

# 1 Обязательные задачи к лекциям

## 1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

**Задача 1.** Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  — простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}$ , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых  $a, b \in \mathbb{Z}$  таких, что  $a < 0 < b$ , с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми  $y = a$  и  $y = b$ .

*Решение.* Разобьем линию времени на промежутки длины  $|a - b|$ . Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение  $-1$  (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для  $N$  промежутков получаем вероятность  $P^N$ ; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение  $-1$ , равна

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N = 0.$$

**Задача 2.** Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  и  $S' = \{S'_n, n \geq 0\}$  — независимые простые случайные блуждания в  $\mathbb{Z}^d$ , имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями  $(X_n)_{n \geq 1}$  и  $(X'_n)_{n \geq 1}$ , состоящими из независимых векторов таких, что

$$\mathbb{P}(X_1 = e_k) = \mathbb{P}(X_1 = -e_k) = \mathbb{P}(X'_1 = e_k) = \mathbb{P}(X'_1 = -e_k) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь  $e_k$  — вектор в  $\mathbb{R}^d$ , у которого  $k$ -я координата равна единице, а остальные равны нулю,  $k = 1, \dots, d$ . Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\},$$

где  $\mathbb{I}(A)$  — индикатор события  $A$ . Найти все  $d \in \mathbb{N}$ , для которых  $\mathbb{E}N < \infty$ .

*Решение.* Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^k - S_m^{k'} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i(S_n^k - S_m^{k'})t_k}}{2\pi} dt_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt,$$

поскольку

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \mathbb{I}\{n = 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^n(t) \varphi^m(-t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(X_1, t)}.$$

Получаем, что

$$\mathbb{E} N = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos t_k \sim \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель  $R$  в степени  $d - 1$ , то интеграл сходится  $\Leftrightarrow d \geq 5$ .

## 1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

**Задача 3.** Пусть в модели Гальтона–Ватсона  $P(\xi = 0) = 1/4$ ,  $P(\xi = 2) = 1/2$ ,  $P(\xi = 6) = 1/4$ . Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше  $1/2$ .

*Решение.* Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию  $\psi_\xi(z) - z$ . Заметим, что

$$(\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \quad (\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку  $\psi_\xi(z) - z$  — непрерывная функция, то уравнение  $\psi_\xi(z) - z = 0$  будет иметь корень на интервале  $(0, 1/2)$ . Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше  $1/2$ .

**Задача 4.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  таких, что  $EX_1 = \mu \in (0, \infty)$  и  $\text{var} X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$ . Доказать, что

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

*Решение.* Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Запишем

$$P \left( \frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x \right) = P \left( Z(t) < x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(Z(t) < n) = \mathbf{P}(S_n > t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z(t) < n(t)) &= \mathbf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathbf{P}(S_{n(t)} > t) = \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right). \end{aligned}$$

Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо  $n(t)$  его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику дробной части):

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$

Поскольку нас интересует асимптотика при  $t \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)),$$

где

$$A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Перепишем:

$$\mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)) = \mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$

Воспользуемся леммой Слущкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку

$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Тогда получаем, что в каждой точке  $x$  непрерывности функции распределения  $\Phi(x)$  случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке  $x$ ),

$$\mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \rightarrow 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Итак, получили, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

### 1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

**Задача 5.** Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

*Решение.* Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина  $\xi$  равновероятно (с вероятностью  $1/3$ ) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_n \sim \xi$  процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup \{n : \xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим  $Z(2) - Z(1)$ ,  $Z(1)$ .

$$P(Z(2) - Z(1) = 0, Z(1) = 0) = 0,$$

поскольку  $\xi_n \leq 2$ . Вместе с этим

$$P(Z(2) - Z(1) = 0) \geq P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = \frac{1}{9}, \quad P(Z(1) = 0) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

**Задача 6.** Найти ковариационную функцию процесса  $Z(t) = \{Z(t), t \geq 0\}$  (называемого телеграфной волной), где  $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$ ,  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ , случайная величина  $\xi_0$  принимает значения 1 и  $-1$  с вероятностью  $1/2$ , причем  $\xi_0$  не зависит от процесса  $N$ .

*Решение.* Сначала предположим, что  $t > s$ . Вычислим ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z(t), Z(s)) &= \text{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = \\ &= E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$E\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = 1, \quad (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)} = E(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Тогда получаем, что

$$E(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай  $t \leq s$  рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$\text{cov}(Z(t), Z(s)) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

## 1.4 Задачи к лекции от 01.03.17

**Задача 7.** Пусть  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  — пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\lambda\mu(\cdot)$ , где  $\lambda$  — положительная константа, а  $\mu$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть  $\{x_i\}$  — ансамбль случайных точек в  $\mathbb{R}^d$ , образующих этот процесс. Для  $z \in \mathbb{R}^d$  введем случайную величину  $Y(z) := \inf_{i \in \mathbb{N}} \|z - x_i\|$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^d$  (иначе говоря, рассматривается расстояние от точки  $z$  до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найдите функцию распределения величины  $Y(z)$  и ее математическое ожидание.

