameters kann die Situation eintreten, daß sich die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten tangential schneiden und damit eine invariante Kugel bilden. In [17] wird gezeigt, daß die invariante Kugel durch kleine Variationen des dynamischen Systems so aufbrechen kann, daß sich die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten nicht mehr schneiden und eine der beiden homoklinen Orbits  $\Gamma_0^+$  oder  $\Gamma_0^-$  ausbilden. Abb. 8.15 zeigt dieses Aufbrechen schematisch anhand eines Schnittes durch die Kugel. Das Auftreten der beiden Orbits ist vielleicht ein Ansatzpunkt zu einer weiteren Klassifikation

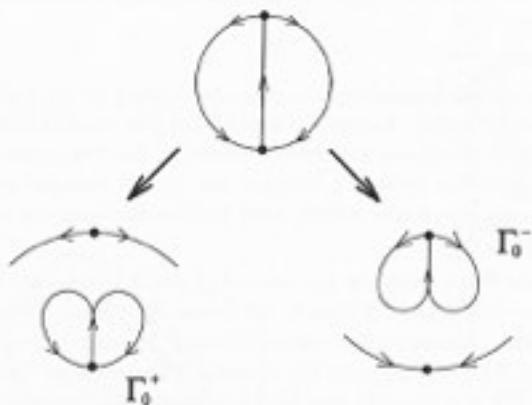


Abbildung 8.15: Aufbrechen einer invarianten Kugel zu den homoklinen Orbits  $\Gamma_0^+$  und  $\Gamma_0^-$ , dargestellt durch einen Poincaré - Schnitt.

der „petit mal“ - Anfälle und läßt sich möglicherweise im Rahmen neurologischer Betrachtungen auf ein Aufbrechen einer invarianten Kugel zurückführen.

## Kapitel 9

### Zusammenfassung

Wir haben ein neues Verfahren zur Analyse raumzeitlicher Daten strukturbildender Systeme vorgestellt. Es wird eine Darstellung des raumzeitlichen Signals durch zeitabhängige Amplituden und räumliche Moden vorgenommen, die sich direkt aus der Theorie strukturbildender Systeme ergibt. Dabei können sowohl die Ordnungsparameter der zugrundeliegenden Dynamik als auch die versklavten Amplituden identifiziert und die zugehörigen räumlichen Moden angegeben werden. Das Verfahren beruht auf der Minimierung eines least-square-fit Potentials bei gleichzeitiger Variation räumlicher und zeitlicher Koeffizienten. Es stellt dadurch eine Erweiterung von Methoden der Zeitreihenanalyse und räumlichen Analyseverfahren dar. Die Anwendbarkeit des Versklavungsprinzips der Synergetik bei strukturbildenden Systemen führt bei der Untersuchung raumzeitlicher Daten zu einer Reduktion der freien Parameter und zur Möglichkeit der analytischen Elimination weiterer Koeffizienten des zu minimierenden Potentials. Daraus ergibt sich ein niederdimensionales nichtlineares Potential, das nur noch von den Biorthogonal-Moden der Ordnungsparameter abhängt. Das globale Minimum des Potentials repräsentiert die optimale Wahl räumlicher und zeitlicher Koeffizienten zur Beschreibung der Dynamik des raumzeitlichen Signals durch Ordnungsparametergleichungen und zentralen Mannigfaltigkeiten.

Wir haben das Vorgehen anhand der Untersuchung simulierter Daten illustriert und die erhaltenen Ergebnisse auf Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen überprüft. Dazu simulierten wir Beispiele von „steady-state“ Bifurkationen, Hopf-Bifurkationen und Kodimension-II Instabilitäten. Anwendungsähnliche simulierte Beispiele aus dem Bereich der Hydrodynamik stellten die Bénard-Instabilität und die sogenannten blinking-states, ein Beispiel der Konvektion in binären Flüssigkeitsgemischen, dar. Zum Abschluß der Vorstellung von Anwendungsbeispielen unserer raumzeitlichen Analyse stellten wir die Untersuchung raumzeitlich aufgelöst

gemessener EEG-Daten epileptischer Anfälle vor. Dabei treten interessante Dynamiken auf, die verschiedenen Šil'nikov Attraktoren zuzuordnen sind. Dadurch ergeben sich Ansatzpunkte zur weiteren Klassifikation epileptischer Anfälle und anderer medizinischer Anwendungen.

