

Содержание

1	Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания	3
1.1	Понятие случайного блуждания	3
1.2	Случайные блуждания	4
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	6
2	Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления	9
2.1	Модель Гальтона–Ватсона	9
2.2	Процессы восстановления	13
3	Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы	14
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	14
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	14
3.3	Элементарная теорема восстановления	16
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	18
4	Лекция от 01.03.17. Точечные процессы	20
4.1	Независимость приращений пуассоновского процесса	20
4.2	Пространственный пуассоновский процесс	21
4.3	Функционал Лапласа точечного процесса	26
4.4	Маркирование пуассоновских процессов	26
5	Лекция от 15.03.17. Процессы с независимыми приращениями	27
5.1	Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)	27
5.2	Теорема Колмогорова о согласованных распределениях	32
5.3	Процессы с независимыми приращениями	34
5.4	Модификация процесса	34
6	Лекция от 22.03.17. Винеровский процесс	35
6.1	Фильтрации. Марковские моменты	35
6.2	Строго марковское свойство	36
6.3	Функции Хаара и Шаудера	40
6.4	Винеровские процессы	42
7	Лекция от 29.03.17. Свойства винеровского процесса	45
7.1	Недифференцируемость траекторий броуновского движения	45
7.2	Принцип отражения	47
7.3	Теорема Башелье	48
8	Лекция от 05.04.17. Мартингалы	50
8.1	Мартингалы. Определения. Примеры	50
8.2	Разложение Дуба	52
8.3	Формула Танаки	53
8.4	Теорема Дуба об остановке	56

9	Лекция от 12.04.17. Марковские процессы	59
9.1	Задача о разорении игрока	59
9.2	Марковские процессы	61
9.3	Свойства переходных вероятностей	63
10	Лекция от 19.04.17. Свойства марковских процессов	65
10.1	Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний	65
10.2	Предельное поведение переходных вероятностей	67
10.3	Генератор марковской цепи с непрерывным временем	71
10.4	Инфинитезимальная матрица конечной марковской цепи	72
11	Лекция от 26.04.17. Применения марковских цепей	73
11.1	Формулировка теоремы Дуба о консервативных цепях. Стационарные марковские цепи	73
11.2	Обратимые цепи	74
11.3	Метод Монте-Карло, использующий цепи Маркова	75
	Список литературы	77

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение 1.2. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Определение 1.4. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y* , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где

$$X(t): \Omega \rightarrow S_t, \quad X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле*.

Определение 1.6. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если $P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$.

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором (Ω, \mathcal{F}, P) существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t, X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ таких, что $P_{X_t} = Q_t, t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности \forall конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть X, X_1, X_2, \dots - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . *Случайным блужданием в \mathbb{R}^d* называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geq 0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. *Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d* — это такое случайное блуждание, что

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leq \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $P(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $P(N < \infty) = 1$.

Замечание. Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $P(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S'_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k),$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Следствие. $P(N = \infty)$ равно 0 или 1. $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $P(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. \square

Теорема 1.3. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow EN = \infty$ (соответственно, невозвратно $\Leftrightarrow EN < \infty$).

Доказательство. Если $EN < \infty$, то $P(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $P(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $P(\tau < \infty) < 1$.

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.

Доказательство. $P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

Случай $d = 1$: $P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

\Rightarrow ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай $d = 2$:

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

\Rightarrow ряд тоже разойдется \Rightarrow блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. \square

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. \square

Следствие. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание невозвратно.

Доказательство. Запишем характеристическую функцию X в явном виде:

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(t, X)} = \sum_{k=1}^d \left(\frac{1}{2d} e^{it_k} + \frac{1}{2d} e^{-it_k} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности $t = 0$. Введем обозначения

$$B_\delta := (-\delta, \delta)^d, \quad V_\delta := [-\pi, \pi]^d \setminus B_\delta.$$

Ясно, что

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \int_{V_\delta} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt < \infty.$$

Поэтому для того чтобы понять, сходится интеграл или нет, достаточно смотреть на интеграл по замыканию малой окрестности нуля B_δ . Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_k))} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{t_1^2} + \dots + 1 - \frac{1}{t_d^2})} \sim \frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c \uparrow 1, \quad t \rightarrow 0.$$

Поскольку якобиан перехода к d -мерной сферической системе координат содержит множитель R в степени $d - 1$, то интеграл сойдется $\Leftrightarrow d \geq 3$. Теорема доказана. \square

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \dots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leq \\ &\leq \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{\left((n/d)!\right)^d} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} = \Theta(n^{-d/2}) \end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geq 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). \square

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в } \varepsilon\text{-окрестности точки } x \right\}$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S* , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega: \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$ — событие вырождения популяции. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. Производящая функция для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = P(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_{\xi}$ и $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
f_{Z_n}(s) &= \mathbb{E} s^{Z_n} = \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right].
\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}, i = 1, \dots, n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s))
\end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\
&= \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)).
\end{aligned}$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_{ξ} непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(A)),$$

то есть $\mathbb{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_{\xi}(p)$, $p \in [0, 1]$. □

Теорема 2.2. Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := P(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$P(\xi \geq 1) = 1, \quad P\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $P(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n . Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1 $P(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $P(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.3. 1. Вероятность вырождения $P(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.
2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $E\xi \leq 1$ имеем $P(A) = 1$, при $E\xi > 1$ имеем $P(A) < 1$.

Доказательство. 1. Пусть $P(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. Зная, что

$$\psi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad \psi_\xi(1) = 1, \quad \exists \psi'_\xi(s), \quad s \in (0, 1).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\forall s \in (0, 1) \quad \psi_\xi(1) - \psi_\xi(s) = \psi'_\xi(\theta)(1 - s), \quad \theta \in (s, 1).$$

Формулой Лагранжа можно пользоваться, поскольку $\psi_\xi(s)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left(1 - \psi'_\xi(\theta)\right).$$

Знаем, что при $s \in (0, 1)$

$$\psi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k, \quad \psi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k.$$

Заметим, что если $\exists p_k > 0$, $k \geq 2$, то $\psi''_\xi(s) > 0$, $s \in (0, 1)$, а значит, $\psi'_\xi(s)$ строго возрастает на $s \in (0, 1)$. Будем сначала рассматривать этот случай.

- (а) Пусть $E\xi = \psi'_\xi(1) \leq 1$. Из этого следует, что $\psi'_\xi(\theta) < 1$. Тогда получаем, что

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left(1 - \psi'_\xi(\theta) \right) > 0 \quad \forall s \in (0, 1),$$

причем $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Из этого следует, что наименьшим корнем уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ будет $s = 1$.

- (б) Пусть $E\xi = \psi'_\xi(1) > 1$. Тогда для всех s , достаточно близких к 1,

$$\psi'_\xi(\theta) > 1, \quad \theta \in (s, 1),$$

в силу непрерывности производящей функции на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left(1 - \psi'_\xi(\theta) \right) < 0,$$

при этом $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Это значит, что на интервале $(0, 1)$ найдется корень уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ в силу непрерывности производящей функции.

- (с) Рассмотрим теперь случай $p_k = 0 \quad \forall k \geq 2$. В рамках этого предположения

$$\psi_\xi(s) = p_0 + (1 - p_0)s,$$

а значит,

$$\psi_\xi(s) - s = p_0 + (1 - p_0)s - s = p_0(1 - s) > 0 \quad \forall s < 1.$$

Из этого следует, что у уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ наименьший корень на отрезке $[0, 1]$ — это $s = 1$. Теорема доказана. \square

Следствие. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда $EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$.

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

\square

Определение 2.2.

При $E\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $E\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $E\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} Z(0) &:= 0; \\ Z(t) &:= \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$P(Y = \alpha) = p \in (0, 1); \quad P(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor$.

Лемма 2.4.

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor, \text{ если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если $P(U = k) = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p , а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_{j+m} с параметром $p \in (0, 1)$. Тогда $\forall t \geq \alpha$ и $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

3 Лекция от 22.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) &= \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p(1-p)^{k_0} \dots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1-p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1-p)^{m-j} = p^{j+1} (1-p)^{m-j} \#M, \end{aligned}$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\#M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\#M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. \square

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. Пусть $t > \alpha$. Тогда

$$EZ^*(t) \leq At, \quad E(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)EU,$$

где

$$EU = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)EU = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p)+1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p)+1) = At,$$

поскольку $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$, а $t > \alpha$; здесь $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $E(Z^*(t))^2$.

$$E(Z^*(t))^2 = DZ^*(t) + (EZ^*(t))^2 = (j+1)DU + (EZ^*(t))^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := DU$. Используя оценку выше для $EZ^*(t)$, получаем, что

$$(j+1)DU + (EZ^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geq (j+1)$. Лемма доказана. \square

Замечание. Пусть случайная величина $X \geq 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : P(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \forall t \geq 0$. Тогда $\forall \alpha > t$

$$EZ(t) \leq EZ^*(t) < \infty, \quad E(Z(t))^2 \leq E(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

Следствие. $P(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$.

