

# 클린업 1주차

## 3팀 선형대수학

황정현  
고경현  
김지민  
반경림  
전효림

# INDEX

---

1. 선형대수 소개
2. 기본 개념
3. 선형방정식과 선형결합
4. 선형변환
5. 선대, 딥러닝을 만나다

# 1

## 선형대수 소개

# ‘ 선형대수 ’

통계 분석의 시작점

선형성을 바탕으로  
선형변환과 그때의 공간에 대해 연구하는  
대수학의 한 분야



# ‘ 선형대수 ’



## 데이터의 처리

데이터프레임화

차원축소

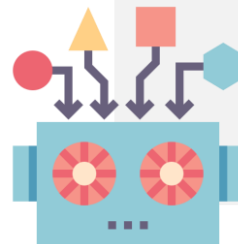
공간적 조작



## 이론적 바탕

머신러닝의 기반

통계 모델의 원리



# 2

## 기본 개념

## 선형성

“ 함수  $f$ 는 선형이다 ”

가산성

임의의 수  $x$ 와  $y$ 에 대해  $f(x + y) = f(x) + f(y)$

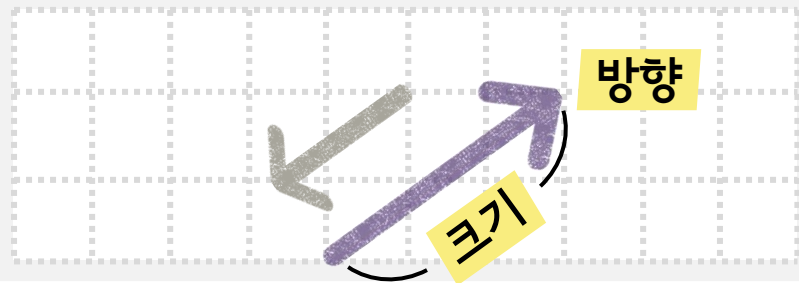
동차성

임의의 수  $x$ 와 상수  $a$ 에 대해  $f(ax) = a \cdot f(x)$

## 벡터(vector)의 개념

### ✓ 벡터의 물리적 의미

‘ 어느 **방향**으로 얼마만큼의  
힘 또는 속도를 갖는지 ’  
≠ 스칼라(*scalar*)



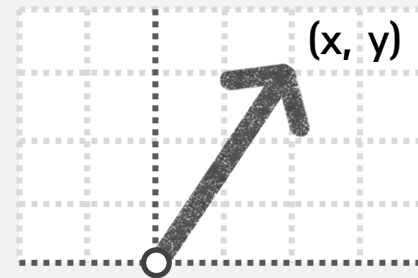
### ✓ 데이터분석의 기본 단위



다른 데이터를 구성하는 기본  
+

데이터를 **선형적 관점**에서  
이해할 수 있는 핵심 매개

### ✓ 선형대수학의 공간적 이해



(x, y)

2개의 원소



$\mathbb{R}^2$

- **원소**(component): 벡터를 구성하는 값
- **벡터공간**(vector space,  $\mathbb{R}$ ): 벡터로 이뤄지는 공간
- **n개의 원소**로 이뤄진 벡터는 **n차원** 공간에 있음



## | 벡터의 연산

## 1 수식적으로 계산하기

벡터의 연산은 원소끼리 이루어짐

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

상수배

$$\text{상수 } kv = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$$

덧셈

$$v + w = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

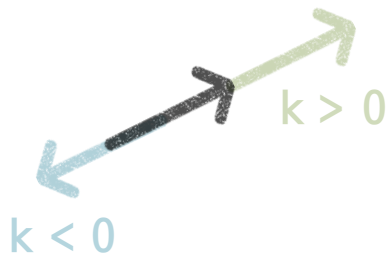
뺄셈

$$v - w = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$$

## 벡터의 연산

### 2 기하학적으로 계산하기

상수배



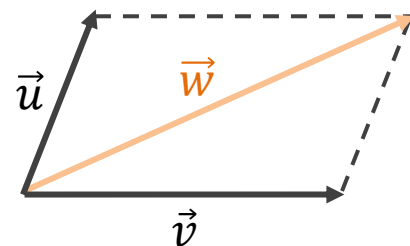
벡터에 상수  $k$ 를 곱한다

=

벡터의 길이를  $k$ 배 한다

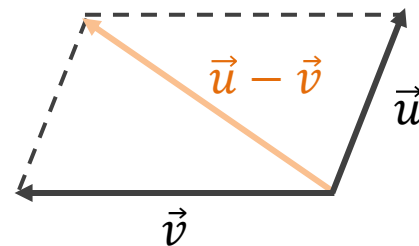
덧셈

벡터  $u$ 에서 벡터  $v$ 만큼  
이동하면서 생기는  
평행사변형의 대각선이  
 $u+v$ , 즉 벡터  $w$



뺄셈

벡터  $v$ 에 대해 -1배 한 뒤  
벡터  $u$ 와 더하면 벡터  $u-v$



## 벡터의 연산법칙

$\mathbb{R}^n$ 의 벡터  $x, y, z$ 와 스칼라  $h, k$ 에 대하여 다음이 성립한다.



- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + 0 = x = 0 + x$
- $x + (-x) = 0 = (-x) + x$
- $k \cdot (x + y) = kx + ky$
- $(h + k) \cdot x = hx + kx$
- $(h \cdot k) \cdot x = h \cdot (k \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

## 행렬(matrix)의 개념

- 실수를 직사각형 모양의 행과 열로 배열한 형태

원소(element)  
또는 성분(entry)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

행  $m$ 개와 열  $n$ 개로 이루어진  
 $m \times n$  크기의 행렬

## 행렬(matrix)의 개념

- 실수를 직사각형 모양의 행과 열로 배열한 형태

정사각행렬(square matrix)

주대각성분

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

행  $n$ 개와 열  $n$ 개로 이루어진  
 $n \times n$  크기의 행렬

## 행렬의 연산

상수배

모든 원소에 같은 상수를 곱함

합

**크기가 같은** 두 행렬에서 같은 위치에 있는 원소끼리 합함

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

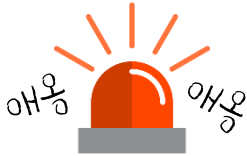
$$3A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 & 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+6 \\ 3+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

## 행렬의 연산

곱

앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행이 크기가 같을 때, 원소의 곱의 합



해용

해용

행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않음, 즉  $AB \neq BA$

$${}_{2 \times 3} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_{3 \times 2} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{2 \times 2} AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

## 행렬의 종류

$$\begin{pmatrix} \text{영행렬} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

모든 원소가 0인 행렬 (0)



## 행렬의 종류

영행렬

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

모든 원소가 0인 행렬 (0)

정방행렬

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

행과 열의 개수가 같은  
정사각형 행렬

대각행렬

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

정방행렬 중  
주대각선 이외의 값이 0인 행렬

단위행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

대각행렬 중  
주대각성분이 1인 행렬 (I)

## 행렬의 종류

영행렬

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

모든 원소가 0인 행렬 (0)

$${}_{3 \times 2} A =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}_{2 \times 3} A^T =$$

전치행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 **행과 열을 교환**하여 얻은 행렬  $A^T$

정방행렬의  
전치행렬은  
주대각선을  
기준으로  
대칭

정방행렬

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

행과 열의 개수가 같은  
정사각형 행렬

대각행렬

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

정방행렬 중  
주대각선 이외의 값이 0인 행렬

단위행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

대각행렬 중  
주대각성분이 1인 행렬 (I)

## 역행렬

$$\underset{\substack{n \times n \text{의} \\ \text{정방행렬}}}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \underset{\substack{n \times n \text{의} \\ \text{단위행렬}}}{\mathbf{I}}$$



## Properties

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$



## 2 x 2 matrix의 경우

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## 역행렬

$$\underset{\substack{n \times n \text{의} \\ \text{정방행렬}}}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \underset{\substack{n \times n \text{의} \\ \text{단위행렬}}}{\mathbf{I}}$$

행렬  $A$ 는 오직 하나의 역행렬만 가질 수 있기 때문에

Properties

2 x 2 matrix의 경우

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

역행렬을 가진다

해가 유일하다 (unique)

가역하다 (invertible)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

모두 같은 말!