## Literaturverzeichnis

- [1] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. S. Tsimring, The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Rev. Mod. Phys.* 65, 1331 (1993)
- [2] A. Arneodo, P.H. Coullet, E.A. Spiegel, C. Tresser, Asymptotic Chaos, *Physica D* 14, 327 (1985)
- [3] A. Arneodo, P. Coullet, C. Tresser, Possible new strange attractors with spiral structure, *Commun. Math. Phys.* 79, 573 (1981)
- [4] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin (1983)
- [5] E. Baake, M. Baake, H.G. Bock and K.M. Briggs, Fitting ordinary differential equations to chaotic data, *Phys. Rev. A* 45, 5524 (1992)
- [6] A. Babloyantz, A. Destexhe, Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 83, 3513 (1986)
- [7] *Synergetics of the Brain*, E. Bagar, H. Flohr, H. Haken, A. J. Mandell, Eds., Springer, Berlin (1984)
- [8] H. Bénard, *Rev. Gen. Sci. Pur. Appl.* 11, 1261 (1900)
- [9] D. Bensimon, P. Kolodner, C.M. Surko, H. Williams, V. Croquette, *J. Fluid Mech.* 217, 441 (1990)
- [10] M. Bestehorn, *Strukturbildung durch Selbstorganisation in Flüssigkeiten und in chemischen Systemen*, Habilitationsschrift, Universität Stuttgart (1994)
- [11] M. Bestehorn, R. Friedrich, H. Haken, Modulated traveling waves in nonequilibrium systems: the 'blinking state', *Z. Phys. B* 77, 151 (1989)
- [12] M. Bestehorn, R. Friedrich, H. Haken, Traveling waves in nonequilibrium systems, *Physica D* 37, 295 (1989)

- [13] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley, The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 25, 539 (1993)
- [14] L. Borland, H. Haken, Unbiased determination of forces causing observed processes, *Z. Phys. B* 88, 95 (1992)
- [15] L. Borland, H. Haken, Unbiased estimate of forces from measured correlation functions, including the case of strong multiplicative noise, *Ann. Physik* 1, 452 (1992)
- [16] J. Boussinesq, *Theorie Analytique de la Chaleur*, Vol.2, Gauthier-Villars (1903)
- [17] H.W. Broer, G. Vegter, Subordinate Sil'nikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimension, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 4, 509 (1984)
- [18] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press (1961)
- [19] T. Ditzinger, *Multistabilität in der Wahrnehmung mit einem synergetischen Computer*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1993
- [20] J.P. Eckmann, D. Ruelle, Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems, *Physica D* 56, 185 (1992)
- [21] J. Fineberg, E. Moses, and V. Steinberg, Spatially and Temporally Modulated Traveling-Wave Pattern in Convecting Binary Mixtures, *Phys. Rev. Lett.* 61, 838 (1988)
- [22] A. Fuchs, R. Friedrich, H. Haken H., D. Lehmann, The Spatio-Temporal Analysis of Multi-channel  $\alpha$ -EEG Map Series, in *Computational Systems- Natural and Artificial*, H. Haken, Ed., Springer, Berlin (1987)
- R. Friedrich, A. Fuchs, H. Haken, Synergetic Analysis of Spatio-Temporal EEG Patterns, in *Nonlinear Wave Processes in Excitable Media*, A. V. Holden, M. Markus, H. G. Othmer, Eds., Plenum, New York (1989)
- R. Friedrich, A. Fuchs, H. Haken, Modelling of Spatio-Temporal EEG Patterns\*, in *Mathematical Approaches to Brain Functioning Diagnostics*, I. Dvorak, A. V. Holden, Eds., Manchester University Press (1991)