*Решение.* Заметим, что

$$\mathbf{P}(Y(z) \geq R) = \mathbf{P}(N(B_{z,R}) = 0),$$

где  $B_{z,R}$  — шар с центром  $z$  и радиусом  $R$ . Известно, что мера Лебега, то есть объем,  $d$ -мерного шара, равен

$$\mu(B_{z,R}) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} R^d.$$

По определению пространственного пуассоновского процесса,

$$\mathbf{P}(N(B_{z,R}) = 0) = e^{-\lambda\mu(B_{z,R})};$$

таким образом,

$$F_{Y(z)}(R) = \mathbf{P}(Y(z) < R) = 1 - e^{-\lambda\mu(B_{z,R})} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leq 0. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание  $Y(z)$ . Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$p_{Y(z)}(R) = F'_{Y(z)}(R) = \begin{cases} \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} dR^{d-1} e^{-\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leq 0 \end{cases}$$

Вычислим интеграл. Для упрощения введем обозначение

$$Q := \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y(z) &= \int_0^\infty Q dR^d e^{-QR^d} dR = - \int_0^\infty R e^{-QR^d} d(-QR^d) = - \int_0^\infty R d(e^{-QR^d}) = \\ &= \int_0^\infty e^{-QR^d} dR = \int_0^\infty e^{-Qu} d(\sqrt[d]{u}) = \frac{1}{d} \int_0^\infty u^{\frac{1}{d}-1} e^{-Qu} du = \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{d}-1} e^{-t} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} \left( \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \right)^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right).$$

**Задача 8.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda > 0$ , то есть процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин  $X, X_1, X_2, \dots$  таких, что  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Положим  $S_n := X_1 + \dots + X_n, n \in \mathbb{N}$ . Найдите функционал Лапласа процесса  $Y = \{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(S_n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ .

*Решение.* Для начала возьмем простую функцию:

$$f(x) := c \mathbb{I}(0 \leq x \leq t).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c \mathbb{I}(S_n \leq t) = cN(t), \quad N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t).$$

Из этого получаем, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathbb{E} e^{-cN(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ck} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t(1-e^{-c})}.$$

Заметим, что

$$e^{-\lambda t(1-e^{-c})} = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Будем доказывать, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Рассмотрим теперь

$$f(x) := \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}(t_{i-1} \leq x < t_i), \quad c_i > 0, \quad 0 \leq t_0 < \dots < t_n.$$

Из независимости приращений пуассоновского процесса и из полученного выше значения функционала Лапласа на простой функции следует, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-c_i \xi_i}, \quad \xi_i \sim \text{Pois}(\lambda(t_i - t_{i-1})),$$

то есть

$$\mathcal{L}(f) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda t(1-e^{-c_i})} = e^{-\lambda t \sum_{i=1}^n (1-e^{-c_i})}.$$

Снова отметим, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$



Из курса действительного анализа известно, что любая неотрицательная измеримая функция приближается монотонно возрастающей последовательностью линейных комбинаций простых функций (этот факт также доказан в лекциях, см. Лемму 5.2). Возьмем такую последовательность  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда  $f_n \nearrow f$  почти наверное. Заметим, что интеграл в экспоненте, рассматриваемый как функция от аргумента  $f(x)$ , монотонно зависит от  $f(x)$ . Поскольку функционал Лапласа определен только для неотрицательных функций, то

$$e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f(S_p)}$$

по теореме о монотонной сходимости. Тогда

$$\mathcal{L}(f_n) = \mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow \mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f(S_p)} = \mathcal{L}(f).$$

Вместе с этим

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f_n(x)}) dx} \searrow e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx}$$

по теореме о монотонной сходимости. Получили, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx}.$$

## 1.5 Задачи к лекции от 15.03.17

**Задача 9.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda > 0$ ,  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные неотрицательные величины, причем семейства  $\{N(t), t \geq 0\}$  и  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  независимы. Определим процесс Крамера–Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент  $t \geq 0$ , формулой

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0,$$

где  $C_0$  и  $c$  — положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  имеет независимые приращения.

*Решение.* Проверим независимость приращений. Для этого необходимо показать, что случайные величины

$$Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \dots, Z(t_n) - Z(t_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq t_0 < \dots < t_n,$$

независимы в совокупности. Для этого достаточно (поскольку борелевские функции от независимых случайных величин независимы) показать, что случайные величины

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{N(t_0)} Y_k, \quad \xi_2 = \sum_{k=N(t_0)+1}^{N(t_1)} Y_k, \quad \dots, \quad \xi_{n+1} = \sum_{k=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)} Y_k$$

независимы в совокупности. Известно (см., например, [2], страница 304), что для того чтобы компоненты случайного вектора  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  были независимы в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbb{E} e^{i(u_1 \xi_1 + \dots + u_n \xi_n)} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} e^{iu_k \xi_k}.$$

Проверим, что в данном случае это свойство выполнено. Составим вектор из этих случайных сумм и найдем его характеристическую функцию:

$$\varphi_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}}(u_1, \dots, u_{n+1}) = \mathbb{E} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right],$$

где  $N(t_{-1}) \equiv 0$ . Будем использовать аппарат условных математических ожиданий. Рассмотрим

$$\mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] \middle| N(t_0) = v_1, \dots, N(t_n) = v_n \right),$$

где  $v_0 = 0$ . Из курса математической статистики известны следующие свойства условного математического ожидания: во-первых, если  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные векторы, то

$$\mathbb{E} (f(\xi, \eta) | \eta = y) = \mathbb{E} f(\xi, y);$$

во-вторых,

$$\mathbb{E}(\xi | \eta) = \psi(\eta) \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi | \eta = y) = \psi(y);$$

в-третьих,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \eta)) = \mathbb{E}\xi.$$

