Версия v15.10 20:25 07.06.17

Содержание

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного процесса

Определение 1.1. Пусть V — множество, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Тогда $(V, \mathscr{A})$ называется *измеримым пространством.*

Определение 1.2. Пусть есть $(V, \mathscr{A})$ и $(S, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства, $f\colon V \to S$ — отображение. f называется *$\mathscr{A}|\mathscr{B}$-измеримым*, если $\forall B \in \mathscr{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. *Обозначение*: $f \in \mathscr{A}|\mathscr{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — отображение. Если $Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$, то Y называется *случайным элементом.*

Определение 1.4. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y*, — это функция на множествах из $\mathscr{B}$, задаваемая равенством

$$\mathsf{P}_Y(B) := \mathsf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t),\, t \in T\}$, где

$$X(t) : \Omega \to S_t,\ \ X(t) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t\ \ \forall\, t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если T $\subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле.*

Определение 1.6. Случайные элементы $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \in B_k)\ \forall\, B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n$.

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). *Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q}_t)_{t\in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ существует семейство* независимых *случайных элементов $X_t\colon \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ таких, что $\mathsf{P}_{X_t} = \mathsf{Q}_t$, $t \in T$.*

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениеми. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q}_t)_{t\in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности $\forall$ конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. *Случайным блужданием в* $\mathbb{R}^d$ называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(начальная точка)};\\ S_n &:= x + X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ — это такое случайное блуждание, что $x = 0$ и

$$\mathsf{P}(X = e_k) = \mathsf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0),\ k = 1, \ldots, d.$

Определение 1.9. Введем $N := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ $(\leqslant \infty)$. Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathsf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0$ $\forall\, n \in N$) называется *моментом первого возвращения в 0.*

Замечание. Следует понимать, что хотя определение 1.9 подразумевает, что $\mathsf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. *Для* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N = n) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N = n+1,\, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n+1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n,\, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S'_m = 0\right\} = n\right) \mathsf{P}(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N' = n)\, \mathsf{P}(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независиые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) \;=\; \mathsf{P}(N = n)\,\mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) \;=\; \mathsf{P}(N = n+1,\, \tau < \infty) + \mathsf{P}(N = n+1,\, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n+1 \geqslant 2$. Из этого следует, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) \;=\; \mathsf{P}(N = n)\,\mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) \;=\; \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $\mathsf{P}(N = \infty)$ *равно 0 или 1.* $\mathsf{P}(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$\mathsf{P}(N < \infty) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} \;=\; \\ =\; \frac{\mathsf{P}(\tau = \infty)}{1 - \mathsf{P}(\tau < \infty)} \;=\; \frac{\mathsf{P}(\tau = \infty)}{\mathsf{P}(\tau = \infty)} \;=\; 1.$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1 \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(\tau = \infty) = 0 \;\Rightarrow\; \mathsf{P}(N = n) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \mathsf{P}(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. □

Теорема 1.3. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ *возвратно* $\Leftrightarrow \mathsf{E}N = \infty$ *(соответственно, невозвратно* $\Leftrightarrow \mathsf{E}N < \infty$*).*

Доказательство. Если $\mathsf{E}N < \infty$, то $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathsf{P}(N < < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\mathsf{E}N \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(N = n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} \;=\; \\ =\; \mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n\right)' \;=\; \left(\frac{1}{1-p}\right)' \;=\; \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathsf{P}(\tau=\infty)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau<\infty)^{n-1} \;=\; \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{(1-\mathsf{P}(\tau<\infty))^2} = \frac{1}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$\mathsf{E}N \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}\{S_n=0\} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n=0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n=0)=\infty.$$

Следствие. *S возвратно при $d=1$ и $d=2$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0) \;=\; \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d\geqslant 0\\ n_1+\ldots+n_d=n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2\ldots(n_d!)^2}.$$

Случай $d=1$: $\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m\to\infty.$$

Соответственно,

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=\infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается *случай $d=2$*:

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\ldots=\left\{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$ ряд тоже разойдется $\Rightarrow$ блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. □

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. *Для простого случайного блуждания в* $\mathbb{Z}^d$

$$\mathsf{E}N \;=\; \lim_{c\uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-c\varphi(t)}\, \mathrm{d}t,$$

где $\varphi(t)$ *— характеристическая функция* X*,* $t\in\mathbb{R}^d$*.*

Доказательство. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n=0\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\{S_n^{(k)}=0\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)}t_k}}{2\pi}\, \mathrm{d}t_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\, \mathrm{d}t.$$

По теореме Фубини

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n=0) = \mathsf{E}\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i(S_n,t)}\, \mathrm{d}t.$$

Заметим, что

$$\mathsf{E}e^{i(S_n,t)} \;=\; \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) \;=\; \big(\varphi(t)\big)^n.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n=0) \;=\; \mathsf{P}(S_n=0) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \big(\varphi\,(t)\big)^n\, \mathrm{d}t.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n\, \mathsf{P}(S_n=0) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n\, \mathrm{d}t, \quad \text{где } 0<c<1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leqslant c < 1$, то ряд под интегралом сходится равномерно и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n\, \mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-c\varphi(t)}\, \mathrm{d}t$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n\, \mathsf{P}(S_n=0) \;\to\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n=0) \;=\; \mathsf{E}N, \quad c\uparrow 1,$$

где предельный переход возможен в силу неотрицательности слагаемых, что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие (теорема Пойа)**.** *При $d \geqslant 3$ простое случайное блуждание невозвратно.*

Доказательство. Запишем характеристическую функцию X в явном виде:

$$\varphi(t) \;=\; \mathsf{E}e^{i(t,X)} \;=\; \sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{2d}e^{it_k}+\frac{1}{2d}e^{-it_k}\right) \;=\; \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathsf{E}N \;=\; \lim_{c\uparrow 1}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-\frac{c}{d}(\cos(t_1)+\ldots+\cos(t_d))}\,dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности $t=0$. Введем обозначения

$$B_\delta := (-\delta,\,\delta)^d,\;\; V_\delta := [-\pi,\,\pi]^d\setminus B_\delta.$$

Ясно, что

$$\forall d\in\mathbb{N}\quad \int\limits_{V_\delta}\frac{1}{1-\frac{c}{d}(\cos(t_1)+\ldots+\cos(t_d))}\,dt<\infty.$$

Поэтому для того чтобы понять, сходится интеграл или нет, достаточно смотреть на интеграл по замыканию малой окрестности нуля B_δ. Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1-\frac{c}{d}(\cos(t_1)+\ldots+\cos(t_k))}\;\sim\;\frac{1}{1-\frac{1}{d}(1-t_1^2+\ldots+1-t_d^2}\;\sim\;\frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c\uparrow 1,\;\; t\to 0.$$

Поскольку якобиан перехода к d–мерной сферической системе координат содержит множитель R в степени $d-1$, то интеграл сойдется $\Leftrightarrow d\geqslant 3$. Теорема доказана. □

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(S_{2n}=0\right) \;&=\; \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d\geqslant 0\\ n_1+\ldots+n_d=n}}\frac{2n!}{(n_1!)^2\ldots(n_d!)^2}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \;=\\
&=\;\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d\geqslant 0\\ n_1+\ldots+n_d=n}}\left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_d!}\right)^2\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}\;\leqslant\\
&\leqslant\;\frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}\frac{n!}{\Big((n/d)!\Big)^d}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d\geqslant 0\\ n_1+\ldots+n_d=n}}\frac{n!}{n_1!\ldots n_d!}\;\sim\\
&\sim\;\frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}\sqrt{2\pi n}^{\,2}}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{(n/d)^n\,\sqrt{2\pi n/d}^{\,d}}\,d^n\;=
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{d/2}}{(2\pi)^{d/2-1/2}} n^{-d/2} = \Theta\left(n^{-d/2}\right)$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geqslant 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). $\square$

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в $\mathbb{R}^d$, если $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε-окрестность точки x.

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \bigcap_{\varepsilon>0} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{ блуждание возвратно в } \varepsilon\text{–окрестности точки } x \right\}$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S,* — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall\, z \in P(S) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n\colon \;\; \mathsf{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса)**.** *Если $R(S) \neq \varnothing$, то $R(S) = P(S)$.*

Следствие. *Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \varnothing$.*

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi,\, \xi_{n,k},\, n,\, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathsf{P}(\xi = m) \;=\; p_m \;\geqslant\; 0, \;\; m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) \;:=\; 1,$$
$$Z_n(\omega) \;:=\; \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega\colon \exists\, n = n(\omega),\; Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции.* Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathsf{P}(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leqslant 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0,1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathsf{P}(Y = k)$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$f_Y(s) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} s^k \, \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E} s^Y, \quad s \in [0,1].$$

Лемма 2.1. *Вероятность* $\mathsf{P}(A)$ *является корнем уравнения* $\psi(p) = p$*, где* $\psi = f_\xi$ *и* $p \in [0,1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) \ &= \ \mathsf{E} s^{Z_n} \ = \ \mathsf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \ = \\ &= \ \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] \ = \\ &= \ \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k},\ m = 1, \ldots, r,\ k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}$, $i = 1, \ldots, n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] \ &= \ \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}} \right) \mathsf{E}\mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \ = \\ = \ \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}} \right) \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) \ &= \ \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \mathsf{E} s^{\xi_{n,k}} \, \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) \ = \\ &= \ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi^j(s) \, \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) \ = \ f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) \ = \ f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big), \quad s \in [0,1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) \ = \ f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(0)\big)$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}\Big(\psi_\xi\left(\psi_\xi\left(s\right)\right)\Big) = \ldots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \ldots (\psi_\xi}_{n \text{ итераций}}(s))\ldots) =$$
$$= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathsf{P}(Z_n = 0) \;=\; \psi_\xi\left(\mathsf{P}\left(Z_{n-1} = 0\right)\right).$$

Но $\mathsf{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathsf{P}(A)$ при $n \to \infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathsf{P}(A) \;=\; \psi_\xi(\mathsf{P}(A)),$$

то есть $\mathsf{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_\xi(p)$, $p \in [0, 1]$. $\square$

Теорема 2.2. *Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть* ***наименьший*** *корень уравнения*

$$\psi(p) \;=\; p, \quad p \in [0, 1], \tag{1}$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n,k}\{\xi_{n,k} \geqslant 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geqslant 1$ п.н. при $\forall\, n$, то есть $\mathsf{P}(A) = 0$ — наименьший корень уравнения (1), поскольку $\psi(0) = 0$.
Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}(A) = 1$ — наименьший корень уравнения (1), поскольку $\psi \equiv 1$.
Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = \big[\psi_n(0),\ \psi_{n+1}\left(0\right)\big),\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n. Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s \;>\; \psi\left(\psi_n(0)\right) - \psi_{n+1}(0) \;=\; \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) \;=\; 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на Δ_n $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \big[0,\ \mathsf{P}(A)\big), \ \ \psi_n(0) \nearrow \mathsf{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathsf{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.3. *1. Вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.*

2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $\mathsf{E}\xi \leqslant 1$ *имеем* $\mathsf{P}(A) = 1$, *при* $\mathsf{E}\xi > 1$ *имеем* $\mathsf{P}(A) < 1$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathsf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. Знаем, что

$$\psi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \ \ \psi_\xi(1) = 1, \ \ \exists \psi'_\xi(s),\, s \in (0,\,1).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа: $\forall s \in (0,\,1)$

$$\psi_\xi(1) - \psi_\xi(s) = \psi'_\xi(\theta)(1 - s), \ \theta \in (s,\,1).$$

Формулой Лагранжа можно пользоваться, поскольку $\psi_\xi(s)$ непрерывна на отрезке $[0,\,1]$ и дифференцируема на интервале $(0,\,1)$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s \ = \ 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) \ = \ (1 - s)\left(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\right).$$

Знаем, что при $s \in (0,\,1)$

$$\psi'_\xi(s) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k, \ \ \psi''_\xi(s) \ = \ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k.$$

Заметим, что если $\exists p_k > 0,\ k \geqslant 2$, то $\psi''_\xi(s) > 0,\ s \in (0,\,1)$, а значит, $\psi'_\xi(s)$ строго возрастает на $s \in (0,\,1)$. Будем сначала рассматривать этот случай.

(a) Пусть $\mathsf{E}\xi = \psi'_\xi(1) \leqslant 1$. Из этого следует, что $\psi'_\xi(\theta) < 1$. Тогда получаем, что

$$\psi_\xi(s) - s \ = \ 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) \ = \ (1 - s)\left(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\right) > 0 \ \ \forall s \in (0,\,1),$$

причем $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Из этого следует, что наименьшим корнем уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ будет $s = 1$.

(b) Пусть $\mathsf{E}\xi = \psi'_\xi(1) > 1$. Тогда для всех s, достаточно близких к 1,

$$\psi'_\xi(\theta) > 1, \ \theta \in (s,\,1),$$

в силу непрерывности производящей функции на отрезке $[0,\,1]$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s \ = \ 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) \ = \ (1 - s)\left(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\right) < 0,$$

при этом $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Это значит, что на интервале $(0,\,1)$ найдется корень уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ в силу непрерывности производящей функции.

(c) Рассмотрим теперь случай $p_k = 0\ \forall k \geqslant 2$. В рамках этого предположения
$$\psi_\xi(s) = p_0 + (1-p_0)s,$$
а значит,
$$\psi_\xi(s) - s = p_0 + (1-p_0)s - s = p_0(1-s) > 0\ \ \forall s < 1.$$
Из этого следует, что у уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ наименьший корень на отрезке $[0, 1]$ — это $s = 1$. Теорема доказана.

□

Следствие. *Пусть* $\mathsf{E}\xi < \infty$. *Тогда* $\mathsf{E}Z_n = (\mathsf{E}\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.
База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathsf{E}Z_1 = \mathsf{E}\xi$.
Индуктивный переход:
$$\mathsf{E}Z_n \;=\; \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} j\,\mathsf{E}\xi\,\mathsf{P}(Z_{n-1} = j) \;=\; \mathsf{E}\xi\,\mathsf{E}Z_{n-1} \;=\; (\mathsf{E}\xi)^n\,.$$

□

Определение 2.2.

При $\mathsf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим.*
При $\mathsf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим.*
При $\mathsf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим.*

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, … — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Положим
$$\begin{aligned} Z(0) \;&:=\; 0; \\ Z(t) \;&:=\; \sup\{n \in \mathbb{N}:\ S_n \leqslant t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$
(здесь считаем, что $\sup\varnothing := \infty$). Таким образом,
$$Z(t,\omega) \;=\; \sup\left\{n \in \mathbb{N}:\ S_n(\omega) \leqslant t\right\}.$$
Иными словами,
$$\{Z(t) \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\}.$$
Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления.*

Замечание. Полезно заметить, что
$$Z(t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leqslant t\},\ \ t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^\star(t),\, t \geqslant 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, … — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$\mathsf{P}(Y = \alpha) \;=\; p \in (0,1); \;\; \mathsf{P}(Y = 0) \;=\; q \;=\; 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = const$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \;\; \forall\, t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left[\frac{t}{c}\right]$.

Лемма 2.4.

$$\mathsf{P}(Z^\star(t) = m) = \begin{cases} C_m^j\, p^{j+1} q^{m-j}, \text{ где } j = \left[\frac{t}{\alpha}\right] & , \text{ если } m \geqslant j; \\ 0 & , \text{ если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0,1)$, если $\mathsf{P}(U = k) = (1-p)^k p, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. *Рассмотрим независимые геометрические величины* $U_0, \ldots, U_j$ *с параметром* $p \in (0,\, 1)$*. Тогда* $\forall t \geqslant \alpha$ *и* $m \geqslant j$

$$\mathsf{P}\left(j + U_0 + \ldots + U_j = m\right) \;=\; \mathsf{P}\left(Z^\star(t) = m\right).$$

3 Лекция от 22.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(U_0 + \ldots + U_j = m - j\right) \;=\; \sum_{\substack{k_0, \ldots,\, k_j \geqslant 0 \\ k_0 + \ldots + k_j = m - j}} \mathsf{P}\left(U_0 = k_0, \,\ldots,\, U_j = k_j\right).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\sum_{\substack{k_0, \ldots, k_j \geqslant 0 \\ k_0 + \ldots + k_j = m - j}} \mathsf{P}\left(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j\right) \;=$$

$$= \sum_{\substack{k_0, \ldots,\, k_j \geqslant 0 \\ k_0 + \ldots + k_j = m - j}} \mathsf{P}\left(U_0 = k_0\right) \ldots \mathsf{P}\left(U_j = k_j\right) \;=$$

$$= \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_j \geqslant 0 \\ k_0 + \ldots + k_j = m - j}} p(1-p)^{k_0} \ldots p(1-p)^{k_j} \;=\; \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_j \geqslant 0 \\ k_0 + \ldots + k_j = m - j}} p^{j+1}(1-p)^{k_0 + \ldots + k_j} =$$

$$= \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_j \geqslant 0 \\ k_0 + \ldots + k_j = m - j}} p^{j+1}(1-p)^{m-j} \;\;=\;\; p^{j+1}(1-p)^{m-j} \# M,$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j, удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\#M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\#M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j. Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathsf{P}\left(U_0 + \ldots + U_j = m - j\right) = C_m^j\, p^{j+1}(1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. □

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. *Пусть* $t > \alpha$. *Тогда*

$$\mathsf{E}Z^\star(t) \leqslant At, \quad \mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2 \leqslant Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$\mathsf{E}Z^\star(t) = \mathsf{E}\left(j + U_0 + \ldots + U_j\right) = j + (j+1)\mathsf{E}U,$$

где

$$\mathsf{E}U = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)\mathsf{E}U = j + (j+1)a(p) \leqslant (j+1)\left(a(p)+1\right) \leqslant \frac{2t}{\alpha}\left(a(p)+1\right) = At,$$

поскольку $j = \left[\frac{t}{\alpha}\right] \leqslant \frac{t}{\alpha}$, а $t > \alpha$; здесь $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2$.

$$\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2 = \mathsf{D}Z^\star(t) + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2 = (j+1)\mathsf{D}U + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := \mathsf{D}U$. Используя оценку выше для $\mathsf{E}Z^\star(t)$, получаем, что

$$(j+1)\mathsf{D}U + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2 \leqslant (j+1)^2\left(\sigma^2(p) + \left(a(p)+1\right)^2\right) \leqslant Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geqslant (j+1)$. Лемма доказана. □

Замечание. Пусть случайная величина $X \geqslant 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : \mathsf{P}(X > \alpha) = p \in (0,1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^\star = \big\{Z^\star(t),\ t \geqslant 0\big\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leqslant \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leqslant X_n \ \Rightarrow\ Z(t) \leqslant Z^\star(t)\ \ \forall t \geqslant 0$. Тогда $\forall t > \alpha$

$$\mathsf{E}Z(t) \ \leqslant\ \mathsf{E}Z^\star(t) < \infty,\ \mathsf{E}\big(Z(t)\big)^2 \ \leqslant\ \mathsf{E}\big(Z^\star(t)\big)^2 \ \Rightarrow\ Z(t)\ <\ \infty$$

почти наверное.

Следствие. $\mathsf{P}\big(\forall t \geqslant 0\ \ Z(t) < \infty\big)\ =\ 1.$

Доказательство. Z является неубываюшим процессом:

$$s \leqslant t \ \Rightarrow\ Z(s) \leqslant Z(t)\ \Rightarrow\ \mathsf{P}\big(Z(n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}\big)\ =\ \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n) < \infty\}\right)\ =\ 1,$$

что и завершает доказательство. □

Следствие. $\mathsf{E}Z(t) \leqslant At;\ \ \mathsf{E}\big(Z(t)\big)^2 < Bt^2,\ \ t > \alpha.$

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. *Пусть X, X_1, X_2, … — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0, \infty],\ n \to \infty,$$

где $\mu = \mathsf{E}X$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ.
Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c)\ :=\ X_n\mathbb{I}\{X_n \leqslant c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\ \geqslant\ \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k\ =\ \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\}\ \text{почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \;\geqslant\; \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\} \;=\; \mathsf{E}X \;=\; \mu \;=\; \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Теорема 3.3. *Пусть $Z = \{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \dots, X \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty;$$

$$\frac{\mathsf{E}Z(t)}{t} \to \frac{1}{\mu},\ t \to \infty,$$

где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = \infty\ \ \forall t$).
Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \;\leqslant\; t \;<\; S_{Z(t)+1}. \tag{2}$$

Поскольку $Z(t_n,\ \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \to \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим $(t,\ \omega)$ такие, что

$$0 < Z(t,\omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих $(t,\ \omega)$ поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \;\leqslant\; \frac{t}{Z(t)} \;\leqslant\; \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1}\frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \ t \to \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.
Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\not\Rightarrow\; \mathsf{E}\xi_t \to \mathsf{E}\xi,\ t \to \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t>\alpha} \mathsf{E}\left(|\xi_t|\,\mathbb{I}\left\{|\xi_t| > c\right\}\right) \to 0, \quad c \to \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. *Если $\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathsf{E}\xi_t \to \mathsf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.*

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена)**.** *$\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow$ $\exists$ неубывающая функция g такая, что*

$$\frac{g(t)}{t} \to \infty, \quad t \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathsf{E}g\left(|\xi_t|\right) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathsf{E}\left(\xi_t\right)^2 = \frac{\mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2}{t^2} \leqslant \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. □

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) \;=\; \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Тогда *пуассоновский процесс интенсивности* λ $N = \left\{N(t),\ t \geqslant 0\right\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= X_{N(t)+k},\ k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. *Для $\forall t > 0$ величины $N(t),\ X_1^t,\ X_2^t, \ldots$ независимы, причем*

$$N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t),\ X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\, .$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall u_1, \ldots, u_k \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u,\ \ldots,\ X_k^t \geqslant u_k\right) = \\ = \mathsf{P}\left(N(t) = n\right)\mathsf{P}(X_1^t \geqslant u_1)\ldots\mathsf{P}(X_k^t \geqslant u_k).$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k.
Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t,\ S_{N(t)+1} - t \geqslant u_1\Big) = \\ = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big),$$

поскольку

$$\{S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t\} = \big\{N(t) = n\big\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n \ = \ X_1 + \ldots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) \ = \ \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & ,\ x \geqslant 0 \\ 0 & ,\ x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big) \ = \ \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_n + X_{n+1} \geqslant t + u_1\Big) \ = \\ = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ x+y \geqslant t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_n+1}(y)\, dx\, dy \ = \\ = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ x+y \geqslant t+u_1 \\ y \geqslant 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}\, dx\, dy$$

в силу независимости S_n и X_{n+1}. Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ x+y \geqslant t+u_1 \\ y \geqslant 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}\, dx\, dy \ = \ \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx \int\limits_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y}\, dy \ = \\ = \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)}\, dx \ = \ e^{-\lambda(t+u_1)} \int\limits_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx \ = \\ = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) \ = \ \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \tag{3}$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1 = 0$ и получим, что

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n\Big) \ = \ \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть
$$N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t).$$
Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n \in \mathbb{Z}_+$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t \geqslant u_1\right) = \mathsf{P}\left(X_1^t \geqslant u_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} =$$
$$= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1},$$
то есть
$$X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$
Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k \geqslant 2$:
$$\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t \geqslant u, \ldots,\ X_k^t \geqslant u_k\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\underbrace{S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t,\ S_{n+1}-t \geqslant u_1}_{\text{зависят от } X_1,\ldots,X_{n+1}},\ \underbrace{X_{n+2} \geqslant u_2, \ldots,\ X_{n+k} \geqslant u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2},\ldots}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(N(t)=n\right) \underbrace{\mathsf{P}\left(X_1 \geqslant u_1\right)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \ldots e^{-\lambda u_k} = \mathsf{P}\left(N(t)=n\right) e^{-\lambda u_1} \ldots e^{-\lambda u_k}$$
по предположению индукции. Таким образом, доказано, что
$$X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$
а также показана независимость. Теорема доказана. □

Замечание (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что
$$X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$
несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени S_n, то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени X_i, а мы пришли на остановку в момент времени t и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

4 Лекция от 01.03.17

Точечные процессы

4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

Определение 4.1. Процесс $\{Y(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет *независимые приращения*, если

$$\forall\, 0 \leqslant t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0),\, Y(t_1) - Y(t_0),\, \ldots,\, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Теорема 4.1. *Пуассоновский процесс интенсивности λ имеет независимые приращения.*

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции по n. Введем процесс

$$N^t(s) := \sup\left\{ n : \sum_{k=1}^{n} X_k^t \leqslant s \right\},\;\; s \geqslant 0.$$

Из доказанного ранее следует, что $\left\{N^t(s),\, s \geqslant 0\right\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Заметим, что по определению

$$N^t(s) \;\in\; \sigma\left\{X_1^t,\, X_2^t,\, \ldots\right\},$$

из чего следует, что $N(t)$ независима с $N^t(s)\ \forall\, s$. Но

$$N^t(s) \;=\; N(t+s) - N(t),$$

а значит, для $n = 1$ утверждение доказано: $t_0 = t$, $t_1 = t + s$. Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем t_0 и рассмотрим $N^{t_0}(s)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} &N^{t_0}\left(t_k - t_0\right) - N^{t_0}\left(t_{k-1} - t_0\right) \;= \\ &\qquad = \; N\left(t_k - t_0 + t_0\right) - N(t_0) - \big(N\left(t_{k-1} - t_0 + t_0\right) - N\left(t_0\right)\big) \;= \\ &\qquad\qquad = \; N(t_k) - N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0},\, N(t_1) - N(t_0),\, \ldots,\, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0},\, N^{t_0}(s_1),\, \ldots\,,\, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где $s_k = t_k - t_0$, $k = 1,\, \ldots,\, n$. Но поскольку мы знаем, что N_{t_0} независима с $N^t(s)\ \forall s$, мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1),\, \ldots,\, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности λ $N^t(s)$. Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана. □

4.2 Пространственный пуассоновский процесс

Определение 4.2. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \ \forall q.$$

Тогда процесс $N = \{N(B), B \in \mathscr{B}\}$ называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности* μ, если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \text{Poiss}\left(\mu\left(B\right)\right), \ B \in \mathscr{B};$$

во-вторых,

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}$ таких, что $B_i B_j = \emptyset$ при $i \neq j$,
$\mu(B_i) < \infty \ \forall i = 1, \ldots, n$, выполнено, что $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ независимы.