Доказательство. Z является неубывающим процессом:

$$s \leq t \rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow P(Z(n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство. \square

Следствие. $EZ(t) \leq At$; $E(Z(t))^2 < Bt^2$, $t > \alpha$.

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.n.} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mu = EX$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ. Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n.n.} EX \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = EX \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} EX \mathbb{I}\{X \leq m\} = EX = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Теорема 3.3. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин X, X_1, X_2, \dots , $X \geq 0$. Тогда

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty;$$

$$\frac{EZ(t)}{t} \xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = 0 \forall t$).

Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \rightarrow \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим (t, ω) такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \text{ почти наверное.}$$

Тогда для этих (t, ω) поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E} \xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E} \xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t, t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(|\xi_t| \mathbb{I} \{ |\xi_t| > c \} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. Если $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathbb{E} \xi_t \rightarrow \mathbb{E} \xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена). $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow \exists$ неубывающая функция g такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E} g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E} (\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E} (Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. \square

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс интенсивности λ $N = \{N(t), t \geq 0\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= X_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Для $\forall t > 0$ величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t), \quad X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k .

Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1) = \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1) = \mathbb{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\
&= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy
\end{aligned}$$

в силу независимости S_n и X_{n+1} . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy = \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy = \\
&= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$P(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1 = 0$ и получим, что

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= P(X_1^t \geq u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\
&= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1},
\end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
&P(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) = \\
&= P\left(\underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots}\right) =
\end{aligned}$$

$$= P(N(t) = n) \underbrace{P(X_1 \geq u_1)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = P(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. \square

Замечание (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени S_n , то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени X_i , а мы пришли на остановку в момент времени t и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

4 Лекция от 01.03.17

Точечные процессы

4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

Определение 4.1. Процесс $\{Y(t), t \geq 0\}$ имеет *независимые приращения*, если

$$\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0), Y(t_1) - Y(t_0), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Теорема 4.1. Пуассоновский процесс интенсивности λ имеет независимые приращения.

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции по n . Введем процесс

$$N^t(s) := \sup \left\{ n : \sum_{k=1}^n X_k^t \leq s \right\}, \quad s \geq 0.$$

Из доказанного ранее следует, что $\{N^t(s), s \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ . Заметим, что по определению

$$N^t(s) \in \sigma \{X_1^t, X_2^t, \dots\},$$

из чего следует, что $N(t)$ независима с $N^t(s) \forall s$. Но

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t),$$

а значит, для $n = 1$ утверждение доказано: $t_0 = t$, $t_1 = t + s$. Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем t_0 и рассмотрим $N^{t_0}(s)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N^{t_0}(t_k - t_0) - N^{t_0}(t_{k-1} - t_0) &= \\ &= N(t_k - t_0 + t_0) - N(t_0) - (N(t_{k-1} - t_0 + t_0) - N(t_0)) = \\ &= N(t_k) - N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0}, N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0}, N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где $s_k = t_k - t_0$, $k = 1, \dots, n$. Но поскольку мы знаем, что N_{t_0} независима с $N^t(s) \forall s$, мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности λ $N^t(s)$. Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана. \square

4.2 Пространственный пуассоновский процесс

Определение 4.2. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, а μ — σ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Тогда процесс $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности μ* , если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \text{Pois}(\mu(B)), \quad B \in \mathcal{B};$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B} \text{ таких, что } B_i B_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \\ &\mu(B_i) < \infty \quad \forall i = 1, \dots, n, \text{ выполнено, что } N(B_1), \dots, N(B_n) \text{ независимы.} \end{aligned}$$

Замечание. В определении выше сознательно не отбрасывались случаи $\mu(B) = 0$ и $\mu(B) = \infty$. Положим по определению, что если $\xi \sim \text{Pois}(a)$, то

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty &\Rightarrow \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty &\Rightarrow P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Определение 4.3. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, а μ — σ -конечная мера на нем. Пусть $\mu(S) < \infty$. Введем независимые случайные величины Y, X_1, X_2, \dots такие, что

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y \sim \text{Pois}(\mu(S)),$$

$$X_i : \Omega \rightarrow S, \quad X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}, \quad \mathbb{P}(X_1 \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(S)}.$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^Y \mathbb{I}_B(X_n), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Более подробно,

$$N(B, \omega) = \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B(X_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

Замечание. $\sum_1^0 := 0$.

Теорема 4.2. В терминах определения 4.3 $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ .

Доказательство. Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, \text{ что } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что

$$\mu(B_i) < \mu(S) < \infty.$$

Убедимся, что $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= \mathbb{P}(N(B_1) = m_1), \dots, \mathbb{P}(N(B_n) = m_n) = \\ &= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n, Y = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k) \end{aligned}$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$m := m_1 + \dots + m_n;$$

$$m_0 := k - m;$$

$$B_0 := S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right).$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы") $X_i, i = 1, \dots, k$, которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках") $B_j, j = 0, \dots, n$; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно m_j частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что Y — пуассоновская случайная величина:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n \right) \mathbb{P}(Y = k) &= \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n \right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} &= \\ = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \dots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)} \right)^{m_0} \dots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)} \right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} &= \\ = e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества B_j попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} &= \\ = e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{\mu(B_0)} &= \\ = \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}, \end{aligned}$$

потому что

$$e^{-\mu(S)} e^{\mu(B_0)} = e^{-(\mu(B_1) + \dots + \mu(B_n))}.$$

Теорема доказана. \square

Лемма 4.3. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_k \sim \text{Pois}(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right),$$

где ряд может расходиться.

Доказательство. Если некоторое $\lambda_k = \infty$, то $\xi_k = \infty$, как и вся левая часть. Далее все $\lambda_k < \infty$.

1. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Имеем

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$

по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что ξ_k неотрицательны). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \xi < \infty$$

почти наверное. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{d}} \xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(u) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(e^{iu} - 1)} = \\ &= \exp \sum_{k=1}^n \lambda_k (e^{iu} - 1) \rightarrow \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e^{iu} - 1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right).$$

2. Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$

Находим последовательность r_j со свойством

$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \geq 1,$$

которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение

$$\eta_j := \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \xi_k;$$

Тогда η_1, η_2, \dots независимы, к тому же

$$\eta_j \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbb{P}(\eta_j \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\eta_j = 0) \geq 1 - e^{-1} > 0.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_j \geq 1) = \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$$

почти наверное. Лемма доказана. \square

Определение 4.4. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, а μ — σ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Пусть теперь $\mu(S) = \infty$. Для каждого S_q вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):

$$Y_q : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y_q \sim \text{Pois}(\mu(S_q)),$$

$$X_{q,i} : \Omega \rightarrow S_q, \quad X \in \mathcal{F} | \mathcal{B} \cap S_q, \quad \mathbb{P}(X_{q,i} \in C) = \frac{\mu(C)}{\mu(S_q)},$$

где

$$C \in \mathcal{B} \cap S_q \in \mathcal{B}.$$

Строим процесс

$$N_q(C) := \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C(X_{q,n}).$$

Положим

$$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q(B \cap S_q), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что все члены ряда независимы, а также что

$$N_q(B \cap S_q) \sim \text{Pois}(\mu(B \cap S_q)).$$

Тогда по лемме 4.3

$$N(B) \sim \text{Pois} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q) \right) = \text{Pois}(\mu(B)).$$

4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

Определение 4.5. Процесс $\{X(B), B \in \mathcal{B}\}$ называется (*простым*) *точечным процессом*, если

$$X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n), \quad B \in \mathcal{B},$$

где

$$Z_n : \Omega \rightarrow S, \quad Z_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}.$$

Определение 4.6. Пусть $\mu(S) = \infty$, μ — σ -конечная мера на (S, \mathcal{B}) , а также

$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_{B \cap S_q}(X_{q,n}).$$

Пусть

$$V_0 := 0, \quad V_k := \sum_{j=1}^k Y_j.$$

Введем Z_n , $n \in \mathbb{N}$. Пусть для $\omega \in \Omega$

$$V_{k-1}(\omega) \leq n < V_k(\omega).$$

Определим

$$Z_n(\omega) := X_{k,n-V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$

Тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n).$$

Определение 4.7. Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда *функционал Лапласа* $\mathcal{L}(f)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}(f) := \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$

где $e^{-\infty} := 0$.