- R. Friedrich, A. Fuchs, H. Haken, Spatio-Temporal EEG Patterns, in *Synergetics of Rhythms in Biological Systems*, H. Haken, H. P. Kopfchen, Eds., Springer, Berlin (1992)
- [23] R. Friedrich, Dynamische Strukturen in synergetischen Systemen, Habilitationsschrift, Universität Stuttgart (1992)
- [24] R. Friedrich, *Hydrodynamic Instabilities*, Vorlesung SS 1994
- [25] R. Friedrich, C. Uhl, Synergetic Analysis of Human Electroencephalograms: Petit-mal Epilepsy, in: *Evolution of Dynamical Structures in Complex Systems*, eds. R. Friedrich and A. Wunderlin, Springer, Berlin (1992)
- [26] R. Friedrich, C. Uhl, Spatio-temporal Analysis of Human Electroencephalograms: Petit-mal Epilepsy, zur Veröffentlichung in *Physica D* eingereicht
- [27] H. Fe, *Instabilität, Selbstpulsation und Multichromatische Lasertätigkeit im Bandmodell für Farbstofflaser*, Dissertation, Universität Stuttgart (1989)
- [28] A. Fuchs, *Synergetische Systeme zur Mustererkennung und zur phänomenologischen Modellierung raum-zeitlich aufgelöst gemessener EEG's*, Dissertation, Universität Stuttgart (1990)
- [29] A. Fuchs, H. Haken, Pattern Recognition and Associative Memory as Dynamical Process in a Synergetic System I + II, Erratum, *Biol. Cybern.* 60, 17-22, 107-109, 476 (1988)
- [30] A. Fuchs, J.A.S. Kelso and H. Haken, Phase transitions in the human brain: spatial mode dynamics, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2, 917 (1992)
- [31] D. Gallez, A. Babloyantz, Predictability of human EEG: a dynamical approach, *Biol. Cybern.* 64, 381 (1991)
- [32] M. Giorna, F. Lentini, V. Cimagalli, Functional reconstruction and local prediction of chaotic time series, *Phys. Rev. A* 44, 3496 (1991)
- [33] P. Glendinning, C. Sparrow, Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits, *J. Stat. Phys.* 35, 645 (1984)
- [34] P. Grassberger, I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D* 9, 189 (1983)

- [35] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer, Berlin (1983)
- [36] R. Haas, H. Haken, W. Banzhaf, A new learning Algorithm for synergetic computers, *Biol. Cybern.* 62, 107 (1990)
- [37] H. Haken, *Synergetik. Eine Einführung*, 3. Auflage 1989, Springer, Berlin
- [38] H. Haken, *Laser Theory*, 2. korrig. Auflage 1984, Springer, Berlin
- [39] H. Haken, *Advanced Synergetics*, 2. Auflage 1987, Springer, Berlin
- [40] H. Haken, *Information and Selforganization*, Springer, Berlin (1988)
- [41] H. Haken, *Synergetic Computers and Cognition*, Springer, Berlin (1991)
- [42] H. Haken, Synopsis and Introduction, in [7]
- [43] H. Haken, R. Graham, Synergetik – Die Lehre vom Zusammenwirken, *Umschau* 6, 191 (1971)
- [44] K. Hasselmann, PIPs and POPs: The Reduction of Complex Dynamical Systems Using Principal Interaction and Oscillation Patterns, *J. Geophys. Res.* 93, D9, 11015 (1988)
- [45] A.V. Holden, M. Markus, H.G. Othmer (eds.), *Nonlinear wave processes in excitable media*, Plenum Press, New York (1991)
- [46] V.K. Jirsa, R. Friedrich, H. Haken, J.A.S. Kelso, A theoretical model of phase transitions in the human brain, *Biol. Cybern.* 71, 27 (1994)
- [47] V.K. Jirsa, R. Friedrich, H. Haken, Reconstruction of the spatio-temporal dynamics of a human magnetoencephalogram, zur Veröffentlichung bei *Physica D* eingereicht
- [48] K. Kashunen, Zur spektralen Theorie stochastischer Prozesse, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A1, Math. Phys.* 37 (1946)
- M. Loève, *Fonctions aléatoires de second ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris (1946)
- [49] M. Kirby, Minimal dynamical systems from PDEs using Sobolev eigenfunctions, *Physica D* 57, 466 (1992)
- [50] P. Kolodner and C. M. Surko, Weakly Nonlinear Traveling-Wave Convection, *Phys. Rev. Lett.* 61, 842 (1988)