Воспользуемся первым свойством с  $\xi = (Y_1, \dots, Y_{n+1})$ ,

$\eta = (N(t_0), \dots, N(t_{n+1}))$ , а также независимостью в совокупности  $Y_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0) = v_1, \dots, N(t_n) = v_n \right) &= \\ &= \mathbb{E} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] = \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \exp \left[ i u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] = \\ &= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} e^{i u_j Y_k} = \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} \mathbb{E} e^{i u_j Y_k} = \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (\varphi_Y(u_j))^{v_j - v_{j-1}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым свойством:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0), \dots, N(t_n) \right) &= \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (\varphi_Y(u_j))^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})}. \end{aligned}$$

По условию  $N$  — пуассоновский процесс, то есть

$$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad N(t_0), N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

независимы в совокупности и

$$\forall s \leq t \quad N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Воспользуемся тогда третьим свойством, а также тем, что  $N$  — пуассоновский процесс:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] &= \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0), \dots, N(t_n) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})} = \prod_{j=1}^{n+1} \mathbb{E} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})} = \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^k e^{-\lambda(t_{j-1} - t_{j-2})} \frac{(\lambda(t_{j-1} - t_{j-2}))^k}{k!} = \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} e^{\lambda(t_{j-1} - t_{j-2})(\varphi_Y(u_j) - 1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что характеристическая функция вектора распадается в произведение одномерных функций, что и показывает независимость в совокупности исходных случайных величин.

**Задача 10.** Для пуассоновского процесса  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  интенсивности  $\lambda > 0$  (вводимого как процесс с независимыми приращениями,  $N(0) = 0$  почти наверное,  $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,  $0 \leq s \leq t < \infty$ ) доказать, что не существует модификации, непрерывной почти наверное.

*Решение.* Предположим противное: пусть существует непрерывная почти наверное модификация пуассоновского процесса, то есть существует процесс  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  такой, что

$$\mathbb{P}(N(t) = Y(t)) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку счетное пересечение множеств полной меры есть множество полной меры по непрерывности вероятности, то

$$\mathbb{P}(N(t) = Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+) = 1.$$

Таким образом, можно считать, что почти наверное значения процессов совпадают на счетном всюду плотном множестве. Из непрерывности почти наверное модификации  $Y$  следует, что с вероятностью 1 траектории  $Y$  продолжаются единственным образом по непрерывности справа со значений на счетном всюду плотном множестве. На лекции утверждалось без доказательства, что у пуассоновского процесса есть непрерывная справа кусочно-постоянная модификация со скачками 1. Из этого следует искомое противоречие: по значениям на счетном всюду плотном непрерывная справа функция восстанавливается однозначно, но вместе с этим один из результатов этого продолжения разорван почти наверное (из-за дискретности скачков), а другой — непрерывен почти наверное по предположению.

## 1.6 Задачи к лекции от 22.03.17

**Задача 11.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  (как процесс восстановления). Доказать, что  $\tau := \gamma S_1$ , где константа  $\gamma \in (0, 1)$ , не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса  $N$  ( $S_1$  — длина промежутка до первого скачка процесса  $N$ ).

*Решение.* Пусть  $\tau$  — марковский момент. Тогда  $\tau$  — момент остановки, поскольку  $S_1$  конечен с вероятностью 1. Тогда к  $\tau$  применимо строго марковское свойство, из чего следует, что процесс  $X_t = N_{t+\tau} - N_\tau$  — тоже пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ , который при этом не зависит от  $\tau$ . Заметим, однако, что  $N_\tau = 0$  почти наверное, так как  $\tau < S_1$ . Значит,

$$N_{t+\tau} \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Но тогда из независимости  $N_{t+\tau}$  и  $\tau$  получаем искомое противоречие:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0) &= \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0 \mid \tau = x) = \mathbb{P}(N_{t+x} = 0 \mid \tau = x) = \\ &= \mathbb{P}(N_{t+x} = 0) = e^{-\lambda(t+x)}. \end{aligned}$$

**Задача 12.** Доказать, что для каждого  $a > 0$  величина  $\tau_a(\omega) := \inf \{t \geq 0 : W(t, \omega) = a\}$  является конечным почти наверное марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ .

*Решение.* Пусть  $a > 0$ . Тогда

$$\{\tau_a > t\} = \{\forall s \leq t \ W_s < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \forall s \leq t \ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\}.$$

Воспользуемся непрерывностью траекторий винеровского процесса и тем, что образ компакта (отрезка  $[0, t]$ ) при непрерывном отображении компактен и, следовательно, замкнут:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \forall s \leq t \ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s \leq t}} \left\{ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F}_t^W.$$

Покажем теперь, что  $\tau_a$  — момент остановки. Для этого воспользуемся законом повторного логарифма:

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right) = 1.$$

Это, в свою очередь, значит, что для почти каждой реализации винеровского процесса есть подпоследовательность  $W_{t_k}$ , которая растет как  $\sqrt{2t \ln \ln t}$  и, соответственно, "перескочит" любое  $a$  за конечное время.

## 1.7 Задачи к лекции от 29.03.17

**Задача 13.** Доказать, что если  $0 \leq a < b \leq c < d$ , то с вероятностью единица

$$\sup_{t \in [a, b]} W(t) \neq \sup_{t \in [c, d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка  $[u, v] \subset \mathbb{R}$  с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина  $T^* = T^*(\omega)$  такая, что

$$\sup_{t \in [u, v]} W(t) = W(T^*).$$

*Решение.* Покажем, что  $\forall 0 \leq a < b \leq c < d$

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t = \max_{t \in [c, d]} W_t \right) = 0.$$

Введем процесс  $X_t := W_{t+c} - W_c$ . Тогда по марковскому свойству он будет винеровским процессом, независимым с  $\mathcal{F}_c^W$ . Перепишем:

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t = \max_{t \in [c, d]} W_t \right) = \mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0, d-c]} X_t \right).$$

Обозначим

$$\xi := \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c.$$

Заметим, что  $\xi - \mathcal{F}_c^W$ -измеримая случайная величина. Еще раз перепишем:

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0, d-c]} X_t \right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \mid \xi = x \right) p_\xi(x) dx.$$

Из независимости получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \mid \xi = x \right) p_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \right) p_\xi(x) dx.$$

Вместе с этим

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \right) = \mathbb{P}(|W_{d-c}| = x) = 0,$$

то есть и интеграл также равен нулю, что и требовалось доказать.