# 3

## 선형방정식과 선형결합


## 선형방정식(Linear equation)


양의 정수  $n$ 에 대하여,  $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$  형태로 표현되는 식


하나 이상의 선형방정식 집합은

연립선형방정식

$$\begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{pmatrix}$$

  
**A**  
 $m \times n$  행렬

  
**x**  
 $n \times 1$  벡터

  
**b**  
 $m \times 1$  벡터

## 선형방정식(Linear equation)



양의 정수  $n$ 에 대하여,  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  형태로 표현되는 식

문자의 개수가 많거나 일반화된 해를 찾기 힘들 때

**행렬과 벡터를 이용한 선형방정식의 꼴로 만들어 해결할 수 있다!**

$$\begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array}
 \quad
 \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{pmatrix}$$

A

$m \times n$  행렬

x

$n \times 1$  벡터

b

$m \times 1$  벡터

## $Ax = b$ 판별 및 해 구하기



문자의 개수가 많거나 일반화된 해를 찾기 힘들 때  
행렬과 벡터를 이용한 선형방정식의 꼴로 만들어 해결할 수 있다!

### *Gauss-Jordan Elimination*



Carl Friedrich Gauss



Wilhelm Jordan

계수만으로 행렬을 생성한 후  
**Elementary Row Operation**을 이용하여  
**Row Echelon Form**으로 만들어  
연립선형방정식의 해를 구함



## $Ax = b$ 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기

✓ Elementary Row Operation (ERO, 기본 행 연산)

두 행을 교환한다

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기

✓ Elementary Row Operation (ERO, 기본 행 연산)

한 행에 0이 아닌 실수를 곱한다

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{R1} \rightarrow 2 \times \text{R1}]{\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기

✓ Elementary Row Operation (ERO, 기본 행 연산)

한 행에 0이 아닌 실수배를 하여 다른 행에 더한다

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{R2} \rightarrow 2 \times \text{R1} + \text{R2}]{\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기

✓ Row Echelon Form (REF)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

성분이 모두 0인 행이 존재하면  
그 행은 행렬의 맨 아래에 위치

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기

✓ Row Echelon Form (REF)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

각 행에서 처음으로 나타나는  
0이 아닌 성분은 1

*Leading 1 (선행성분, pivot)*

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기



Row Echelon Form (REF)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i+1)행의 선행성분은  
i행의 선행성분보다  
**오른쪽에** 위치

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 1 해 구하기



Reduced Row Echelon Form (RREF)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Leading 1을 포함하는 열의  
선행선분 외의 성분은 모두 0

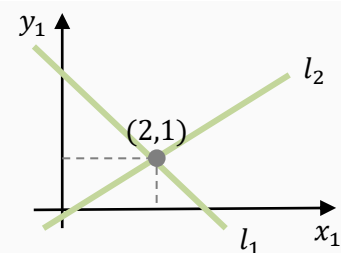
## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 2 해의 종류

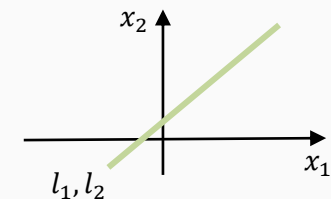
일치한다

*Consistent*

해가 유일하다



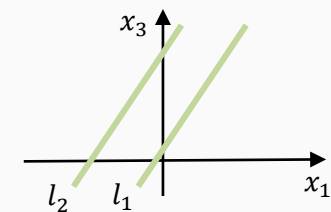
해가 무수히 많다



불일치한다

*Inconsistent*

해가 없다





## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 3 해의 판별

✓ 사전 작업

Ax = b 를 행렬  $[A \mid b]$  로 만들고 G-J 소거법을 이용해  
RREF인  $[H \mid c]$  로 만든다

$$\begin{cases} -2x - 5y + 2z = -3 \\ x + 3y = 4 \\ y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

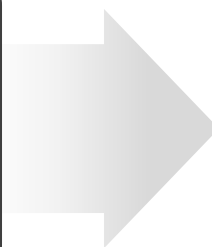
## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 3 해의 판별



H의 모든 열에 leading 1이 존재할 때  $\bigcirc$  유일한 해가 있다

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$



$$x = -5$$

$$y = 3$$

$$z = 1$$

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 3 해의 판별



H의 일부 행에 leading 1이 없고, 오른쪽 숫자가 0일 때

⊃ 해가 **무수히 많다**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



$$x = -2t + 3$$

$$y = -t + 1$$

$$\textcircled{z} = t$$

자유변수 (free variable)

: z에 의해 x, y 설명

## Ax = b 판별 및 해 구하기

### 3 해의 판별



H의 일부 행에 leading 1이 없고, 오른쪽 숫자가 0이 아닐 때

➤ 해가 **없다**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

위 선형방정식을  
만족시키는 해는  
존재하지 않음

## 선형결합(Linear combination)

- 벡터들을 상수배와 벡터 덧셈을 통해 조합하여 새로운 벡터를 얻는 연산

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

## 선형결합(Linear combination)과 span

- 벡터들을 상수배와 벡터 덧셈을 통해 조합하여 새로운 벡터를 얻는 연산

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

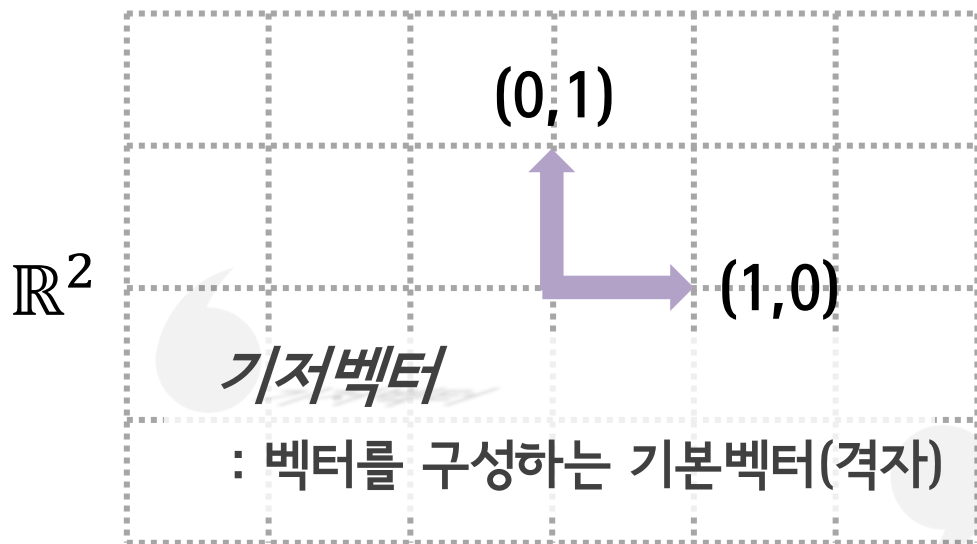
$\text{span}\{a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n\}$



$m \times n$  행렬  $A$ 와  $n$ 개의 원소를 가진 벡터  $x$ 를 곱할 때,

$a_i$ 의 조합 = **span**

## span의 공간적 이해



2차원 벡터공간 내  
모든 벡터는 **기저벡터인**  
 **$(0, 1)$ 과  $(1, 0)$ 의**  
**span(조합)을 통해**  
표현할 수 있음

## span의 공간적 이해

다음주를 기대해주세요!