4.4 Маркирование пуассоновских процессов

Определение 4.8. Рассмотрим T, T_1, T_2, \dots — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ независима с $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. На следующей лекции будет показано, что процесс, заданный элементами

$$Z_n := (S_n, T_n)_{n \geq 1},$$

является пространственным пуассоновским процессом с мерой

$$\lambda \nu \otimes \mathbf{G},$$

где ν — мера Лебега на $B(\mathbb{R}_+)$, \mathbf{G} — мера, задаваемая распределением T .

Замечание. Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть S_n — время начала работы с клиентом, T_n — время работы с клиентом, Y_t — число клиентов, обслуживание которых происходит в момент t . Такая модель называется моделью $M|G|\infty$: M указывает на то, что процесс пуассоновский, G (general) указывает на то, что распределение времени обслуживания клиента произвольно, а ∞ означает, что имеется бесконечное число приборов (в том смысле, что не создается очередей: работа с клиентом начинается в момент его прихода). Тогда

$$Y_t = \# \{n : S_n \leq t < S_n + T_n\} = \# \{n : (S_n, T_n) \in B_t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n, T_n) \sim \text{Poiss}((\lambda\nu \otimes G)(B_t)),$$

где

$$B_t := \{(x, y) : 0 \leq x \leq t < x + y\},$$

а точка (x, y) задается парой (S_n, T_n) . Вычислим:

$$\begin{aligned} (\lambda\nu \otimes G)(B_t) &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{I}_{B_t}(x, y) \lambda\nu(dx) G(dy) = \\ &= \int_0^t G(dy) \int_{t-y}^t \lambda dx + \int_t^\infty G(dy) \int_0^t \lambda dx = \int_0^t \lambda y G(dy) + \int_t^\infty \lambda t G(dy) = \\ &= \lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy). \end{aligned}$$

Итак,

$$Y_t \sim \text{Poiss} \left(\lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy) \right) \quad \forall t > 0.$$

Если $ET < \infty$, то

$$\text{Poiss} \left(\lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy) \right) \rightarrow \text{Poiss}(\lambda ET), \quad t \rightarrow \infty.$$

5 Лекция от 15.03.17

Процессы с независимыми приращениями

5.1 Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)

Напоминание. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Z_n : \Omega \rightarrow S$, $Z_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$. Пусть также есть точечный процесс

$$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}$$

согласно определению 4.5. Введем для него функционал Лапласа согласно определению 4.7 по следующей формуле:

$$\mathcal{L}(f) := \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} < \infty,$$

где $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{B}|\mathcal{B}_+$, $e^{-\infty} := 0$, \mathcal{B}_+ — борелевская σ -алгебра на \mathbb{R}_+ .

Теорема 5.1. $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ является пространственным пуассоновским процессом с σ -конечной мерой интенсивности $\mu \Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[\int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx) \right].$$

Доказательство. Сначала докажем **необходимость** (\Rightarrow). Возьмем простую функцию f . Пусть $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой μ . Сначала положим

$$f(x) := \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(x), \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j; \quad B_i \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mu(B_i) < \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)},$$

где перестановка знаков суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Заметим, что если $\xi \sim \text{Pois}(a)$, то

$$\mathbb{E} e^{-v\xi} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr} \mathbb{P}(\xi = r) = e^{a(e^{-v}-1)}.$$

Воспользуемся также независимостью в совокупности $N(B_k)$ в силу того, что множества B_i попарно не пересекаются. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)} &= \prod_{k=1}^m \mathbb{E} e^{-a_k N(B_k)} = \prod_{k=1}^m e^{\mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = \\ &= e^{\sum_{k=1}^m \mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = e^{\int_S (e^{-f(x)}-1) \mu(dx)}. \end{aligned}$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 5.2. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство с σ -конечной мерой μ , $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ — измеримая функция на нем. Тогда существует последовательность $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ простых функций вида (4) таких, что

$$f_j \nearrow f \text{ на } S \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Как и на прошлой лекции, разобьем S на множества S_q , $\mu(S_q) < \infty$, что возможно ввиду σ -конечности меры μ . Определим

$$f_{q,j}(x) = \mathbb{I}_{S_q}(x) \left(\sum_{r=0}^{2^{2j}-1} r 2^{-j} \mathbb{I} \left\{ r 2^{-j} \leq f(x) < (r+1) 2^{-j} \right\} + 2^j \mathbb{I} \left\{ f(x) \geq 2^j \right\} \right).$$

Тогда несложно проверить, что

$$0 \leq f_{q,j} \leq f_{q,j+1}, \quad 0 \leq f_j = \sum_{q=1}^j f_{q,j} \nearrow f \text{ на } S.$$

□

Замечание. Про это (с несколько другим построением простых функций) также можно почитать в [3] (страница 189).

Лемма 5.3. Пусть $0 \leq a_{n,j} \nearrow a_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n < \frac{\epsilon}{3}.$$

Из монотонной сходимости и предельного перехода в неравенстве получаем, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n,j} < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall j.$$

Зафиксируем N . Из сходимости следует, что

$$\forall n \exists N(n) : \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,m(n)} - a_n| < \frac{\epsilon}{3N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1, \dots, N} N(n).$$

Тогда для любого $j > M$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N a_{n,j} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{n,j} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N |a_n - a_{n,j}| + \frac{2\epsilon}{3} \leq N \frac{\epsilon}{3N} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что $\forall \epsilon \exists M : \forall j > M$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \right| \leq \epsilon,$$

то есть показана требуемая сходимость.

2. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Тогда $\forall C > 0 \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=1}^m a_n > 2C.$$

Снова зафиксируем N . Из сходимости следует, что

$$\forall n \exists N(n) : \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,m(n)} - a_n| < \frac{C}{N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1, \dots, N} N(n).$$

Тогда для любого $j > M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \geq \sum_{n=1}^N a_{n,j} \geq \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N |a_n - a_{n,j}| \geq 2C - N \frac{C}{N} = C,$$

чем снова показана требуемая сходимость. Лемма доказана. \square

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем $0 \leq f_j \nearrow f$ по лемме 5.2. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n), \quad j \rightarrow \infty,$$

по лемме 5.3. Тогда

$$\mathbf{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n)} \rightarrow \mathbf{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)}$$

по теореме Лебега. Итак,

$$\mathcal{L}(f) = \lim_{j \rightarrow \infty} \exp \left[\int_S \left(e^{-f_j(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right] = \exp \left[\int_S \left(e^{-f(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right],$$

поскольку

$$\int_S \left(e^{-f_j(x)} - 1 \right) \mu(dx) \rightarrow \int_S \left(e^{-f(x)} - 1 \right) \mu(dx), \quad j \rightarrow \infty,$$

ввиду неотрицательности подынтегрального выражения. Перейдем к доказательству **достаточности** (\Leftarrow). Пусть

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[\int_S \left(e^{-f(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right].$$

Возьмем

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)}.$$

Если $f = \mathbb{I}_B$, то

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)} = \mathbb{E} e^{-a N(B)} = e^{\mu(B)(e^{-a} - 1)},$$

из чего следует, что $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ в силу непрерывного соответствия между преобразованием Лапласа и функциями распределения. Теорема доказана. \square

Приведем доказательство утверждения, которое было дано без доказательства в конце прошлой лекции.

Теорема 5.4. Пусть $(S_n, T_n)_{n=1}^{\infty}$ — точечный процесс, причем (S_n) и (T_n) независимы, где (S_n) — пуассоновский процесс с мерой интенсивности ν , где ν — мера Лебега. Тогда (S_n, T_n) — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\nu \otimes \mathbb{G}$, где \mathbb{G} — распределение T_i .

Доказательство. Вспомним, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)}.$$

Из курса математической статистики известно, что

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \mid \xi = u) = \mathbb{E}g(u, \eta),$$

если ξ независима с η . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)} \mid S_1 = u_1, S_2 = u_2, \dots \right) &= \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n, T_n)} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} e^{-f(u_n, T_n)} \end{aligned}$$

в силу независимости (T_i) . Введем обозначение

$$g(u) := \mathbb{E} e^{-f(u, T_n)} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-f(u, x)} \mathbb{G}(dx).$$

Заметим, что $0 < g(u) \leq 1$. Из курса математической статистики известно, что

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta)) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \mid \xi)\right).$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} \prod_{n=1}^{\infty} g(S_n) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} (-\log g(S_n))} = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)},$$

где $h := -\log g \geq 0$. Воспользуемся тем, что (S_n) — пуассоновский процесс:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)} &= \exp \left[\int_{\mathbb{R}_+} (e^{-h(x)} - 1) \nu(dx) \right] = \exp \left[\int_{\mathbb{R}_+} (g(x) - 1) \nu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-f(x,y)} G(dy) - 1 \right) \nu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[\iint_{\mathbb{R}_+^2} (e^{-f(x,y)} - 1) G(dy) \nu(dx) \right]. \end{aligned}$$

Соответственно, в силу теоремы 5.1, процесс (S_n, T_n) является пространственным пуассоновским процессом. Теорема доказана. \square

5.2 Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, (S_t, \mathcal{B}_t) — семейство измеримых пространств, T — произвольное множество. Введем случайный процесс

$$X := \{X_t, t \in T\}, \quad X_t : \Omega \rightarrow S_t, \quad X_t \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Рассмотрим упорядоченный набор

$$\tau := (t_1, \dots, t_n), \quad t_i \neq t_j \quad \forall i \neq j.$$

Определим тогда

$$S_\tau := S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \quad \mathcal{B}_\tau := \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n}.$$

Введем прямоугольник

$$(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}), \quad B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем также случайный элемент

$$X_\tau : \Omega \rightarrow S_\tau, \quad X_\tau \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_\tau \quad (\Leftrightarrow X_{t_k} \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_{t_k}, \quad k = 1, \dots, n).$$

Распределение X_τ обозначим через $\mathbb{P}_\tau = \mathbb{P}_{t_1 \dots t_n}$, где набор t_1, \dots, t_n упорядочен.