Выведем отсюда корректность определения  $T^*$ . Пусть максимум  $W(t)$  на отрезке  $[u, v]$  достигается в двух различных точках  $t_1 \neq t_2$ . Введем счетное семейство отрезков

$$I_{n, k} := \left[ u + \frac{k}{2^n}(v - u), u + \frac{k+1}{2^n}(v - u) \right],$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k = 0, \dots, 2^n - 1$ . Введем события

$$A_{n, k_1, k_2} := \{t_1 \in I_{n, k_1}\} \cap \{t_2 \in I_{n, k_2}\} \cap \{k_1 \neq k_2\}.$$

Тогда по предыдущему

$$\mathbf{P}(A_{n, k_1, k_2}) = 0;$$

из-за счетности числа отрезков

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n, k_1, k_2} A_{n, k_1, k_2}\right) = 0.$$

Вместе с этим наше предположение о существовании двух таких точек является событием, вложенным в это объединение событий, то есть событием нулевой вероятности, что и требовалось доказать.

**Задача 14.** Пусть  $T := \arg \max_{t \in [0, 1]} W(t)$ , то есть  $T(\omega)$  — та точка отрезка  $[0, 1]$ , в которой непрерывная траектория  $W(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , достигает максимума (величина  $T$  определена с точностью до эквивалентности в силу предыдущей задачи). Доказать, что

$$\mathbf{P}(T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

*Решение.* Введем следующее обозначение:

$$M_t^W := \max_{s \in [0, t]} W(s).$$

Перепишем в терминах этого обозначения  $\mathbf{P}(T \leq t)$ :

$$\mathbf{P}(T \leq t) = \mathbf{P}\left(M_t^W \geq \max_{s \in [t, 1]} W(s)\right).$$

Вычтем из обеих частей второго неравенства  $W(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(M_t^W \geq \max_{s \in [t, 1]} W(s)\right) &= \mathbf{P}\left(M_t^W - W(t) \geq \max_{s \in [t, 1]} (W(s) - W(t))\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(M_t^W - W(t) \geq \max_{s \in [0, 1-t]} X(s)\right) = \mathbf{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X\right), \end{aligned}$$

где  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс, независимый с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}_t^W$  по марковскому свойству.

Дальнейший ход решения можно представить следующим образом:

1. сначала найдем совместное распределение случайных величин  $M_t^W$  и  $W(t)$ ;
2. затем найдем распределение случайной величины  $M_t^W - W(t)$ ;
3. затем интегрированием условного распределения найдем искомую вероятность.

Приступим к реализации этого плана.

Найдем совместное распределение:  $\forall y \geq x, y \geq 0$

$$\mathbf{P}(W(t) < x, M_t^W < y) = \mathbf{P}(W(t) < x) - \mathbf{P}(W(t) < x, M_t^W \geq y) =$$

$$= \mathbf{P}(W(t) < x) - \mathbf{P}(W(t) \geq 2y - x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)$$

по лемме 7.3 из лекций. Дальше для решения задачи достаточно значений этой функции распределения на  $y \geq \max(0, x)$ . Совместное распределение нашли.

Для того чтобы найти распределение  $M_t^W - W(t)$ , вычислим совместную плотность последовательным дифференцированием по  $x$  и  $y$  совместной функции распределения:

$$p(x, y) = \left( \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right) \right)''_{xy} = -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right),$$

где  $p(x)$  — плотность случайной величины  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Проинтегрируем:

$$\mathbf{P}(M_t^W - W(t) > u) = \iint_{\substack{y-x > u \\ y \geq 0}} p'(x, y) dx dy.$$

Этот интеграл удобно считать в виде суммы двух интегралов (читателю рекомендуется нарисовать картинку и заштриховать область интегрирования, чтобы в этом убедиться):

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{y-x > u \\ y \geq 0}} p'(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{-u} \left( \int_0^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx + \int_{-u}^{+\infty} \left( \int_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Вычислим эти интегралы по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-u} \left( \int_0^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx &= \int_{-\infty}^{-u} \left( \int_0^{+\infty} -\frac{2}{t} \frac{\sqrt{t}}{2} dp\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) \right) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{-u} p\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) d\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-u}^{+\infty} \left( \int_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx &= \int_{-u}^{+\infty} \left( \int_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t} \frac{\sqrt{t}}{2} dp\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) \right) dx = \\ &= \int_{-u}^{+\infty} p\left(\frac{2u+x}{\sqrt{t}}\right) d\left(\frac{2u+x}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\forall u \geq 0$

$$\mathbf{P}(M_t^W - W(t) > u) = 2 - 2\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$



Распределение  $M_t^W - W(t)$  нашли.  
Вычислим, наконец, искомую вероятность:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X\right) &= \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X \mid M_{1-t}^X = u\right) p_{M_{1-t}^X}(u) du = \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq u\right) p_{M_{1-t}^X}(u) du \end{aligned}$$