 $\mathbb{R}^2$ 

(0, 1)

$Ax = b$ 의 해가 존재한다

a의 조합으로 b를 표현할 수 있다

기저벡터 : 벡터를 구성하는 기본벡터(격자)

벡터 b가  $\text{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 에 있다

2차원 벡터공간 내

모든 벡터는 기저벡터인

(0, 1)과 (1, 0)의

$\text{span}(\text{조합})$ 을 통해

표현할 수 있음



# 4

## 선형변환

## 선형 '변환'의 의미



선형방정식  $Ax = b$ 를 '변환'의 관점에서 이해해보자!

$$\begin{matrix} A \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} b \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

x라는 input에 A라는 변환을 거쳐 b라는 새로운 output 반환

## 선형 '변환'의 의미



INPUT  $Ax = b$ 의 해를 찾고자 하는 것은 곧 OUTPUT  
 $A$ 를 곱했을 때  $b$ 로 변환되는 벡터  $x$ 를 찾는 것이다!

선형방정식  $Ax = b$ 를 '변환'의 관점에서 이해해보자!

$$\begin{matrix} A \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} b \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

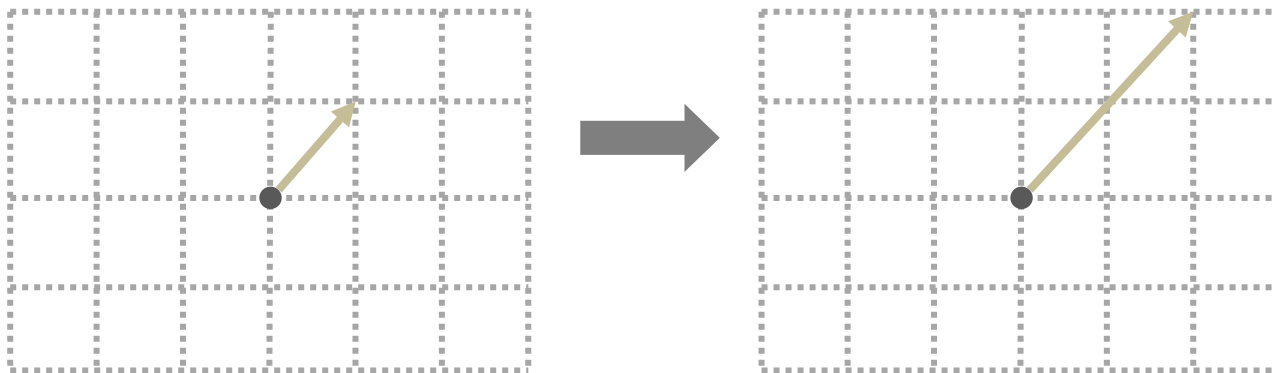
$x$ 라는 input에  $A$ 라는 변환을 거쳐  $b$ 라는 새로운 output 반환

## ‘선형’ 변환의 의미 (1) 수식적 의미

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  일 때,

정의역에 존재하는 임의의 벡터  $u, v$ 에 대해


- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(ku) = k \cdot T(u)$  ( $k$ 는 상수)




## ‘선형’ 변환의 의미 (2) 공간적 의미

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= 1T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