Замечание. В определении выше сознательно не отбрасывались случаи $\mu(B) = 0$ и $\mu(B) = \infty$. Положим по определению, что если $\xi \sim$ Poiss(a), то

$$\begin{aligned} a = 0 \quad &\Rightarrow \quad \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty \quad &\Rightarrow \quad \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{P}(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Определение 4.3. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем. Пусть $\mu(S) < \infty$. Введем независимые случайные величины $Y, X_1, X_2, \ldots$ такие, что

$$\begin{aligned} &Y : \Omega \to \mathbb{Z}_+, \quad Y \sim \text{Poiss}\left(\mu\left(S\right)\right), \\ &X_i : \Omega \to S, \quad X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}, \quad \mathsf{P}\left(X_1 \in B\right) = \frac{\mu\left(B\right)}{\mu\left(S\right)}. \end{aligned}$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N\left(B\right) := \sum_{n=1}^{Y} \mathbb{I}_B\left(X_n\right), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Более подробно,

$$N\left(B, \omega\right) := \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B\left(X_n(\omega)\right), \quad B \in \mathscr{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

Замечание. $\sum\limits_{1}^{0} := 0.$

Теорема 4.2. *В терминах определения 4.3 $\{N\left(B\right), B \in \mathscr{B}\}$ есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ.*

Доказательство. Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}, \text{ что } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что

$$\mu(B_i) < \mu(S) < \infty.$$

Убедимся, что $\forall m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(N(B_1) = m_1, \ldots, N(B_n) = m_n\big) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\big(N(B_1) = m_1\big), \ldots, \mathsf{P}\big(N(B_n) = m_n\big) = \\
&\qquad\qquad = \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}.
\end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(N(B_1) = m_1, \ldots, N(B_n) = m_n)\big) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\big(N(B_1) = m_1, \ldots, N(B_n) = m_n, Y = k\big) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathsf{P}(Y = k)
\end{aligned}$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
m &:= m_1 + \ldots + m_n; \\
m_0 &:= k - m; \\
B_0 &:= S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы") X_i, $i = 1, \ldots, k$, которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках") B_j, $j = 0, \ldots, n$; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно m_j частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что Y — пуассоновская случайная величина:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathsf{P}(Y = k) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\
&\qquad = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \ldots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)}\right)^{m_0} \ldots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)}\right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\
&\qquad\qquad = e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}.
\end{aligned}$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества B_j попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$e^{-\mu(S)}\,\frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} =$$

$$= e^{-\mu(S)}\,\frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!}\,e^{\mu(B_0)} =$$

$$= \frac{\mu\left(B_1\right)^{m_1}}{m_1!}e^{-\mu(B_1)}\ \ldots\ \frac{\mu\left(B_n\right)^{m_n}}{m_n!}e^{-\mu(B_n)},$$

потому что

$$e^{-\mu(S)}e^{\mu(B_0)} = e^{-\left(\mu(B_1)+\ldots+\mu(B_n)\right)}.$$

Теорема доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_k \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \sim \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right),$$

где ряд может расходиться.

Доказательство. Если некоторое $\lambda_k = \infty$, то $\xi_k = \infty$, как и вся левая часть. Далее все $\lambda_k < \infty$.

1. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < \infty.$$

Имеем

$$\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < \infty$$

по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что ξ_k неотрицательны). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k = \xi < \infty$$

почти наверное. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\mathrm{d}} \xi.$$

Тогда

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n}e^{\lambda_k\left(e^{iu}-1\right)} =$$

$$= \exp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(e^{iu} - 1\right) \to \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(e^{iu} - 1\right),\ n \to \infty.$$

Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что

$$\xi \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \ \sim \ \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right).$$

2. Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \ = \ \infty.$$

Находим последовательность r_j со свойством

$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \ \geqslant \ 1,$$

которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение

$$\eta_j \ := \ \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \xi_k;$$

Тогда $\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots$ независимы, к тому же

$$\eta_j \ \sim \ \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(\eta_j \geqslant 1\right) \ = \ 1 - \mathsf{P}\left(\eta_j = 0\right) \ \geqslant \ 1 - e^{-1} > 0.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_j \geqslant 1) \ = \ \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \ = \ \infty$$

почти наверное. Лемма доказана.

□

Определение 4.4. Пусть $(S,\, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \ \forall q.$$

Пусть теперь $\mu(S) = \infty$. Для каждого S_q вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):

$$
\begin{aligned}
&Y_q : \Omega \to \mathbb{Z}_+, \;\; Y_q \sim \text{Poiss}\left(\mu\left(S_q\right)\right),\\
&X_{q_i} : \Omega \to S_q, \;\; X \in \mathscr{F}|\mathscr{B} \cap S_q, \;\; \mathsf{P}\left(X_{q_i} \in C\right) = \frac{\mu\left(C\right)}{\mu\left(S_q\right)},
\end{aligned}
$$

где

$$C \in \mathscr{B} \cap S_q \in \mathscr{B}.$$

Строим процесс

$$N_q(C) \;:=\; \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C\left(X_{q,n}\right).$$

Положим

$$N(B) \;:=\; \sum_{q=1}^{\infty} N_q\left(B \cap S_q\right), \;\; B \in \mathscr{B}.$$

Заметим, что все члены ряда независимы, а также что

$$N_q\left(B \cap S_q\right) \;\sim\; \text{Poiss}\left(\mu(B \cap S_q)\right).$$

Тогда по лемме 4.3

$$N(B) \;\sim\; \text{Poiss}\left(\sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q)\right) \;=\; \text{Poiss}\left(\mu\left(B\right)\right).$$

4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

Определение 4.5. Процесс $\left\{X(B),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ называется *(простым) точечным процессом*, если

$$X(B) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n), \;\; B \in \mathscr{B},$$

где

$$Z_n : \Omega \to S, \;\; Z_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}.$$

Пример 4.1. Пусть $\mu\left(S\right) = \infty$, μ — σ–конечная мера на $(S, \mathscr{B})$, а также

$$N(B) \;=\; \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_{B \cap S_q}\left(X_{q,n}\right).$$

Пусть

$$V_0 \;:=\; 0, \;\; V_k \;:=\; \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

Введем Z_n, $n \in \mathbb{N}$. Пусть для $\omega \in \Omega$

$$V_{k-1}(\omega) \;\leqslant\; n \;<\; V_k(\omega).$$

Определим
$$Z_n(\omega) \ := \ X_{k,n-V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$
Тогда
$$N(B) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B\left(Z_n\right).$$

Определение 4.6. Пусть $f : S \to \mathbb{R}_+,\ f \in \mathscr{B}|\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда *функционал Лапласа* $\mathscr{L}(f)$ определяется следующим образом:
$$\mathscr{L}(f) \ := \ \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$
где $e^{-\infty} \ := \ 0$.

4.4 Маркирование пуассоновских процессов

Определение 4.7. Рассмотрим T, T_1, T_2, $\ldots$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ независима с $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. На следующей лекции будет показано, что процесс, заданный элементами
$$Z_n \ := \ (S_n, T_n)_{n\geqslant 1},$$
является пространственным пуассоновским процессом с мерой
$$\lambda\nu \otimes \mathsf{G},$$
где ν — мера Лебега на $B(\mathbb{R}_+)$, G — мера, задаваемая распределением T.

Замечание. Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть S_n — время начала работы с клиентом, T_n — время работы с клиентом, Y_t — число клиентов, обслуживание которых происходит в момент t. Такая модель называется моделью $M|G|\infty$: M указывает на то, что процесс пуассоновский, G (general) указывает на то, что распределение времени обслуживания клиента произвольно, а ∞ означает, что имеется бесконечное число приборов (в том смысле, что не создается очередей: работа с клиентом начинается в момент его прихода). Тогда
$$Y_t \ = \ \#\left\{n : S_n \leqslant t < S_n + T_n\right\} \ = \ \#\big\{n : (S_n,\, T_n) \in B_t\big\} \ = \\ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n,\, T_n) \ \sim \ \text{Poiss}\big((\lambda\nu \otimes \mathsf{G})\,(B_t)\big),$$
где
$$B_t \ := \ \big\{(x,\, y) : \ 0 \leqslant x \leqslant t < x + y\big\},$$
а точка $(x,\, y)$ задается парой $(S_n,\, T_n)$. Вычислим:
$$(\lambda\nu \otimes \mathsf{G})\,(B_t) \ = \ \iint\limits_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{I}_{B_t}(x,\, y)\, \lambda\nu(dx)\mathsf{G}(dy) \ =$$
$$= \ \int\limits_0^t \mathsf{G}(dy) \int\limits_{t-y}^t \lambda\, dx \ + \ \int\limits_t^{\infty} \mathsf{G}(dy) \int\limits_0^t \lambda\, dx \ = \ \int\limits_0^t \lambda y\, \mathsf{G}(dy) + \int\limits_t^{\infty} \lambda t\, \mathsf{G}(dy) \ =$$

$$= \lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\, \mathsf{G}(dy).$$

Итак,

$$Y_t \sim \text{Poiss}\left(\lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\, \mathsf{G}(dy)\right) \quad \forall t > 0.$$

Если $\mathsf{E}T < \infty$, то

$$\text{Poiss}\left(\lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\, \mathsf{G}(dy)\right) \to \text{Poiss}(\lambda \mathsf{E}T), \ \ t \to \infty.$$

5 Лекция от 15.03.17

Процессы с независимыми приращениями

5.1 Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)

Напоминание. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Z_n : \Omega \to S,\ Z_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$. Пусть также есть точечный процесс

$$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n(\omega)),\ B \in \mathscr{B}$$

согласно определению 4.5. Введем для него функционал Лапласа согласно определению 4.6 по следующей формуле:

$$\mathscr{L}(f) := \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} < \infty,$$

где $f : S \to \mathbb{R}_+,\ f \in \mathscr{B}|\mathcal{B}_+,\ e^{-\infty} := 0,\ \ \mathcal{B}_+$ — борелевская σ–алгебра на $\mathbb{R}_+$.

Теорема 5.1. $N = \left\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ *является пространственным пуассоновским процессом с* σ*–конечной мерой интенсивности* $\mu \Leftrightarrow$

$$\mathscr{L}(f) = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right)\, \mu(dx)\right].$$

Доказательство. Сначала докажем **необходимость** $(\Rightarrow)$. Возьмем простую функцию f. Пусть $N = \left\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой μ. Сначала положим

$$f(x) \ := \ \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k(x)}, \ \ a_i \geqslant 0, \ \ i = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

где

$$B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j; \ \ B_i \in \mathscr{B},\ i = 1, \ldots, m; \ \ \mu(B_i) < \infty,\ i = 1, \ldots, m.$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)},$$

где перестановка знаков суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда по следствию из теоремы Беппо Леви о монотонной сходимости. Заметим, что если $\xi \sim \text{Poiss}(a)$, то

$$\mathsf{E} e^{-v\xi} \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr}\, \mathsf{P}(\xi = r) \;=\; e^{a(e^{-v}-1)}.$$

Воспользуемся также независимостью в совокупности $N(B_k)$ в силу того, что множества B_i попарно не пересекаются. Тогда получим, что

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)} \;=\; \prod_{k=1}^{m} \mathsf{E} e^{-a_k N(B_k)} \;=\; \prod_{k=1}^{m} e^{\mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} \;=$$
$$=\; e^{\sum\limits_{k=1}^{m} \mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} \;=\; e^{\int\limits_S (e^{-f(x)}-1)\,\mu(dx)}.$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 5.2. *Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство с σ–конечной мерой μ, $f : S \to \mathbb{R}_+$ — измеримая функция на нем. Тогда существует последовательность $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ простых функций вида (4) таких, что*

$$f_j \nearrow f \text{ на } S \text{ при } j \to \infty.$$

Доказательство. Как и на прошлой лекции, разобьем S на множества S_q, $\mu(S_q) < \infty$, что возможно ввиду σ–конечности меры μ. Определим

$$f_{q,\,j}(x) = \mathbb{I}_{S_q}(x) \left(\sum_{r=0}^{2^{2j}-1} r2^{-j}\, \mathbb{I}\left\{ r2^{-j} \leqslant f(x) < (r+1)2^{-j} \right\} + 2^j\, \mathbb{I}\left\{ f(x) \geqslant 2^j \right\} \right).$$

Тогда несложно проверить, что

$$0 \;\leqslant\; f_{q,\,j} \;\leqslant\; f_{q,\,j+1}, \quad 0 \;\leqslant\; f_j = \sum_{q=1}^{j} f_{q,\,j} \;\nearrow f \text{ на } S.$$

□

Замечание. Про это (с несколько другим построением простых функций) также можно почитать в [3] (страница 189).

Лемма 5.3. *Пусть $0 \leqslant a_{n,\,j} \nearrow a_n$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \;\nearrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad j \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ < \ \infty.$$
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > N$
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \ < \ \frac{\varepsilon}{3}.$$
Из монотонной сходимости и предельного перехода в неравенстве получаем, что
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n,\,j} \ < \ \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall j.$$
Зафиксируем N. Из сходимости следует, что
$$\forall n \ \ \exists N(n) \ : \ \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,\,m(n)} - a_n| < \frac{\varepsilon}{3N}.$$
Возьмем
$$M \ := \max_{n=1,\ldots,N} N(n).$$
Тогда для любого $j > M$
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{n,\,j}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \ \sum_{n=1}^{N} \left|a_n - a_{n,\,j}\right| + \frac{2\varepsilon}{3} \ \leqslant \ N\frac{\varepsilon}{3N} + \frac{2\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon.$$
Таким образом, показано, что $\forall \varepsilon \ \exists M : \forall j > M$
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \ \leqslant \ \varepsilon,$$
то есть показана требуемая сходимость.
2. Пусть
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ = \ \infty.$$
Тогда $\forall C > 0 \ \exists N : \forall m \geqslant N$
$$\sum_{n=1}^{m} a_n \ > \ 2C.$$
Снова зафиксируем N. Из сходимости следует, что
$$\forall n \ \ \exists N(n) \ : \ \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,\,m(n)} - a_n| < \frac{C}{N}.$$
Возьмем
$$M \ := \max_{n=1,\ldots,N} N(n).$$

Тогда для любого $j > M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \;\geqslant\; \sum_{n=1}^{N} a_{n,\,j} \;=\; \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} |a_n - a_{n,\,j}| \;\geqslant\; 2C - N\frac{C}{N} \;=\; C,$$

чем снова показана требуемая сходимость. Лемма доказана.

□

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем $0 \leqslant f_j \nearrow f$ по лемме 5.2. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n) \;\to\; \sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n),\;\; j \to \infty,$$

по лемме 5.3. Тогда

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n)} \;\to\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)}$$

по теореме Лебега. Итак,

$$\mathscr{L}(f) = \lim_{j\to\infty} \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f_j(x)} - 1\right)\,\mu(dx)\right] = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right)\,\mu(dx)\right],$$

поскольку

$$\int\limits_S \left(1 - e^{-f_j(x)}\right)\,\mu(dx) \;\to\; \int\limits_S \left(1 - e^{-f(x)}\right)\,\mu(dx),\;\; j \to \infty,$$

ввиду неотрицательности подынтегрального выражения.
Перейдем к доказательству **достаточности** ($\Leftarrow$). Пусть

$$\mathscr{L}(f) \;=\; \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right)\,\mu(dx)\right].$$

Возьмем

$$f \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k},\;\; B_i \cap B_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j.$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k X(B_k)}.$$

Если $f = a\mathbb{I}_B$, то

$$\mathscr{L}(f) \;=\; \mathsf{E} e^{-aX(B)} = e^{\mu(B)\left(e^{-a}-1\right)},$$

из чего следует, что $X\,(B) \sim \mathrm{Poiss}\,\big(\mu\,(B)\big)$ в силу непрерывного соответствия между преобразованием Лапласа и функциями распределения. Более того, снова взяв $f = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}$, прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$\mathsf{E}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k X(B_k)} = \mathscr{L}(f) = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx)\right] =$$

$$= \exp\left[\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{B_k} \left(e^{-a_k(x)} - 1\right) \mu(dx)\right] = \prod_{k=1}^{m} e^{\mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} = \prod_{k=1}^{m} \mathsf{E}e^{-a_k X(B_k)}.$$

Из этого следует, что $X(B_k)$ — независимые случайные величины по теореме факторизации (см. [3], стр.304), так как здесь функционал Лапласа — это характеристическая функция вектора $\big(X(B_1), \ldots, X(B_m)\big)$ с аргументом, помноженным на $-i$. Таким образом, X — пространственный пуассоновский процесс. Теорема доказана. □

Приведем доказательство утверждения, которое было дано без доказательства в конце прошлой лекции.

Теорема 5.4. *Пусть $(S_n, T_n)_{n=1}^{\infty}$ — точечный процесс, причем (S_n) и (T_n) независимы, где (S_n) — пуассоновский процесс с мерой интенсивности ν, где ν — мера Лебега. Тогда (S_n, T_n) — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\nu \otimes \mathsf{G}$, где G — распределение T_i.*

Доказательство. Вспомним, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)}.$$

Из курса математической статистики известно, что

$$\mathsf{E}\left(g(\xi,\eta) \mid \xi = u\right) = \mathsf{E}g(u, \eta),$$

если ξ независима с η. Тогда

$$\mathsf{E}\left(e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)} \,\Big|\, S_1 = u_1, S_2 = u_2, \ldots\right) = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(u_n, T_n)} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}e^{-f(u_n, T_n)}$$

в силу независимости (T_i). Введем обозначение

$$g(u) := \mathsf{E}e^{-f(u, T_n)} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-f(u,x)}\, \mathsf{G}(dx).$$

Заметим, что $0 < g(u) \leqslant 1$. Из курса математической статистики известно, что

$$\mathsf{E}\left(g(\xi, \eta)\right) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\left(g(\xi, \eta) \mid \xi\right)\Big).$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E}\prod_{n=1}^{\infty} g(S_n) = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\log\, g(S_n)\right)} = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} h(S_n)},$$

где $h := -\log g \geqslant 0$. Воспользуемся тем, что (S_n) — пуассоновский процесс:

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} h(S_n)} = \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} (e^{-h(x)} - 1)\,\nu(dx)\right] = \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} (g(x) - 1)\,\nu(dx)\right] =$$

$$= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-f(x,y)} \mathsf{G}(dy) - 1\right) \nu(dx)\right] =$$

$$= \exp\left[\iint\limits_{\mathbb{R}_+^2} \left(e^{-f(x,y)} - 1\right) \mathsf{G}(dy)\nu(dx)\right].$$

Соответственно, в силу теоремы 5.1, процесс (S_n, T_n) является пространственным пуассоновским процессом. Теорема доказана. □

5.2 Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — семейство измеримых пространств, T — произвольное множество. Введем случайный процесс

$$X := \{X_t, t \in T\}, \;\; X_t : \Omega \to S_t, \;\; X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t \;\; \forall t \in T.$$

Рассмотрим упорядоченный набор

$$\tau := (t_1, \ldots, t_n), \;\; t_i \neq t_j \;\; \forall i \neq j.$$

Определим тогда

$$S_\tau := S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_n}, \quad \mathscr{B}_\tau := \mathscr{B}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_{t_n}.$$

Введем прямоугольник

$$(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}), \;\; B_{t_i} \in \mathscr{B}_{t_i}, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Введем также случайный элемент

$$X_\tau : \Omega \to S_\tau, \;\; X_\tau \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_\tau \;\; \left(\Leftrightarrow X_{t_k} \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_{t_k}, \; k = 1, \ldots, n\right).$$

Распределение X_τ обозначим через $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$, где набор $t_1, \ldots, t_n$ упорядочен.

Определение 5.1. Семейство мер $\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$, где

$$t_1, \ldots, t_n \in T, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; t_i \neq t_j \;\; \forall i \neq j,$$

называется *семейством конечномерных распределений* $X = \{X_t, t \in T\}$.

Рассмотрим прямоугольник $B = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right) = \mathsf{P}\left((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B\right) = \\ &= \mathsf{P}\left(X_{t_1} \in B_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \in B_{t_n}\right) = \mathsf{P}\left(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}\right) = \\ &\qquad = \mathsf{P}_{t_{i_1}\ldots t_{i_n}}\left(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}\right) \end{aligned}$$

для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$. Таким образом, получили свойство:

Свойство 5.1. $\forall n\, \forall$ перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$

$$\mathsf{P}_{t_{i_1}\ldots t_{i_n}}\left(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}\right) = \mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right).$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_{t_1\ldots t_k\ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right) = \\ &\qquad = \mathsf{P}_{t_1\ldots t_{k-1} t_{k+1}\ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right), \end{aligned}$$

поскольку $\left\{X_{t_k} \in S_{t_k}\right\} = \Omega$. Таким образом, получили еще одно свойство:

Свойство 5.2.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_{t_1\ldots t_k\ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right) = \\ &\qquad = \mathsf{P}_{t_1\ldots t_{k-1} t_{k+1}\ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right). \end{aligned}$$

Определение 5.2. Свойства 5.1 и 5.2 называются *условиями согласованности.*

Определение 5.3. Измеримые пространства $(S, \mathscr{B})$ и $(V, \mathscr{A})$ *изоморфны*, если

$$\begin{aligned} &\exists h \quad : S \to V, \quad h \quad \in \mathscr{B}|\mathscr{A}, \\ &\exists h^{-1} : V \to S, \quad h^{-1} \in \mathscr{A}|\mathscr{B}. \end{aligned}$$

Определение 5.4. Измеримое пространство $(S, \mathscr{B})$ называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подмножеству отрезка $[0, 1]$.

Определение 5.5. Метрическое пространство (X, ρ) называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным.

Замечание. Любое борелевское подмножество польского пространства является борелевским пространством.

Теорема 5.5 (Колмогорова)**.** *Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство борелевских пространств. Пусть для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$ таких, что $t_i \neq t_j$, $i \neq j$, $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}$ — мера на $(S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_n}, \mathscr{B}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_{t_n})$, которая удовлетворяет условиям согласованности 5.1 и 5.2. Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ существует случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ такой, что $X_t : \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ $\forall t \in T$ и конечномерные распределения которого — это меры $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}$.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. В отличие от теоремы Ломницкого–Улама, в этой теореме накладываются ограничения топологического характера.