в силу независимости  $M_{1-t}^X$  и  $\mathcal{F}_t^W$ . Из теоремы 7.4 знаем, что

$$\mathbb{P}\left(M_{1-t}^X > v\right) = \mathbb{P}\left(|X(1-t)| > v\right),$$

то есть

$$p_{M_{1-t}^X}(u) = \frac{2}{\sqrt{1-t}} p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X\right) &= \int_0^{+\infty} \left(2 - 2\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right) \frac{2}{\sqrt{1-t}} p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right) du = \\ &= 2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right) d\frac{u}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

В явном виде этот интеграл считать оказалось проблематичным, так что будем делать следующее: возьмем производную по параметру и убедимся в том, что она совпадает с производной ответа. Сделаем замену  $y = \frac{u}{\sqrt{1-t}}$ :

$$2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right) d\frac{u}{\sqrt{1-t}} = 2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) dy;$$

тогда

$$\begin{aligned} \left(2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) dy\right)' &= \\ &= 2 \int_0^{+\infty} p\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) y \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} dy = \\ &= \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \int_0^{+\infty} p\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) dy^2 = \\ &= \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2(1-t)}{2t}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy^2 = \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}};$$

вместе с этим

$$\left(\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}\right)' = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}.$$

Значит, производные совпадают, а значит, совпадают и первообразные с точностью до константы. Но так как речь идет о вероятностях, то путем подстановки в равенство

$$P(T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} + C$$

$t = 1$  сразу получаем, что  $C = 0$ . Задача решена.

## 1.8 Задачи к лекции от 05.04.17

**Задача 15.** Пусть  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Найти все действительные параметры  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , для которых процесс  $Y = \{Y(t) := \exp\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\}, t \geq 0\}$  является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса  $W$ .

*Решение.* Запишем субмартингальное свойство:  $\forall t \geq s$

$$\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) \geq Y_s,$$

где  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — естественная фильтрация процесса  $Y$ . Запишем в явном виде левую часть неравенства, воспользовавшись независимостью приращений винеровского процесса:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\alpha W(t) + \beta t + \gamma} | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{\alpha(W(t) - W(s) + W(s)) + \beta t + \gamma} | \mathcal{F}_s) = \\ &= e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \mathbb{E}e^{\alpha(W(t) - W(s))}. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку характеристическая функция  $\varphi_\xi(t)$  случайной величины  $\xi$  определяется как  $\mathbb{E}e^{it\xi}$ , то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \mathbb{E}e^{\alpha(W(t) - W(s))} = e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \varphi_{W(t) - W(s)}(-i\alpha).$$

Поскольку  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  и поскольку характеристическая функция случайной величины  $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$  равна

$$\varphi_\eta(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \varphi_{W(t) - W(s)}(-i\alpha) = e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma + \frac{\alpha^2}{2}(t - s)}.$$

Таким образом, субмартингальное свойство заключается в том, что  $\forall t \geq s$

$$e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma + \frac{\alpha^2}{2}(t - s)} \geq e^{\alpha W(s) + \beta s + \gamma},$$

то есть

$$e^{(\frac{\alpha^2}{2} + \beta)(t - s)} \geq 1,$$

или

$$\frac{\alpha^2}{2} + \beta \geq 0.$$

**Задача 16.** Привести пример мартингала  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  и момента остановки  $\tau$  (относительно естественной фильтрации процесса  $X$ ), для которых  $\mathbb{E}X_\tau \neq \mathbb{E}X_0$ .

*Решение.* Возьмем простейшее симметричное случайное блуждание с началом в 0 в качестве  $X$  и  $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$ . Тогда  $\tau$  — момент остановки, как показано в первой задаче к первой лекции, но

$$0 = \mathbb{E}X_0 \neq \mathbb{E}X_\tau = 1.$$

## 1.9 Задачи к лекции от 12.04.17

**Задача 17.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — цепь Маркова. Будет ли  $Y := \{X_{[t]}, t \geq 0\}$  марковской цепью относительно своей естественной фильтрации? Можно ли утверждать, что процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  является марковским, если  $Z(t)$  для  $t \in [n, n+1]$  получается линейной интерполяцией значений  $X_n$  и  $X_{n+1}$ ?

*Решение.*  $Y$  будет марковской цепью: по определению  $\forall 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t$  и  $\forall$  измеримой и ограниченной функции  $f$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(Y_t) | Y_{s_n}, \dots, Y_{s_1}) &= \mathbb{E}\left(f(Y_{[t]}) \mid Y_{[s_n]}, \dots, Y_{[s_1]}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(f(X_{[t]}) \mid X_{[s_n]}, \dots, X_{[s_1]}\right) = \mathbb{E}\left(f(X_{[t]}) \mid X_{[s_n]}\right) = \mathbb{E}(f(Y_t) | Y_{s_n}). \end{aligned}$$

Вместе с этим  $Z$  не обязательно является марковским процессом. Приведем контрпример: возьмем пуассоновский процесс в целых точках  $X$  (который будет марковской цепью) и получим по нему процесс  $Z$ , линейно интерполируя его значения. Тогда, например,

$$\mathbb{P}(Z_{1.5} = 1.5, Z_1 = 0) > 0,$$

но вместе с этим

$$\mathbb{P}(Z_2 = 2 | Z_{1.5} = 1.5) \neq 0 = \mathbb{P}(Z_2 = 2 | Z_{1.5} = 1.5, Z_1 = 0).$$

**Задача 18.** Доказать, что процесс  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  является пуассоновским процессом интенсивности  $\lambda$  (то есть  $N$  — процесс с независимыми приращениями такой, что  $N(0) = 0$  почти наверное и  $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)) \forall 0 \leq s \leq t < \infty$ ) тогда и только тогда, когда  $N$  — марковская цепь со значениями в пространстве  $\mathbb{Z}_+$  и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для  $0 \leq s \leq t < \infty, i, j \in \mathbb{Z}_+$ , определяются формулой

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t-s))^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leq j; \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

*Решение.* См. [1], стр. 191.

