Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

«Вейвлет-шум»

Студент ИУ7-53Б(BIS_19) ______________ Авдейкина В. П.
(Группа) (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Руководитель НИР ______________ Кострицкий А. С.
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За последние 15 лет генерация поверхностей с текстурами (стилями заполнения, имитирующими сложную рельефную объемную плоскость, выполненную из какого-то материала [1]) не перестала быть актуальной задачей компьютерной графики и упоминается в [2—6]. Таким образом, возникает необходимость нахождения методов, которые обеспечивают решение этой задачи.

Существует ряд решений описанной задачи, одним из которых является использование метода вейвлет-шума (вейвлет-шум) [7; 8], который будет рассмотрен далее.

1 Обзор вейвлет-шума

В данном разделе будут рассмотрены математические основы вейвлет-шума и его описание.

1.1 Математические основы вейвлет-шума

Суть вейвлет-шума заключается в использовании вейвлетов.

Вейвлет — функция независимой переменной, имеющая вид короткой волны (всплеска) [9—11]. Пример вейвлета можно наблюдать на рисунке 1.

[рисунок 1 — пример графика вейвлет функции]

Центр вейвлета — значение независимой переменной, через которое проходит вертикальная ось симметрии вейвлета.

Пространство вейвлетов W — набор функций, которые могут быть представлены линейной комбинацией сдвигов и масштабирования одного вейвлета. [12; 13]

Масштабирующая функция ξ — функция, для которой справедливо следующее равенство:

$$\xi(x) = \sum_k p_k \xi(2x - k), \tag{1.1}$$

при условии, что существуют такие числовые коэффициенты p_k. [7; 12]

Согласно [7], если $\phi(x)$ — функция из W, центр которой $x = 0$, то любая функция $F(x)$ может быть представлена следующим образом:

$$F(x) = \sum_i f_i \phi(x - i), \tag{1.2}$$

где $\phi(x - i)$ — функция из W с центром $x = i$, f_i — некоторые числовые коэффициенты.

Пространство S^0 — пространство, состоящее из функций вида 1.2.

Функции $G(x)$ вида

$$G(x) = \sum_i g_i \phi(2x - i) \tag{1.3}$$

аналогично S^0 составляют пространство S^1. [7]

Если рассматриваемая в 1.3, 1.2 функция ϕ является масштабирующей, то S^1 расширяет S^0, то есть включает все функции S^0. [7; 12]

Вейвлет-анализ — процесс определения того, расширяет ли пространство S^1 пространство S^0. [7]

С учетом того, что функция $F(x)$ из 1.2 является масштабирующей, она представляется с помощью коэффициентов $f_i^{\uparrow}$ в пространстве S^1:

$$F(x) = \sum_i f_i^{\uparrow} \phi(2x - i) \tag{1.4}$$

Коэффициенты $f_i^{\uparrow}$ выражаются с использованием формулы 1.1:

$$f_i^{\uparrow} = \sum_k p_{i-2k} f_k \tag{1.5}$$

Согласно [7], коэффициенты $g_i^{\downarrow}$, необходимые для представления функции $G(x)$ из 1.3 в пространстве S^0, вычисляются с помощью вейвлет-анализа и являются равными

$$g_i^{\downarrow} = \sum_k a_{k-2i} g_k \tag{1.6}$$

Функция $G(x)$ в пространстве S^0 представляется как

$$G(x) = G^{\downarrow}(x) + D(x) \tag{1.7}$$

где $D(x)$ — функция из S^1, которая не может быть выражена в S^0 через какие-либо коэффициенты, а $G^{\downarrow}$ выражается через $g_i^{\downarrow}$.

1.2 Вейвлет-шум

Входные данные вейвлет-шума: функция $B(x)$ из W, изображение R.

Выходные данные вейвлет-шума: изображение N.

Изображение X представляется упорядоченным набором числовых коэффициентов $\ldots, x_i, \ldots$:

$$X = (\ldots, x_i, \ldots) \tag{1.8}$$

Авторы [7] представляют алгоритм вейвлет-шума тремя семантическими шагами:

1) получение $R(x)$;
2) получение $R^{\downarrow}(x)$;
3) получение $R^{\downarrow\uparrow}(x)$;
4) получение $N(x)$.

Пример визуализации получения результата алгоритма можно наблюдать на рис. 2.

[рисунок 2 — пример визуализации получения из R N [7]]

Рассмотрим представленные шаги более подробно, основываясь на информации из [7].