Определение 5.6. Пусть Q — мера на $\left(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$. *Характеристической функцией меры* Q называется

$$\varphi_{\mathsf{Q}}(u) \;:=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,\,x)}\,\mathsf{Q}(dx), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание. Если $\xi = (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$, то

$$\varphi_\xi(u) \;:=\; \varphi_{\mathsf{P}_\xi}(u) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,\,x)}\;\mathsf{P}_\xi(dx) \;=\; \int\limits_{\Omega} e^{i(u,\,\xi)}\,d\,\mathsf{P} \;=\; \mathsf{E}e^{i(u,\,\xi)}.$$

Теорема 5.6. *Пусть $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ — семейство характеристических функций мер на $\left(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$. Тогда существует случайный процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R},\ t \in T$, для которого $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ — характеристические функции конечномерных распределений, в том и только в том случае, когда*

1. $\varphi_{t_1\ldots t_n}(u_1,\, \ldots,\, u_n) \;=\; \varphi_{t_{i_1}\ldots t_{i_n}}(u_{i_1},\, \ldots,\, u_{i_n})\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall (i_1,\, \ldots,\, i_n)$ — *— перестановки* $(1,\, \ldots,\, n)$*;*
2. $\varphi_{t_1\ldots t_k\ldots t_n}(u_1,\, \ldots,\, u_{k-1},\, 0,\, u_{k+1},\, \ldots,\, u_n) = \varphi_{t_1\ldots\widehat{t_k}\ldots t_n}(u_1,\, \ldots,\, \widehat{0},\, \ldots,\, u_n)$.

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства (но вроде как на экзамене его знать надо; см. [1], стр. 29). □

Замечание. Если $X = \{X_t,\, t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, то достаточно рассмотреть $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n},\ \ t_1 < \ldots < t_n$.

Замечание. Про эти теоремы почитать подробнее можно в [1].

5.3 Процессы с независимыми приращениями

Теорема 5.7. *Для того чтобы существовал процесс $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ с независимыми приращениями такой, чтобы характеристическая функция случайной величины $X(t) - X(s)$ была равна $\varphi(s,\, t,\, \cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(s,\, t,\, v) \;=\; \varphi(s,\, u,\, v)\,\varphi(u,\, t,\, v) \quad \forall\, 0 < s < u < t\ \ \forall v \in \mathbb{R}.$$

При этом начальное распределение процесса P_0 может быть выбрано любым.

Замечание (от наборщика). Судя по всему, знание доказательства этой теоремы является обязательным. Доказательство см. [1], стр. 47.

5.4 Модификация процесса

Определение 5.7. Процесс $Y = \{Y_t,\, t \in T\}$ называется *модификацией* процесса $X = \{X_t,\, t \in T\}$, если

$$\mathsf{P}\left(Y_t = X_t\right) \;=\; 1\ \ \forall t \in T.$$

Лемма 5.8. *Из теоремы 5.6 следует, что существует процесс с независимыми приращениями $N = \{N_t,\, t \geqslant 0\}$ такой, что*

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Poiss}\big(\lambda(t-s)\big) \quad \forall\, 0 < s < t.$$

Доказательство. Вспомним, что если $\xi \sim \mathrm{Poiss}(a)$, то характеристическая функция ξ равна

$$\varphi_\xi(v) \;=\; e^{a\left(e^{iv}-1\right)}.$$

Тогда запишем

$$\varphi_{N_t - N_s}(v) \;=\; e^{\lambda(t-s)\left(e^{iv}-1\right)} \;=\; \varphi(s,\, t,\, v).$$

Но тогда

$$\varphi(s,\, t,\, v) \;=\; \varphi(s,\, u,\, v)\,\varphi(u,\, t,\, v),$$

что и требовалось показать. □

Замечание. Можно доказать, что у построенного процесса существует такая модификация, что ее траектории обладают следующими свойствами:

- они неубывают;
- они непрерывны справа;
- они имеют предел слева;
- все их скачки имеют величину 1;
- длина промежутков между скачками распределена экспоненциально;
- промежутки между скачками независимы.

Таким образом, этот процесс можно рассматривать как процесс восстановления.

Пример 5.1. Рассмотрим вероятностное пространство $\big([0,\,1],\, \mathcal{B}[0,\,1],\, \nu\big)$, где ν — мера Лебега, и измеримое пространство $\big([0,\,1],\, \mathcal{B}[0,\,1]\big)$. Введем случайные процессы $X = \{X_t,\, t \in T\}$ и $Y = \{Y_t,\, t \in T\}$ следующим образом:

$$X(t,\, \omega) \equiv 0, \quad Y(t,\, \omega) \;=\; \begin{cases} 1, & t = w \\ 0, & t \neq w \end{cases}, \quad t,\, \omega \in [0,\, 1].$$

Тогда все траектории X непрерывны, а все траектории Y разрывны, но вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(X_t \neq Y_t\right) \;=\; \nu(\{t\}) \;=\; 0,$$

то есть Y является модификацией X. Таким образом, отношение эквивалентности, порождаемое свойством 'быть модификацией друг друга', не сохраняет непрерывности траекторий.

6 Лекция от 22.03.17

Винеровский процесс

6.1 Фильтрации. Марковские моменты

Определение 6.1. Пусть $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Семейство σ–алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ на этом вероятностном пространстве, где $T \subset \mathbb{R}$, называется ***фильтрацией***, если $\forall\, s < t,\ s,\, t \in T$,

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}.$$

Определение 6.2. *Естественная фильтрация* процесса $X = (X_t,\, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, — это семейство

$$\mathscr{F}_t := \sigma\left\{X_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\right\},\ t \in T.$$

Определение 6.3. Отображение $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется *марковским моментом относительно фильтрации* $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$, если

$$\forall t \in T \quad \big\{\omega :\, \tau(\omega) \leqslant t\big\} \in \mathscr{F}_t.$$

Марковский момент τ называется *моментом остановки*, если $\tau < \infty$ почти наверное.

Замечание. Если τ — марковский момент, то $\forall t \in T$ $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$, поскольку

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau < t\},\ \ \{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{k}\right\}.$$

Замечание. Если $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, то

$$\tau \text{ — марковский момент } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

Пример 6.1. Рассмотрим действительный процесс с дискретным временем $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Введем

$$\tau_B(\omega) := \inf_n \left\{n :\, X_n(\omega) \in B\right\},\ \ \mathscr{F}_n = \sigma\left\{X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_n\right\},\ n \in \mathbb{Z}_+$$

(если $X_n \notin B$ $\forall n = 0,\, 1,\, 2, \ldots$, то $\tau = \infty$). Тогда τ_B — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$: проверим, что $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$:

- $n = 0 :$ $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \sigma\{X_0\} = \mathscr{F}_0$;
- $n \geqslant 1 :$ $\{\tau = n\} = \big\{X_0 \notin B,\, \ldots,\, X_{n-1} \notin B,\, X_n \in B\big\} \in$ $\in \sigma\left\{X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_n\right\} = \mathscr{F}_n$.

Определение 6.4. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$. Определим σ–алгебру

$$\mathscr{F}_\tau := \big\{A \in \mathscr{F} :\ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t\ \ \forall t \in T\big\}.$$

Эта σ–алгебра называется *σ–алгеброй событий, наблюдаемых до момента τ*.

Упражнение 6.1. Доказать, что объект из определения 6.4 — σ–алгебра.

6.2 Строго марковское свойство

Определение 6.5. Процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, имеет *стационарные приращения*, если $\forall t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall h : t_0,\, \ldots,\, t_n,\, t_0 + h,\, \ldots,\, t_n + h \in T$

$$\begin{aligned} \operatorname{Law}\left(X_{t_1} - X_{t_0},\, \ldots,\, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right) &= \\ &= \operatorname{Law}\left(X_{t_1+h} - X_{t_0+h},\, \ldots,\, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\right) \quad (5) \end{aligned}$$

Замечание. Если процесс X имеет еще и независимые приращения, то

$$(5) \Leftrightarrow \mathrm{Law}\,(X_t - X_s) = \mathrm{Law}\,(X_{t+h} - X_{s+h}) \quad \forall t,\, s,\, t+h,\, s+h \in T,\, s < t.$$

Замечание. Пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ — процесс со стационарными независимыми приращениями.

Лемма 6.1 (марковское свойство). *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда $\forall$ константы $a > 0$ процесс $Z(t) := = X(t+a) - X(a)$, $t \geqslant 0$, имеет независимые приращения и*

$$\{Z_t,\, t \geqslant 0\} \text{ независим с } \mathscr{F}_a = \sigma\{X_s,\, s \leqslant a\}.$$

Доказательство. Докажем независимсть приращений по определению: возьмем $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и рассмотрим

$$Z(t_0),\, Z(t_1) - Z(t_0),\, \ldots,\, Z(t_n) - Z(t_{n-1}).$$

Заметим, что по определению $Z(t)$

$$Z(t_0) = X(t_0 + a) - X(a), \quad Z(t_k) - Z(t_{k-1}) = X(t_k + a) - X(t_{k-1} + a);$$

из этого получаем, что приращения Z независимы вследствие независимости приращений X, которая есть по условию леммы. Докажем второе утверждение леммы: заметим, что σ–алгебра $\mathscr{F}_a$ порождается системой событий

$$\{X_{s_1} \in B_1,\, \ldots,\, X_{s_m} \in B_m\}, \quad 0 \leqslant s_1 < \ldots < s_m \leqslant a.$$

Поэтому достаточно проверить, что независимы векторы

$$\xi = (X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m}) \text{ и } \eta = (Z_{t_1},\, \ldots,\, Z_{t_n}), \quad 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n.$$

Заметим, что

$$\xi = \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} \\ \vdots \\ X_{s_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} - X_{s_1} \\ \vdots \\ X_{s_m} - X_{s_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\zeta := \left(X_{s_1},\, X_{s_2} - X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m} - X_{s_{m-1}}\right)$. Тогда ζ и η независимы, поскольку X имеет независимые приращения. Но ξ — это борелевская функция от ζ, следовательно, ξ независим с η. $\square$

Теорема 6.2 (строго марковское свойство). *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что его траектории непрерывны справа. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации X. Введем*

$$Y(t,\omega) := \begin{cases} X(t + \tau(\omega),\, \omega) - X(\tau(\omega),\, \omega)\,, & \tau(\omega) < \infty, \\ 0 & ,\ \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

По сути, $Y(t) = X(t+\tau) - X(\tau)$, $t \geqslant 0$. Тогда процесс $Y = \{Y_t,\, t \geqslant 0\}$ независим с $\mathscr{F}_\tau$ и имеет те же конечномерные распределения, что и процесс $\{X_t - X_0,\, t \geqslant 0\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что процесс Y корректно задан. Пополним исходное вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ классом нулевых событий $\mathcal{N}$ и получим $\big(\Omega,\, \bar{\mathscr{F}},\, \bar{\mathsf{P}}\big)$, то есть

$$\forall A : \mathsf{P}\,(A) = 0 \ \ \forall C \subset A \quad C \in \mathcal{N},\, \bar{\mathsf{P}}\,(C) := 0,$$

где новая σ–алгебра определяется как

$$\bar{\mathscr{F}} = \sigma \left\{ \mathscr{F},\, \mathcal{N} \right\}.$$

Известно, что

$$\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cup \mathcal{N}, \ \ \bar{\mathsf{P}}\,(A \cup C) = \mathsf{P}\,(A) \ \forall A \in \mathscr{F},\, C \in \mathcal{N}.$$

Поэтому можно считать, что с самого начала рассматривалось пополненное вероятностное пространство $\big(\Omega,\, \bar{\mathscr{F}},\, \bar{\mathsf{P}}\big)$, которое и будет дальше обозначаться просто $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$. Дальше считаем, что все σ–алгебры также пополнены классом нулевых событий.
Если τ — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ и $\alpha = \tau$ почти наверное, то α — тоже марковский момент относительно $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$. Поэтому далее можем считать, что $\tau < \infty$ на Ω.
Покажем, что $Y(t)$ — случайная величина $\forall t \geqslant 0$. Введем

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n}\, \mathbb{I}_{A_{n,\,k}},$$

где

$$\begin{aligned} &A_{n,\,1} := \left\{ \omega : \tau(\omega) \leqslant 2^{-n} \right\}, \\ &A_{n,\,k} := \left\{ \omega : (k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leqslant k 2^{-n} \right\}, \quad k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Тогда $\tau_n \searrow \tau$ на всем Ω. Заметим, что τ_n — марковские моменты относительно $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$:

$$\left\{ \tau_n \leqslant t \right\} = \left\{ \tau \leqslant k 2^{-n} \right\} \in \mathscr{F}_{k 2^{-n}} \subset \mathscr{F}_t,$$

где $k := \sup \left\{ r :\ r 2^{-n} \leqslant t \right\}$.
Поскольку траектории X непрерывны справа почти наверное, то

$$X\left(t + \tau_n(\omega),\, \omega\right) \to X\left(t + \tau(\omega),\, \omega\right),\ n \to \infty \ \ \forall t \geqslant 0.$$

Заметим, что

$$\left\{ \omega :\ X\left(t + \tau_n(\omega),\, \omega\right) \leqslant z \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ X\left(t + k 2^{-n},\, \omega\right) \leqslant z,\ \tau_n = k 2^{-n} \right\}.$$

Поскольку

$$\left\{ X\left(t + k 2^{-n},\, \omega\right) \leqslant z \right\} \in \mathscr{F},\ \left\{ \tau_n = k 2^{-n} \right\} \in \mathscr{F},$$

то $X(t + \tau_n)$ — случайная величина $\forall n$. Поскольку $X(t + \tau_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t + \tau)$, то $X(t + \tau)$ — тоже случайная величина из полноты случайного пространства:

пространство полно относительно сходимости почти наверное, так как оно было пополнено классом нулевых событий (это результат действительного анализа). Таким образом, показали, что $Y(t) = X(t+\tau) - X(\tau)$ — случайная величина $\forall t \geqslant 0$.

Докажем, что Y независим с $\mathscr{F}_\tau$. Для этого достаточно проверить, что

$$\mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right) = \mathsf{P}\left(A\right) \mathsf{P}\left(\xi \in C\right) \quad \forall A \in \mathscr{F}_\tau,\, C \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^m\right),$$

где

$$\xi := \left(Y(t_1),\, \ldots,\, Y(t_m)\right), \quad 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m.$$

Воспользуемся свойством регулярности вероятностной меры:

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \ \ \exists$ открытое множество G и замкнутое множество F такие, что $F \subset C \subset G$ и $\mathsf{P}\left(G \setminus F\right) < \varepsilon$ (доказательство см., например, [4], стр. 4, на лекции оно не рассказывалось). Соответственно, достаточно рассматривать только замкнутые C (можно любое борелевское множество C приблизить снизу последовательностью замкнутых вложенных в C множеств C_n и перейти к пределу по свойству непрерывности вероятностной меры).

Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right) = \mathsf{P}\left(A\right) \mathsf{P}\left(\xi \in C\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\xi)$$

для любой непрерывной ограниченной $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Заметим, что импликация слева направо ($\Rightarrow$) следует из того, что если σ–алгебры, индуцированные на вероятностное пространство двумя случайными величинами, независимы, то матожидание произведения этих случайных величин распадается в произведение соответствующих матожиданий. Докажем импликацию справа налево ($\Leftarrow$). Положим

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & , \ \ t \leqslant 0, \\ 1 - t\,, & \ \ t \in [0,\, 1], \\ 0 & , \ \ t > 1. \end{cases}$$

Определим $\rho\left(x,\, C\right) := \inf\limits_{y \in C} \rho(x,\, y)$, где $\rho(x,\, y)$ — евклидово расстояние между точками. Заметим, что $\rho\left(x,\, C\right)$ — непрерывная функция от x. Положим

$$f_j(x) := \varphi\left(j \rho\left(x,\, C\right)\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f_j(x) \ \searrow\ \mathbb{I}_C, \ j \to \infty$ (здесь важно, что C — замкнутое множество!). Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f_j(\xi) \ &\to \ \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{\{\xi \in C\}} \ = \ \mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right), \\ \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f_j(\xi) \ &\to \ \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E}\mathbb{I}_{\{\xi \in C\}} \ = \ \mathsf{P}\left(A\right) \mathsf{P}\left(\xi \in C\right). \end{aligned}$$

Таким образом, импликация справа налево доказана. Положим

$$\xi_n := \left(X(t_1 + \tau_n) - X(\tau_n),\, \ldots,\, X(t_m + \tau_n) - X(\tau_n)\right).$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, поскольку $\tau_n \searrow \tau$. Следовательно, $\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n)$.

Положим

$$\xi_{n,\,k} := \Big(X\left(t_1 + k2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right),\, \ldots,\, X\left(t_m + k2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right)\Big).$$

Заметим, что

$$A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} = A \cap A_{n,\,k} = A \cap \{(k-1)2^{-n} < \tau \leqslant k2^{-n}\} = \\ = A \cap \{\tau \leqslant k2^{-n}\} \setminus A \cap \{\tau \leqslant (k-1)2^{-n}\} \in \mathscr{F}_{k2^{-n}}.$$

По лемме 6.1 $\xi_{n,\,k}$ независим с $\mathscr{F}_{k2^{-n}}$. Тогда получаем, что

$$\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n)\mathbb{I}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} f(\xi_{n,\,k}) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathsf{E}f(\xi_{n,\,k}).$$

Заметим, что

$$\xi_{n,\,k} \overset{\text{law}}{=} \big(X(t_1) - X(0),\, \ldots,\, X(t_m) - X(0)\big) \;=:\; \gamma.$$

Тогда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathsf{E}f(\xi_{n,\,k}) = \mathsf{E}f(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \mathsf{E}f(\gamma)\mathsf{E}\mathbb{I}_A = \\ = \mathsf{E}f(\gamma)\,\mathsf{P}\,(A)\,.$$

Таким образом, получили, что $\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E}f(\gamma) \quad \forall A \in \mathscr{F}_\tau$. Осталось взять $A = \Omega$: тогда получится, что $\mathsf{E}f(\xi) = \mathsf{E}f(\gamma)$ и, как следствие,

$$\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E}f(\xi) \;\; \forall A \in \mathscr{F}_\tau.$$

$\square$

6.3 Функции Хаара и Шаудера

Определение 6.6. *Функции Хаара* $H_k(x)$ задаются следующими формулами на $[0,\, 1]$:

$H_0(x) \equiv 1;$

$H_1(x) = \mathbb{I}_{[0,\, \frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{I}_{(\frac{1}{2},\, 1]}(x);$

$$H_k(x) = 2^{n/2}\left(\mathbb{I}_{\left(\frac{k-2^n}{2^n},\, \frac{1/2+k-2^n}{2^n}\right]}(x) - \mathbb{I}_{\left(\frac{1/2+k-2^n}{2^n},\, \frac{1+k-2^n}{2^n}\right]}(x)\right), \;\; 2^n \leqslant k < 2^{n+1}, \\ n \in \mathbb{N};\;\; H_{2^n}(0) = 2^{n/2} \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Упражнение 6.2. Найти в интернете график функций Хаара (например, вот тут: `http://alnam.ru/book_ach.php?id=38`, только надо перевернуть страницу), чтобы формула не вызывала ужаса.

Замечание. Известно, что $\{H_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — полная ортонормированная система в $\mathrm{L}^2[0,\, 1]$.

Определение 6.7. *Функции Шаудера* $S_k(t)$ задаются следующими формулами на $[0,\,1]$:

$$S_k(t) = \int\limits_{[0,\,t]} H_k(u)\,\mathrm{d}u = \left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\,t]} \right\rangle_{\mathrm{L}^2},\quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $H_k(u)$ — функции Хаара.

Замечание. Известно, что $S_k(t)$ непрерывны $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 6.3. *Пусть* $a_k = \mathrm{O}\left(k^{\varepsilon}\right)$ *при* $k \to \infty$, *где* $0 < \varepsilon < 1/2$. *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$$

сходится равномерно на $[0,\,1]$.

Доказательство. Будем доказывать равномерную сходимость к нулю хвостов ряда. Перепишем хвост ряда:

$$\sum_{k>2^m} a_k S_k(t) \;=\; \sum_{n=m}^{\infty}\; \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} a_k S_k(t).$$

Заметим, что

$$S_k(t) \;\leqslant\; 2^{-\frac{n}{2}-1},\;\; 2^n < k \leqslant 2^{n+1}.$$

Поскольку $|a_k| = O\left(k^{\varepsilon}\right)$, то

$$|a_k| \;\leqslant\; Ck^{\varepsilon},$$

где C — некоторая фиксированная константа. Оценим:

$$\sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \;\leqslant\; C2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} S_k(t).$$

Поскольку носители $S_k(t)$ не пересекаются при $2^n < k \leqslant 2^{n+1}$, то

$$C2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} S_k(t) \;\leqslant\; C2^{(n+1)\varepsilon}\, 2^{-\frac{n}{2}-1} \;=\; C2^{\varepsilon - n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}.$$

Вернемся к исходному хвосту ряда:

$$\sum_{k>2^m} |a_k| S_k(t) \;\leqslant\; \sum_{n=m}^{\infty} C\, 2^{\varepsilon - n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} \;\to\; 0,\;\; n \to \infty,$$

так как $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Таким образом, поскольку оценка является числовым рядом, не зависящим от t, показана равномерная сходимость хвостов ряда к нулю, то есть его равномерная сходимость. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Из леммы 6.3 и теоремы Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится к непрерывной функции.

Лемма 6.4. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *случайные величины на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\forall c > \sqrt{2}$ *и для почти всех* $\omega \in \Omega$ $\exists N_0(c\ \omega)$*:*

$$|\xi_k| \leqslant c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}} \quad \forall k \geqslant N_0(c, \omega).$$

Доказательство. Поскольку $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то

$$\mathsf{P}\,(\xi_k \geqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ \ \forall x > 0.$$

Оценим этот интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty \frac{u}{u} e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ \leqslant \ \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty u e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ = $$

$$= \ \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty -\,\mathrm{d}e^{\frac{-u^2}{2}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Тогда получаем, что

$$\mathsf{P}\left(|\xi| \geqslant x\right) \ \leqslant \ \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Воспользуемся леммой Бореля–Кантелли:

$$\sum_{k=2}^\infty \mathsf{P}\left(|\xi_k| \geqslant c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}}\right) \ \leqslant \ \sum_{k=2}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-c^2 \ln k}{2}} \ \leqslant \ \widetilde{c} \sum_{k=2}^\infty k^{\frac{-c^2}{2}} < \infty.$$

Поскольку ряд из вероятностей сошелся почти наверное, то событий происходит конечное число почти наверное. Из этого следует, что для каждого фиксированного ω можно выбрать k, после которого события выполняться перестают. Лемма доказана. □

6.4 Винеровский процесс

Определение 6.8. Процесс $W = \big\{W(t),\, t \geqslant 0\big\}$ называется *винеровским*, если

1. $W(0) = 0$ почти наверное;
2. W имеет независимые приращения;
3. $W(t) - W(s) \ \sim \ \mathcal{N}(0, t - s) \ \ \forall\, 0 \leqslant s < t$;
4. траектории W непрерывны почти наверное.

Теорема 6.5 (явная конструкция винеровского процесса)**.** *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in$ $\in \mathbb{N}$. *Введем*

$$W(t, \omega) \ := \ \sum_{k=1}^\infty \xi_k(\omega) S_k(t), \ \ t \in [0, 1],$$

где $S_k(t)$ — *функции Шаудера. Тогда* $W = \big\{W(t),\, t \in [0, 1]\big\}$ — *винеровский процесс на* $[0, 1]$.