### 1.10 Задачи к лекции от 19.04.17

**Задача 19.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний  $S$ . Для  $i \in S$  положим

$$c_i := \gcd \{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\},$$

где  $\gcd$  означает наибольший общий делитель. Состояние  $i$  называется периодическим с периодом  $d$  ( $d > 1$ ), когда  $c_i = d$ . Если  $c_i = 1$ , то  $i$  — непериодическое состояние.

Доказать, что если цепь  $X$  неразложима (то есть для любых  $i, j \in S$  ( $i \neq j$ ) найдутся  $k, m \in \mathbb{N}$  такие, что  $p_{ij}(k) > 0$  и  $p_{ji}(m) > 0$ ), то все состояния одновременно непериодические или периодические, причем в последнем случае все периоды совпадают. Доказать, что если цепь  $X$  неразложима и непериодична, то найдется  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $p_{ij}(n) > 0$  при всех  $i, j$  и  $n \geq m$ .

Решение. См. [2], стр. 536.

**Задача 20.** Пусть матрица  $Q = (q_{ij})$ , где  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ , имеет вид  $q_{i,i+1} = \lambda$  при  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $q_{i,i-1} = i\mu$  при  $i = 1, \dots, n$ ,  $q_{ii} = -\lambda - i\mu$  при  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $q_{nn} = -n\mu$ , а остальные  $q_{ij}$  равны нулю ( $\lambda$  и  $\mu$  — положительные параметры). Объяснить, почему существует однородная марковская цепь с пространством состояний  $S = \{0, \dots, n\}$  и инфинитезимальной матрицей  $Q$ . Доказать, что имеется единственное стационарное распределение. Найти это распределение (предварительно показать, что для стандартной марковской цепи с конечным числом состояний при  $t \geq 0$  справедливы обе системы уравнений Колмогорова:  $P'(t) = QP(t)$  и  $P'(t) = P(t)Q$ , где  $P(t) = (p_{ij}(t))$  и  $Q$  — инфинитезимальная матрица; вывести отсюда, что  $pQ = 0$ , где вектор-строка  $p$  задает стационарное распределение).

Решение. См. [1], стр. 208.

### 1.11 Задачи к лекции от 26.04.17

**Задача 21.** (Модель Эренфестов) Пусть имеются две урны, содержащие в начальный момент времени соответственно  $k_1$  и  $k_2$  шаров, причем  $k_1 + k_2 = k$ . В каждый момент времени  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) с вероятностью  $1/k$  выбирается любой из этих  $k$  шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть  $X_n$  обозначает число шаров в первой урне в момент времени  $n$ . Доказать, что  $X_0, X_1, \dots$  образуют однородную цепь Маркова с пространством состояний  $\{0, 1, \dots, k\}$ . Проверить, что эта цепь обратима. Найти ее стационарное распределение.

*Решение.* Этот процесс является марковским, так как

$$P(X_n = x \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

по построению. Этот процесс также однороден, так как переходные вероятности за единицу времени не зависят от времени, в которое они рассматриваются.

Проверим обратимость этой цепи. Для этого найдем вектор, задающий обратимое распределение. Сначала выпишем матрицу переходных вероятностей за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{k-1}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} & 0 & \frac{k-2}{k} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть это матрица с нулевыми элементами везде, кроме двух побочных диагоналей, причем  $P_{i, i+1} = \frac{k-i}{k}$  и  $P_{i+1, i} = \frac{i}{k}$ .

Напомним, что вектор  $\pi$  задает обратимое распределение, если  $\forall i, j$

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}.$$

В случае нашей матрицы  $P$  это условие превращается в систему линейных уравнений

$$\pi_{i+1} = \frac{k-i}{i+1} \pi_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Поскольку  $\pi$  по определению обязан задавать распределение вероятностей, то  $\pi_0 + \dots + \pi_{k+1} = 1$ . Поэтому, решая однородную систему линейных уравнений, получаем, что

$$\pi_i = \frac{C_k^i}{2^k}.$$

Обратимый вектор нашли.

Напомним, что вектор  $\pi$  задает стационарное распределение, если  $\forall j$

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j.$$

Проверим это для найденного выше вектора  $\pi$ : так как он обратим, то

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j,$$

то есть найденный выше вектор  $\pi$  задает стационарное распределение.

**Задача 22.** Построить пример необратимой марковской цепи  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  с конечным пространством состояний.

*Решение.* Рассмотрим марковскую цепь  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие на обратимый вектор

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

превратится в систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \pi_1 p_{12} = \pi_2 p_{21} \\ \pi_2 p_{23} = \pi_3 p_{32} \\ \pi_3 p_{31} = \pi_1 p_{13} \end{cases},$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_1 = 0 \end{cases},$$

то есть имеет только тождественно нулевое решение, которое не может задавать вероятностного распределения.

### 1.12 Задачи к лекции от 03.05.17

**Задача 23.** Пусть  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  — гауссовский процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что почти наверное его траектории непрерывны на  $\mathbb{R}_+$  и  $X(0) = 0$  почти наверное. Доказать, что найдутся винеровский процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ , константы  $a \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{R}_+$  такие, что  $X(t) = at + bW(t)$  почти наверное для всех  $t \geq 0$ .