Определение 5.1. Семейство мер $P_{t_1 \dots t_n}$, где

$$t_1, \dots, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t_i \neq t_j \quad \forall i \neq j,$$

называется *семейством конечномерных распределений* $X = \{X_t, t \in T\}$.

Рассмотрим прямоугольник $B = B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$.

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = \\ &= P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n}) = P(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}) = \\ &= P_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}}) \end{aligned}$$

для любой перестановки (i_1, \dots, i_n) . Таким образом, получили свойство:

Свойство 5.1. $\forall n \forall$ перестановки (i_1, \dots, i_n) индексов $(1, \dots, n)$

$$P_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}}) = P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}).$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ &= P_{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}), \end{aligned}$$

поскольку $\{X_{t_k} \in S_{t_k}\} = \Omega$. Таким образом, получили еще одно свойство:

Свойство 5.2.

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ &= P_{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}). \end{aligned}$$

Определение 5.2. Свойства 5.1 и 5.2 называются *условиями согласованности*.

Определение 5.3. Измеримые пространства (S, \mathcal{B}) и (V, \mathcal{A}) *изоморфны*, если

$$\begin{aligned} \exists h : S &\rightarrow V, \quad h \in \mathcal{B}|\mathcal{A}, \\ \exists h^{-1} : V &\rightarrow S, \quad h^{-1} \in \mathcal{A}|\mathcal{B}. \end{aligned}$$

Определение 5.4. Измеримое пространство (S, \mathcal{B}) называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подмножеству отрезка $[0, 1]$.

Определение 5.5. Метрическое пространство (X, ρ) называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным.

Замечание. Любое борелевское подмножество польского пространства является борелевским пространством.

Теорема 5.5 (Колмогорова). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство борелевских пространств. Пусть $P_{t_1 \dots t_n}$ — мера на $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n})$, которая удовлетворяет условиям согласованности 5.1 и 5.2. Тогда на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) существует случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ такой, что $X_t : \Omega \rightarrow S_t, \quad X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T$ и конечномерные распределения которого — это меры $P_{t_1 \dots t_n}$.

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. \square

Замечание. В отличие от теоремы Ломницкого–Улама, в этой теореме накладываются ограничения топологического характера.

Определение 5.6. Пусть Q — мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. *Характеристической функцией меры Q* называется

$$\varphi_Q(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u, x)} Q(dx), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, то

$$\varphi_\xi(u) := \varphi_{P_\xi}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u, x)} P_\xi(dx) = \int_{\Omega} e^{i(u, \xi)} dP = E e^{i(u, \xi)}.$$

Теорема 5.6. Пусть $\varphi_{t_1 \dots t_n}$ — семейство характеристических функций мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Тогда существует случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in T$, для которого $\varphi_{t_1 \dots t_n}$ — характеристические функции конечномерных распределений, в том и только в том случае, когда

1. $\varphi_{t_1 \dots t_n}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) —$
— перестановки $(1, \dots, n)$;
2. $\varphi_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n) = \varphi_{t_1 \dots \hat{t}_k \dots t_n}(u_1, \dots, \hat{0}, \dots, u_n).$

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. \square

Замечание. Если $X = \{X_t, t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, то достаточно рассмотреть $P_{t_1 \dots t_n}$, $t_1 < \dots < t_n$.

Замечание. Про эти теоремы почитать подробнее можно в [1].

5.3 Процессы с независимыми приращениями

Теорема 5.7. Для того чтобы существовал процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ с независимыми приращениями такой, чтобы характеристическая функция случайной величины $X(t) - X(s)$ была равна $\varphi(s, t, \cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \varphi(u, t, v) \quad \forall 0 < s < u < t \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

При этом начальное распределение процесса P_0 может быть выбрано любым.

Замечание (от наборщика). Судя по всему, знание доказательства этой теоремы является обязательным. Доказательство см. [1], стр. 47.

5.4 Модификация процесса

Определение 5.7. Процесс $Y = \{Y_t, t \in T\}$ называется *модификацией* процесса $X = \{X_t, t \in T\}$, если

$$P(Y_t = X_t) = 1 \quad \forall t \in T.$$

Лемма 5.8. Из теоремы 5.6 следует, что существует процесс с независимыми приращениями $N = \{N_t, t \geq 0\}$ такой, что

$$N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)) \quad \forall 0 < s < t.$$

Доказательство. Вспомним, что если $\xi \sim \text{Pois}(a)$, то характеристическая функция ξ равна

$$\varphi_\xi(v) = e^{a(e^{iv} - 1)}.$$

Тогда запишем

$$\varphi_{N_t - N_s}(v) = e^{\lambda(t-s)(e^{iv} - 1)} = \varphi(s, t, v).$$

Но тогда

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \varphi(u, t, v),$$

что и требовалось показать. \square

Замечание. Можно доказать, что у построенного процесса существует такая модификация, что ее траектории обладают следующими свойствами:

- они неубывают;
- они непрерывны справа;
- они имеют предел слева;
- все их скачки имеют величину 1;
- длина промежутков между скачками распределена экспоненциально;
- промежутки между скачками независимы.

Таким образом, этот процесс можно рассматривать как процесс восстановления.

Пример 5.1. Рассмотрим вероятностное пространство $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \nu)$, где ν — мера Лебега, и измеримое пространство $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$. Введем случайные процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ и $Y = \{Y_t, t \in T\}$ следующим образом:

$$X(t, \omega) \equiv 0, \quad Y(t, \omega) = \begin{cases} 1, & t = \omega \\ 0, & t \neq \omega \end{cases}, \quad t, \omega \in [0, 1].$$

Тогда все траектории X непрерывны, а все траектории Y разрывны, но вместе с этим

$$P(X_t \neq Y_t) = \nu(\{t\}) = 0,$$

то есть Y является модификацией X . Таким образом, отношение эквивалентности, порожаемое свойством 'быть модификацией друг друга', не сохраняет непрерывности траекторий.

6 Лекция от 22.03.17

Винеровский процесс

6.1 Фильтрации. Марковские моменты

Определение 6.1. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство. Семейство σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ на этом вероятностном пространстве, где $T \subset \mathbb{R}$, называется *фильтрацией*, если $\forall s < t, s, t \in T$,

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Определение 6.2. Естественная фильтрация процесса $X = (X_t, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, — это семейство

$$\mathcal{F}_t := \sigma \{X_s, s \leq t, s \in T\}, t \in T.$$

Определение 6.3. Отображение $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ называется *марковским моментом относительно фильтрации* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если

$$\forall t \in T \quad \{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Марковский момент τ называется *моментом остановки*, если $\tau < \infty$ почти наверное.

Замечание. Если τ — марковский момент, то $\forall t \in T \quad \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, поскольку

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\}, \quad \{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \tau \leq t - \frac{1}{k} \right\}.$$

Замечание. Если $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, то

$$\tau \text{ — марковский момент} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Пример 6.1. Рассмотрим действительный процесс с дискретным временем $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Введем

$$\tau_B(\omega) := \inf_n \{n : X_n(\omega) \in B\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma \{X_0, X_1, \dots, X_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$$

(если $X_n \notin B \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$, то $\tau = \infty$). Тогда τ_B — марковский момент относительно $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$: проверим, что $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$:

- $n = 0$: $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \sigma \{X_0\} = \mathcal{F}_0$;
- $n \geq 1$: $\{\tau = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \sigma \{X_0, X_1, \dots, X_n\} = \mathcal{F}_n$.

Определение 6.4. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Определим σ -алгебру

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in T\}.$$

Эта σ -алгебра называется *σ -алгеброй событий, наблюдаемых до момента τ* .

Упражнение 6.1. Доказать, что объект из определения 6.4 — σ -алгебра.