Доказательство. Будем доказывать свойства 1. – 4. для построенного процесса. Свойство 1. выполнено, так как $S_k(0) = 0$. Заметим, что согласно лемме 6.3

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} W(t), \quad n \to \infty.$$

Более того, согласно лемме 6.4 сходимость равномерна на $[0, 1]$, что дает непрерывность траекторий почти наверное. Таким образом, свойство 4. тоже получено. Проверим независимость приращений этого процесса. Для этого нужно проверить независимость случайных величин

$$W(t_0),\, W(t_1) - W(t_0),\, \ldots,\, W(t_m) - W(t_{m-1}), \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_m.$$

Заметим, что случайные величины $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t)$ имеют предел в $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$: поскольку

$$\mathsf{E}\xi_k \xi_l = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

то

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t) - \sum_{k=1}^{r} \xi_k S_k(t)\right|^2 = \mathsf{E}\left|\sum_{k=r+1}^{n} \xi_k S_k(t)\right|^2 = \mathsf{E}\sum_{k=r+1}^{n} S_k^2(t) \to 0,$$
$$r,\, n \to \infty,$$

как часть хвоста сходящегося ряда, поскольку $S_k(t) \leqslant 2^{-\frac{n+2}{2}}$. Таким образом, показано, что последовательность частичных сумм фундаментальна в $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Известно, что это пространство полно; тогда обозначим

$$V(t) := (\mathrm{L}^2) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t).$$

Из этого следует, что $V(t) = W(t)$ почти наверное, и частные суммы сходятся к $W(t)$ не только почти наверное, но и в L^2 (потому что из сходимости почти наверное, равно как и из сходимости в L^2, следует сходимость по вероятности, предел которой определен однозначно).
Рассмотрим теперь вектор из приращений частных сумм:

$$U_n := \Bigg(\sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t_0),\, \ldots,\, \sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t_j),\, \ldots$$
$$\ldots,\, \sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t_{m-1}) \Bigg).$$

Сразу отметим, что этот вектор является гауссовским, так как он является линейным преобразованием гауссовского вектора из независимых нормальных случайных величин ξ_i. Введем также предельный вектор

$$U := \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_0),\, \ldots,\, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_j),\, \ldots$$

$$\ldots,\ \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_{m-1})\Big).$$

Тогда по доказанному выше

$$U_n \xrightarrow{\text{п.н.}} U,\ \ U_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} U.$$

Поскольку $U_n = \left(U_n^1,\, \ldots,\, U_n^m\right)$ — гауссовский вектор, его характеристическая функция имеет известный вид:

$$\varphi_{U_n}(\lambda) = e^{i(\lambda,\, a) - \frac{1}{2}(C\lambda,\, \lambda)},$$

где a — математическое ожидание U_n, а C — матрица ковариаций U_n. Заметим, что $\mathsf{E}U_n = 0$. Разберемся с матрицей ковариаций:

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^r\right) = \mathsf{E}U_n^j U_n^r = \sum_{k=1}^{n} S_k(t_{j+1})S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{n} S_k(t_j)S_k(t_{r+1}) - \\ - \sum_{k=1}^{n} S_k(t_{j+1})S_k(t_r) + \sum_{k=1}^{n} S_k(t_j)S_k(t_r).$$

Поскольку $\mathsf{E}U_n^j U_n^r$ — это скалярное произведение в L^2, которое обладает свойством непрерывности, то

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^r\right) = \mathsf{E}U_n^j U_n^r \to \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1})S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j)S_k(t_{r+1}) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1})S_k(t_r) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j)S_k(t_r),\ \ n\to\infty.$$

Рассмотрим одно из слагаемых, воспользовавшись представлением функций Шаудера через функции Хаара (образующие базис в пространстве L^2), а также равенством Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)S_k(v) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\,t]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2}\left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\,v]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2} = \left\langle \mathbb{I}_{[0,\,t]},\, \mathbb{I}_{[0,\,v]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2} = \\ = \min(v,\, t).$$

Тогда в предположении $t_j < t_r$ получаем, что

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^r\right) \to \min(t_{j+1},\, t_{r+1}) - \min(t_j,\, t_{r+1}) - \min(t_{j+1},\, t_r) + \min(t_j,\, t_r) = \\ = t_{j+1} - t_j - t_{j+1} + t_j = 0.$$

Если же $j = r$, то

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^j\right) = \mathsf{D}U_n^j \to \min(t_{j+1},\, t_{j+1}) - \min(t_j,\, t_{j+1}) - \\ - \min(t_{j+1},\, t_j) + \min(t_j,\, t_j) = t_{j+1} - t_j.$$

Так как сходимость почти наверное влечет сходимость характеристических функций и так как из-за сходимости в L^2 есть сходимость моментов, из этого следует, что матрица ковариаций вектора U диагональна, что в свою очередь влечет независимость его компонент $U^1, \ldots, U^m$; также предельным переходом получаем явный вид характеристической функции вектора U, что доказывает гауссовость вектора. Теорема доказана. $\square$

Следствие (построение W на $[0, \infty)$)**.** *Для каждого $j \in \mathbb{N}$ берем $\xi_1^j, \xi_2^j, \ldots$ — независимые одинаково распределенные $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Определяем*

$$W^j(t, \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j(\omega) S_k(t).$$

Дальше склеиваем эти процессы последовательно и непрерывно:

$$W(t) := W^j(t) + W(j-1), \;\; W(0) \equiv 0, \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Тогда W — винеровский процесс.

7 Лекция от 29.03.17

Свойства винеровского процесса

7.1 Недифференцируемость траекторий броуновского движения

Теорема 7.1 (Винера – Пэли – Зигмунда)**.** *С вероятностью 1 траектории винеровского процесса $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ не дифференцируемы ни в одной точке $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[k, k+1), k \in \mathbb{Z}_+$. Допустим, что $W(\cdot, \omega)$ дифференцируем в точке $s \in [k, k+1)$. Тогда существует правая производная $W(\cdot, \omega)$ в точке s. Из этого следует, что

$$\exists\, l, q \in \mathbb{N}: \;\; \big|W(t, \omega) - W(s, \omega)\big| \leqslant l(t-s) \text{ при } |t-s| < \frac{1}{q}, \; t > s.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}_+$ и введем событие

$$A_{l,n,i} := \left\{\omega : \left|W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right)\right| \leqslant \frac{7l}{n}, \;\; j = i, i+1, i+2\right\}.$$

Пусть $\frac{4}{n} < \frac{1}{q}$, то есть $n > 4q$. Тогда если ω — точка дифференцируемости W в точке s, то $\exists i = i(s, n)$, что

$$\left|W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W(s, \omega)\right| + \left|W(s, \omega) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3l}{n} + \frac{4l}{n} = \frac{7l}{n}, \ \ j = i,\, i+1,\, i+2,$$

поскольку в разрешенный промежуток длины $\frac{1}{q}$ точно попадет целиком хотя бы 3 отрезка длины $\frac{1}{n}$ (i выбирается таким образом, чтобы $k + \frac{i-1}{n} \leqslant s < k + \frac{i}{n}$). Таким образом, если $\omega \in D_k$, где D_k — такие ω, что $W(\cdot,\, \omega)$ дифференцируема в точка $s \in [k,\, k+1)$, то по показанному выше

$$D_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,\,n,\,i}.$$

Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,\,n,\,i}\right) = 0 \ \ \forall l,\, q \in \mathbb{N};$$

если мы это сделаем, то тогда автоматически получится, что $\mathsf{P}\left(D_k\right) = 0$, что и доказывает утверждение теоремы. Для начала заметим, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n} B_n\right) \leqslant \liminf_{n} \mathsf{P}\left(B_n\right),$$

поскольку пересечение вложено в каждый из отдельно взятых элементов. Поэтому

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,\,n,\,i}\right) \leqslant \liminf_{n} \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{l,\,n,\,i}\right) \leqslant \liminf_{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left(A_{l,\,n,\,i}\right).$$

Оценим общий член этой суммы. Так как приращения винеровского процесса независимы и стационарны, то

$$\mathsf{P}\left(A_{l,\,n,\,i}\right) = \left(\mathsf{P}\left(\Big|W\left(1/n\right) - W(0)\Big| \leqslant \frac{7l}{n}\right)\right)^3 = \left(\mathsf{P}\left(\frac{\big|W(1/n)\big|}{\sqrt{1/n}} \leqslant \frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3.$$

Введем обозначение

$$\xi := \frac{W\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,\, 1).$$

Тогда воспользуемся тем, что

$$\mathsf{P}\left(|\xi| \leqslant z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \leqslant \frac{2z}{\sqrt{2\pi}} = z\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

и продолжим цепочку неравенств:

$$\left(\mathsf{P}\left(\frac{\big|W(1/n)\big|}{\sqrt{1/n}} \leqslant \frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3 \leqslant \left(\frac{7l}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3.$$

Тогда, возвращаясь к сумме, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n-3}A_{l,\,n,\,i}\right)\;\leqslant\;\liminf_{n} n\left(\frac{7l}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{3}\;=\;0.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Это доказательство (точно такое же, но с картинками) можно посмотреть в [1], стр. 76.

Замечание. Из последнего шага доказательства становится ясно, почему нужно было брать именно три отрезка, а не один или два.

7.2 Принцип отражения

Теорема 7.2 (принцип отражения)**.** *Пусть $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс, τ — момент остановки относительно естественной фильтрации процесса W. Введем новый (отраженный) процесс*

$$Z(t,\,\omega)=\begin{cases}W(t,\,\omega), & t\leqslant\tau(\omega),\\ 2W\big(\tau(\omega),\,\omega\big)-W(t,\,\omega), & t>\tau(\omega)\end{cases}$$

для всех $\omega \in \{\tau < \infty\}$; для всех остальных ω определим $Z(t,\,\omega) \equiv 0$. Иными словами,

$$Z(t,\,\omega)\;=\;W(t,\,\omega)\,\mathbb{I}\big\{t\leqslant\tau(\omega)\big\}+\big(2W(\tau(\omega),\,\omega)-W(t,\,\omega)\big)\,\mathbb{I}\big\{t>\tau(\omega)\big\}\,.$$

Тогда $Z = \{Z_t,\, t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс.

Доказательство. Введем польское (то есть метрическое полное сепарабельное) пространство $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}_+) = \big\{f:\ f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+)\,,\ f(0) = 0\big\}$ с метрикой

$$\rho(f,\,g):=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{\sup\limits_{t\in[0,\,n]}\big|f(t)-g(t)\big|}{1+\sup\limits_{t\in[0,\,n]}\big|f(t)-g(t)\big|}.$$

Введем два вспомогательных процесса $X = \big\{X(t),\, t \geqslant 0\big\}$ и $Y = \big\{Y(t),\, t \geqslant 0\big\}$:

$$\begin{aligned}X(t,\,\omega)\;&:=\;W\Big(\min\big(t,\,\tau(\omega)\big)\,,\,\omega\Big)\,,\\ Y(t,\,\omega)\;&:=\;W(t+\tau,\,\omega)-W(\tau).\end{aligned}$$

Смысл этих процессов таков: X — это процесс W, остановленный после момента τ; Y — это процесс W, отсеченный в момент τ. Сразу отметим, что Y — винеровский процесс по строго марковскому свойству (теорема 6.2). Введем для всех $b \in \mathbb{R}_+$, $f,\, g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}_+)$ отображение "склеивания" h функций f и g в точке b:

$$h\big(b,\,f(\cdot),\,g(\cdot)\big)\,(t)\;:=\;f(t)\mathbb{I}_{[0,\,b]}(t)+\big(f(b)+g(t-b)\big)\,\mathbb{I}_{(b,\,\infty)}(t).$$

Отметим, что

$$h:\;\big(\mathbb{R}_+\times\mathrm{C}_0[0,\,\infty)\times\mathrm{C}_0[0,\,\infty),\,\widetilde{\rho}\big)\;\to\;\big(\mathrm{C}_0[0,\,\infty),\,\rho\big)\,,$$

где метрика $\widetilde{\rho}$ вводится следующим образом:

$$\widetilde{\rho} := \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\},$$

где ρ_1 — евклидова метрика на $\mathbb{R}_+$, а ρ_2 и ρ_3 совпадают с метрикой ρ, является непрерывным отображением. Заметим, что тогда для всех $\omega \in \{\tau < \infty\}$

$$h\left(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), \quad Y(\cdot, \omega)\right) = W(\cdot, \omega),$$
$$h\left(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)\right) = Z(\cdot, \omega).$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$h\left(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), \quad Y(\cdot, \omega)\right) \overset{\text{law}}{=} h\left(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)\right),$$

для чего достаточно доказать, что элементы (τ, X, Y) и $(\tau, X, -Y)$ имеют одинаковое распределение, в силу непрерывности h. Перейдем к этому.
Сначала докажем, что вектор (τ, X) $\mathscr{F}_\tau$–измерим. Для этого достаточно доказать, что $\mathscr{F}_\tau$–измеримы его компоненты. $\mathscr{F}_\tau$–измеримость τ очевидна. Перейдем к доказательству $\mathscr{F}_\tau$–измеримости X. Для этого построим последовательность сходящихся к X $\mathscr{F}_\tau$–измеримых случайных элементов X_n. Введем величины

$$a_n(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} k2^{-n}\mathbb{I}_{\left[k2^{-n},\,(k+1)2^{-n}\right)}\left(\tau(\omega)\right) \nearrow \tau(\omega), \;\; n \to \infty, \;\; \forall \omega.$$

Построим по ним

$$X_n(\omega) := W\Big(\min\left(t,\, a_n(\omega)\right),\, \omega\Big).$$

Тогда X_n $\mathscr{F}_\tau$–измеримы и, как следствие, X $\mathscr{F}_\tau$–измерим. Тогда и весь вектор (τ, X) $\mathscr{F}_\tau$–измерим. По строго марковскому свойству Y независим с $\mathscr{F}_\tau$ и, как следствие, с вектором (τ, X). Вследствие этого получаем, что

$$\operatorname{Law}\left((\tau, X, Y)\right) = \operatorname{Law}\left((\tau, X)\right) \otimes \operatorname{Law}(Y) = \operatorname{Law}\left((\tau, X)\right) \otimes \operatorname{Law}(W).$$

Поскольку Y — винеровский процесс, то

$$\operatorname{Law}\left((\tau, X, -Y)\right) = \operatorname{Law}\left((\tau, X)\right) \otimes \operatorname{Law}(-Y) = \operatorname{Law}\left((\tau, X)\right) \otimes \operatorname{Law}(W).$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 85.

7.3 Теорема Башелье

Лемма 7.3. *Пусть* $W = \left\{W(t), t \geqslant 0\right\}$ *— винеровский процесс. Положим*

$$\tau_y := \inf\left\{t \geqslant 0 : W(t) = y\right\}.$$

Тогда $\forall t, x, y \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t, W(t) < y - x\right) = \mathsf{P}\left(W(t) > y + x\right).$$

Доказательство. При $y = 0$ теорема верна, поскольку равенство в ее формулировке превращается в равенство $\mathsf{P}\left(W(t) \leqslant -x\right) = \mathsf{P}\left(W(t) \geqslant x\right)$.
Пусть теперь $y > 0$. Согласно обязательной задаче 6.2 τ_y — момент остановки относительно естественной фильтрации W. Построим отраженный процесс $Z = \left\{Z(t),\, t \geqslant 0\right\}$ так же, как в теореме 7.2, используя τ_y в качестве момента отражения τ. Введем

$$\sigma_y := \inf\left\{t \geqslant 0 :\ Z(t) = y\right\}.$$

Очевидно, тогда $\tau_y \equiv \sigma_y$ для всех $\omega \in \left\{\tau_y < \infty\right\}$. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W \in B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W \in B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W \in \widetilde{B} \cap B\right)$$

$\forall B \in \mathscr{B}\left(\mathrm{C}[0,\, \infty)\right)$, $t \geqslant 0$, где

$$\widetilde{B} = \left\{f \in \mathrm{C}[0,\, \infty) :\ \sup_{s\in[0,\,t]} f(s) \geqslant y\right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, Z \in B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(Z \in \widetilde{B} \cap B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W \in \widetilde{B} \cap B\right)$$

по теореме 7.2. Таким образом, показали, что случайные элементы $\left(\tau_y,\, W\right)$ и $\left(\sigma_y,\, Z\right)$ имеют одинаковые распределения. Из этого следует, что $\forall x \in \mathbb{R},\, t, y \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y - x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, Z(t) < y - x\right).$$

В силу непрерывности траекторий W имеем $W\left(\tau_y(\omega),\, \omega\right) = y,\ y \geqslant 0$. Поэтому для $t \geqslant \sigma_y(\omega)$ по определению Z получаем, что

$$Z(t,\, \omega) \;=\; 2W\left(\tau_y(\omega),\, \omega\right) - W\left(t,\, \omega\right) = 2y - W(t,\, \omega).$$

Таким образом, при всех $y \geqslant 0$ получаем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y - x\right) \;&=\; \mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, Z(t) < y - x\right) \;= \\ &=\; \mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, W(t) > y + x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) > y + x\right).\end{aligned}$$

Тогда при $x \geqslant 0$ получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y - x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) > y + x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W(t) > y + x\right),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 89.

Теорема 7.4 (Башелье)**.** *Пусть* $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ *— винеровский процесс. Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W_s \geqslant y\right) \;=\; 2\,\mathsf{P}\left(W_t \geqslant y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(|W_t| \geqslant y\right).$$

Доказательство. Возьмем $x = 0$ в лемме 7.3. Тогда получим, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W(t) < y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W(t) > y\right).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y\right) \;=$$
$$= \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W(t) < y\right) + \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W(t) \geqslant y\right) \;=$$
$$= \mathsf{P}\left(W(t) > y\right) + \mathsf{P}\left(W(t) \geqslant y\right) = 2\,\mathsf{P}\left(W(t) \geqslant y\right),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 90.

8 Лекция от 05.04.17
Мартингалы

8.1 Мартингалы. Определения. Примеры

Определение 8.1. Действительный процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, называется *мартингалом* относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если выполнены три условия:

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathsf{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathsf{E}\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) \overset{\text{п.н.}}{=} X_s \;\; \forall\, s,\, t \in T,\; s \leqslant t$.

X называется *субмартингалом* относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathsf{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathsf{E}\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) \overset{\text{п.н.}}{\geqslant} X_s \;\; \forall\, s,\, t \in T,\; s \leqslant t$.

X называется *супермартингалом* относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathsf{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathsf{E}\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} X_s \;\; \forall\, s,\, t \in T,\; s \leqslant t$.

Замечание. Дальше будем также использовать для мартингала обозначение $(X_t,\, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$.

Пример 8.1. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — процесс с независимыми приращениями, $\mathscr{F}_t := \sigma\{X_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\}$, $t \in T$, — естественная фильтрация процесса. Тогда X — мартингал относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_s$ $\forall s,\, t \in T$, то есть $\mathsf{E}X_t = \mathrm{const}$.

Доказательство. Действительно, пусть X — мартингал, $s \leqslant t$. Тогда

$$\mathsf{E}\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) \;=\; \mathsf{E}\left(X_t - X_s + X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right) \;=\; \mathsf{E}\left(X_t - X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right) + \mathsf{E}\left(X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right).$$

Известны следующие свойства условного математического ожидания: во–первых, если случайная величина ξ независима с σ–алгеброй $\mathscr{F}$, то

$$\mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{F}\right) \;=\; \mathsf{E}\xi;$$

во–вторых, если случайная величина η измерима относительно σ–алгебры $\mathscr{F}$, то

$$\mathsf{E}\left(\eta \,|\, \mathscr{F}\right) \;=\; \eta.$$

Воспользуемся в силу независимости приращений этими свойствами с $\xi = X_s$ и $\eta = X_t - X_s$:

$$\mathsf{E}\left(X_t - X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right) + \mathsf{E}\left(X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right) \;=\; \mathsf{E}X_t - \mathsf{E}X_s + X_s \;=\; X_s$$

по условию 3. Из этого и получаем, что $\forall\, t,\, s \in T$

$$\mathsf{E}X_t \;=\; \mathsf{E}X_s.$$

Для доказательства утверждения в обратную сторону достаточно провести то же рассуждение в обратном порядке. □

Следствие. *Винеровский процесс* $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ *— мартингал относительно естественной фильтрации, поскольку* $\mathsf{E}W_t \equiv 0$.
Пуассоновский процесс интенсивности λ $N = \{N_t,\, t \geqslant 0\}$ *не является мартингалом относительно естественной фильтрации, поскольку* $\mathsf{E}N_t = \lambda t \neq \mathrm{const}$. *Однако процесс* $\{N_t - \mathsf{E}N_t,\, t \geqslant 0\}$ *является мартингалом относительно естественной фильтрации.*

Замечание. Если X — мартингал относительно какой-то фильтрации, то он заведомо является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса.

Пример 8.2. Пусть $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что $\mathsf{E}|\xi_k| < \infty \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Построим по ним процесс $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $(S_n)_{n\geqslant 1}$ — мартингал относительно естественной фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ процесса S (которая совпадает с естественной фильтрацией последовательности $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$) $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}\xi_2 = \mathsf{E}\xi_3 = \ldots = 0$ (при этом $\mathsf{E}\xi_1$, вообще говоря, может быть любым). Если величины ξ_k при этом еще и одинаково распределены, то тогда и $\mathsf{E}\xi_1$ обязано равняться нулю.

Пример 8.3 (мартингал Леви)**.** Пусть $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$, — фильтрация, ξ — случайная величина, $\mathsf{E}|\xi| < \infty$. Тогда

$$X_t \;:=\; \mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right),\, t \in T, \;\text{— мартингал относительно}\; (\mathscr{F}_t)_{t\in T}.$$

Доказательство. Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по определению условного матожидания;
2. $\mathsf{E}\,|X_t| < \infty$, так как

$$\mathsf{E}\left(\left|\mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right)\right|\right) \;\leqslant\; \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(|\xi| \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right)\right) = \mathsf{E}|\xi| < \infty;$$

3. $\mathsf{E}\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = X_s$ по телескопическому свойству условного матожидания
$$\mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{A}_1\right) \,\Big|\, \mathscr{A}_2\Big) \;=\; \mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{A}_2\right) \;\; \forall\, \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{F},$$
примененному к $\mathscr{A}_2 = \mathscr{F}_s$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{F}_t$.

□

Пример 8.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины, $\mathsf{E}\xi_k = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Построим по ним процесс $X_n := \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$. Тогда $(X_n)_{n\geqslant 1}$ — мартингал относительно естественной фильтрации (как и в примере 8.2, в этом случае $\mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$).

Доказательство. Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по определению $\mathscr{F}_t$;
2. $\mathsf{E}|X_t| \;=\; 1 \;<\; \infty$;
3. $\mathsf{E}\left(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_s \cdot \ldots \cdot \xi_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_s\, \mathsf{E}\left(\xi_{s+1} \cdot \ldots \cdot \xi_t\right) = \;=\; \xi_1 \cdot \ldots \xi_s \;=\; X_s$.

□

8.2 Разложение Дуба

Определение 8.2. Процесс $A = \{A_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *предсказуемым*, если A_n измерим относительно $\mathscr{F}_{n-1}$ $\forall n \geqslant 0$. Здесь полагаем $\mathscr{F}_{-1} := \big\{\emptyset, \Omega\big\}$.

Теорема 8.1 (Дуба). *Пусть $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — случайный процесс такой, что $\mathsf{E}\,|X_n| < \infty$ $\forall n$, $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, причем $X_n \in \mathscr{F}_n \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*
$$X \;=\; M + A,$$
то есть
$$X_n \;=\; M_n + A_n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$
где

$M = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — *мартингал относительно фильтрации* $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$,
$A = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — *предсказуемый процесс такой, что* $A_0 \equiv 0$.

Это представление процесса X в виде суммы мартингала и предсказуемого процесса однозначно почти наверное.

Доказательство. Теорема утверждает существование и единственность (почти наверное) такого разложения. Сначала предположим, что существование доказано, и выведем единственность.
Положим $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$. Тогда $\Delta X_n = \Delta M_n + \Delta A_n$, то есть $\Delta A_n = \Delta X_n - \Delta M_n$. Из предсказуемости процесса A получаем, что
$$\Delta A_n \;=\; \mathsf{E}\left(\Delta A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \;=\; \mathsf{E}\left(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) - \mathsf{E}\left(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right),$$
при этом
$$\mathsf{E}\left(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \;=\; \mathsf{E}\left(M_n - M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \;=\; \mathsf{E}\left(M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) - M_{n-1} \;=\; 0$$

по свойству 3. из определения мартингала. Таким образом, получаем, что

$$\Delta A_n = \mathsf{E}\left(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right),$$

из чего вытекает, что

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right),$$

то есть A_n определяется по X однозначно (почти наверное, как и вообще равенство случайных величин); тогда и $M_n = X_n - A_n$ тоже определяется однозначно по X, то есть разложение единственно.
Теперь докажем существование. Рассуждение выше подсказывает нам явный вид A_n. Положим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right), \; n \geqslant 1; \;\; A_0 \equiv 0.$$

Тогда $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — предсказуемый процесс. Тогда

$$M_n := X_n - A_n \;\Rightarrow\; \Delta M_n := \Delta X_n - \Delta A_n = \Delta X_n - \mathsf{E}\left(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right),$$

из чего получаем, что

$$\mathsf{E}\left(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) = 0,$$

то есть $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Теорема доказана. □

Замечание. Несмотря на то что все равенства случайных величин в теореме 8.1 считаются равенствами почти наверное, в формулировке теоремы A_0 полагается тождественно равным нулю. Это делается, чтобы обеспечить измеримость A_0 относительно антидискретной σ–алгебры $\mathscr{F}_{-1}$. Если договориться, что все σ–алгебры пополняются классом нулевых событий, то можно считать, что $A_0 = 0$ почти наверное.
При этом если $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ — мартингал, то и $\left(X_t, \bar{\mathscr{F}}_t\right)_{t\in T}$ — мартингал, где $\bar{\mathscr{F}}_t$ — σ–алгебра $\mathscr{F}_t$, пополненная классом нулевых событий.