*Решение.* Сначала докажем, что для такого процесса  $X$   $\mathbb{E}X(t) = t\mathbb{E}X(1)$  и  $\mathbb{D}X(t) = t\mathbb{D}X(1)$ . Действительно, пусть сначала  $t \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда из-за стационарности и независимости приращений

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X(t) &= \mathbb{E}\left((X(1) - X(0)) + (X(2) - X(1)) + \dots + (X(t) - X(t-1))\right) = \\ &= t\mathbb{E}X(1)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbb{D}X(t) &= \mathbb{D}\left((X(1) - X(0)) + (X(2) - X(1)) + \dots + (X(t) - X(t-1))\right) = \\ &= t\mathbb{D}X(1).\end{aligned}$$

Пусть теперь  $t \in \mathbb{Q}_+$ , то есть  $t = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Тогда, поскольку

$$\mathbb{E}X(1) = \mathbb{E}\left(\left(X\left(\frac{1}{q}\right) - X\left(\frac{0}{q}\right)\right) + \dots + X\left(\frac{q}{q}\right) - X\left(\frac{q-1}{q}\right)\right) = q\mathbb{E}\left(X\left(\frac{1}{q}\right)\right),$$

то

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\mathbb{E}X(1) = t\mathbb{E}X(1)$$

(с дисперсиями аналогично). Пусть, наконец,  $t \in \mathbb{R}$ . Возьмем последовательность  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t_n \in \mathbb{Q}_+$  такую, что  $t_n \rightarrow t$ . Тогда из непрерывности почти наверное траекторий имеем, что  $X(t_n) \rightarrow X(t)$  почти наверное. Из сходимости почти наверное следует сходимость по распределению, которая эквивалентна сходимости характеристических функций. Поскольку процесс гауссовский, то это значит, что

$$\exp\left(iu\mathbb{E}X(t_n) - \frac{u^2\mathbb{D}X(t_n)}{2}\right) \rightarrow \exp\left(iu\mathbb{E}X(t) - \frac{u^2\mathbb{D}X(t)}{2}\right).$$

При этом

$$\exp\left(iu\mathbb{E}X(t_n) - \frac{u^2\mathbb{D}X(t_n)}{2}\right) = \exp\left(iu t_n \mathbb{E}X(1) - \frac{u^2 t_n \mathbb{D}X(1)}{2}\right)$$

и

$$\exp\left(iu t_n \mathbb{E}X(1) - \frac{u^2 t_n \mathbb{D}X(1)}{2}\right) \rightarrow \exp\left(iu t \mathbb{E}X(1) - \frac{u^2 t \mathbb{D}X(1)}{2}\right)$$



из-за непрерывности экспоненты, из чего и заключаем, что  $\mathbf{E}X(t) = t\mathbf{E}X(1)$  и  $\mathbf{D}X(t) = t\mathbf{D}X(1) \forall t \in \mathbb{R}$ .  
Рассмотрим теперь процесс

$$Y(t) := \mathbf{E}X(1)t + \sqrt{\mathbf{D}X(1)}W(t).$$

Очевидно, он гауссовский. При этом

$$\mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}X(1)t = \mathbf{E}X(t)$$

и

$$\text{cov}(Y(t), Y(s)) = \mathbf{D}X(1)\mathbf{E}W(t)W(s) = \mathbf{D}X(1) \min(t, s);$$

при этом

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \mathbf{D}X(1) (\min(t, s)),$$

то есть

$$\text{cov}(Y(t), Y(s)) = \text{cov}(X(t), X(s)).$$

Поскольку гауссовский процесс однозначно задается своими функцией среднего и ковариационной функцией, то верно равенство (почти наверное)

$$Y(t) = X(t),$$

что и требовалось доказать.

**Задача 24.** *Выяснить, являются ли ковариационными функциями некоторых процессов следующие функции:*

1.  $r(s, t) = 2 \cos(s - t) \exp\{-\alpha|s - t|\}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha > 0$ ;
2.  $r(s, t) = (1 - (s - t)^2) \mathbb{I}\{|s - t| \leq 1\}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ;
3.  $r(s, t) = \exp\left\{ia(s - t) - \frac{(s - t)^2 \sigma^2}{2}\right\} + C$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ,  
 $C \in \{-1, 1\}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$ .

*Решение.* Известно, что если функция симметрична (кососимметрична в комплексном случае) и неотрицательно определена, то она является ковариационной функцией некоторого процесса. По теоремам Герглота и Бохнера–Хинчина характеристические функции случайных величин неотрицательно определены. Также верно, что суммы и произведения неотрицательно определенных функций неотрицательно определены.

Сразу отметим, что все данные функции симметричны (когда нужно, кососимметричны).

1. Функция 2 является неотрицательно определенной; функция  $\cos(s - t)$  является неотрицательно определенной, так как функция  $\cos(t)$  является характеристической функцией случайной величины, принимающей равновероятно значения 1 и  $-1$ ; функция  $\exp\{-\alpha|s - t|\}$  является неотрицательно определенной, так как функция  $\exp\{-\alpha|t|\}$  является характеристической функцией случайной величины, распределенной по закону Коши. Таким образом, данная функция является неотрицательно определенной

2. Предположим, что данная функция неотрицательно определена. Тогда

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} G(dx),$$

или

$$\frac{r(t)}{G(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{G(dx)}{G(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} P_{\xi}(dx),$$

где  $\xi$  — некоторая случайная величина; таким образом, функция  $\frac{r(t)}{G(\mathbb{R})}$  является характеристической функцией  $\xi$ . Известно, что если  $\varphi$  — характеристическая функция некоторой случайной величины  $\eta$  и  $E|\eta|^k < \infty$ , то  $\exists \varphi^{(k)}(t) \forall t$ ; также известно, что если  $\exists \varphi^{(2m)}(0)$ , то  $E\xi^{2m} < \infty$ . Поэтому из существования второй производной в нуле должно следовать существование первой производной в произвольной точке  $t$ , что нарушается для данной функции в точках  $t = 1, t = -1$ . Таким образом, данная функция не является неотрицательно определенной.