1.2.1 Получение R

Согласно формуле 1.8 изображение R представляется следующим образом:

$$R = (\dots, r_i, \dots) \tag{1.9}$$

Аналогично формуле 1.3 выражается $R(x)$:

$$R = \sum_i r_i B(2x - i) \tag{1.10}$$

1.2.2 Получение $R^{\downarrow}$

Согласно формуле 1.7:

$$R(x) = R^{\downarrow}(x) + N(x) \tag{1.11}$$

$N(x)$ выражается из формулы 1.11 как

$$N(x) = R(x) - R^{\downarrow}(x) \tag{1.12}$$

С помощью формулы 1.2 получаем

$$R^{\downarrow}(x) = \sum_i r_i^{\downarrow} B(x - i) \tag{1.13}$$

где $r_i^{\downarrow}$ выражаются с помощью формулы 1.6:

$$r_i^{\downarrow} = \sum_k a_{k-2i} r_k \tag{1.14}$$

1.2.3 Получение $R^{\downarrow\uparrow}$

С учетом формулы 1.4 и 1.13 получается выражение

$$R^{\downarrow\uparrow}(x) = \sum_i r_i^{\downarrow\uparrow} B(2x - i), \tag{1.15}$$

где коэффициенты $r_i^{\downarrow\uparrow}$ выражаются с учетом формулы 1.5:

$$r_i^{\downarrow\uparrow} = \sum_k p_{i-2k} r_k^{\downarrow} \tag{1.16}$$

1.2.4 Получение N

С помощью формул 1.10 и 1.13 выражение 1.12 преобразовывается как

$$N(x) = \sum_i r_i B(2x - i) - \sum_i r_i^{\downarrow} B(x - i) \tag{1.17}$$

С использованием формулы 1.15 выражение 1.17 записывается как

$$N(x) = \sum_i r_i B(2x - i) - \sum_i r_i^{\downarrow\uparrow} B(2x - i) = \sum_i n_i' B(2x - i) \tag{1.18}$$

где $n_i' = r_i - r_i^{\downarrow\uparrow}$.

Для получения изображения $N = (\dots, n_i, \dots)$ значение функции $N(x)$ вычисляется при задаваемых значениях x.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Порев В.* Компьютерная графика. — СПб : БХВ-Петербург, 2002. — С. 432.

2. *Pai H.-Y.* Texture designs and workflows for physically based rendering using procedural texture generation // 2019 IEEE Eurasia Conference on IOT, Communication and Engineering (ECICE). — 2019. — С. 195—198.

3. Weakly-Supervised Photo-realistic Texture Generation for 3D Face Reconstruction / X. Yin [и др.] // 2023 IEEE 17th International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition (FG). — 2023. — С. 1—8.

4. Digital preservation of Brazilian indigenous artworks: Generating high quality textures for 3D models [Электронный ресурс] / B. Trinchão Andrade [и др.] // Journal of Cultural Heritage. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 28—39. — DOI: `https://doi.org/10.1016/j.culher.2011.05.002`. — URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1296207411000513` (дата обращения: 24.11.2023).

5. *Quintana G.*, *Ciurana J.*, *Ribatallada J.* Surface Roughness Generation and Material Removal Rate in Ball End Milling Operations // Materials and Manufacturing Processes. — 2010. — Т. 25, № 6. — С. 386—398. — (дата обращения: 24.11.2023).

6. A Papier-Mâché Approach to Learning 3D Surface Generation / T. Groueix [и др.] // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). — 2018.

7. *Cook R.*, *De Rose T.* Wavelet Noise [Электронный ресурс]. — URL: `https://graphics.pixar.com/library/WaveletNoise/paper.pdf` (дата обращения: 11.11.2023).

8. Procedural Noise/Categories [Электронный ресурс]. — URL: `https://physbam.stanford.edu/cs448x/old/Procedural_Noise(2f)Categories.html` (дата обращения: 11.11.2023).

9. *Крыжевич Л.*, *Ковалев В.* Задача очистки изображения от шума и вейвлет-подходы к ее решению // Актуальные исследования в области математики, информатики, физики и методики их изучения в совре-

менном образовательном пространстве. — 2016. — Т. 1, № 1. — С. 39—44.

10. *Смоленцев Н.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. — Москва : ДМК Пресс, 2014. — С. 628.

11. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. — Москва : Мир, 2005. — С. 671.

12. *Новиков Л.* Модифицированные вейвлеты в обработке данных аналитических приборов. I. основы теории. — 2006. — URL: `https://cyberleninka.ru/article/n/modifitsirovannye-veyvlety-v-obrabotke-dannyh-analiticheskih-priborov-i-osnovy-teorii` (дата обращения: 25.11.2023).

13. *Meyer Y.* Wavelets: Algorithms and applications. — Philadelphia : S.I.A.M., 1993. — С. 129.