8.3 Формула Танаки

Лемма 8.2. *Пусть $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция. Тогда*

$$\left(h\left(X_n\right), \mathscr{F}_n\right)_{n\in\mathbb{Z}_+} \; - \; \textit{субмартингал.}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Йенсена для условного матожидания:

$$\mathsf{E}\Big(h\left(X_n\right) \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\Big) \geqslant h\Big(\mathsf{E}\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\Big) = h\left(X_{n-1}\right).$$

□

Пример 8.5 (формула Танаки)**.** Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathsf{P}(\varepsilon_k = -1) = \mathsf{P}(\varepsilon_k = 1) = 1/2$. Построим по ним процесс $S_n := \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 := 0$. Тогда из примера 8.1 следует, что $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал, а из леммы 8.2 следует, что $\big(|S_n|\big)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — субмартингал относительно фильтрации, состоящей из σ–алгебр вида $\mathscr{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$.
Найдем разложение Дуба для этого субмартингала, подходящего под условия теоремы 8.1.
Знаем из 8.1, что

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right), \quad X_k = |S_k|,$$

то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\Big(|S_k| - |S_{k-1}| \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathsf{E}\Big(|S_k| \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) - |S_{k-1}|\Big).$$

Рассмотрим первое слагаемое члена суммы, зная, что S_{k-1} $\mathscr{F}_{k-1}$–измеримо, что ε_k независимо с $\mathscr{F}_{k-1}$ и что $\mathsf{E}\varepsilon_k = 0$, $|\varepsilon| = 1$ почти наверное:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big(|S_k| \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) &= \mathsf{E}\Big(|S_{k-1} + \varepsilon_k| \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) = \\
&= \mathsf{E}\Big(|S_{k-1} + \varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + |S_{k-1} + \varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} + \\
&+ |S_{k-1} + \varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) = \mathsf{E}\Big((S_{k-1} + \varepsilon_k)\,\mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) + \\
&+ \mathsf{E}\Big(|\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) - \mathsf{E}\Big((S_{k-1} + \varepsilon_k)\,\mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) = \\
&= \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\}\,\mathsf{E}\Big((S_{k-1} + \varepsilon_k) \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - \\
&- \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}\,\mathsf{E}\Big((S_{k-1} + \varepsilon_k) \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) = \\
&= S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.
\end{aligned}$$

Итак, получили, что

$$\mathsf{E}\Big(|S_k| \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) = S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.$$

Заметим, что

$$|S_{k-1}| = S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.$$

Из двух равенств выше получаем, что

$$\mathsf{E}\Big(|S_k| \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) - |S_{k-1}| = \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\},$$

то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}.$$

Рассмотрим M_n (напомним, что $S_0 \equiv 0$):

$$
\begin{aligned}
M_n \;=\; X_n - A_n \;=\; \sum_{k=1}^{n}\big(|S_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}\big) \;= \\
= \sum_{k=1}^{n}\big(|S_{k-1}+\varepsilon_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}\big) \;= \\
= \sum_{k=1}^{n}\big(\varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} - \varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\} + |\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} - \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}\big) = \\
= \sum_{k=1}^{n}\big(\varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} - \varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \operatorname{sign} S_{k-1},
\end{aligned}
$$

где

$$
\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}
$$

Таким образом, получили, что

$$
\underbrace{|S_n|}_{X_n} \;=\; \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k \operatorname{sign} S_{k-1}}_{M_n}.
$$

Это разложение Дуба и называется **формулой Танаки**.

Следствие. *Обозначим через* $\mathrm{L}_n(0)$ *число нулей последовательности* $(S_k)_{0\leqslant k<n}$. *Из формулы выше явно видно, что* $\mathrm{L}_n(0) = A_n$. *Верно следующее утверждение:*

$$
\mathsf{E}\mathrm{L}_n(0) \;\sim\; \sqrt{\frac{2}{\pi}\,n}, \quad n\to\infty.
$$

Доказательство. Так как $\mathsf{E}M_n = 0\ \forall n$, то $\mathsf{E}A_n = \mathsf{E}\,|S_n|$. Поскольку $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, то

$$
\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} Y \sim \mathcal{N}(0,\,1), \quad n\to\infty
$$

по центральной предельной теореме. Тогда

$$
\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} |Y|\,.
$$

Как было показано в теореме 3.3,

$$
\xi_n \xrightarrow{\text{law}} \xi \;\not\Rightarrow\; \mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi, \quad n\to\infty.
$$

Согласно теоремам 3.4 и 3.5, для того чтобы показать сходимость матожиданий, достаточно найти $\delta>0$ такое, что

$$
\sup_n \mathsf{E}\,|\xi_n|^{1+\delta} < \infty.
$$

Возьмем $\delta = 1$. Тогда

$$
\mathsf{E}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 \;=\; \mathsf{E}\,\frac{S_n^2}{n} \;=\; \frac{\mathsf{D}S_n}{n} \;=\; \frac{n\mathsf{D}\varepsilon_1}{n} \;=\; 1 \;<\; \infty.
$$

Тогда

$$\mathsf{E}\,\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \;\to\; \mathsf{E}\,|Y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\;\; n\to\infty,$$

то есть

$$\mathsf{E}\mathrm{L}_n(0) \;\to\; \sqrt{\frac{2}{\pi}\,n},$$

что и требовалось доказать. □

8.4 Теорема Дуба об остановке

Теорема 8.3. *Пусть X_n измерима относительно $\mathscr{F}_n$ $\forall n$, $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, $\mathsf{E}\,|X_n| < \infty$ $\forall n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$(X_n,\,\mathscr{F}_n)$ — мартингал;*
2. *$\forall$ марковских моментов $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant m$, где $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число,*

$$\mathsf{E}\left(X_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_\sigma\right) \;=\; X_\sigma.$$

Доказательство. Докажем 1. $\Rightarrow$ 2.
Пусть $X = \{X_n,\, n\in\mathbb{Z}_+\}$ — мартингал. Заметим, что

$$\mathsf{E}\,|X_\tau| \;=\; \mathsf{E}\sum_{k=0}^{m}|X_\tau|\,\mathbb{I}\{\tau = k\} \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{m}\mathsf{E}\,|X_k| \;<\; \infty,$$

поэтому вообще целесообразно говорить о матожидании из утверждения 2.
Для того чтобы доказать, что $\mathsf{E}\left(X_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_\sigma\right) = X_\sigma$, необходимо и достаточно проверить, что X_σ — $\mathscr{F}_\sigma$–измеримая случайная величина, а также что $\forall A \in \in \mathscr{F}_\sigma$

$$\mathsf{E}X_\tau\mathbb{I}\,(A) \;=\; \mathsf{E}X_\sigma\mathbb{I}\,(A)\,,$$

то есть что выполнено интегральное свойство.
Покажем $\mathscr{F}_\sigma$–**измеримость** X_σ. Для этого по определению $\mathscr{F}_\sigma$ нужно показать, что $\forall$ борелевских B и $\forall k$

$$\{X_\sigma \in B\}\cap\{\sigma \leqslant k\} \in \mathscr{F}_k.$$

Заметим, что

$$\{X_\sigma \in B\}\cap\{\sigma \leqslant k\} \;=\; \bigcup_{r=0}^{m}\{X_\sigma \in B\}\cap\{\sigma = r\}\cap\{\sigma \leqslant k\} \;=$$

$$=\; \bigcup_{r=0}^{\min(m,\,k)}\{X_r \in B\}\cap\{\sigma = r\}\,.$$

При этом $\{X_r \in B\} \in \mathscr{F}_r$ и $\{\sigma = r\} \in \mathscr{F}_r$, поскольку σ — марковский момент. Тогда, поскольку $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — фильтрация,

$$\{X_r \in B\}\cap\{\sigma = r\} \in \mathscr{F}_r \subset \mathscr{F}_{\min(m,\,k)} \subset \mathscr{F}_k.$$

Измеримость доказана.
Проверим **интегральное свойство**. Напомним, что для этого нужно доказать равенство
$$\mathsf{E}X_\tau \mathbb{I}(A) \;=\; \mathsf{E}X_\sigma \mathbb{I}(A)$$
$\forall A \in \mathscr{F}_\sigma$. Сначала заметим, что, поскольку $\sigma \leqslant \tau$ почти наверное,
$$\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\} \overset{\text{п.н.}}{=} 1.$$
Тогда
$$\mathsf{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \;=\; \mathsf{E}X_\sigma \,\mathbb{I}_A \,\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\sigma \,\mathbb{I}_A \,\mathbb{I}\{\sigma = k\}\,\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\}.$$
Обозначим $\mathbb{I}_A \,\mathbb{I}\{\sigma = k\} \;=\; \mathbb{I}_{A\cap\{\sigma=k\}} \;=\; \mathbb{I}_{B_k}$. Тогда
$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\sigma \,\mathbb{I}_A \,\mathbb{I}\{\sigma = k\}\,\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \left(\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\right) \;=$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}.$$
Поскольку X — мартингал, то
$$\mathsf{E}\Big(X_{k+1} \,\Big|\, \mathscr{F}_k\Big) \;=\; X_k.$$
Тогда продолжим цепочку равенств:
$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\} \;=$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\Big(X_{k+1} \,\Big|\, \mathscr{F}_k\Big)\,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\right].$$
Поскольку $\{\tau \geqslant k+1\} \;=\; \Omega \setminus \{\tau \leqslant k\} \in \mathscr{F}_k$, так как τ — марковский момент, и $B_k \in \mathscr{F}_k$, то
$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\Big(X_{k+1} \,\Big|\, \mathscr{F}_k\Big)\,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\right] \;=$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\tau \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\Big(X_{k+1}\,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\} \,\Big|\, \mathscr{F}_k\Big)\right] \;=$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\tau \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\left(X_{k+1}\,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\right).$$
Таким образом, получили, что
$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\tau \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_{k+1} \,\mathbb{I}_{B_k} \,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}.$$

Продолжая далее, расписывая $\{\tau \geqslant k+1\} = \{\tau = k+1\} + \{\tau \geqslant k+2\}$ и так далее, получаем, что

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_k \, \mathbb{I}_{B_k} \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_k \, \mathbb{I}_{B_k} \big(\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau = k+1\} + \ldots + \mathbb{I}\{\tau = m\}\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_{B_k} \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} = \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} =$$

$$= \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_A \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant \sigma\} = \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_A,$$

поскольку, как указывалось выше, $\mathbb{I}\{\tau \geqslant \sigma\} = 1$. Таким образом, интегральное свойство доказано, а значит, доказано 1. $\Rightarrow$ 2.
Докажем 1. $\Leftarrow$ 2.
Пусть известно, что $\forall$ моментов остановки $\sigma \leqslant \tau \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{E}\left(X_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_\sigma\right) = X_\sigma,$$

и нужно доказать, что $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Проверим свойство 3.: возьмем $i < j$, $\sigma \equiv i$, $\tau \equiv j$. Тогда $\mathscr{F}_\sigma \equiv \equiv \mathscr{F}_i$, $\mathscr{F}_\tau \equiv \mathscr{F}_j$, а значит, $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Пусть $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{N}\}$ — мартингал. Тогда для любого ограниченного марковского момента $\tau \leqslant m \in \mathbb{N}$*

$$\mathsf{E} X_\tau = \mathsf{E} X_0,$$

поскольку 0 — ограниченный марковский момент, $0 \leqslant \tau$.

Следствие. *Пусть $\left|X_{\min(\tau,\, n)}\right| \leqslant C$ $\forall n \geqslant 0$ и τ — момент остановки. Тогда*

$$\mathsf{E} X_\tau = \mathsf{E} X_0.$$

Доказательство. Заметим, что $\tau_n := \min(\tau, n)$ — это ограниченный марковский момент. Значит, для него и нуля применима теорема 8.3 и, следовательно,

$$\mathsf{E} X_{\tau_n} = \mathsf{E} X_0.$$

Заметим также, что $X_{\tau_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\tau$, поскольку для каждой реализации процесса (то есть для каждой $\omega \in \Omega$) найдется достаточно большое n такое, что $n > \tau(\omega)$ и что, следовательно, $\min\big(n,\, \tau(\omega)\big) = \tau(\omega)$. При этом по условию $\left|X_{\min(\tau,\, n)}\right| \leqslant C$ $\forall n \geqslant 0$. Поэтому применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости, по которой

$$\mathsf{E} X_0 = \mathsf{E} X_{\tau_n} \to \mathsf{E} X_\tau,\ n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 8.4 (первое тождество Вальда)**.** *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$, τ — *марковский момент относительно естественной фильтрации* $\mathscr{F}_n = \sigma\,\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\mathsf{E}\tau < \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i\right) = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\tau.$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\}.$$

Заметим, что

$$\{\tau \geqslant k\} = \Omega \setminus \{\tau \leqslant k-1\} \in \mathscr{F}_{k-1}.$$

Поэтому, поскольку ξ_i — независимые случайные величины, ξ_k независима с $\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\}$. Тогда

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i\right) = \mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\xi_k\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\xi_k\mathsf{E}\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} =$$
$$= \mathsf{E}\xi_1\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} = \mathsf{E}\xi_1\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\,(\tau \geqslant k)\,.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\,(\tau \geqslant k) = \sum_{p=1}^{\infty}p\ \mathsf{P}\{\tau = p\},$$

то есть

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i\right) = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\tau,$$

что и требовалось доказать. □

9 Лекция от 12.04.17

Марковские процессы

9.1 Задача о разорении игрока

Пример 9.1 (задача о разорении игрока)**.** Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{P}\,(\xi_1 = 1) = p$, $\mathsf{P}\,(\xi_1 = -1) = 1 - p =: q$. Возьмем целые числа x, a, b такие, что $a < b$, $x \in (a, b)$. Положим

$$S_0 := x,$$
$$S_n := x + \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Введем также

$$\tau_a := \inf\{n : S_n = a\},$$

$$
\begin{aligned}
\tau_b &:= \inf\{n : S_n = b\},\\
\tau &:= \inf\{n : S_n \notin (a,\, b)\}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что все они являются марковскими моментами относительно естественной фильтрации процесса $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где $\mathscr{F}_n := \sigma\{\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n\}$, $n \geqslant 1$, а $\mathscr{F}_0 := \big\{\emptyset,\, \Omega\big\}$. Также отметим, что τ — это момент остановки (это следует из обязательной задачи 1.1).

Задача состоит в том, чтобы найти $\mathsf{P}\,(\tau_a < \tau_b)$.

Рассмотрим сначала отдельно (являющийся особым) случай $p = q = 1/2$. Сразу отметим, что в этом случае $(S_n,\, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал, поскольку это процесс с независимыми приращениями и постоянным матожиданием. Заметим, что

$$
|S_{\tau_n}| := \left|S_{\min(\tau,\, n)}\right| \leqslant \max\big(|a|,\, |b|\big)\,,
$$

поскольку либо момент τ первого выхода на границу интервала $(a,\, b)$ наступил до n, и тогда неравенство верно, либо не наступил, тогда верно даже строгое неравенство (потому что все еще находимся внутри интервала). Это означает, что можно применить следствие 2 из теоремы 8.3 и сказать, что

$$
\mathsf{E}S_\tau \;=\; \mathsf{E}S_0 \;=\; x.
$$

При этом

$$
\mathsf{E}S_\tau \;=\; a\,\mathsf{P}\,(S_\tau = a) + b\,\mathsf{P}\,(S_\tau = b)\,.
$$

Поскольку τ — момент (первого) выхода на границу интервала $(a,\, b)$, то $\mathsf{P}\,(S_\tau = a) + \mathsf{P}\,(S_\tau = b) = 1$. Таким образом,

$$
x \;=\; a\,\mathsf{P}\,(S_\tau = a) + b\,\big(1 - \mathsf{P}\,(S_\tau = a)\big)\,,
$$

то есть

$$
\mathsf{P}\,(\tau_a < \tau_b) \;=\; \mathsf{P}\,(S_\tau = a) \;=\; \frac{b-x}{b-a}\,.
$$

Теперь рассмотрим случай $p \neq q$.

Положим

$$
X_n \;:=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n},\; n \in \mathbb{Z}_+.
$$

Тогда $(X_n,\, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Действительно, проверим три свойства из определения мартингала:

1. X_n измерим относительно $\mathscr{F}_n$;
2. $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, так как

$$
\mathsf{E}|X_n| \;=\; \sum_{k=x-n}^{x+n} \left|\frac{q}{p}\right|^k \mathsf{P}\,(S_n = k)\,;
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(X_{n+1}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right) \;&=\; \mathsf{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{x+\xi_1+\ldots+\xi_n+\xi_{n+1}}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right) \;=\\
&=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \mathsf{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q}\right) \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \;=\; X_n.
\end{aligned}
$$

Таким образом, показали, что это мартингал. При этом

$$|X_n| \leqslant \max\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a, \left(\frac{q}{p}\right)^b\right).$$

Тогда, как и выше, применимо следствие 2 из теоремы 8.3 и, следовательно,

$$\mathsf{E}X_\tau \;=\; \mathsf{E}X_0 \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Вместе с этим

$$\mathsf{E}X_\tau \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathsf{P}\left(S_\tau = a\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathsf{P}\left(S_\tau = b\right)$$

и

$$\mathsf{P}\left(S_\tau = a\right) + \mathsf{P}\left(S_\tau = b\right) = 1,$$

то есть

$$\left(\frac{q}{p}\right)^a \mathsf{P}\left(S_\tau = a\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \Big(1 - \mathsf{P}\left(S_\tau = a\right)\Big) \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

или

$$\mathsf{P}\left(\tau_a < \tau_b\right) \;=\; \mathsf{P}\left(S_\tau = a\right) \;=\; \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

9.2 Марковские процессы

Определение 9.1. Введем σ–алгебру $\mathscr{F}_{\geqslant s} = \sigma\{X_u,\, u \geqslant s,\, u \in T\}$. Тогда процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, называется *марковским процессом*, если $\forall s \in T$ и $\forall B \in \mathscr{F}_{\geqslant s}$

$$\mathsf{P}\Big(B \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big) \;=\; \mathsf{P}\Big(B \,\Big|\, X_s\Big).$$

Замечание (эквивалентное определение 1). Пусть $X_t : \Omega \to S_t$, где $(S_t,\, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство борелевских пространств. Тогда процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$ является марковским процессом тогда и только тогда, когда для любых $s \leqslant t$, $s, t \in T$ и для любой $\mathscr{B}_t$–измеримой функции $f : S_t \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}\Big(f\left(X_t\right) \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\left(X_t\right) \,\Big|\, X_s\Big).$$

Доказательство. Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 184. □

Замечание (эквивалентное определение 2). Марковость относительно своей естественной фильтрации процесса $X = \{X_t,\, t \in T\}$, принимающего при каждом $t \in T$ значения в борелевском пространстве $(S_t,\, \mathscr{B}_t)$, равносильна следующему свойству: для любого $m \geqslant 1$ и всех $s_1 < \ldots < s_m < s \leqslant t$, где s, t и все s_i лежат в T, а также для произвольной ограниченной $\mathscr{B}_t$–измеримой функции f

$$\mathsf{E}\Big(f\left(X_t\right) \,\Big|\, X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\left(X_t\right) \,\Big|\, X_s\Big).$$

Последнее соотношение эквивалентно тому, что для любого множества $B \in \in \mathscr{B}_t$

$$\mathsf{P}\left(X_t \in B \,\middle|\, X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m},\, X_s\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X_t \in B \,\middle|\, X_s\right).$$

Доказательство. Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 185. □

Теорема 9.1. *Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда X — марковский процесс относительно своей естественной фильтрации.*

Доказательство. Будем показывать, что выполнены условия замечания выше. Возьмем $\forall\, s_1,\, \ldots,\, s_m \in T < t \in T\; \forall m \in \mathbb{N}$. Положим $\zeta_1 := X_{s_1}$, $\zeta_2 := = X_{s_2} - X_{s_1}$, $\ldots$, $\zeta_m := X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$, $\eta := X_t - X_{s_m}$. Тогда
$\sigma\{X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m}\} = \sigma\{\zeta_1,\, \ldots,\, \zeta_m\}$, поскольку связь линейна и невырождена. Следовательно,

$$\mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m}\right) \;=\; \mathsf{E}\left(f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta) \,\middle|\, \zeta_1,\, \ldots,\, \zeta_m\right).$$

Обозначим

$$\zeta \;:=\; (\zeta_1,\, \ldots,\, \zeta_m); \quad g(\zeta,\, \eta) \;:=\; f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta).$$

Тогда ζ и η независимы, g — борелевская функция и

$$\mathsf{E}\left(f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta) \,\middle|\, \zeta_1 = x_1,\, \ldots,\, \zeta_m = x_m\right) \;=\; \mathsf{E}\left(g(\zeta,\, \eta) \,\middle|\, \zeta = x\right) \;= \\ =\; \mathsf{E}g(x,\, \eta),$$

поскольку ζ и η независимы. Обозначим

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \;:=\; \mathsf{E}f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i + \eta\right).$$

Тогда для любой ограниченной измеримой функции f φ — измеримая ограниченная функция (это нуждается в дополнительном доказательстве). Таким образом,

$$\mathsf{E}\left(f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta) \,\middle|\, \zeta_1 = x_1,\, \ldots,\, \zeta_m = x_m\right) \;=\; \varphi(x),$$

то есть

$$\mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m}\right) \;=\; \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \zeta_i\right).$$

Заметим тогда, что по телескопическому свойству условного матожидания

$$\mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, X_{s_m}\right) \;=\; \mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \zeta_i\right) \;=$$

$$= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(f(X_t)\,\Big|\,\zeta_1, \ldots, \zeta_m\right)\,\Big|\,\sum_{i=1}^m \zeta_i\right) = \mathsf{E}\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i\right)\,\Big|\,\sum_{i=1}^m \zeta_i\right) =$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i\right) = \mathsf{E}\left(f(X_t)\,\Big|\,X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\right),$$

то есть

$$\mathsf{E}\left(f(X_t)\,\Big|\,X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\right) = \mathsf{E}\left(f(X_t)\,\Big|\,X_{s_m}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие. *Случайное блуждание, пуассоновский процесс и винеровский процесс являются марковскими процессами.*

Определение 9.2. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — марковский процесс, при этом $X_t : \Omega \to S$, S конечно или счетно. Тогда X называется *марковской цепью.*

Замечание. В данном случае будем отождествлять каждый элемент S с его номером.

Замечание. Если $X_t : \Omega \to S$, где S конечно или счетно, то определение марковости можно переписать в следующей эквивалентной формулировке: $\forall m\, \forall\, s_1 < \ldots < s_m < t,\ s_i,\, t \in T,\ \forall\, i_1, \ldots, i_m,\, j \in S$

$$\mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m\right) = \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_{s_m} = i_m\right)$$

при условии, что

$$\mathsf{P}\left(X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m\right) \neq 0.$$

9.3 Свойства переходных вероятностей

Определение 9.3. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — марковский процесс, причем $X_t : \Omega \to S$. Обозначним

$$\mathbb{S}_t := \left\{i : \mathsf{P}(X_t = i) \neq 0\right\}.$$

Введем для $s \leqslant t$, $i \in \mathbb{S}_s$, $j \in \mathbb{S}_t$

$$\mathrm{p}_{ij}(s, t) := \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_s = i\right).$$

Число $\mathrm{p}_{ij}(s, t)$ называется *переходной вероятностью* (из i в момент s в j в момент t).