3. Если  $C = 1$ , то данная функция является неотрицательно определенной, так как она является суммой характеристической функции нормальной случайной величины и положительной константы. Пусть теперь  $C = -1$ . Предположим, что

$$r(t) = \exp \left\{ iat - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\} - 1$$

является ковариационной функцией некоторого процесса  $X$ , то есть

$$r(t) = \text{cov}(X(t), X(0)).$$

Заметим, что  $r(0) = 0$ . Тогда

$$|r(t)| = |\text{cov}(X(t), X(0))| \leq \sqrt{DX(t)DX(0)} = 0,$$

то есть функция получилась тождественно равной нулю, что противоречит условию. Таким образом, данная функция не является неотрицательно определенной.

### 1.13 Задачи к лекции от 10.05.17

**Задача 25.** Пусть  $X = \left\{ X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}) \right\}, t \geq 0$ , где  $W(\cdot)$  — винеровский процесс и параметр  $\alpha > 0$ . Является ли процесс  $X$  стационарным в узком и/или широком смысле?

*Решение.* Заметим, что процесс  $X$  является гауссовским, причем

$$EX(t) = 0$$

и

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = e^{-\alpha(t+s)} \min(e^{2\alpha t}, e^{2\alpha s}) = e^{-\alpha|t-s|},$$

то есть процесс стационарен в широком смысле. Поскольку для гауссовских процессов понятия стационарности в широком и в узких смыслах совпадают, то  $X$  стационарен и в узком смысле тоже.

**Задача 26.** Доказать, что для центрированной стационарной в широком смысле последовательности  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  выполнен закон больших чисел в смысле сходимости в среднем квадратическом, а именно,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(0), \quad N \rightarrow \infty,$$

где  $Z(\cdot)$  — спектральная мера упомянутой последовательности.

*Решение.* См. [1], стр. 241.

### 1.14 Задачи к лекции от 17.05.17

**Задача 27.** Рассмотрим разбиение отрезка  $[0, T]$  точками  $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,N_n} = T$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Зафиксируем  $\lambda \in [0, 1]$  и выберем промежуточные точки  $\tau_{n,k} := (1 - \lambda)t_{n,k-1} + \lambda t_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, N_n$ . Предположим, что  $\max_{1 \leq k \leq N_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Найти предел в среднем квадратическом при  $n \rightarrow \infty$  интегральных сумм вида

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})),$$

где  $W$  — винеровский процесс.

*Решение.* Заметим сначала, что

$$\sum_{k=1}^n (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} T;$$

действительно,

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{E} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 = T,$$

при этом в силу независимости приращений

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 &= \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{D} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{N_n} (3(t_k - t_{k-1})^2 - (t_k - t_{k-1})^2) = \sum_{k=1}^{N_n} 2(t_k - t_{k-1})^2 \leq \\ &\leq 2T \max_{1 \leq k \leq N_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

по условию; из этого и следует утверждение.

Также заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) + W(t_{n,k-1})) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) = W(t_{n,N_n}) = W(T).$$

Запишем теперь, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})). \end{aligned}$$

Разберемся с этими слагаемыми по отдельности: сначала распишем

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) &= \\
&= \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) + W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) = \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2$$

и

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2 = \sum_{k=1}^{N_n} (t_{n,k} - \tau_{n,k}) = (1 - \lambda)T,$$

причем

$$\mathbb{D} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2 \rightarrow 0$$

(объяснение идейно то же, что и раньше). Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} (1 - \lambda)T.$$

Теперь второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) &= \\
&= \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) + W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})).
\end{aligned}$$

Снова заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) = \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n}))^2$$

и (аналогично) что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n}))^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} \lambda T.$$

Осталось заметить еще, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) + W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) + \\ + \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) + W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) = W(T)^2. \end{aligned}$$

Складываем все, что было вычислено и получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{W(T)^2 + \lambda T - (1 - \lambda)T}{2}.$$

**Задача 28.** С помощью формулы Ито найти

$$\int_{[0, T]} W(t) dW(t),$$

где  $W$  — винеровский процесс.

*Решение.* Обозначим

$$Y(T) := \int_{[0, T]} W(t) dW(t).$$

Предположим, что

$$Y(t) = H(t, W(t)),$$

где  $H(t, x)$  — гладкая функция двух переменных. Тогда по формуле Ито

$$dY(t) = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} d(W(t))^2 = W(t) dW(t).$$

Из соотношения

$$d(W(t))^2 = dt$$

получаем, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dt = W(t) dW(t),$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = x \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

из чего получаем, что

$$H(t, x) = \frac{x^2 - t}{2} + C,$$

где  $C$  — некоторая константа. Заметим, что из начальных условий  $H(0, 0) = 0$ . Поэтому  $C = 0$  и

$$Y(T) = \int_{[0, T]} W(t) dW(t) = \frac{W(T)^2 - T}{2}.$$

## Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Ширяев А. Н. Вероятность.