6.2 Строго марковское свойство

Определение 6.5. Процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, имеет *стационарные приращения*, если $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall h : t_0, \dots, t_n, t_0 + h, \dots, t_n + h \in T$

$$\begin{aligned} \text{Law}(X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = \\ = \text{Law}(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}) \end{aligned} \quad (5)$$

Замечание. Если процесс X имеет еще и независимые приращения, то

$$(5) \Leftrightarrow \text{Law}(X_t - X_s) = \text{Law}(X_{t+h} - X_{s+h}) \quad \forall t, s, t+h, s+h \in T, s < t.$$

Замечание. Пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ — процесс со стационарными независимыми приращениями.

Лемма 6.1. Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда \forall константы $a > 0$ процесс $Z(t) := X(t+a) - X(a), t \geq 0$, имеет независимые приращения и

$$\{Z_t, t \geq 0\} \text{ независим с } \mathcal{F}_a = \sigma\{X_s, s \leq a\}.$$

Доказательство. Докажем независимость приращений по определению: возьмем $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и рассмотрим

$$Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \dots, Z(t_n) - Z(t_{n-1}).$$

Заметим, что по определению $Z(t)$

$$Z(t_0) = X(t_0 + a) - X(a), \quad Z(t_k) - Z(t_{k-1}) = X(t_k + a) - X(t_{k-1} + a);$$

из этого получаем, что приращения Z независимы вследствие независимости приращений X , которая есть по условию леммы. Докажем второе утверждение леммы: заметим, что σ -алгебра \mathcal{F}_a порождается системой событий

$$\{X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_m} \in B_m\}, \quad 0 \leq s_1 < \dots < s_m \leq a.$$

Поэтому достаточно проверить, что независимы векторы

$$\xi = (X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \quad \text{и} \quad \eta = (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}), \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_n.$$

Заметим, что

$$\xi = \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} \\ \vdots \\ X_{s_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} - X_{s_1} \\ \vdots \\ X_{s_m} - X_{s_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\zeta := (X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_m} - X_{s_{m-1}})$. Тогда ζ и η независимы, поскольку X имеет независимые приращения. Но ξ — это борелевская функция от ζ , следовательно, ξ независим с η . \square

Теорема 6.2 (строго марковское свойство). Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что его траектории непрерывны справа. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации X . Введем

$$Y(t, \omega) := \begin{cases} X(t + \tau(\omega), \omega) - X(\tau(\omega), \omega), & \tau(\omega) < \infty, \\ 0, & \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

По сути, $Y(t) = X(t + \tau) - X(\tau), t \geq 0$. Тогда процесс $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ независим с \mathcal{F}_τ и имеет те же конечномерные распределения, что и процесс $\{X_t - X_0, t \geq 0\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что процесс Y корректно задан. Пополним исходное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ классом нулевых событий \mathcal{N} и получим $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$, то есть

$$\forall A : \mathbb{P}(A) = 0 \quad \forall C \subset A \quad C \in \mathcal{N}, \quad \bar{\mathbb{P}}(C) := 0,$$

где новая σ -алгебра определяется как

$$\bar{\mathcal{F}} = \sigma\{\mathcal{F}, \mathcal{N}\}.$$

Известно, что

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}, \quad \bar{\mathbb{P}}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{N}.$$

Поэтому можно считать, что с самого начала рассматривалось пополненное вероятностное пространство $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$, которое и будет дальше обозначаться просто $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Далее считаем, что все σ -алгебры также пополнены классом нулевых событий.

Если τ — марковский момент относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ и $\alpha = \tau$ почти наверное, то α — тоже марковский момент относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Поэтому далее можем считать, что $\tau < \infty$ на Ω .

Покажем, что $Y(t)$ — случайная величина $\forall t \geq 0$. Введем

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n} \mathbb{I}_{A_{n,k}},$$

где

$$A_{n,1} := \{\omega : \tau(\omega) \leq 2^{-n}\},$$

$$A_{n,k} := \{\omega : (k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leq k 2^{-n}\}, \quad k \geq 2.$$

Тогда $\tau_n \searrow \tau$ на всем Ω . Заметим, что τ_n — марковские моменты относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$:

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq k 2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k 2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t,$$

где $k := \sup\{r : r 2^{-n} \leq t\}$.

Поскольку траектории X непрерывны справа почти наверное, то

$$X(t + \tau_n(\omega), \omega) \rightarrow X(t + \tau(\omega), \omega), \quad n \rightarrow \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Заметим, что

$$\{\omega : X(t + \tau_n(\omega), \omega) \leq z\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X(t + k 2^{-n}, \omega) \leq z, \tau_n = k 2^{-n}\}.$$

Поскольку

$$\{X(t + k 2^{-n}, \omega) \leq z\} \in \mathcal{F}, \quad \{\tau_n = k 2^{-n}\} \in \mathcal{F},$$

то $X(t + \tau_n)$ — случайная величина $\forall n$. Поскольку $X(t + \tau_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t + \tau)$, то $X(t + \tau)$ — тоже случайная величина из полноты случайного пространства.

Таким образом, показали, что $Y(t) = X(t + \tau) - X(\tau)$ — случайная величина $\forall t \geq 0$.

Докажем, что Y независим с \mathcal{F}_τ . Для этого достаточно проверить, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi \in C\}) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\xi \in C) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m),$$

где

$$\xi := (Y(t_1), \dots, Y(t_m)), \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_m.$$

Воспользуемся свойством регулярности вероятностной меры:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \exists$ открытое множество G и замкнутое множество F такие, что $F \subset C \subset G$ и $\mathbf{P}(G \setminus F) < \varepsilon$ (доказательство см., например, [4], стр. 4). Соответственно, достаточно рассматривать только замкнутые C .

Покажем, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi \in C\}) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\xi \in C) \Leftrightarrow \mathbf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathbf{E}\mathbb{I}_A \mathbf{E}f(\xi)$$

для любой непрерывной ограниченной $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Заметим, что импликация слева направо (\Rightarrow) следует из того, что если σ -алгебры, индуцированные на вероятностное пространство двумя случайными величинами, независимы, то матожидание произведения этих случайных величин распадается в произведение соответствующих матожиданий. Докажем импликацию справа налево (\Leftarrow). Положим

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t \leq 0, \\ 1 - t & , \quad t \in [0, 1], \\ 0 & , \quad t > 1. \end{cases}$$

Определим $\rho(x, B) := \inf_{y \in B} \rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками. Заметим, что $\rho(x, B)$ — непрерывная функция от x . Положим

$$f_j(x) := \varphi(j\rho(x, B)), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f_j(x) \searrow \mathbb{I}_B$, $j \rightarrow \infty$ (здесь важно, что B — замкнутое множество!). Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbb{I}_A f_j(\xi) &\rightarrow \mathbf{E}\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{\{\xi \in B\}} = \mathbf{P}(A \cap \{\xi \in B\}), \\ \mathbf{E}\mathbb{I}_A \mathbf{E}f_j(\xi) &\rightarrow \mathbf{E}\mathbb{I}_A \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{\xi \in B\}} = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\xi \in B). \end{aligned}$$

Таким образом, импликация справа налево доказана. Положим

$$\xi_n := (X(t_1 + \tau_n) - X(\tau_n), \dots, X(t_m + \tau_n) - X(\tau_n)).$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, поскольку $\tau_n \searrow \tau$. Следовательно, $\mathbf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n)$. Положим

$$\xi_{n,k} := (X(t_1 + k2^{-n}) - X(k2^{-n}), \dots, X(t_m + k2^{-n}) - X(k2^{-n})).$$

Заметим, что

$$A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} = A \cap A_{n,k} = A \cap \{(k-1)2^{-n} < \tau \leq k2^{-n}\} =$$

$$= A \cap \{\tau \leq k2^{-n}\} \setminus A \cap \{\tau \leq (k-1)2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}.$$

По лемме 6.1 $\xi_{n,k}$ независим с $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A f(\xi_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_A f(\xi_n) \mathbb{I}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(\xi_{n,k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathbb{E} f(\xi_{n,k}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\xi_{n,k} \stackrel{\text{law}}{=} (X(t_1) - X(0), \dots, X(t_n) - X(0)) =: \gamma.$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathbb{E} f(\xi_{n,k}) &= \mathbb{E} f(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} = \mathbb{E} f(\gamma) \mathbb{E}_A = \\ &= \mathbb{E} f(\gamma) \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что $\mathbb{E}_A f(\xi) = \mathbb{E}_A \mathbb{E} f(\gamma) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau$. Осталось взять $A = \Omega$: тогда получится, что $\mathbb{E} f(\xi) = \mathbb{E} f(\gamma)$ и, как следствие,

$$\mathbb{E}_A f(\xi) = \mathbb{E}_A \mathbb{E} f(\xi) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau.$$

□

6.3 Функции Хаара и Шаудера

Определение 6.6. Функции Хаара $H_k(x)$ задаются следующими формулами на $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} H_0(x) &\equiv 1; \\ H_1(x) &= \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{I}_{(\frac{1}{2}, 1]}(x); \\ H_k(x) &= 2^{n/2} \left(\mathbb{I}_{\left(\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{1/2+k-2^n}{2^n}\right]}(x) - \mathbb{I}_{\left(\frac{1/2+k-2^n}{2^n}, \frac{1+k-2^n}{2^n}\right]}(x) \right), \quad 2^n \leq k < 2^{n+1}, \\ n &\in \mathbb{N}; \quad H_{2^n}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Замечание. Известно, что $\{H_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — полная ортонормированная система в $L^2[0, 1]$.