Теорема 9.2 (свойства переходных вероятностей)**.** *Если X — марковская цепь, то $\mathrm{p}_{ij}(s, t)$ обладают следующими свойствами:*

1. $\mathrm{p}_{ij}(s, t) \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{j \in \mathbb{S}_t} \mathrm{p}_{ij}(s, t) = 1$;
3. $\mathrm{p}_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$;

4. $\forall\, s < u < t\; \mathrm{p}_{ij}(s,\,t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{S}_u} \mathrm{p}_{ik}(s,\,u)\,\mathrm{p}_{kj}(u,\,t)$.

Доказательство. Проверим свойства.

1. Следует из определения: вероятности неотрицательны.
2. Следует из формулы полной вероятности.
3. Следует из определения.
4. По определению

$$\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) \;=\; \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_s = i\right) \;=\; \frac{\mathsf{P}\left(X_t = j,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;=$$

$$= \sum_{k \in S} \frac{\mathsf{P}\left(X_t = j,\, X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;=$$

$$= \sum_{k:\, \mathsf{P}(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k,\, X_s = i\right) \frac{\mathsf{P}\left(X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)}$$

Поскольку X — марковская цепь, то

$$\mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k,\, X_s = i\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k\right).$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\sum_{k:\, \mathsf{P}(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k,\, X_s = i\right) \frac{\mathsf{P}\left(X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;=$$

$$= \sum_{k:\, \mathsf{P}(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k\right) \frac{\mathsf{P}\left(X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;=$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k\right) \mathsf{P}\left(X_u = k \,\middle|\, X_s = i\right) \;=$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} \mathrm{p}_{ik}(s,\,u)\,\mathrm{p}_{kj}(u,\,t).$$

$\square$

Замечание (доопределение переходных вероятностей). В определении 9.3 переходные вероятности $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t)$ вводились не для всех возможных состояний $i,\,j \in S$, а только для $i \in \mathbb{S}_s$, $j \in \mathbb{S}_t$. Доопределим для всех $i,\,j \in S$, $s < t \in T$ следующим образом:

1. если $i \in \mathbb{S}_s$, $j \notin \mathbb{S}_t$, то $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) := 0$;
2. если $i \notin \mathbb{S}_s$, то выбираем и фиксируем произвольное $i_0 = i_0(s) \in \mathbb{S}_s$ и определяем $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) := \mathrm{p}_{i_0 j}(s,\,t)$.

В случае $s = t$ по определению полагаем $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) := \delta_{ij}$.
Тогда для так определенных переходных вероятностей выполнены свойства 1.–4. из теоремы 9.2.

Теорема 9.3. *Конечномерные распределения цепи Маркова* $X = \{X_t,\, t \in T\}$, *где* $0 \in T \subset [0,\,\infty)$, *однозначно определяются начальным распределением* $\mathsf{P}\left(X_0 = i\right)$ *и переходными вероятностями* $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t)$.

Доказательство. Действительно, возьмем $\forall\, t_1 < \ldots < t_n$ и $i_1,\, \ldots,\, i_n \in S$. Тогда запишем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_n} = i_n\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(X_{t_n} = i_n \,\middle|\, X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(X_{t_n} = i_n \,\middle|\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right),
\end{aligned}$$

поскольку X — марковская цепь. Продолжаем таким же образом далее и получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_n}\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(X_{t_n} = i_n \,\middle|\, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \ldots \mathsf{P}\left(X_{t_2} = i_2 \,\middle|\, X_{t_1} = i_1\right) \mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1\right) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1\right) \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_1,\, t_2) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1},\, t_n).
\end{aligned}$$

Вместе с этим

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1\right) &= \sum_{k \in S} \mathsf{P}\left(X_{t_1} = i_1 \,\middle|\, X_0 = k\right) \mathsf{P}\left(X_0 = k\right) = \\
&= \sum_{k \in S} \mathrm{p}_{k i_1}(0,\, t_1)\, \mathsf{P}\left(X_0 = k\right),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

10 Лекция от 19.04.17

Свойства марковских процессов

10.1 Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний

Определение 10.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Введем

$$\mathrm{p}_{ij}^{(n)} := \mathsf{P}\left(X_{n+1} = j \,\middle|\, X_n = i\right).$$

Замечание. Тогда $\mathrm{p}_{ij}^{(n)} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j \in S} \mathrm{p}_{ij}^{(n)} = 1$. Аналогично рассуждению в теореме 9.3 получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X_n = i_n,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, \ldots,\, X_0 = i_0\right) = \\
&\quad = \mathsf{P}\left(X_0 = i_0\right) \mathrm{p}_{i_0 i_1}(0,\, 1) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(n-1,\, n) = \mathrm{p}_{i_0}(0)\, \mathrm{p}_{i_0 i_1}^{(0)} \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}^{(n-1)},
\end{aligned}$$

то есть вероятность цепочки состояний определяется начальным распределением и переходными вероятностями за единицу времени.

Лемма 10.1. *Пусть $X_0, U_1, U_2, \ldots$ — независимые случайные величины, $X_0 : \Omega \to S$, U_i равномерно распределены на $[0,\, 1]$, $i \in \mathbb{N}$. Введем*

$$X_{n+1} := h_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

где h_n — измеримая функция. Тогда $X_0, X_1, \ldots$ — цепь Маркова.

Доказательство. Проверим, что

$$\mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_0,\,\ldots,\,X_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_n\Big)$$

для любой ограниченной измеримой функции f. Заметим, что по определению X_{n+1}

$$\mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_0,\,\ldots,\,X_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\,\big(h_n\,(X_n,\,U_{n+1})\big)\;\big|\,X_0,\,\ldots,\,X_n\Big).$$

Поскольку для любых независимых случайных величин ξ и η и любой измеримой функции g

$$\mathsf{E}\Big(g\,(\xi,\,\eta)\;\big|\,\xi = x\Big) \;=\; \mathsf{E}g\,(x,\,\eta)$$

и поскольку по построению $X_n = H_n\,(X_0,\,U_1,\,\ldots,\,U_n)$ независим с U_{n+1}, где H_k — измеримая функция, то

$$\mathsf{E}\Big(f\,\big(h_n\,(X_n,\,U_{n+1})\big)\;\big|\,X_0 = x_0,\,\ldots,\,X_n = x_n\Big) \;=\; \mathsf{E}f\,\big(h_n\,(x_n,\,U_{n+1})\big)\,.$$

По той же самой причине

$$\mathsf{E}\Big(f\,\big(h_n\,(X_n,\,U_{n+1})\big)\;\big|\,X_n = x_n\Big) \;=\; \mathsf{E}f\,\big(h_n\,(x_n,\,U_{n+1})\big)\,.$$

Таким образом, доказали, что

$$\mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_0 = x_0,\,\ldots,\,X_n = x_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_n = x_n\Big),$$

что эквивалентно тому, что

$$\mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_0,\,\ldots,\,X_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\,(X_{n+1})\;\big|\,X_n\Big).$$

Лемма доказана. $\square$

Пример 10.1 (модель марковской цепи)**.** Как выбрать h_n так, чтобы построенная марковская цепь имела заданное начальное распределение $\mathrm{p}_i(0)$ и заданные переходные вероятности $\mathrm{p}_{ij}^{(n)}$?
Для начального распределения $\mathrm{p}_i(0)$, $i \in S$, $\#S = N$, рассмотрим следующее разбиение отрезка $[0,\,1]$:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \big[0,\,\mathrm{p}_1(0)\big)\,,\\
\Delta_2 &:= \big[\mathrm{p}_1(0),\,\mathrm{p}_1(0) + \mathrm{p}_2(0)\big)\,,\\
&\;\;\vdots\\
\Delta_N &:= \big[\mathrm{p}_1(0) + \ldots + p_{N-1}(0),\,1\big]\,.
\end{aligned}$$

Определим для $x \in [0,\,1]$ $f(x) := k$, если $x \in \Delta_k$. Положим

$$X_0 \;:=\; f\,(U_0)\,.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\,(X_0 = i) \;=\; \mathsf{P}\,\big(f\,(U_0) = i\big) \;=\; \mathsf{P}\,(U_0 \in \Delta_i) \;=\; |\Delta_i| \;=\; \mathrm{p}_i(0).$$

Для переходных вероятностей $\mathrm{p}_{ij}^{(n)}$ рассмотрим аналогичное разбиение отрезка $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}\Delta_{i1}^{(n)} &:= \left[0,\, \mathrm{p}_{i1}^{(n)}\right),\\ \Delta_{i2}^{(n)} &:= \left[\mathrm{p}_{i1}^{(n)},\, \mathrm{p}_{i1}^{(n)} + \mathrm{p}_{i2}^{(n)}\right),\\ &\ \vdots\\ \Delta_{iN}^{(n)} &:= \left[\mathrm{p}_{i1}^{(n)} + \ldots + \mathrm{p}_{i(N-1)}^{(n)},\, 1\right].\end{aligned}$$

Снова определим для $x \in [0, 1]$ $g_n(i, x) := j$, если $x \in \Delta_{ij}^{(n)}$. Положим

$$X_{n+1} := g_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда по лемме 10.1 $X_0, X_1, \ldots$ — марковская цепь с пространством состояний S, причем $\mathsf{P}\left(X_0 = i\right) = \mathrm{p}_i(0)$, $i \in S$, то есть начальное распределение получилось именно таким, каким мы его хотели. То же самое верно и для переходных вероятностей: поскольку по построению X_n независим с U_{n+1}, то

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left(X_{n+1} = j \,\middle|\, X_n = i\right) = \mathsf{P}\left(g_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right) = j \,\middle|\, X_n = i\right) =\\ &\quad = \mathsf{P}\left(g_n\left(i,\, U_{n+1}\right)\right) = \mathsf{P}\left(U_{n+1} \in g_n^{-1}\left(i,\, \{j\}\right)\right) = \left|\Delta_{ij}^{(n)}\right| = \mathrm{p}_{ij}^{(n)}\end{aligned}$$

по построению. Таким образом, для любых наперед заданных переходных вероятностей и начального распределения смогли в явном виде предъявить цепь Маркова, соответствующую им.

Замечание. Фактически это означает, что все цепи Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний устроены именно так.

Замечание. Для компьютерного моделирования с помощью этого метода подходят только цепи Маркова с относительно малым числом N.

10.2 Предельное поведение переходных вероятностей

Определение 10.2. Марковская цепь $X = \{X_t,\, t \in T\}$ называется *однородной* (во времени), если

$$\mathrm{p}_{ij}(s,\, t) = \mathrm{p}_{ij}(s + h,\, t + h)$$

$\forall s < t,\ s, t, s+h, t+h \in T,\ \ \forall i, j \in S.$

Замечание. Это определение означает именно то, что переходные времени зависят только от длины промежутка времени, за который происходит переход, а не от его начала или конца. Поэтому вместо $\mathrm{p}_{ij}(s, t)$ для однородных цепей будем писать $\mathrm{p}_{ij}(t-s)$, $t > s$.
Так что дальше будем рассматривать $\mathrm{p}_{ij}(t)$, $i, j \in S$, $t \in T$.

Замечание (переформулировка свойств марковской цепи). Для однородной цепи переформулируем свойства марковской цепи из теоремы 9.2:

1. $\mathrm{p}_{ij}(t) \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{j\in S} \mathrm{p}_{ij}(t) = 1$;
3. $\mathrm{p}_{ij}(0) = \delta_{ij}$;
4. $\mathrm{p}_{ij}(s+t) = \sum\limits_{k\in S} \mathrm{p}_{ik}(s)\,\mathrm{p}_{kj}(t)$.

Определение 10.3. Введем для однородной марковской цепи матрицы

$$P(t) := \Big(\mathrm{p}_{ij}(t)\Big)_{i,\,j\in S}, \quad i,\,j \in S.$$

Замечание (определение стохастической полугруппы). Переформулируем для этих матриц свойства однородной марковской цепи:

1. элементы $P(t)$ неотрицательны;
2. $\sum\limits_{j\in S} P_{ij}(t) = 1$;
3. $P(0) = I$;
4. $P(s+t) = P(s)P(t)$.

Определение 10.4. Введем вектор–строку $p := \big(\mathrm{p}_1(0),\, \mathrm{p}_2(0),\, \ldots\big)$. Тогда, соответственно,

$$\mathsf{P}\,(X_t = j) = \big(p\,P(t)\big)_j = \sum_{i\in S} \mathrm{p}_i(0)\,\mathrm{p}_{ij}(t).$$

Распределение вероятностей, задаваемое вектором p, называется *стационарным*, если

$$p\,P(t) = p \;\; \forall t \in T.$$

Теорема 10.2 (эргодичности)**.** *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — однородная марковская цепь такая, что для некоторого $j_0 \in S$ и некоторых $h > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$*

$$\mathrm{p}_{ij_0}(h) \geqslant \varepsilon \;\; \forall i \in S.$$

Тогда существует и единственен вектор π, задающий стационарное распределение вероятностей, такой, что для любого начального распределения μ

$$\big\|\, \mu P(t) - \pi \,\big\|_{l_1} \leqslant 2\,(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сформулируем и докажем лемму.

Лемма 10.3. *Пусть выполнены условия теоремы и $\sum\limits_i \rho_i = 0$. Тогда*

$$\big\|\rho P(t)\big\|_{l_1} \leqslant \|\rho\|_{l_1}\,(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]}.$$

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции.
База индукции: пусть $t \in [0,\, h)$. Тогда $\big[t/h\big] = 0$. Вместе с этим

$$\big\|\rho P(t)\big\|_{l_1} = \sum_j \Big|\big(\rho P(t)\big)_j\Big| = \sum_j \left|\sum_i \rho_i \mathrm{p}_{ij}(t)\right| \leqslant \sum_j \sum_i |\rho_i|\,\big|\mathrm{p}_{ij}(t)\big| =$$

$$= \sum_i \sum_j |\rho_i| \, \mathrm{p}_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| \sum_j \mathrm{p}_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| = \|\rho\|_{l_1} = \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

где перемена порядка суммирования возможна в силу абсолютной сходимости ряда. Таким образом, для $t \in [0,\, h)$ лемма справедлива.
Индуктивный переход: пусть лемма верна для $t \in [0,\, mh)$, $m \in \mathbb{N}$; покажем, что она верна для $t \in \big[mh,\, (m+1)h\big)$. При таких t

$$\rho P(t) \;=\; \rho P(t-h) P(h).$$

Поскольку

$$\sum_j \big(\rho P(t-h)\big)_j \;=\; \sum_j \sum_i \rho_i \mathrm{p}_{ij}(t-h) \;=\; \sum_i \rho_i \sum_j \mathrm{p}_{ij}(t-h) \;=\; \sum_i \rho_i \;=\; 0,$$

то

$$\big(\rho P(t-h) P(h)\big)_j \;=\; \sum_i \big(\rho P(t-h)\big)_i \, \mathrm{p}_{ij}(h) \;=\; \sum_i \big(\rho P(t-h)\big)_i \big(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}\big)$$

(j_0 здесь берется из формулировки теоремы!). Тогда

$$\big\|\rho P(t)\big\|_{l_1} \;=\; \sum_j \Big|\big(\rho P(t-h)P(h)\big)_j\Big| \;=\; \sum_j \left| \sum_i \big(\rho P(t-h)\big)_i \big(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\big)\right| \;\leqslant\; \sum_j \sum_i \Big|\big(\rho P(t-h)\big)_i\Big| \, \big|\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\big| \,.$$

Заметим, что $\big(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\big) \geqslant 0$, поскольку $\mathrm{p}_{ij_0}(h) \geqslant \varepsilon$ по условию теоремы, так что модуль можно снять. Тогда

$$\sum_j \sum_i \Big|\big(\rho P(t-h)\big)_i\Big| \, \big|\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\big| \;=\; \sum_i \Big|\big(\rho P(t-h)\big)_i\Big| \sum_j \big(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\big) \;=\; \sum_i \Big|\big(\rho P(t-h)\big)_i\Big| (1-\varepsilon)\,.$$

При этом, поскольку $(t-h) < mh$, применимо предположение индукции, и поэтому

$$\sum_i \Big|\big(\rho P(t-h)\big)_i\Big| (1-\varepsilon) \;\leqslant\; \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t-h}{h}\right]} (1-\varepsilon) \;=\; \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

то есть

$$\big\|\rho P(t)\big\|_{l_1} \;\leqslant\; \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

что и требовалось доказать. □

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольный вектор μ, задающий начальное распределение цепи. Тогда $\mu_i \geqslant 0$ и $\sum_i \mu_i = 1$. Покажем, что последовательность $\mu P(n)$ фундаментальна по норме l_1: поскольку

$$\sum_i \left(\left(\mu P(u)\right)_i - \mu_i \right) \;=\; 0,$$

то можно применить лемму 10.3 с $\rho = \left(\mu P(u) - \mu\right)$:

$$\left\|\mu P(t+u) - \mu P(t)\right\|_{l_1} = \left\|\mu P(u)P(t) - \mu P(t)\right\|_{l_1} = \left\|\left(\mu P(u) - \mu\right) P(t)\right\|_{l_1} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\mu P(u) - \mu\right\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \leqslant 2(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

поскольку оба вектора $\mu P(u)$ и μ задают вероятностное распределение. Фундаментальность последовательности показали. В силу полноты пространства l_1 существует вектор π такой, что

$$\left\|\mu P(t) - \pi\right\|_{l_1} \to 0, \;\; t \to \infty.$$

Тогда $\pi_i \geqslant 0 \;\forall i$ (иначе бы l_1–норма разности была всегда больше модуля отрицательного π_i и, следовательно, не сходилась бы к нулю) и $\|\pi\|_{l_1} = 1$, поскольку $\left\|\mu P(t)\right\|_{l_1} = 1$, то есть π задает вероятностное распределение.
Докажем, что вектор π задает стационарное распределение. Для этого нужно показать, что $\forall t \in T \;\pi P(t) = \pi$. По лемме 10.3 $\forall t \in T$

$$\left\|\mu P(u+t) - \pi P(t)\right\|_{l_1} = \left\|\mu P(u)P(t) - \pi P(t)\right\|_{l_1} = \left\|\left(\mu P(u) - \pi\right) P(t)\right\|_{l_1} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\mu P(u) - \pi\right\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \to 0, \;\; u \to \infty;$$

вместе с этим

$$\left\|\mu P(u+t) - \pi\right\|_{l_1} \to 0, \;\; u \to \infty.$$

Тогда получаем, что

$$\left\|\pi - \pi P(t)\right\|_{l_1} \;=\; \left\|\pi - \mu P(u+t) + \mu P(u+t) - \pi P(t)\right\|_{l_1} \;\leqslant$$
$$\leqslant \left\|\mu P(u+t) - \pi\right\|_{l_1} + \left\|\mu P(u+t) - \pi P(t)\right\|_{l_1} \to 0, \; u \to \infty,$$

что и означает, что $\forall t \in T \;\pi P(t) = \pi$. Теперь покажем единственность такого вектора π. От противного: пусть существует еще один задающий вероятностное распределение вектор ν такой, что $\nu P(t) = \nu$. Тогда по лемме 10.3

$$\|\pi - \nu\|_{l_1} \;=\; \left\|\pi P(t) - \nu P(t)\right\|_{l_1} \;=\; \left\|(\pi - \nu)\, P(t)\right\|_{l_1} \leqslant 2(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \to 0, \; t \to \infty,$$

то есть $\nu = \pi$. Теорема доказана.

□

Следствие. *Возьмем* $\mu = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots\right)$. *Тогда* $\forall i$ *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{p}_{ij}(t) = \pi_j$ *(который не зависит от* i*). Таким образом, система за большое время как бы "забывает" состояние, из которого она стартовала.*

Замечание. В теореме 10.2 показано, что π не зависит от μ, хотя изначально он от μ зависел по построению. О других следствиях этой теоремы можно почитать в [1], стр. 198.

10.3 Генератор марковской цепи с непрерывным временем

Определение 10.5. Однородная марковская цепь называется *стандартной*, если

$$P(t) \to P(0) = I, \ t \to 0+,$$

то есть

$$\mathrm{p}_{ij}(t) \to \delta_{ij}, \ t \to 0+ .$$

Теорема 10.4. *Пусть однородная марковская цепь стандартна. Тогда* $\forall i \neq j$

1. *существует конечный*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ij}(t) - \mathrm{p}_{ij}(0)}{t-0} =: q_{ij} \geqslant 0;$$

2. *существует*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ii}(t) - 1}{t} =: q_{ii} \in [-\infty, 0].$$

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Определение 10.6. Однородная марковская цепь называется *консервативной*, если матрица $Q := \Big(q_{ij}\Big)_{i,\, j\in S}$ (называемая *генератором* или *инфинитезимальной матрицей*) содержит только конечные элементы и

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = 0.$$

Замечание. Если однородная марковская стандартная цепь имеет конечное число состояний, то она консервативна: в силу свойства 2 переходных вероятностей

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_{ij}(t) = 1,$$

то есть $\forall t > 0$

$$\frac{1 - \mathrm{p}_{ii}(t)}{t} = \frac{\sum\limits_{i\neq j} \mathrm{p}_{ij}}{t}.$$

По теореме 10.5 для $i \neq j$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = q_{ij},$$

то есть существует (поскольку сумма конечна) конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sum\limits_{i\neq j} \mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = \sum_{i\neq j} q_{ij},$$

а значит, существует и конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1 - \mathrm{p}_{ii}(t)}{t} \;=\; -q_{ii} \;=\; \sum_{i\neq j} q_{ij},$$

то есть

$$\sum_{j\in S} q_{ij} \;=\; 0,$$

что и доказывает, что цепь консервативна.

10.4 Инфинитезимальная матрица конечной марковской цепи

Теорема 10.5. *Пусть дана матрица* $Q = \Big(q_{ij}\Big)_{i,\,j\in S}$ *такая, что* $Q \in$ $\in \mathrm{Mat}(N\times N)$, $\forall\, i\neq j\ q_{ij} \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij} = 0$. *Тогда существует однородная марковская цепь с генератором* Q *и пространством состояний мощности* N.

Доказательство. Напомним определение матричной экспоненты:

$$e^{B} \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!},$$

при этом $B^0 := I$. Следовательно,

$$e^{tB} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!}.$$

Известно следующее свойство матричной экспоненты: если $BC = CB$, то

$$e^{B+C} \;=\; e^{B}e^{C}.$$

Положим по определению

$$P(t) \;:=\; e^{tQ},\ t \geqslant 0.$$

Докажем, что $P(t)$ обладает свойствами 1.–4., которыми должна обладать матрица переходных вероятностей однородной марковской цепи.

1. Проверим, что $\mathrm{p}_{ij}(t) \geqslant 0\ \ \forall\, i,\, j\in S\ \ \forall t\geqslant 0$. Обозначим

$$\gamma \;=\; \min_{i=1\ldots N} q_{ii}.$$

Введем также обозначение

$$\widetilde{Q} \;=\; \Big(\widetilde{q}_{ij}\Big) \;:=\; Q - \gamma I_N.$$

Тогда $\widetilde{q}_{ij} \geqslant 0\ \ \forall i,\, j$. Пусть

$$\widetilde{P}(t) \;:=\; e^{t\widetilde{Q}}.$$

Тогда $\widetilde{P}(t)$ имеет неотрицательные элементы по определению. Заметим, что

$$e^{t\widetilde{Q}} \,=\, e^{tQ - t\gamma I_N} \,=\, e^{tQ}\, e^{-t\gamma I_N} \,=\, P(t)e^{-t\gamma I_N},$$

то есть

$$P(t) \,=\, \widetilde{P}(t)e^{t\gamma I_N}.$$

Вместе с этим у обеих матриц справа элементы неотрицательны. Значит, и у матрицы $P(t)$ элементы также неотрицательны.

2. Проверим, что $\forall i = 1, \ldots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_{ij}(t) \,=\, 1.$$

Обозначим через α единичный вектор–столбец. Тогда по определению $Q\alpha = 0$. Тогда

$$P(t)\alpha \,=\, \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}\right)\alpha \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n \alpha}{n!} \,=\, I_N\alpha \,=\, \alpha,$$

что и означает, что $\forall i = 1, \ldots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_{ij}(t) \,=\, 1.$$

3. $P(0) \,=\, e^{0\cdot Q} \,=\, I_N$ по определению.
4. $P(s+t) \,=\, e^{(s+t)Q} \,=\, e^{sQ}\, e^{tQ} \,=\, P(s)P(t)$.