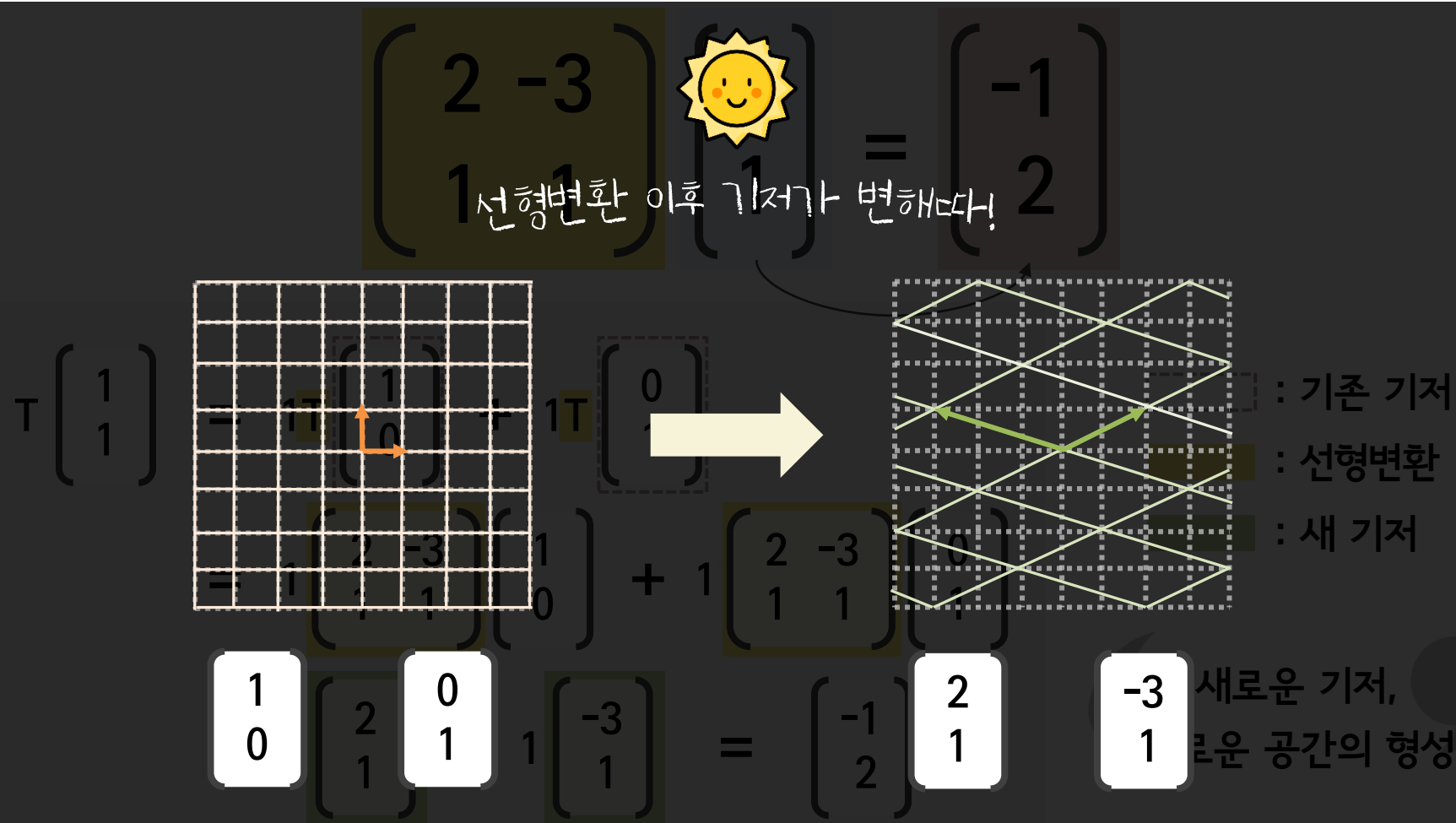
 : 기존 기저

 : 선형변환

 : 새 기저

새로운 기저,  
새로운 공간의 형성

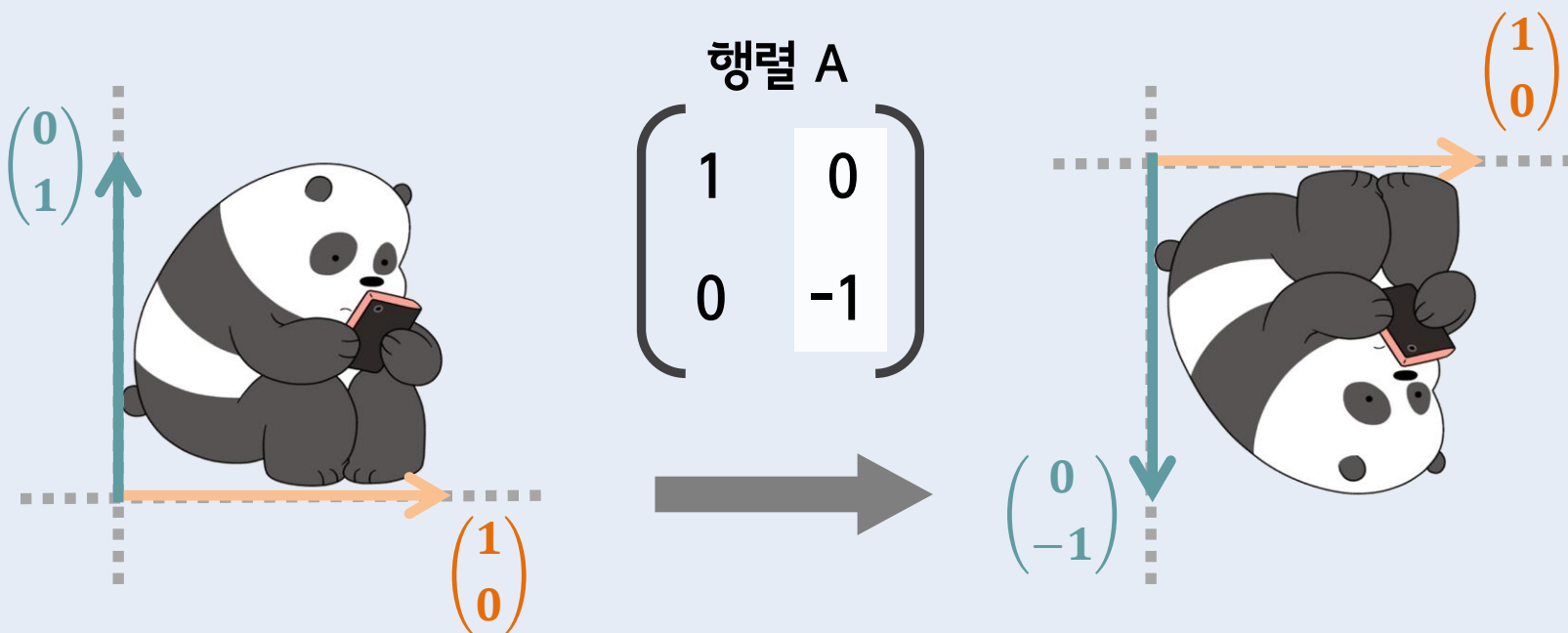
## ‘선형’ 변환의 의미 (2) 공간적 의미



## 선형변환의 종류

## Reflection

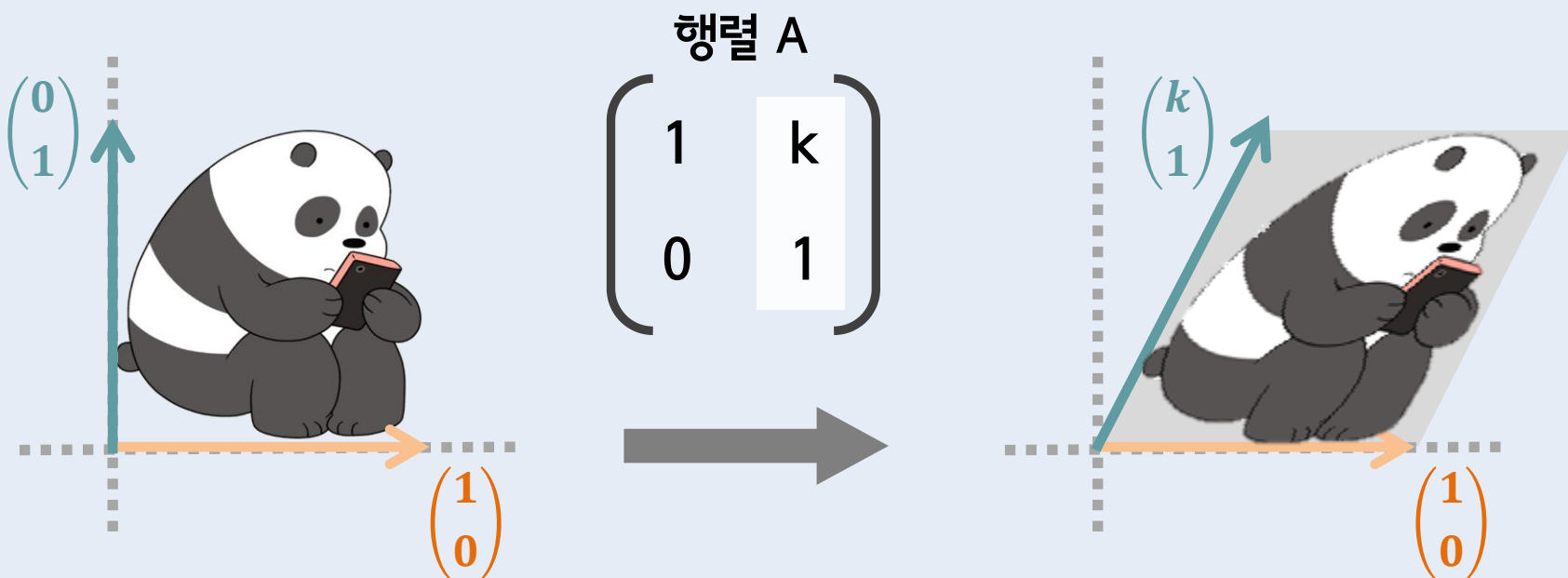
- 특정 축을 중심으로 벡터를 반전
- 각각의 벡터  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ 이 선형변환 행렬  $A$ 에 의해 반전



## 선형변환의 종류

### Shear

- **평행사변형으로 변환**
- 각각의 벡터  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ 이 선형변환 행렬  $A$ 에 의해 평행사변형 꼴로 변환