Определение 6.7. Функции Шаудера $S_k(t)$ задаются следующими формулами на $[0, 1]$:

$$S_k(t) = \int_{[0, t]} H_k(u) du = \left\langle H_k, \mathbb{I}_{[0, t]} \right\rangle_{L^2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $H_k(u)$ — функции Хаара.

Замечание. Известно, что $S_k(t)$ непрерывны $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 6.3. Пусть $a_k = O(k^\varepsilon)$ при $k \rightarrow \infty$, где $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$$

сходится равномерно на $[0, 1]$.

Доказательство. Будем доказывать равномерную сходимость к нулю хвостов ряда. Перепишем хвост ряда:

$$\sum_{k > 2^n} a_k S_k(t) = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} a_k S_k(t).$$

Заметим, что

$$S_k(t) \leq 2^{-\frac{n}{2}-1}, \quad 2^n < k \leq 2^{n+1}.$$

Поскольку $|a_k| = O(k^\varepsilon)$, то

$$|a_k| \leq C k^\varepsilon,$$

где C — некоторая фиксированная константа. Оценим:

$$\sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leq C 2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t).$$

Поскольку носители $S_k(t)$ не пересекаются при $2^n < k \leq 2^{n+1}$, то

$$C 2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t) \leq C 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-\frac{n}{2}-1} = C 2^{\varepsilon-n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}.$$

Вернемся к исходному хвосту ряда:

$$\sum_{k > 2^n} |a_k| S_k(t) \leq \sum_{m=n}^{\infty} C 2^{\varepsilon-m(\frac{1}{2}-\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Таким образом, поскольку оценка является числовым рядом, не зависящим от t , показана равномерная сходимость хвостов ряда к нулю, то есть его равномерная сходимость. Лемма доказана. \square

Замечание. Из леммы 6.3 и теоремы Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится к непрерывной функции.

Лемма 6.4. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — случайные величины на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall c > \sqrt{2}$ и для почти всех $\omega \in \Omega$ $\exists N_0(c, \omega)$:

$$|\xi_k| \leq c (\ln k)^{\frac{1}{2}} \quad \forall k \geq N_0(c, \omega).$$

Доказательство. Поскольку $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то

$$P(\xi \geq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \forall x > 0.$$

Оценим этот интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty -de^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{u^2}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$\mathbf{P}(|\xi| \geq x) \leq \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Воспользуемся леммой Бореля–Кантелли:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{P}\left(|\xi_k| \geq c(\ln k)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c(\ln k)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{c^2 \ln k}{2}} \leq \tilde{c} \sum_{k=2}^{\infty} k^{-\frac{c^2}{2}} < \infty.$$

Поскольку ряд из вероятностей сошелся почти наверное, то событий происходит конечное число почти наверное. Из этого следует, что для каждого фиксированного ω можно выбрать k , после которого события выполняться перестают. Лемма доказана. \square

6.4 Винеровские процессы

Определение 6.8. Процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ называется *винеровским*, если

1. $W(0) = 0$ почти наверное;
2. W имеет независимые приращения;
3. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall 0 \leq s < t$;
4. траектории W непрерывны почти наверное.

Теорема 6.5 (явная конструкция винеровского процесса). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Введем

$$W(t, \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k(t), \quad t \in [0, 1],$$

где $S_k(t)$ — функции Шaudера. Тогда $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ — винеровский процесс на $[0, 1]$.

Доказательство. Будем доказывать свойства 1. – 4. для построенного процесса. Свойство 1. выполнено, так как $S_k(0) = 0$. Заметим, что согласно лемме 6.3

$$\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} W(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Более того, согласно лемме 6.4 сходимость равномерна на $[0, 1]$, что дает непрерывность траекторий почти наверное. Таким образом, свойство 4.

тоже получено. Проверим независимость приращений этого процесса. Для этого нужно проверить независимость случайных величин

$$W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}), \quad 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m.$$

Заметим, что случайные величины $\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t)$ имеют предел в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$: поскольку

$$E\xi_k \xi_l = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

то

$$E \left| \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) - \sum_{k=1}^r \xi_k S_k(t) \right|^2 = E \left| \sum_{k=r+1}^n \xi_k S_k(t) \right|^2 = E \left| \sum_{k=r+1}^n S_k^2(t) \right|^2 \rightarrow 0, \\ r, n \rightarrow \infty,$$

как часть хвоста сходящегося ряда, поскольку $S_k(t) \leq 2^{-\frac{n+2}{2}}$. Таким образом, показано, что последовательность частичных сумм фундаментальна в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Известно, что это пространство полно; тогда обозначим

$$V(t) := (L^2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t).$$

Из этого следует, что $V(t) = W(t)$ почти наверное, и частные суммы сходятся к $W(t)$ не только почти наверное, но и в L^2 (потому что из сходимости почти наверное, равно как и из сходимости в L^2 , следует сходимость по вероятности, предел которой определен однозначно).

Рассмотрим теперь вектор из приращений частных сумм:

$$U_n := \left(\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_j), \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_{m-1}) \right).$$

Сразу отметим, что этот вектор является гауссовским, так как он является линейным преобразованием гауссовского вектора из независимых нормальных случайных величин ξ_i . Введем также предельный вектор

$$U := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_0), \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_j), \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_{m-1}) \right).$$

Тогда по доказанному выше

$$U_n \xrightarrow{\text{п.н.}} U, \quad U_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} U.$$

Поскольку $U_n = (U_n^1, \dots, U_n^m)$ — гауссовский вектор, его характеристическая функция имеет известный вид:

$$\varphi_{U_n}(\lambda) = e^{i(\lambda, a) - \frac{1}{2}(C\lambda, \lambda)},$$

где a — математическое ожидание U_n , а C — матрица ковариаций U_n . Заметим, что $EU_n = 0$. Разберемся с матрицей ковариаций:

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_n^j, U_n^r) &= EU_n^j U_n^r = \sum_{k=1}^n S_k(t_{j+1})S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^n S_k(t_j)S_k(t_{r+1}) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^n S_k(t_{j+1})S_k(t_r) + \sum_{k=1}^n S_k(t_j)S_k(t_r). \end{aligned}$$

Поскольку $EU_n^j U_n^r$ — это скалярное произведение в L^2 , которое обладает свойством непрерывности, то

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_n^j, U_n^r) &= EU_n^j U_n^r \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1})S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j)S_k(t_{r+1}) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1})S_k(t_r) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j)S_k(t_r), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим одно из слагаемых, воспользовавшись представлением функций Шaudера через функции Хаара (образующие базис в пространстве L^2), а также равенством Парсеваля:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)S_k(v) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle H_k, \mathbb{I}_{[0, t]} \rangle_{L^2} \langle H_k, \mathbb{I}_{[0, v]} \rangle_{L^2} = \langle \mathbb{I}_{[0, t]}, \mathbb{I}_{[0, v]} \rangle_{L^2} = \\ &= \min(v, t). \end{aligned}$$

Тогда в предположении $t_j < t_r$ получаем, что

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_n^j, U_n^r) &\rightarrow \min(t_{j+1}, t_{r+1}) - \min(t_j, t_{r+1}) - \min(t_{j+1}, t_r) + \min(t_j, t_r) = \\ &= t_{j+1} - t_j - t_{j+1} + t_j = 0. \end{aligned}$$

Так как сходимость почти наверное влечет сходимость характеристических функций и так как из-за сходимости в L^2 есть сходимость моментов, из этого следует, что матрица ковариаций вектора U диагональна, что в свою очередь влечет независимость его компонент U^1, \dots, U^m ; также предельным переходом получаем явный вид характеристической функции вектора U , что доказывает гауссовость вектора. Теорема доказана. \square

Следствие (построение W на $[0, \infty)$). Для каждого $j \in \mathbb{N}$ берем ξ_1^j, ξ_2^j, \dots — независимые одинаково распределенные $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Определяем

$$W^j(t, \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j(\omega) S_k(t).$$

Дальше склеиваем эти процессы последовательно и непрерывно:

$$W(t) := W^j(t) + W(j-1), \quad W(0) \equiv 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда W — винеровский процесс.