Таким образом, выполнены свойства 1.–4., а значит (см. [1], стр.190–191), существует (однородная) марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q. □

Замечание. Заметим, что условия, наложенные на матрицу Q в формулировке теоремы, являются не только достаточными, но и необходимыми, что видно из замечания после определения консервативной марковской цепи.

11 Лекция от 26.04.17

Применения марковских цепей

11.1 Формулировка теоремы Дуба о консервативных цепях. Стационарные марковские цепи

Замечание. Известно (см. обязательную задачу 9.2), что пуассоновский процесс интенсивности λ является марковской цепью, причем между скачками проходит время, распространенное экспоненциально. Оказывается, это верно для всех однородных консервативных марковских цепей.

Теорема 11.1 (Дуба о консервативных цепях)**.** *Пусть* $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — *однородная консервативная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей* Q*. Тогда*

$$\mathsf{P}\Big(X(u) = i,\, s \leqslant u \leqslant s+t \,\Big|\, X(s) = i\Big) \;=\; e^{q_{ii}t},$$

то есть время ожидания между переходами из состояния в состояние распределено экспоненциально.

Доказательство. Доказательства на лекции не было, знать на экзамене его не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 217. □

Определение 11.1. $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — *строго стационарный процесс*, если $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall t_1 < \ldots < t_n,\ t_1 + h < \ldots < t_n + h \in T$

$$(X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n}) \overset{\text{law}}{=} (X_{t_1+h},\, \ldots,\, X_{t_n+h}).$$

Теорема 11.2. *Пусть однородная марковская цепь* $X = \{X_t,\, t \in T\}$ *имеет начальное распределение* π*, которое также является стационарным распределением для нее. Тогда* X — *строго стационарный процесс.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}(X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_n} = i_n) \;=\; \mathsf{P}(X_{t_1} = i_1)\, \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1});$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X_{t_1+h} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_n+h} = i_n) \;= \\ &\quad= \mathsf{P}(X_{t_1+h} = i_1)\, \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_2 + h - t_1 - h) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_n + h - t_{n-1} - h) \;= \\ &\qquad\qquad= \mathsf{P}(X_{t_1+h} = i_1)\, \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Вместе с этим в силу стационарности начального распределения π

$$\mathsf{P}(X_t = i_1) \;=\; \big(\pi P(t)\big)_{i_1} \;=\; \big(\pi P(t+h)\big)_{i_1} \;=\; \mathsf{P}(X_{t+h} = i_1),$$

что и завершает доказательство леммы. □

11.2 Обратимые цепи

Определение 11.2. Пусть $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — однородная марковская цепь с переходными вероятностями за единицу времени p_{ij}. Тогда вектор π, задающий распределение вероятностей, называется *обратимым*, если $\forall i,\, j \in S$

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Марковская цепь называется *обратимой*, если у нее есть обратимый вектор.

Пример 11.1 (случайные блуждания на графах)**.** Рассмотрим граф $(\mathbb{V},\, \mathbb{E})$, где $\mathbb{V}$ — множество вершин графа, а $\mathbb{E}$ — множество его ребер. Две вершины v_i и v_j из $\mathbb{V}$ будем называть соседними, если их соединяет ребро из $\mathbb{E}$. Пусть

d_i — кратность вершины v_i, то есть число инцидентных ей ребер. Введем переходные вероятности (из i в j):

$$\mathrm{p}_{ij} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем также вектор π, задающий вероятностное распределение:

$$\pi_i \;=\; \frac{d_i}{\sum\limits_{i\in S} d_i}.$$

Тогда π — обратимый вектор:

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji} \;=\; \frac{1}{\sum\limits_{i\in S} d_i}\, \mathbb{I}\left\{v_i \text{ и } v_j \text{ — соседи}\right\}.$$

Заметим, что если цепь обратима и π — ее обратимый вектор, то π задает стационарное распределение:

$$\big(\pi P(t)\big)_j \;=\; \sum_{i\in S} \pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \sum_{i\in S} \pi_j \mathrm{p}_{ji} \;=\; \pi_j.$$

11.3 Метод Монте-Карло, использующий цепи Маркова

Пример 11.2 (алгоритм Метрополиса–Хастингса)**.** Возьмем связный граф с вершинами из S такой, что $d_i < \infty\ \forall i$ и введем на нем цепь:

$$\mathrm{p}_{ij} \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j},\, 1\right\}, & v_i \text{ и } v_j \text{ соседние ;} \\ 0, & v_i \text{ и } v_j \text{ не соседние ;} \\ 1 - \sum\limits_{k\neq i} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\pi_k d_i}{\pi_i d_k},\, 1\right\}, & i = j. \end{cases}$$

Такая цепь обратима, причем ее обратимое распределение есть π. Действительно, проверим, что $\forall\, i,\, j$

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Пусть сначала $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \geqslant 1$. Тогда $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \leqslant 1$ и

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_i \frac{1}{d_i} \;=\; \pi_j \frac{1}{d_j} \frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Пусть теперь $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \leqslant 1$. Тогда $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \geqslant 1$ и

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_i \frac{1}{d_i} \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \;=\; \pi_j \frac{1}{d_j} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Определение 11.3. Пусть $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ — граф с конечным числом вершин. Пусть также $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{V}\}$ — случайное поле, $X_t : \Omega \to S$, где S конечно. Поле X называется *марковским*, если $\forall t \in \mathbb{V}$ таких, что

$$\mathsf{P}\,(X_s = x_s,\, s \neq t) \;\neq\; 0$$

выполнено

$$\mathsf{P}\left(X_t = x_t \,\middle|\, X_s = x_s,\, s \neq t\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X_t = x_t \,\middle|\, X_s = x_s,\, s \in \delta\{t\}\right),$$

где $\delta\{t\}$ — множество соседних с t вершин.

Определение 11.4. *Энергией* называется любая функция $E : S^{\mathbb{V}} \to \mathbb{R}$, где $S^{\mathbb{V}}$ — множество функций из $\mathbb{V}$ в S.

Определение 11.5. Распределение вероятностей на $S^{\mathbb{V}}$

$$\mathsf{P}\,(B) \;:=\; \begin{cases} \sum\limits_{\omega \in B} \frac{e^{-E(\omega)}}{\sum\limits_{\omega \in S^{\mathbb{V}}} e^{-E(\omega)}}, & B \neq \emptyset; \\ 0, & B = \emptyset, \end{cases}$$

называется *гиббсовским полем.*

Определение 11.6. *Потенциалом* называется любая действительная функция $V_A(\omega) : \mathbb{V} \times S^{\mathbb{V}} \to \mathbb{R}$ такая, что $V_A(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in S^{\mathbb{V}}$, если $A = \emptyset$.

Замечание. Известно, что любая энергия представляется с помощью потенциала:

$$E(\omega) \;=\; \sum_{A \subset \mathbb{V}} V_A(\omega).$$

Определение 11.7. Потенциал $V_A(\omega)$ называется *потенциалом ближайших соседей*, если

$$V_A(\omega) \;=\; 0 \;\; \forall \omega \in S^{\mathbb{V}},$$

когда A не является кликой, то есть множеством вершин таким, что любые две вершины в нем соединены ребром.

Теорема 11.3 (Аверинцева–Клиффорда–Хэммерсли)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *мера* P *на* $\left(S^{\mathbb{V}},\, A\right)$ *является распределением марковского поля относительно графа* $(\mathbb{V},\, E)$ *и* $\mathsf{P}\,(B) > 0,\; B \neq \emptyset$*;*
2. *мера* P *на* $\left(S^{\mathbb{V}},\, A\right)$ *является мерой Гиббса с потенциалом ближайших соседей.*

12 Лекция от 03.05.17

Слабая сходимость вероятностных мер. Ковариационные функции

12.1 Слабая сходимость и сходимость по распределению

Определение 12.1. Пусть $(S,\, \mathscr{B},\, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой ρ, $\mathscr{B} = \mathscr{B}\,(S)$ — σ–алгебра борелевских подмножеств S. Пусть Q, Q_n,

$n \in \mathbb{N}$ — вероятностные меры на $(S, \mathscr{B})$. Говорят, что Q_n *слабо сходятся* к Q, если для любой непрерывной ограниченной функции $f : S \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_S f(x)\,\mathsf{Q}_n(\mathrm{d}x) \;\to\; \int\limits_S f(x)\,\mathsf{Q}(\mathrm{d}x), \;\; n \to \infty.$$

Обозначается $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$, $n \to \infty$.

Замечание. Множество непрерывных ограниченных функций $f : A \to B$ будем иногда дальше обозначать $\mathrm{C}_b\,(A,\, B)$.

Определение 12.2. Пусть $X_n : \Omega \to S$, $X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $X : \Omega \to S$ — случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Говорят, что X_n *сходятся по распределению* к X, если

$$\mathsf{P}_{X_n} \;\Rightarrow\; \mathsf{P}_X, \;\; n \to \infty,$$

где P_{X_n} — вероятностная мера, задаваемая случайной величиной X_n по формуле

$$\mathsf{P}_{X_n}(B) \;=\; \mathsf{P}\left(X_n^{-1}(B)\right).$$

Обозначается

$$X_n \;\xrightarrow{\text{law}}\; X, \;\; n \to \infty.$$

Замечание. Поскольку

$$\int\limits_S f(x)\,\mathsf{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) \;=\; \int\limits_\Omega f(X_n)\;\mathrm{d}\mathsf{P},$$

то

$$X_n \xrightarrow{\text{law}} X \;\Leftrightarrow\; \mathsf{E}f(X_n) \to \mathsf{E}f(X)$$

для любой $f \in \mathrm{C}_b\,(S,\, \mathbb{R})$.

Лемма 12.1. *Пусть* $X_n \xrightarrow{law} X$, $n \to \infty$. *Пусть* $h : S \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция. Тогда*

$$h(X_n) \;\xrightarrow{law}\; h(X), \;\; n \to \infty.$$

Доказательство. По определению, так как $f \circ h$ — непрерывная ограниченная функция для любой $f \in \mathrm{C}_b\,(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$. □

Теорема 12.2 (Александрова). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$;
2. $\limsup\limits_n \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F)$ *для любого замкнутого* $F \subset S$;
3. $\liminf\limits_n \mathsf{Q}_n(G) \geqslant \mathsf{Q}(G)$ *для любого открытого* $G \subset S$;
4. $\lim\limits_n \mathsf{Q}_n(B) = \mathsf{Q}(B)$ *для любых* $B \in \mathscr{B}$ *таких, что* $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$.

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. Поскольку ∂B замкнуто, то оно заведомо борелевское, а значит, на нем определена мера Q.

12.2 Функциональные предельные теоремы

Определение 12.3. Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{Q}_\alpha,\, \alpha \in \Lambda\}$ называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности $(\mathsf{Q}_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\mathsf{Q}_{\alpha'_n} \Rightarrow \mathsf{Q},\, n \to \infty.$$

(Q здесь не подразумевается обязательно принадлежащим семейству мер $\{\mathsf{Q}_\alpha,\, \alpha \in \Lambda\}$).

Определение 12.4. Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{Q}_\alpha,\, \alpha \in \Lambda\}$ называется *плотным*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует компакт K_ε такой, что $\forall \alpha \in \Lambda$

$$\mathsf{Q}_\alpha\,(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Теорема 12.3 (Прохорова). *Пусть $(S,\, \rho)$ — польское (то есть метрическое полное сепарабельное) пространство (с метрикой ρ). Тогда семейство вероятностных мер $\{\mathsf{Q}_\alpha,\, \alpha \in \Lambda\}$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда оно плотно.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Пример 12.1. Пусть $X_1,\, X_2,\, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{E}X_n = 0$, $\mathsf{D}X_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Построим по ним случайные ломаные: введем

$$\begin{aligned} s_{0,\,0} &:= 0, \\ s_{n,\,m} &:= X_1(\omega) + \ldots + X_m(\omega),\ \ \omega \in \Omega,\ m = 0,\, \ldots,\, n. \end{aligned}$$

Возьмем случайные точки (узлы будущей ломаной)

$$x_{n,\,m} := \left(\frac{m}{n},\, \frac{s_{n,\,m}}{\sqrt{n}}\right),\ \ m = 0,\, \ldots,\, n$$

и соединим для каждого фиксированного n отрезками $x_{n,\,m}$ с $x_{n,\,m+1}$ для всех $m = 0,\, \ldots,\, n-1$, то есть положим

$$S_n(t,\, \omega) := \frac{s_{n,\,m}}{\sqrt{n}} + \frac{t - \frac{m}{n}}{\frac{1}{n}}\, \frac{X_{m+1}}{\sqrt{n}},\ \ t \in \left[\frac{m}{n},\, \frac{m+1}{n}\right].$$

Таким образом, получили последовательность случайных ломаных $S_n\,(t,\, \omega)$, $t \in [0,\, 1]$ (точнее, ломаными являются графики этих функций при фиксированном ω). Тогда $S_n = \big\{S_n(t),\, t \in [0,\, 1]\big\}$ — случайный элемент в пространстве $\mathrm{C}[0,\, 1]$. Обозначим через P_n распределение элемента S_n в пространстве $\Big(\mathrm{C}[0,\, 1],\, \mathscr{B}\left(\mathrm{C}[0,\, 1]\right)\Big)$. Тогда верна

Теорема 12.4 (Донскера). $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{W}$, *где W — это распределение винеровского процесса $W = \big\{W(t),\, t \in [0,\, 1]\big\}$.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. Распределения X_n не важны, поэтому этот результат иногда называют принципом инвариантности.

Замечание. Пусть $h : \mathrm{C}[0,\,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение такое, что $h\big(X(\cdot)\big) := X(1)$. Тогда по теореме 12.4 и лемме 12.1

$$h\left(S_n(\cdot)\right) \;=\; \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} h\Big(\big\{W(t),\, t\in[0,\,1]\big\}\Big) \;=\; W(1) \;\sim\; \mathcal{N}(0,\,1),$$

что является утверждением обычной центральной предельной теоремы.

Теорема 12.5. $X_n \xrightarrow{law} X$ *в пространстве* $\mathrm{C}[0,\,1]$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *все конечномерные распределения* X_n *сходятся к конечномерным распределениям* X*, то есть* $\forall\, t_1,\,\ldots,\,t_r \in [0,\,1]$

$$\big(X_n(t_1),\,\ldots,\,X_n(t_r)\big) \xrightarrow{law} \big(X(t_1),\,\ldots,\,X(t_r)\big)\,,\quad n\to\infty;$$

2. *семейство* $(\mathsf{P}_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *плотно.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. Теорема Донскера обобщается на серии независимых случайных величин $X_{n,\,1},\,\ldots,\,X_{n,\,m_n}$, удовлетворяющих условию Линдеберга:
$\forall\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{m_n}\mathsf{E}\left(X_{n,\,j}-\mathsf{E}X_{n,\,j}\right)^2\mathbb{I}\Big\{\big|X_{n,\,j}-\mathsf{E}X_{n,\,j}\big| > \varepsilon B_n\Big\} \;\to\; 0,\;\; n\to\infty,$$

где

$$B_n^2 \;=\; \sum_{j=1}^{m_n}\mathsf{D}X_{n,\,j},\;\;\; t_{n,\,j} \;=\; \frac{\sum\limits_{l=1}^{j}\mathsf{D}X_{n,\,l}}{B_n^2}.$$

Этот результат и называется принципом инвариантности Донскера–Прохорова.

12.3 Критерий согласия Колмогорова

Определение 12.5. Пусть случайный процесс $W = \big\{W(t),\, t\in[0,\,1]\big\}$ — винеровский процесс на отрезке $[0,\,1]$. Тогда *броуновским мостом* называется процесс

$$W_0 \;:=\; \big\{W(t) - tW_1,\, t\in[0,\,1]\big\}\,.$$

Замечание. $W_0(0) \;=\; W_0(1) \;=\; 0$ почти наверное.

Определение 12.6. Функция

$$K(z) \;:=\; \begin{cases} 1-2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,e^{-2k^2z^2}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

называется *функцией распределения Колмогорова.*

Лемма 12.6. $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{t\in[0,\,1]}\big|W_0(t)\big| \;\leqslant\; z\right) \;=\; K(z).$

Доказательство. Лемма предлагается без доказательства. □

Следствие (критерий согласия Колмогорова). *Пусть* $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины,* $F(x)$ — *функция распределения* ξ_1. *Пусть* $F(x)$ *непрерывна на всей* $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{n}\left|F_n(x) - F(x)\right| \leqslant z\right) \to K(z), \quad n\to\infty,$$

где

$$F_n(x) \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left\{\xi_i \leqslant x\right\} \;-$$

— *эмпирическая функция распределения.*

Доказательство. Обозначим

$$X_n \;:=\; \sqrt{n}\left|F_n(x) - F(x)\right|.$$

Тогда (по теореме 12.5, полное обоснование см. [5], гл. 2, §13)

$$X_n \xrightarrow{\text{law}} W_0.$$

Поскольку $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|$ является непрерывным отображением, то по лемме 12.1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|X_n| \xrightarrow{\text{law}} \sup_{t\in[0,\,1]}\left|W_0(t)\right|.$$

Тогда из леммы 12.6 получаем утверждение, которое требуется доказать. □

Замечание. Более полное доказательство (которое называется наброском и занимает 3 страницы) можно почитать в [1], стр. 161.

12.4 Гауссовские процессы

Определение 12.7. Случайный вектор $(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$ называется *гауссовским*, если его характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ имеет вид

$$\varphi_\xi(t) \;=\; \exp\left\{i(a,\, t) - \frac{1}{2}\,(Ct,\, t)\right\},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ — вектор, $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, то есть $(Ct,\, t) \geqslant 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}^n$.

Определение 12.8. Процесс $X = \{X_t,\, t\in T\}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, называется *гауссовским*, если $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t_1,\, \ldots,\, t_n$ вектор

$$(X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n})$$

является гауссовским.

Определение 12.9. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — гауссовский процесс. Его *функцией среднего* называется

$$a(t) \;:=\; \mathsf{E}X(t),$$

а его *ковариационной функцией* называется

$$r(s,\, t) \;:=\; \operatorname{cov}\bigl(X(s),\, X(t)\bigr)\,.$$

Определение 12.10. Функция $r : T\times T \to \mathbb{R}$ называется *неотрицательно определенной*, если $\forall\, t_1,\, \ldots,\, t_n \in T$ матрица

$$\bigl(r(t_m,\, t_j)\bigr)$$

является неотрицательно определенной, или, что то же самое, $\forall\, \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n \in \in \mathbb{R}$

$$\sum_{m,\, j=1}^{n} r(t_m,\, t_j)\, \lambda_m\lambda_j \;\geqslant\; 0.$$

Теорема 12.7. *Пусть $a(t)$ — произвольная действительная функция $T \to \to \mathbb{R}$, $r(s,\, t)$ — действительная функция $T\times T \to \mathbb{R}$, являющаяся симметричной и неотрицательно определенной. Тогда существует гауссовский процесс $X = \{X_t,\, t\in T\}$ с функцией среднего a и ковариационной функцией r.*

Доказательство. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall\, t_1,\, \ldots,\, t_n \in T$ введем гауссовские меры $\mathsf{Q}_{t_1\ldots t_n}$, задаваемые характеристическими функциями

$$\varphi_{t_1\ldots t_n}(u_1,\, \ldots,\, u_n) \;=\; \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{n} a(t_j)u_j - \frac{1}{2}\sum_{m,\, j=1}^{n} r(t_m,\, t_j)\, u_j u_m \right\}.$$

По теореме 5.6 искомый процесс X существует, поскольку выполнены условия согласованности характеристических функций (и он, само собой, будет гауссовским, поскольку характеристическая функция конечномерных распределений имеет требуемый вид). □

Замечание. Пусть имеется L_2–процесс $X = \{X_t,\, t\in T\}$, то есть такой процесс, что $\mathsf{E}\,|X_t|^2 \;<\; \infty,\; t \in T$. Тогда функция $r(s,\, t) \;:=\; \operatorname{cov}\bigl(X(s),\, X(t)\bigr)$ является неотрицательно определенной. Действительно,

$$\sum_{m,\, j=1} \operatorname{cov}\bigl(X(t_m),\, X(t_j)\bigr)\; \lambda_m\lambda_j \;=\; \operatorname{cov}\left(\sum_{m=1}^{n} \lambda_m X(t_m),\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X(t_j)\right) \;= \\ =\; \operatorname{cov}(\xi,\, \xi) \;\geqslant\; 0.$$

Следовательно, требования теоремы 12.7 являются необходимыми, так что гауссовский процесс задается функциями a и r.

Определение 12.11. Процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$ называется *комплекснозначным гауссовским процессом*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall\, t_1,\, \ldots,\, t_n \in T$ вектор

$$(\,\mathrm{Re}X_{t_1},\, \mathrm{Im}X_{t_1},\, \ldots,\, \mathrm{Re}X_{t_n},\, \mathrm{Im}X_{t_n}\,)$$

является гауссовским вектором в $\mathbb{R}^{2n}$.

Определение 12.12. Комплекснозначная функция $R(s,\,t) : T \times T \to \mathbb{C}$ называется *неотрицательно определенной*, если $\forall n \in \mathbb{N}\,\forall t_1,\,\ldots,\,t_n \in T$ и $\forall z_1,\,\ldots,\,z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{m,\,j=1}^{n} R(t_m,\,t_j)\,z_m\overline{z_j} \;\geqslant\; 0.$$

Теорема 12.8. *Класс неотрицательно определенных функций $T \times T \to \to \mathbb{C}$ совпадает с классом ковариационных функций L_2–процессов и, более того, совпадает с классом ковариационных функций комплекснозначных гауссовских процессов.*

Доказательство. См. [1], стр. 53. □

Замечание. Комплексные неотрицательно определенные функции всегда кососимметричны, то есть

$$R(t_1,\,t_2) \;=\; \overline{R(t_2,\,t_1)}.$$

Действительно, так как $R(t,\,t) \geqslant 0\ \forall t \in T$, то из того, что $\forall\,z_1,\,z_2 \in \mathbb{C}$ и $\forall\,t_1,\,t_2 \in T$

$$|z_1|R(t_1,\,t_1) + z_1\overline{z_2}R(t_1,\,t_2) + \overline{z_1}z_2R(t_2,\,t_1) + |z_2|R(t_2,\,t_2) \;\geqslant\; 0,$$

получаем, что $z_1\overline{z_2}R(t_1,\,t_2) + \overline{z_1}z_2R(t_2,\,t_1) \in \mathbb{R}$. Тогда для $z_1 = z_2 = 1$

$$R(t_1,\,t_2) + R(t_2,\,t_1) \;\in\; \mathbb{R},$$

а для $z_1 = 1,\,z_2 = i$

$$-iR(t_1,\,t_2) + iR(t_2,\,t_1) \;\in\; \mathbb{R},$$

из чего следует, что $R(t_1,\,t_2) = \overline{R(t_2,\,t_1)}$.

Определение 12.13. Функция $K(s,\,t)$, $s,\,t \in T$, называется *воспроизводящим ядром* гильбертова пространства H, состоящего из функций $f : T \to \mathbb{C}$, если

1. $K(\cdot,\,t) \;\in\; H\ \ \forall t \in T$;
2. $\big(f,\,K(\cdot,\,t)\big)_H \;=\; f(t)\ \ \forall t \in T,\,f \in H$.

Теорема 12.9 (Ароншайна)**.** *Функция $K(s,\,t)$, $s,\,t \in T$, является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда она представляет собой воспроизводящее ядро некоторого гильбертова пространства функций, заданных на T и принимающих значения в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

12.5 Свойства ковариационных функций

Определение 12.14. Пусть $\xi,\,\eta$ — комплекснозначные случайные величины. Тогда

$$\operatorname{cov}(\xi,\,\eta) \;:=\; \mathsf{E}\,(\xi - \mathsf{E}\xi)\,\overline{(\eta - \mathsf{E}\eta)}.$$

Теорема 12.10. *Пусть $K,\,K_1,\,\ldots,\,K_n,\,\ldots$ — неотрицательно определенные функции и $a_1,\,\ldots,\,a_n \geqslant 0$. Тогда*

1. *$K(cs,\, ct)$ — неотрицательно определенная функция $\forall c \in \mathbb{R}$;*
2. *$a_1K_1 + \ldots + a_nK_n$ — неотрицательно определенная функция;*
3. *$K_1 \cdot \ldots \cdot K_n$ — неотрицательно определенная функция;*
4. *если $K_n(s,\, t) \to K_0(s,\, t)$ $\forall\, s,\, t \in T$, то K_0 — неотрицательно определенная функция.*

Доказательство. 1. Следует из определения.