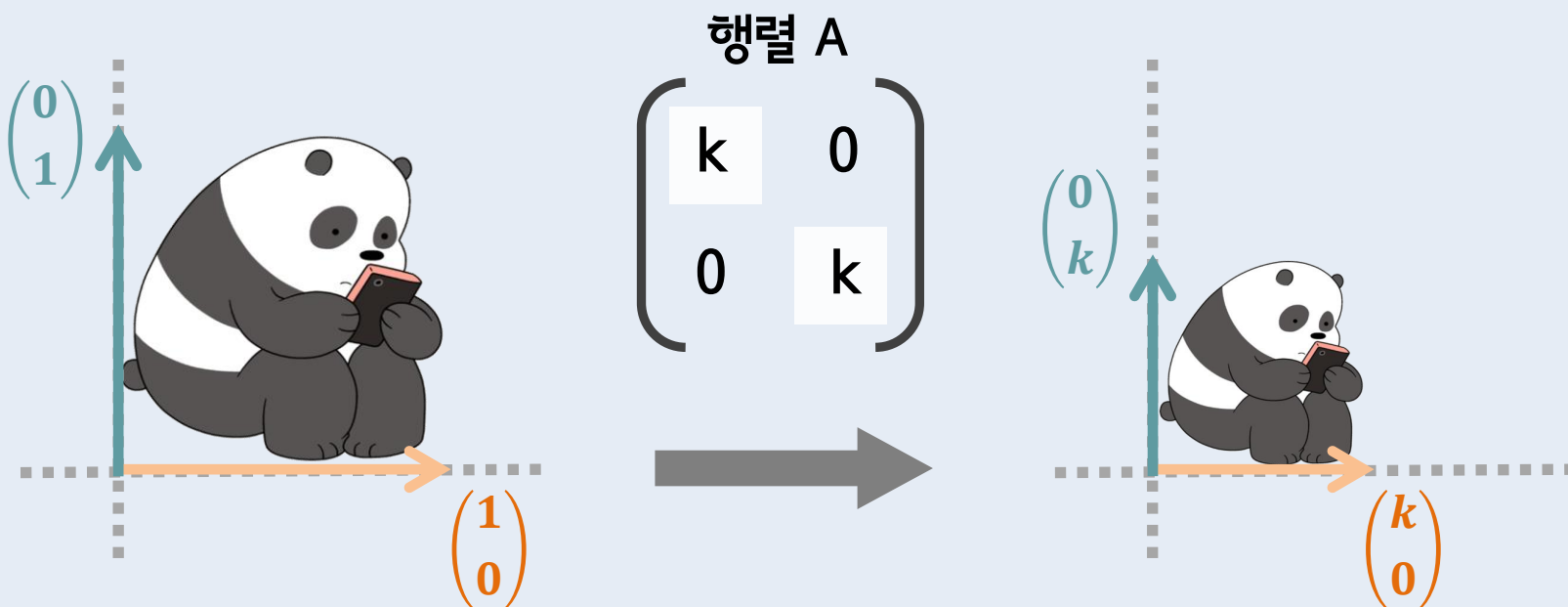




## 선형변환의 종류

### Contractions & Expansions

- 특정  $k$ 배로 수축 또는 확장
- 각각의 벡터  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ 이 선형변환 행렬  $A$ 에 의해 축소됨 ( $k < 0$ )



## 선형변환으로 AB와 BA가 다를 수 이해하기

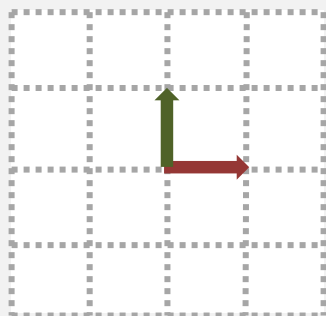
A 공간을 오른쪽으로 90° 회전시키는 선형변환

B 공간을 좌우로 뒤집는 선형변환

AB

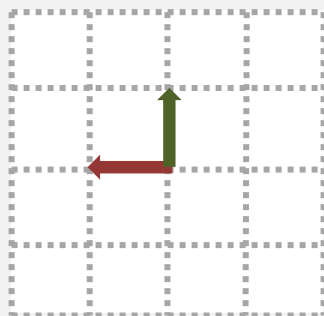
≠

BA



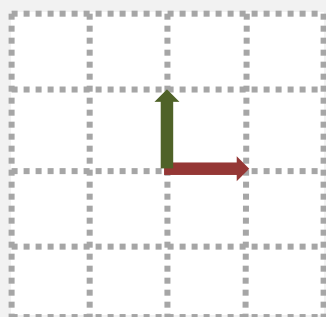
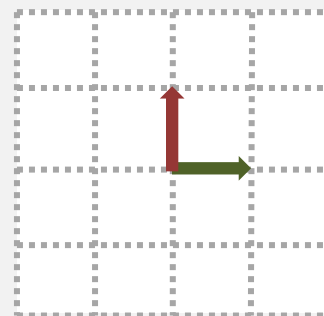
B

좌우 반전



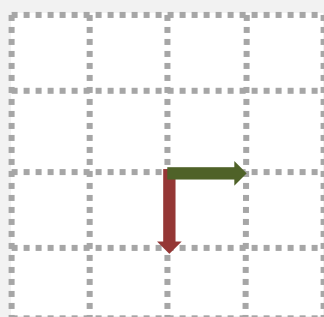
A

90도 회전



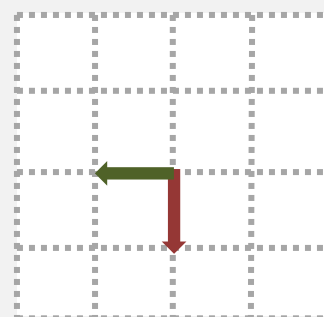
A

90도 회전



B

좌우 반전



## 선형변환으로 Gauss-Jordan 소거법 이해하기

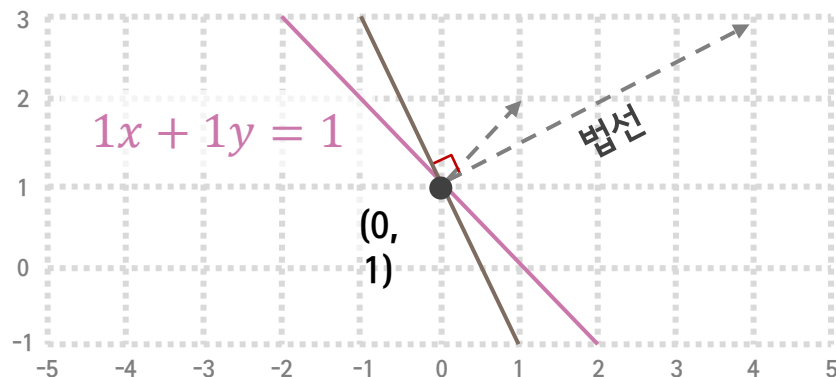
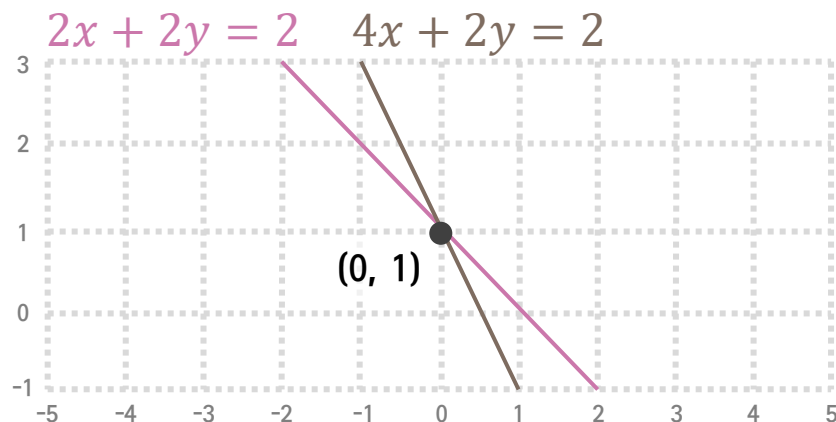
선형변환의 차원에서 선형방정식  $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$  을 풀어보자!