Доказательство. Доказательство будет дано позднее. \square

7 Лекция от 29.03.17

Свойства винеровского процесса

7.1 Недифференцируемость траекторий броуновского движения

Теорема 7.1 (Винера — Пэли — Зигмунда). *С вероятностью 1 траектории винеровского процесса $W = \{W(t), t \geq 0\}$ не дифференцируемы ни в одной точке $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Допустим, что $W(\cdot, \omega)$ дифференцируем в точке $s \in [k, k+1)$. Тогда существует правая производная $W'(\cdot, \omega)$ в точке s . Из этого следует, что

$$\exists l, q \in \mathbb{N} : |W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq l(t-s) \text{ при } |t-s| < \frac{1}{q}, \quad t > s.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}_+$ и введем событие

$$A_{l,n,i} := \left\{ \omega : \left| W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \frac{7l}{n}, \quad j = i, i+1, i+2 \right\}.$$

Пусть $\frac{4}{n} < \frac{1}{q}$, то есть $n > 4q$. Тогда если ω — точка дифференцируемости W в точке s , то $\exists i = i(s, n)$, что

$$\begin{aligned} & \left| W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \\ & \leq \left| W(s, \omega) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) \right| + \left| W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W(s, \omega) \right| \leq \\ & \leq \frac{4l}{n} + \frac{3l}{n} = \frac{7l}{n}, \quad j = i, i+1, i+2, \end{aligned}$$

поскольку в разрешенный промежуток длины $\frac{1}{q}$ точно попадет целиком хотя бы 3 отрезка длины $\frac{1}{n}$ (i выбирается таким образом, чтобы $k + \frac{i-1}{n} \leq i < k + \frac{i}{n}$). Таким образом, если $\omega \in D_k$, где D_k — таким ω , что $W(\cdot, \omega)$ дифференцируема в точке $s \in [k, k+1)$, то по показанному выше

$$D_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i}.$$

Покажем, что

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i} \right) = 0 \quad \forall l, q \in \mathbb{N};$$

если мы это сделаем, то тогда автоматически получится, что $\mathbf{P}(D_k) = 0$, что и доказывает утверждение теоремы. Для начала заметим, что

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_n B_n \right) \leq \liminf_n \mathbf{P}(B_n),$$

поскольку пересечение вложено в каждый из отдельно взятых элементов. Поэтому

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i} \right) \leq \liminf_n \mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_{l,n,i} \right) \leq \liminf_n \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_{l,n,i}).$$

Оценим общий член этой суммы. Так как приращения винеровского процесса независимы и стационарны, то

$$\mathbf{P}(A_{l,n,i}) = \left(\mathbf{P} \left(|W(1/n) - W(0)| \leq \frac{7l}{n} \right) \right)^3 = \left(\mathbf{P} \left(\frac{|W(1/n)|}{\sqrt{1/n}} \leq \frac{7l}{\sqrt{n}} \right) \right)^3.$$

Введем обозначение

$$\xi := \frac{|W(\frac{1}{n})|}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Тогда воспользуемся тем, что

$$\mathbf{P}(|\xi| \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{2z}{\sqrt{2\pi}} = z \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

и продолжим цепочку неравенств:

$$\left(\mathbf{P} \left(\frac{|W(1/n)|}{\sqrt{1/n}} \leq \frac{7l}{\sqrt{n}} \right) \right)^3 \leq \left(\frac{7l}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3.$$

Тогда, возвращаясь к сумме, получаем, что

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i} \right) \leq \liminf_n n \left(\frac{7l}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3 = 0.$$

Теорема доказана. \square

Замечание. Это доказательство (точно такое же, но с картинками) можно посмотреть в [1], стр. 76.

Замечание. Из последнего шага доказательства становится ясно, почему нужно было брать именно три отрезка, а не один или два.

7.2 Принцип отражения

Теорема 7.2 (принцип отражения). Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, τ — момент остановки относительно естественной фильтрации процесса W . Введем новый (отраженный) процесс

$$Z(t, \omega) = \begin{cases} W(t, \omega), & t \leq \tau(\omega), \\ 2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega), & t > \tau(\omega) \end{cases}$$

для всех $\omega \in \{\tau < \infty\}$; для всех остальных ω определим $Z(t, \omega) \equiv 0$. Иными словами,

$$Z(t, \omega) = W(t, \omega) \mathbb{I}\{t \leq \tau(\omega)\} + (2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega)) \mathbb{I}\{t > \tau(\omega)\}.$$

Тогда $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс.

Доказательство. Введем польское (то есть метрическое полное сепарабельное) пространство $C_0(\mathbb{R}_+) = \{f : f \in C(\mathbb{R}_+), f(0) = 0\}$ с метрикой

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{t \in [0, n]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup_{t \in [0, n]} |f(t) - g(t)|}.$$

Введем два вспомогательных процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ и $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} X(t, \omega) &:= W(\min(t, \tau(\omega)), \omega), \\ Y(t, \omega) &:= W(t + \tau, \omega) - W(\tau). \end{aligned}$$

Смысл этих процессов таков: X — это процесс W , остановленный после момента τ ; Y — это процесс W , отсеченный в момент τ . Сразу отметим, что Y — винеровский процесс по строго марковскому свойству (теорема 6.2). Введем для всех $b \in \mathbb{R}_+$, $f, g \in C_0(\mathbb{R}_+)$ отображение "склеивания" h функций f и g в точке b :

$$h(b, f(\cdot), g(\cdot))(t) := f(t) \mathbb{I}_{[0, b]}(t) + (f(b) + g(t - b)) \mathbb{I}_{(b, \infty)}(t).$$

Отметим, что

$$h : (\mathbb{R}_+ \times C_0[0, \infty) \times C_0[0, \infty), \tilde{\rho}) \rightarrow (C_0[0, \infty), \rho),$$

где метрика $\tilde{\rho}$ вводится следующим образом:

$$\tilde{\rho} := \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\},$$

где ρ_1 — евклидова метрика на \mathbb{R}_+ , а ρ_2 и ρ_3 совпадают с метрикой ρ , является непрерывным отображением. Заметим, что тогда для всех $\omega \in \{\tau < \infty\}$

$$\begin{aligned} h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), Y(\cdot, \omega)) &= W(\cdot, \omega), \\ h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)) &= Z(\cdot, \omega). \end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), Y(\cdot, \omega)) \stackrel{\text{law}}{=} h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)),$$

для чего достаточно доказать, что элементы (τ, X, Y) и $(\tau, X, -Y)$ имеют одинаковое распределение, в силу непрерывности h . Перейдем к этому.

Сначала докажем, что вектор (τ, X) \mathcal{F}_τ -измерим. Для этого достаточно доказать, что \mathcal{F}_τ -измеримы его компоненты. \mathcal{F}_τ -измеримость τ очевидна. Перейдем к доказательству \mathcal{F}_τ -измеримости X . Для этого построим последовательность сходящихся к X \mathcal{F}_τ -измеримых случайных элементов X_n . Введем величины

$$a_n(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-n} \mathbb{I}_{[k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n})}(\tau(\omega)) \nearrow \tau(\omega), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \omega.$$

Построим по ним

$$X_n(\omega) := W(\min(t, a_n(\omega)), \omega).$$

Тогда X_n \mathcal{F}_τ -измеримы и, как следствие, X \mathcal{F}_τ -измерим. Тогда и весь вектор (τ, X) \mathcal{F}_τ -измерим. По строго марковскому свойству Y независим с \mathcal{F}_τ и, как следствие, с вектором (τ, X) . Вследствие этого получаем, что

$$\text{Law}((\tau, X, Y)) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(Y) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(W).$$

Поскольку Y — винеровский процесс, то

$$\text{Law}((\tau, X, -Y)) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(-Y) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(W).$$

Теорема доказана. \square

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 85.

7.3 Теорема Башелье

Лемма 7.3. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Положим

$$\tau_y := \inf \{t \geq 0 : W(t) = y\}.$$

Тогда $\forall t, x, y \geq 0$

$$\mathbb{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) = \mathbb{P}(W(t) > y + x).$$

Доказательство. При $y = 0$ теорема верна, поскольку равенство в ее формулировке превращается в равенство $\mathbb{P}(W(t) \leq -x) = \mathbb{P}(W(t) \geq x)$.

