

# 1 Обязательные задачи к лекциям

## 1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

**Задача 1.** Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  — простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}$ , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых  $a, b \in \mathbb{Z}$  таких, что  $a < 0 < b$ , с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми  $y = a$  и  $y = b$ .

*Решение.* Разобьем линию времени на промежутки длины  $|a - b|$ . Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение  $-1$  (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для  $N$  промежутков получаем вероятность  $P^N$ ; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение  $-1$ , равна

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N = 0.$$

**Задача 2.** Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  и  $S' = \{S'_n, n \geq 0\}$  — независимые простые случайные блуждания в  $\mathbb{Z}^d$ , имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями  $(X_n)_{n \geq 1}$  и  $(X'_n)_{n \geq 1}$ , состоящими из независимых векторов таких, что

$$P(X_1 = e_k) = P(X_1 = -e_k) = P(X'_1 = e_k) = P(X'_1 = -e_k) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь  $e_k$  — вектор в  $\mathbb{R}^d$ , у которого  $k$ -я координата равна единице, а остальные равны нулю,  $k = 1, \dots, d$ . Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\},$$

где  $\mathbb{I}(A)$  — индикатор события  $A$ . Найти все  $d \in \mathbb{N}$ , для которых  $\mathbb{E}N < \infty$ .

*Решение.* Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^k - S_m^{k'} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i(S_n^k - S_m^{k'})t_k}}{2\pi} dt_k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \mathbb{I}\{n = 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^n(t) \varphi^m(-t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(X_1, t)}.$$

Получаем, что

$$\mathbb{E} N = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos t_k \sim \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель  $R$  в степени  $d - 1$ , то интеграл сходится  $\Leftrightarrow d \geq 5$ .