1  $Ax = b$ 를  $[A | b]$  형태로 변경

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

2 Scaling ( $R1 \times 0.5$ )

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array} \right)$$



## 선형변환으로 Gauss-Jordan 소거법 이해하기

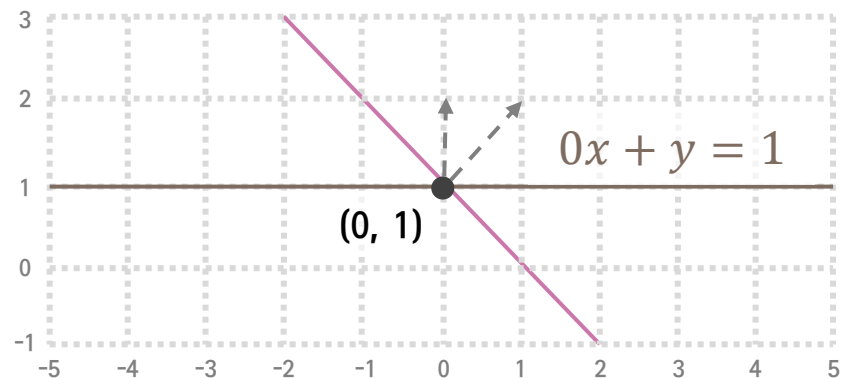
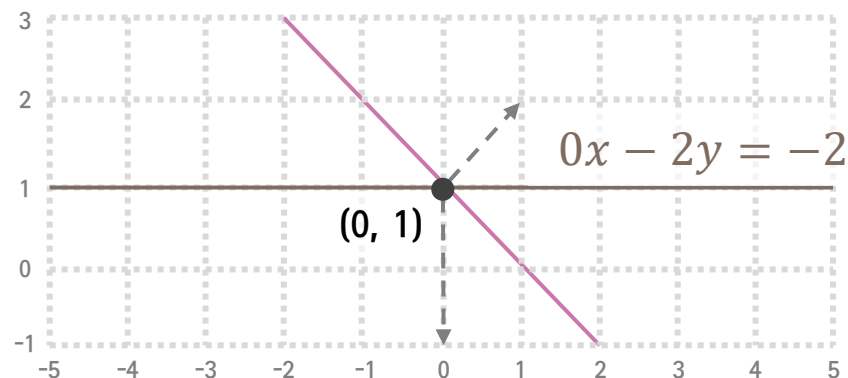
선형변환의 차원에서 선형방정식  $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$  을 풀어보자!

3 Subtraction ( $R_2 - 4 \times R_1$ )

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

4 Scaling ( $R_2 \times -0.5$ )

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

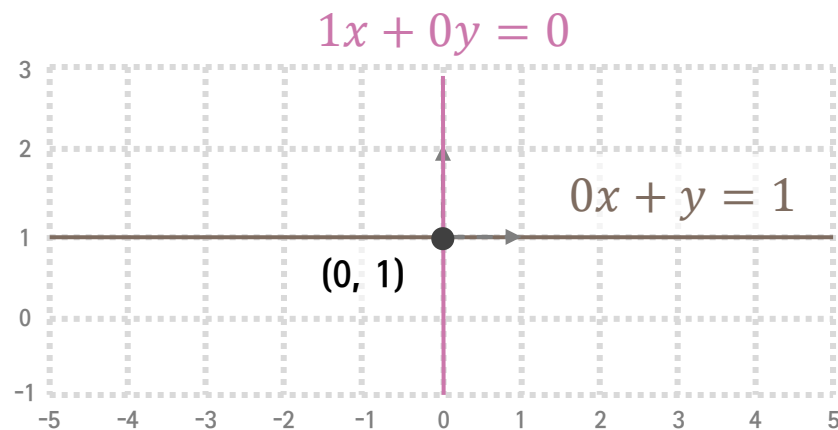


## 선형변환으로 Gauss-Jordan 소거법 이해하기

선형변환의 차원에서 선형방정식  $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$  을 풀어보자!

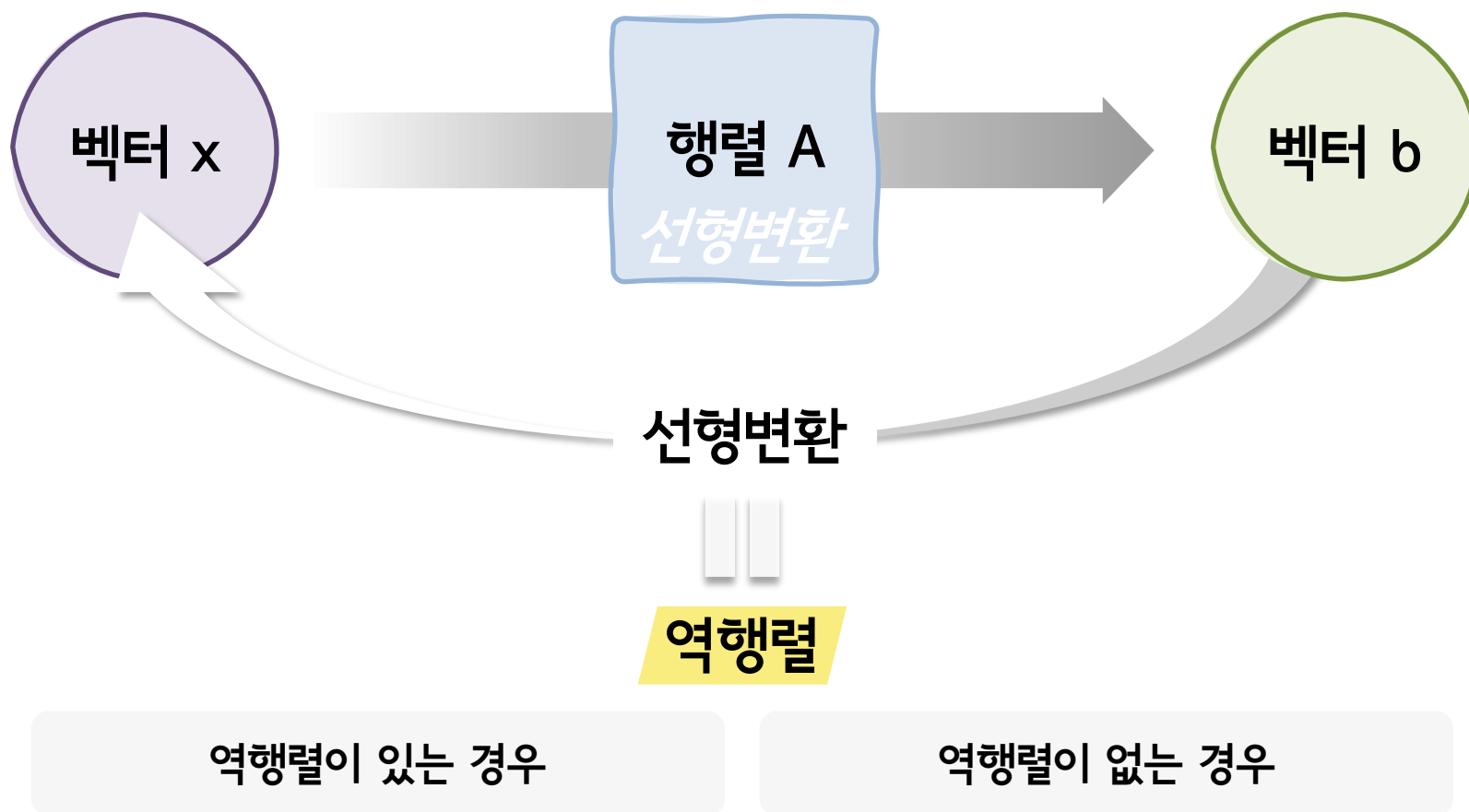
5 Subtraction ( $R1 - R2$ )