2. Возьмем независимые гауссовские процессы $X_1(t),\, \ldots,\, X_n(t)$ с ковариационными функциями $K_1,\, \ldots,\, K_n$; рассмотрим
$$X(t) \;:=\; \sqrt{a_1}X_1(t) + \ldots + \sqrt{a_n}X_n(t).$$
Тогда
$$\operatorname{cov}\big(X(s),\, X(t)\big) \;=\; a_1K_1(s,\, t) + \ldots + a_nK_n(s,\, t).$$
3. Повторим шаг 2 с
$$X(t) \;:=\; X_1(t) \cdot \ldots \cdot X_n(t),$$
где у процессов X_i нулевые функции среднего.
4. Поскольку предельный переход сохраняет нестрогие неравенства,
$$0 \;\leqslant\; \sum_{m,\, j=1}^{n} K_n(t_m,\, t_j)\, z_m\overline{z_j} \;\to\; \sum_{m,\, j=1}^{n} K_0(t_m,\, t_j)\, z_m\overline{z_j} \;\geqslant\; 0.$$

$\square$

Определение 12.15. Функция одного переменного $R(t)$, $t \in T$ называется *неотрицательно определенной*, если функция
$$R(s,\, t) \;:=\; R(s - t)$$
неотрицательно определена.

Теорема 12.11 (Герглотца). *Функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, неотрицательно определена (в комплексном смысле) тогда и только тогда, когда*
$$R(n) \;=\; \int\limits_{[-\pi,\, \pi]} e^{in\lambda}\, \mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda),$$
где Q — конечная мера на $\mathcal{B}[-\pi,\, \pi]$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть
$$R(n) \;=\; \int\limits_{[-\pi,\, \pi]} e^{in\lambda}\, \mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda).$$
Тогда
$$\sum_{k,\, l=1}^{n} R(t_k - t_l)\, z_k\overline{z_l} \;=\; \sum_{k,\, l=1}^{n} z_k\overline{z_l} \int\limits_{[-\pi,\, \pi]} e^{i(t_k - t_l)\lambda}\, \mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda) \;=\;$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\,\pi]} \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\, e^{it_k\lambda}\right) \left(\sum_{l=1}^{n} \overline{z_l}\, e^{-it_l\lambda}\right) \mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda) \;=$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\,\pi]} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k e^{it_k\lambda}\right|^2 \mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda) \;\geqslant\; 0,$$

поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k\, e^{it_k\lambda}} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\, e^{-it_k\lambda}.$$

$\Rightarrow$ Пусть теперь $R(n)$ неотрицательно определена. Тогда для $N \in \mathbb{N}$ введем функции на $[-\pi,\, \pi]$

$$g_N(\lambda) \;:=\; \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,\,l=1}^{N} R(k-l)\, e^{-ik\lambda}\, e^{il\lambda} \;\geqslant\; 0$$

ввиду неотрицательной определенности. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi N} \sum_{k,\,l=1}^{N} R(k-l)\, e^{-ik\lambda}\, e^{il\lambda} \;=\; \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R(m)\, e^{-im\lambda},$$

поскольку найдется ровно $N - |m|$ пар чисел $(k,\, l)$ таких, что $k - l = m$ и что $0 < k,\, l \leqslant N$.
Тогда $g_N(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\, \pi]$ — непрерывные ограниченные неотрицательные функции. Определим тогда семейство мер на $\mathcal{B}\left([-\pi,\, \pi]\right)$

$$\mathsf{Q}_N(B) \;:=\; \int\limits_B g_N(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Они являются σ–аддитивными мерами из-за σ–аддитивности интеграла Лебега и неотрицательности функций g_N. При этом

$$\mathsf{Q}_N([-\pi,\, \pi]) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\,\pi]} \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R(m)\, e^{-im\lambda}\, \mathrm{d}\lambda \;=\; R(0),$$

так как

$$\int\limits_{[-\pi,\,\pi]} e^{ik\lambda}\, \mathrm{d}\lambda \;=\; \delta_{k0}\,,$$

то есть (после нормировки) получим, что меры Q_N можно считать вероятностными. Тогда это семейство мер плотно (в качестве компакта K_ε просто берем отрезок $[-\pi,\, \pi]$) и, следовательно, по теореме 12.3 семейство мер Q_N является слабо относительно компактным. Это значит, что из последовательность мер Q_N можно выделить слабо сходящуюся к некоторой мере Q подпоследовательность Q_{n_k}, то есть

$$\int\limits_{[-\pi,\,\pi]} e^{in\lambda}\, \mathsf{Q}_{\mathsf{N_k}}(\mathrm{d}\lambda) \;\to\; \int\limits_{[-\pi,\,\pi]} e^{in\lambda}\, \mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda).$$

При этом
$$\int\limits_{[-\pi,\,\pi]} e^{in\lambda}\,\mathsf{Q}_{\mathsf{N_k}}(\mathrm{d}\lambda) \;=\; \left(1-\frac{|n|}{N_k}\right)R(n) \;\to\; R(n),$$
из чего и следует, что
$$R(n) \;=\; \int\limits_{[-\pi,\,\pi]} e^{in\lambda}\,\mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda).$$

$\square$

Теорема 12.12 (Бохнера–Хинчина)**.** *Функция $R(t)$, $t\in\mathbb{R}$, непрерывная в нуле, является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда*
$$R(t) \;= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\,\mathsf{Q}(\mathrm{d}\lambda),$$
где Q — конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Замечание. Для неотрицательно определенных функций непрерывность в нуле равносильна непрерывности в каждой точке.

Определение 12.16. Меры Q из теорем 12.11 и 12.12 называются *спектральными мерами.*

Теорема 12.13 (Рисса)**.** *Если $R(t)$, $t\in\mathbb{R}$ — неотрицательная ограниченная измеримая функция, то*
$$R(t) \;=\; R_C(t)+R_0(t),\quad t\in\mathbb{R},$$
где $R_C(t)$ — непрерывная функция, а $R_0(t)=0$ почти всюду по мере Лебега.

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. $\square$

Теорема 12.14 (Гнайтинга)**.** *Если $R(t)=R(\|t\|)$, $t\in\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 2$, то*
$$R(t) \;=\; R_C(t)+a\mathbb{I}_0,\quad a\geqslant 0.$$

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. $\square$

13 Лекция от 10.05.17

Стационарные процессы

13.1 Стационарные процессы

Замечание. Везде далее множество T подразумевается замкнутым по сложению.

Определение 13.1. Процесс $\big\{X(t),\,t\in T\big\}$ называется *стационарным в узком смысле*, если $\forall n\in\mathbb{N}\;\forall\, h,\,t_1,\,\ldots,\,t_n\in T$
$$\left(X_{t_1},\,\ldots,\,X_{t_n}\right) \overset{\text{law}}{=} \left(X_{t_1+h},\,\ldots,\,X_{t_n+h}\right).$$

Пример 13.1. Однородная марковская цепь с начальным распределением, равным стационарному, является стационарным в узком смысле процессом.

Определение 13.2. L^2–процесс $\big\{X(t),\, t \in T\big\}$ называется ***стационарным в широком смысле***, если

1. $\mathsf{E}X_t \;=\; a \;\; \forall t \in T$;
2. $\operatorname{cov}(X_s,\, X_t) \;=\; R(s-t), \;\; s,\, t \in T$.

Замечание. Из стационарности в узком смысле не следует стационарности в широком, поскольку стационарность в узком смысле не гарантирует наличия вторых моментов.

Замечание. Из стационарности в широком смысле не следует стационарность в узком смысле: возьмем, например, независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1, ξ_2, $\mathsf{P}(\xi_i = 1) \;=\; \mathsf{P}(\xi_i = -1) \;=\; 1/2$ и построим по ним процесс X:

$$X_t \;=\; \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t.$$

Тогда

$$\mathsf{E}X_t \;=\; 0, \;\; \operatorname{cov}(X_t,\, X_s) \;=\; \cos(t-s),$$

но вместе с этим

$$\xi_1 \;=\; X_0 \overset{\text{law}}{\neq} X_{\frac{\pi}{4}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_1 + \xi_2\right).$$

Замечание. Если L^2–процесс стационарен в узком смысле, то он стационарен в широком смысле.

Замечание. Понятия стационарности в широком и в узком смыслах совпадают для гауссовских процессов.

Замечание. Если X — стационарный в широком смысле процесс, то $R(t) := \operatorname{cov}(X_s,\, X_{s+t})$ — неотрицательно определенная функция.

13.2 Ортогональная случайная мера, заданная на алгебре

Определение 13.3. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра подмножеств множества Λ. Отображение $Z : \mathcal{A} \to \mathrm{L}^2(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ называется ***ортогональной случайной мерой***, если

1. $Z(B)$ ортогональна $Z(C)$ $\;\forall\, B,\, C \in \mathcal{A} : B \cap C = \emptyset$, то есть
$$\big(Z(B),\, Z(C)\big) \;=\; 0,$$
где $(\cdot,\, \cdot)$ — скалярное произведение на $\mathrm{L}^2(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$, задаваемое формулой
$$(\xi,\, \eta) \;:=\; \mathsf{E}\xi\overline{\eta};$$
2. $\forall\, B,\, B_1,\, B_2,\, \ldots \in \mathcal{A} : B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ выполнено
$$Z(B) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k) \;\text{ почти наверное},$$
где ряд подразумевается сходящимся в $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Замечание. Во втором свойстве важно отдельно требовать, чтобы $B \in \mathcal{A}$, потому что, вообще говоря, $\mathcal{A}$ не подразумевается σ–алгеброй.

Замечание. Из первого свойства следует, что $\big(Z(\emptyset),\, Z(\emptyset)\big) = \mathsf{E}\left|Z(\emptyset)\right|^2 = 0$, то есть $Z(\emptyset) = 0$ почти наверное.

Замечание. Второе свойство влечет конечную аддитивность: поскольку $\mathcal{A}$ — алгебра, то можно все B_i с какого-то момента взять пустыми.

Замечание. Во втором свойстве равенство берется почти наверное, так что множество таких $\omega \in \Omega$, что равенство не выполнено, имеет меру 0; при этом само это множество зависит от конкретных B_i.

Определение 13.4. Пусть Z — ортогональная случайная мера, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Λ. Функция $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, задаваемая формулой

$$\mu(B) \;=\; \big(Z(B)\,,\, Z(B)\big) \;=\; \mathsf{E}\left|Z(B)\right|^2,$$

называется *структурной мерой* ортогональной случайной меры Z.

Теорема 13.1. *μ — σ–аддитивная мера на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. μ по определению неотрицательна. Проверим ее σ–аддитивность. Пусть $B,\, B_1,\, B_2,\, \ldots \in \mathcal{A}$, $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Тогда по первому свойству

$$\left(\sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\,,\, \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \big(Z(B_k)\,,\, Z(B_k)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\,.$$

Вместе с этим по второму свойству

$$\sum_{k=1}^{n} Z(B_k) \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k) \;=\; Z(B)\,.$$

Из этого и непрерывности скалярного произведения получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\,,\, \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\right) \;\to\; \big(Z(B)\,,\, Z(B)\big) \;=\; \mu(B)\,,$$

из чего и получаем, что

$$\mu(B) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)\,.$$

□

Лемма 13.2.

1. *Пусть Z — ортогональная случайная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Λ. Тогда $\forall\, B,\, C \in \mathcal{A}$*

$$\big(Z(B)\,,\, Z(C)\big) \;=\; \mu(B \cap C)\,,$$

где μ — структурная мера Z.

2. *Пусть* $Z = \left\{Z(B),\, B \in \mathcal{A}\right\}$ *— семейство случайных величин из* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *и для некоторой конечной* σ*–аддитивной меры* μ *верно, что* $\forall\, B,\, C \in \in \mathcal{A}$

$$\big(Z(B),\, Z(C)\big) \;=\; \mu(B \cap C)\,.$$

Тогда Z *— ортогональная случайная мера на* $\mathcal{A}$ *со структурной мерой* μ*.*

Доказательство.

1. Поскольку

$$B \;=\; (B \cap C) \sqcup \big(B \setminus C\big)\,,$$
$$C \;=\; (B \cap C) \sqcup \big(C \setminus B\big)\,,$$

то по первому свойству

$$\big(Z(B),\, Z(C)\big) = \Big(Z(B \cap C) + Z\big(B \setminus C\big),\, Z(B \cap C) + Z\big(C \setminus B\big)\Big) =$$
$$= \;\big(Z(B \cap C),\, Z(B \cap C)\big) \;=\; \mu(B \cap C)\,.$$

2. Проверим, что для Z выполнены свойства из определения ортогональной случайной меры.
Во–первых, $\forall\, B,\, C : B \cap C = \emptyset$

$$\big(Z(B),\, Z(C)\big) \;=\; \mu(B \cap C) \;=\; 0.$$

Во–вторых, проверим второе свойство из определения. Пусть $B = = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$, $B_k \in \mathcal{A}$. Тогда по условию

$$\left(Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\,,\, Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\right) \;=$$
$$=\; \big(Z(B),\, Z(B)\big) - \sum_{k=1}^{n} \big(Z(B),\, Z(B)\big) + \sum_{k=1}^{n} \big(Z(B),\, Z(B)\big) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \big(Z(B),\, Z(B)\big) \;=\; \big(Z(B),\, Z(B)\big) - \sum_{k=1}^{n} \big(Z(B),\, Z(B)\big) \;=$$
$$=\; \mu(B) - \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \;\to\; 0,$$

то есть

$$Z(B) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k)\,.$$

В–третьих, проверим, что μ действительно является структурной мерой. Возьмем в условии $B = C$ и получим, что

$$\mathsf{E}\left|Z(B)\right|^2 \;=\; \big(Z(B),\, Z(B)\big) \;=\; \mu(B)\,,$$

то есть это действительно структурная мера.

$\square$

Пример 13.2 (пример ортогональной случайной меры)**.** Пусть $\Lambda = [a,\, b)$, $0 \leqslant a < b < \infty$ и

$$\mathcal{A} \;=\; \left\{ \bigsqcup_{k=1}^{n} [a_i,\, b_i),\; a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b \right\}.$$

Пусть также $W = \big\{W(t),\, t \geqslant 0\big\}$ — винеровский процесс. Положим

$$Z\,(B) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \big(W(b_k) - W(a_k)\big)\,.$$

Тогда из леммы 13.2 следует, что Z — ортогональная случайная мера на $\mathcal{A}$ со структурной мерой μ, равной мере Лебега на $[a,\, b)$.

Упражнение 13.1. Пусть μ — конечная σ–аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Λ. Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ существует ортогональная случайная мера Z со структурной мерой μ.

13.3 Интеграл по ортогональной случайной мере, заданной на алгебре

Определение 13.5. Функция $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ называется *простой*, если

$$f \;=\; \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mathbb{I}_{B_k},$$

где $b_k \in \mathbb{C}$ и множества $B_1,\, \ldots,\, B_m \in \mathcal{A}$ образуют разбиение множества Λ, то есть $\Lambda = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} B_k$.

Определение 13.6. Отображение J, заданное на множестве простых функций на Λ со значениями в $\mathrm{L}^2\,(\Omega)$ называется *интегралом по ортогональной случайной мере* Z на алгебре $\mathcal{A}$, если

$$J(f) \;=\; \sum_{k=1}^{m} b_k Z\,(B_k)$$

для любой простой функции $f = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k\, \mathbb{I}_{B_k}$.

Лемма 13.3. *Пусть f и g — простые функции, $f = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k\, \mathbb{I}_{B_k}$, $g = \sum\limits_{j=1}^{r} d_j\, \mathbb{I}_{D_j}$, J — интеграл по ортогональной случайной мере Z. Тогда*

$$\big(J(f),\, J(g)\big)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \;=\; <f,\, g>_{\mathrm{L}^2(\Lambda)},$$

где

$$<f,\, g>_{\mathrm{L}^2(\Lambda)} \;=\; \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\, \overline{g(\lambda)}\, \mu\,(\mathrm{d}\lambda)$$

является скалярным произведением на $\mathrm{L}^2(\Lambda) = \mathrm{L}^2(\Lambda, \sigma\{\mathcal{A}\}, \mu)$*; мера* μ *продолжена с* $\mathcal{A}$ *на* $\sigma\{\mathcal{A}\}$ *по теореме Каратеодори.*

Доказательство. По лемме 13.2

$$\begin{aligned}
\big(J(f),\, J(g)\big) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{m} b_k Z(B_k),\, \sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j)\right) \;=\\
=\; \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} b_k \overline{d_j}\,\big(Z(B_k),\, Z(D_j)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} b_k \overline{d_j}\,\mu(B_k \cap D_j) \;=\\
=\; \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} b_k \overline{d_j} \int_{\Lambda} \mathbb{I}_{B_k \cap D_j}(\lambda)\,\mu(\mathrm{d}\lambda) \;=\\
=\; \int_{\Lambda} \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mathbb{I}_{B_k}(\lambda) \sum_{j=1}^{r} \overline{d_j}\, \mathbb{I}_{D_j}(\lambda)\,\mu(\mathrm{d}\lambda) \;=\; \int_{\Lambda} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,\mu(\mathrm{d}\lambda) \;= < f,\, g > .
\end{aligned}$$

□

Следствие. *Из леммы 13.3 следует корректность определения* J*, то есть независимость* $J(f)$ *от представления* f *в виде суммы индикаторов с множителями: если*

$$f \;=\; \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mathbb{I}_{B_k} \;=\; \sum_{j=1}^{r} d_j\, \mathbb{I}_{D_j} \;=\; g,$$

то

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{m} b_k Z(B_k) - \sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j) \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \;=\\
=\; \left(\sum_{k=1}^{m} b_k Z(B_k) - \sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j),\, \sum_{k=1}^{m} b_k Z(B_k) - \sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j) \right) \;=\\
=\; \|f - g\|^2_{\mathrm{L}^2(\Lambda)} \;=\; 0,
\end{aligned}$$

то есть $J(f) \;=\; J(g)$ *почти наверное.*

Лемма 13.4. J *является линейным отображением на линейном пространстве простых функций.*

Доказательство. По лемме 13.3 путем раскрытия скобок по линейности

$$\begin{aligned}
\big(J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g),\, J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g)\big) \;=\\
= <\alpha f + \beta g,\, \alpha f + \beta g> - \alpha < f,\, \alpha f + \beta g > - \beta < g,\, \alpha f + \beta g > -\\
- \overline{\alpha} < \alpha f + \beta g,\, f > + \overline{\alpha} < \alpha f,\, f > + \overline{\alpha} < \beta g,\, f > -\\
- \overline{\beta} < \alpha f + \beta g,\, g > + \overline{\beta} < \alpha f,\, g > + \overline{\beta} < \beta g,\, g > = \; 0,
\end{aligned}$$

то есть

$$J(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha J(f) + \beta J(g)$$

почти наверное, что и означает линейность. □

Лемма 13.5. *Простые функции плотны в* $\mathrm{L}^2(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{L}^2(\Lambda)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $H = H(\varepsilon) > > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_{\Lambda} \left|f(\lambda)\right|^2 \mathbb{I}\left\{|f(\lambda)| > H\right\} \mu(\mathrm{d}\lambda) \;<\; \varepsilon.$$

Функция $f(\lambda)\mathbb{I}\left\{|f(\lambda)| \leqslant H\right\}$ аппроксимируется простыми функциями. □

Следствие. *Продолжение интеграла со множества простых функций на все функции в* $\mathrm{L}^2(\Lambda)$ *по формуле*

$$J(f) \;=\; (\mathrm{L}^2) \lim_{n\to\infty} J(f_n),$$

где f_n *— простые функции, корректно.*

Доказательство. См. [1], стр. 231. □

Определение 13.7. Построенное отображение $J : \mathrm{L}^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu) \to \mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, обозначаемое

$$J(f) \;:=\; \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\, Z(\mathrm{d}\lambda),$$

называется *стохастическим интегралом по ортогональной случайной мере* Z.

13.4 Интеграл по ортогональной случайной мере Z, отвечающей σ–конечной мере μ

Замечание. Здесь мне стало лень переписывать текст из книжки.

Замечание. На лекции говорилось: [1]:

1. параграф 6, стр. 231;
2. параграф 8, стр. 234.

14 Лекция от 17.05.17

Интеграл Ито

14.1 Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса

Замечание. На лекции говорилось: [1]:

1. теорема 5, стр. 240

14.2 Интеграл Ито

Замечание. На лекции говорилось: [1]:

1. параграфы 1-3, стр. 278;
2. определения 2 и 3, стр. 284;
3. еще одна теорема ниже (она в книжке есть, но в немного другом виде, так что перепишу на всякий случай)

Теорема 14.1. *Пусть* $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *— фильтрация, а* W *— винеровский относительно нее процесс. Для ступенчатых процессов* f *и* g*, задаваемых формулами*

$$f(t,\,\omega)\;:=\;\xi(\omega)\mathbb{I}_{\{0\}}(t)+\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}(\omega)\mathbb{I}_{\Delta_{i-1}}(t),$$
$$g(t,\,\omega)\;:=\;\eta(\omega)\mathbb{I}_{\{0\}}(t)+\sum_{i=1}^{n}\eta_{i-1}(\omega)\mathbb{I}_{\Delta_{i-1}}(t),$$

где $\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1}$ *— разбиение на полуинтервалы* $(t_i,\,t_{i+1}]$ *отрезка* $[0,\,T]$*, а величины* ξ_i *и* η_i $\mathscr{F}_{t_i}$*–измеримы и имеют конечный второй момент, верны следующие утверждения:*

1. $\mathsf{E}I(f)=0.$

2.

$$\big(I(f),\,I(g)\big)_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\;=\;\int\limits_0^T\mathsf{E}f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Доказательство. 1.

$$\mathsf{E}\xi_{i-1}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\;=\;\mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\left(\xi_{i-1}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\,\big|\,\mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\Big)\;=$$
$$=\;\mathsf{E}\Big(\xi\mathsf{E}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\Big)\;=\;0.$$

2.

$$\big(I(f),\,I(g)\big)_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\;=\;\sum_{i,\,j=1}^{n}\mathsf{E}\xi_{i-1}\overline{\eta_{j-1}}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right).$$

Пусть $i>j$. Тогда

$$\mathsf{E}\xi_{i-1}\overline{\eta_{j-1}}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\;=$$
$$=\;\mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\left(\xi_{i-1}\overline{\eta_{j-1}}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\,\big|\,\mathscr{F}_{t_{j-1}}\right)\Big)\;=$$
$$=\;\mathsf{E}\Big(\xi_{i-1}\overline{\eta_{j-1}}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\mathsf{E}\left(\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\,\big|\,\mathscr{F}_{t_{j-1}}\right)\Big)\;=$$
$$=\;\mathsf{E}\left(\xi_{i-1}\overline{\eta_{j-1}}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)\right)\mathsf{E}\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)\;=\;0.$$

Это же верно, когда $i<j$. Если же $i=j$, то

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\xi_{i-1}\overline{\eta_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\xi_{i-1}\overline{\eta_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathscr{F}_{t_{i-1}}\right)\right) = \\
&\qquad\qquad = \mathsf{E}\xi_{i-1}\overline{\eta_{i-1}}\mathsf{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 = \\
&\qquad\qquad\qquad = \mathsf{E}\xi_{i-1}\overline{\eta_{i-1}}\left(t_i - t_{i-1}\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\big(I(f),\, I(g)\big)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \mathsf{E}\xi_{i-1}\overline{\eta_{i-1}}\left(t_i - t_{i-1}\right) = \int\limits_0^T \mathsf{E}f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.
$$

□

14.3 Формула Ито

Замечание. На лекции говорилось: [1]:

1. параграфы 11-12, стр. 287

15 Лекция от 24.05.17

Стохастические дифференциальные уравнения

15.1 Уравнение Ланжевена

Замечание. На лекции говорилось: [1]:

1. параграфы 13-15, стр. 288

15.2 Стохастические дифференциальные уравнения

Замечание. На лекции говорилось: [1]:

1. параграф 17, стр. 294

Список литературы

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

[3] Ширяев А. Н. Вероятность.

[4] Шашкин А. П. Слабая сходимость вероятностных мер. МГУ, 2013

[5] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.