- [51] F. Kwasniok, The reduction of complex dynamical systems using principal interaction patterns, zur Veröffentlichung bei *Physica D* eingereicht
- [52] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band VI, Hydrodynamik, Akademie-Verlag
- [53] S.P. Layne, G. Mayer-Kress, and J. Holzfuss, Problems Associated with Dimensional Analysis of Electroencephalogram Data, in: *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, ed. G. Mayer-Kress, Springer, Berlin (1986)
- [54] *Epilepsy*, H. Lüders, R. P. Lesser, Eds., Springer, Berlin (1987)
- [55] M. Neufeld, *Strukturbildung in einer reisenden von unten erhitzten Flüssigkeitsschicht*, Dissertation Universität Stuttgart, Verlag Shaker, Aachen (1994)
- [56] C.Z. Ning, *Versklavungsprinzip und Normalformtheorie: Die Anwendung auf Instabilitäten beim Zwei-Photonen-Laser*, Dissertation, Universität Stuttgart (1991)
- [57] H. Ohno, *Anwendung der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung auf die Theorie ultrakurzer Laserrampulse*, Dissertation, Universität Stuttgart (1980)
- [58] J.K. Platten, J.C. Legros, *Convection in Liquids*, Springer Berlin (1984)
- [59] G. Plant, R. Vautard, Spells of Low-Frequency Oscillations and Weather Regimes in the Northern Hemisphere, *J. Atmos. Sci.* 51, 210 (1993)
- [60] D. Reimann, *Anwendung der Synergetik auf Korrespondenzprobleme wie die Stereoskopie*, Dissertation, Universität Stuttgart, Verlag Shaker (1995)
- [61] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag, Weinheim (1984)
- [62] L.P. Šil'nikov, A case of the existence of a countable number of periodic motions, *Sov. Math. Dokl.* 6, 163-166 (1965)
- [63] E.J. Speckmann, *Experimentelle Epilepsieforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1986)
- [64] H.L. Swinney, J.P. Gollub, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer, Berlin (1981)
- [65] H. Szu, R. Hartley, Fast Simulated Annealing, *Phys. Lett. A* 122 (3,4), 157 (1987)
- [66] F. Takens, *Lecture Notes in Math. 898*, Springer, Heidelberg - New York (1981)

- [67] C. Uhl, *Analyse von EEGen mit Hilfe der Methoden der Synergetik*, Diplomarbeit, Universität Stuttgart (1991)
- [68] C. Uhl, R. Friedrich, H. Haken, Reconstruction of spatio-temporal signals of complex systems, *Z. Phys. B* 92, 211 (1993)
- [69] C. Uhl, R. Friedrich, H. Haken, A Synergetic Approach for the Analysis of Spatio-Temporal Signals, Proceedings of the school on *Foundations of Synergetics* in Minsk (1994)
- [70] C. Uhl, R. Friedrich, H. Haken, Analysis of spatio-temporal signals of complex systems, *Phys. Rev. E* 51, 3800 (1995)
- [71] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New-York (1990)
- [72] A. Wunderlin, *Mathematische Methode der Synergetik und ihre Anwendungen auf den Laser*, Habilitationsschrift, Universität Stuttgart (1985)
- [73] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents from a time series, *Physica* 16 D, 285 (1985)

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Rudolf Friedrich für die angenehme, freundschaftliche Zusammenarbeit und die vielen hilfreichen Diskussionen und Anregungen im Verlauf der Arbeit.

Herrn Prof. Dr. Dr.h.c.mult. H. Haken danke ich herzlich für die Aufnahme in sein Institut und für seine vielfältige Unterstützung.

Bei Herrn Prof. Dr. M. Wagner bedanke ich mich für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Stephan Hoffmann und Dirk Reimann gilt der Dank für die stete Bereitschaft zu Gesprächen über verschiedenste Themen, für ihre Aufmunterungen und für das Korrekturlesen des Manuskripts.

Bei Michael Bestehorn, Eckart Fischer, Armin Fuchs, Richard Haas, Viktor Jirsa, Marc Neufeld, Martin Ossig und Jürgen Schilp bedanke ich mich für ihre Unterstützung in Softwarefragen, sowie anderer großer und kleiner Hilfen. Allen Institutsmitgliedern danke ich für die freundschaftliche und kollegiale Atmosphäre am Institut.

Zum Schluß möchte ich mich ganz besonders bei meinen Eltern bedanken, ohne deren Unterstützung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.