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$



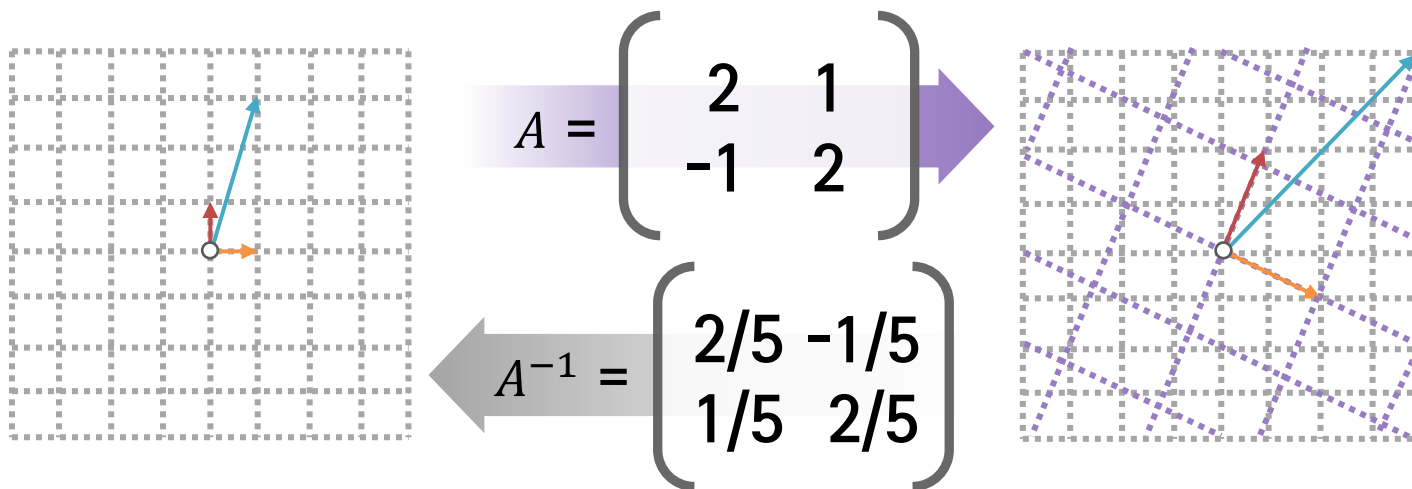
축이 원래의 x축 · y축과 평행해짐

## 선형변환으로 역행렬 이해하기



## 선형변환으로 역행렬 이해하기

### 1 역행렬이 있는 경우



정방행렬  $A$ 의 역행렬이 존재한다

- ⊖  $Ax = b$ 가 유일한 해를 갖는다(unique)
- ⊖ 특정  $x$ 를 선형변환한  $Ax$ 가 유일하다
- ⊖  $x$ 와  $Ax$ 가 서로 일대일 대응이다

## 선형변환으로 역행렬 이해하기

### 2 역행렬이 없는 경우



1차원 벡터를 어떠한 특정  
2차원 벡터로 되돌려야 하는지  
알 수 없다

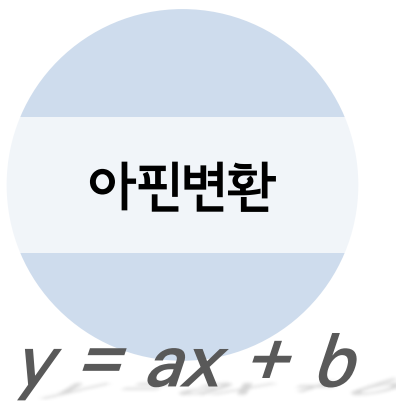
- ⊖  $x$ 와  $Ax$ 가 서로 일대일 대응이 아니다
- ⊖  $Ax = b$ 의 해가 유일하지 않다
- ⊖ 역행렬이 존재하지 않는다



# 5

선대, 딥러닝을 만나다

## Affine transformation



선형변환

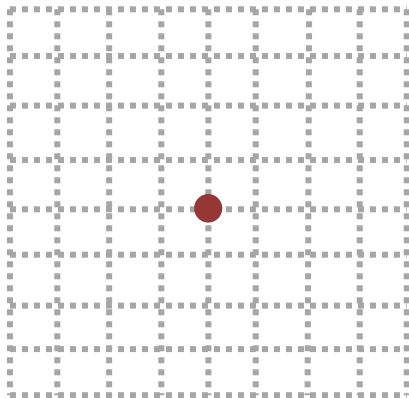


평행이동

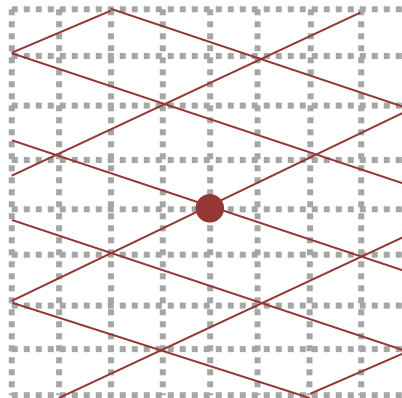


‘선형성’을 바탕으로 한  
원점 변화 없는 벡터 변환

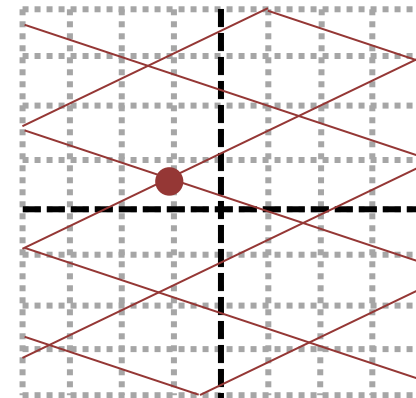
선형성 만족하지 않음



변환 전

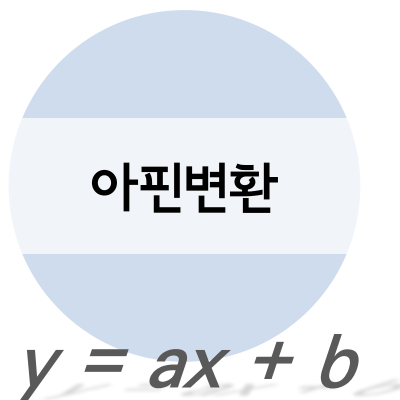


선형변환



아핀변환

## Affine transformation



선형변환



평행이동



‘선형성’을 바탕으로 한  
원점 변화 없는 벡터 변환

선형성 만족하지 않음

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Ax + **b** (2차원)

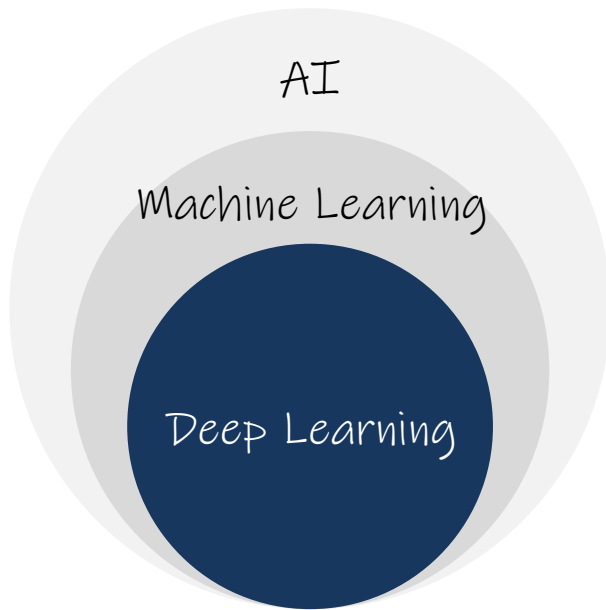
$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

선형결합

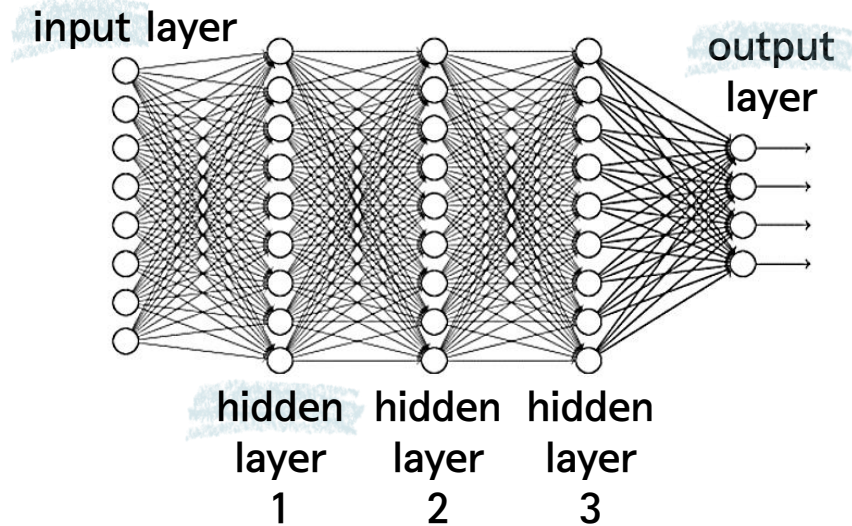
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

A\*x\* (3차원)

## 딥러닝



- 인공지능망을 이용하는 머신러닝
- 주로 비정형데이터 분석에 사용



활성화 함수로 예측값 계산

손실함수로 예측과 실제의 오차 측정

손실함수를 바탕으로 가중치 업데이트

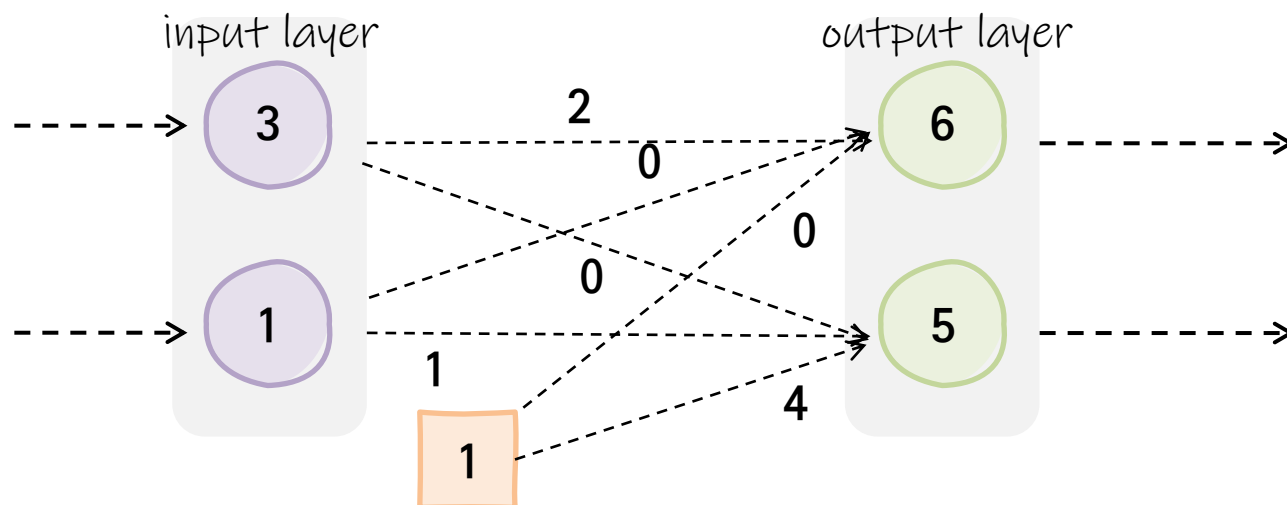
## Affine과 딥러닝

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

가중치      input layer      bias

입력값

딥러닝  
모델에의  
적용



# 선대, 딥러닝을 만나다

## Affine과 딥러닝

그럼 아핀변환이 곧 딥러닝이다,  
이 말인가요?



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

가중치

input layer

bias

input  
vector

가중치 행렬을  
통한 선형변환

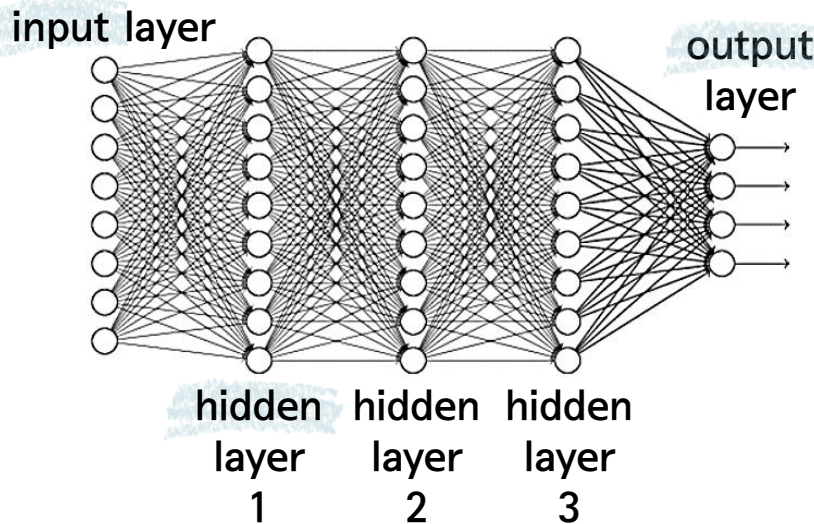
output  
vector

딥러닝  
모델에의  
적용

딥러닝의 학습 과정 중 **bias**를 고려하는 것을  
아핀변환에서의 **평행이동**처럼 해석할 수 있다!



## Affine과 딥러닝



활성화 함수로 예측값 계산

손실함수로 예측과 실제의 오차 측정

손실함수를 바탕으로 가중치 업데이트

*sigmoid, tanh, ...*  
비선형 활성화 함수를  
이용하는 이유

선형함수  $f(x) = kx$ 를 이용해  
n번 층을 쌓음



$k^n x$

즉,  $k^n$ 을 한 번 적용하는 것과 같아  
여러 hidden layer을 쌓으며  
가중치를 업데이트하는 이점이 없음

# !다음주 예고!

다음주에는

 행렬식 

 공간개념 이해하기 

부분공간, 기저, Rank

 직교와 투영벡터 

 선대, 회귀를 만나다 

합니다!!





**THANK YOU**