Пусть теперь $y > 0$. Согласно обязательной задаче 6.2 τ_y — момент остановки относительно естественной фильтрации W . Построим отраженный процесс $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ так же, как в теореме 7.2, используя τ_y в качестве момента отражения τ . Введем

$$\sigma_y := \inf \{t \geq 0 : Z(t) = y\}.$$

Очевидно, тогда $\tau_y \equiv \sigma_y$ для всех $\omega \in \{\tau_y < \infty\}$. Заметим, что

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W \in B) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W \in B\right) = \mathbf{P}(W \in \tilde{B} \cap B)$$

$\forall B \in \mathcal{B}(C[0, \infty))$, $t \geq 0$, где

$$\tilde{B} = \left\{ f \in C[0, \infty) : \sup_{s \in [0, t]} f(s) \geq y \right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathbf{P}(\sigma_y \leq t, Z \in B) = \mathbf{P}(Z \in \tilde{B} \cap B) = \mathbf{P}(W \in \tilde{B} \cap B)$$

по теореме 7.2. Таким образом, показали, что случайные элементы (τ_y, W) и (σ_y, Z) имеют одинаковые распределения. Из этого следует, что $\forall x \in \mathbb{R}$, $t, y \geq 0$

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) = \mathbf{P}(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x).$$

В силу непрерывности траекторий W имеем $W(\tau_y(\omega), \omega) = y$, $y \geq 0$. Поэтому для $t \geq \sigma_y(\omega)$ по определению Z получаем, что

$$Z(t, \omega) = 2W(\tau_y(\omega), \omega) - W(t, \omega) = 2y - W(t, \omega).$$

Таким образом, при всех $y \geq 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) &= \mathbf{P}(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x) = \\ &= \mathbf{P}(\sigma_y \leq t, W(t) > y + x) = \mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) > y + x). \end{aligned}$$

Тогда при $x \geq 0$ получаем, что

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) = \mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) > y + x) = \mathbf{P}(W(t) > y + x),$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 89.

Теорема 7.4 (Башелье). Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W_s \geq y\right) = 2\mathbf{P}(W_t \geq y) = \mathbf{P}(|W_t| \geq y).$$

Доказательство. Возьмем $x = 0$ в лемме 7.3. Тогда получим, что

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W(t) < y\right) = \mathbf{P}(W(t) > y).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y \right) = \\
& = \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W(t) < y \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W(t) \geq y \right) = \\
& = \mathbb{P} (W(t) > y) + \mathbb{P} (W(t) \geq y) = 2 \mathbb{P} (W(t) \geq y),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 90.

8 Лекция от 05.04.17

Мартингалы

8.1 Мартингалы. Определения. Примеры

Определение 8.1. Действительный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, называется *мартингалом* относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если выполнены три условия:

1. $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathbb{E} |X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathbb{E} (X_t | \mathcal{F}_s) \stackrel{\text{н.н.}}{=} X_s \quad \forall s, t \in T, s \leq t$.

X называется *субмартингалом* относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если

1. $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathbb{E} |X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathbb{E} (X_t | \mathcal{F}_s) \stackrel{\text{н.н.}}{\geq} X_s \quad \forall s, t \in T, s \leq t$.

X называется *супермартингалом* относительно $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если

1. $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathbb{E} |X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathbb{E} (X_t | \mathcal{F}_s) \stackrel{\text{н.н.}}{\leq} X_s \quad \forall s, t \in T, s \leq t$.

Замечание. Дальше будем также использовать для мартингала обозначение $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Пример 8.1. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — процесс с независимыми приращениями, $\mathcal{F}_t := \sigma \{X_s, s \leq t, s \in T\}$, $t \in T$, — естественная фильтрация процесса. Тогда X — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{E} X_t = \mathbb{E} X_s \quad \forall s, t \in T$, то есть $\mathbb{E} X_t = \text{const}$.

Доказательство. Действительно, пусть X — мартингал, $s \leq t$. Тогда

$$\mathbb{E} (X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E} (X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E} (X_t - X_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E} (X_s | \mathcal{F}_s).$$

Известны следующие свойства условного математического ожидания: во-первых, если случайная величина ξ независима с σ -алгеброй \mathcal{F} , то

$$\mathbb{E} (\xi | \mathcal{F}) = \mathbb{E} \xi;$$

во-вторых, если случайная величина η измерима относительно σ -алгебры \mathcal{F} , то

$$\mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}) = \eta.$$

Воспользуемся в силу независимости приращений этими свойствами с $\xi = X_t - X_s$ и $\eta = X_t - X_s$:

$$\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_s + X_s = X_s$$

по условию 3. Из этого и получаем, что $\forall t, s \in T$

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s.$$

Для доказательства утверждения в обратную сторону достаточно провести то же рассуждение в обратном порядке. \square

Следствие. Винеровский процесс $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — мартингал относительно естественной фильтрации, поскольку $\mathbb{E}W_t \equiv 0$. Пуассоновский процесс интенсивности λ $N = \{N_t, t \geq 0\}$ не является мартингалом относительно естественной фильтрации, поскольку $\mathbb{E}N_t = \lambda t \neq \text{const}$. Однако процесс $\{N_t - \mathbb{E}N_t, t \geq 0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации.

Замечание. Если X — мартингал относительно какой-то фильтрации, то он заведомо является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса.

Пример 8.2. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые случайные величины такие, что $\mathbb{E}|\xi_k| < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Построим по ним процесс $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда $(S_n)_{n \geq 1}$ — мартингал относительно естественной фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ процесса S (которая совпадает с естественной фильтрацией последовательности ξ_1, ξ_2, \dots) $\Leftrightarrow \mathbb{E}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_3 = \dots = 0$ (при этом $\mathbb{E}\xi_1$, вообще говоря, может быть любым). Если величины ξ_k при этом еще и одинаково распределены, то тогда и $\mathbb{E}\xi_1$ обязано равняться нулю.

Пример 8.3 (мартингал Леви). Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, $T \subset \mathbb{R}$, — фильтрация, ξ — случайная величина, $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Тогда

$$X_t := \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t), \quad t \in T, \quad \text{— мартингал относительно } (\mathcal{F}_t)_{t \in T}.$$

Доказательство. Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1. $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по определению условного матожидания;
2. $\mathbb{E}|X_t| < \infty$, так как

$$\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t)\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|\xi| | \mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}|\xi| < \infty;$$

3. $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ по телескопическому свойству условного матожидания

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}_1) | \mathcal{A}_2\right) = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}_2) \quad \forall \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{F},$$

примененному к $\mathcal{A}_2 = \mathcal{F}_s$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{F}_t$.

\square

Пример 8.4. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные величины, $E\xi_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Построим по ним процесс $X_n := \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n$. Тогда $(X_n)_{n \geq 1}$ — мартингал относительно естественной фильтрации (как и в примере 8.2, в этом случае $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$).

Доказательство. Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1. $X_t \in \mathcal{F}_t \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по определению \mathcal{F}_t ;
2. $E|X_t| = 1 < \infty$;
3. $E(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_t \mid \mathcal{F}_s) = E(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_s \cdot \dots \cdot \xi_t \mid \mathcal{F}_s) = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_s E(\xi_{s+1} \cdot \dots \cdot \xi_t) = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_s = X_s$.

□

8.2 Разложение Дуба

Определение 8.2. Процесс $A = \{A_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *предсказуемым*, если A_n измерим относительно $\mathcal{F}_{n-1} \quad \forall n \geq 0$. Здесь полагаем $\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$.

Теорема 8.1 (Дуба). Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — случайный процесс такой, что $E|X_n| < \infty \quad \forall n$, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, причем $X_n \in \mathcal{F}_n \mid \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$X = M + A,$$

то есть

$$X_n = M_n + A_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$\begin{aligned} M &= (M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ — мартингал относительно фильтрации } (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, \\ A &= (A_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ — предсказуемый процесс такой, что } A_0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Это представление процесса X в виде суммы мартингала и предсказуемого процесса однозначно почти наверное.

Доказательство. Теорема утверждает существование и единственность (почти наверное) такого разложения. Сначала предположим, что существование доказано, и выведем единственность.

Положим $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$. Тогда $\Delta X_n = \Delta M_n + \Delta A_n$, то есть $\Delta A_n = \Delta X_n - \Delta M_n$. Из предсказуемости процесса A получаем, что

$$\Delta A_n = E(\Delta A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - E(\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}),$$

при этом

$$E(\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1} = 0$$

по свойству 3. из определения мартингала. Таким образом, получаем, что

$$\Delta A_n = E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}),$$

из чего вытекает, что

$$A_n = \sum_{k=1}^n E(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}),$$

то есть A_n определяется по X однозначно (почти наверное, как и вообще равенство случайных величин); тогда и $M_n = X_n - A_n$ тоже определяется однозначно по X , то есть разложение единственно.

Теперь докажем существование. Рассуждение выше подсказывает нам явный вид A_n . Положим

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad n \geq 1; \quad A_0 \equiv 0.$$

Тогда $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — предсказуемый процесс. Тогда

$$M_n := X_n - A_n \Rightarrow \Delta M_n := \Delta X_n - \Delta A_n = \Delta X_n - \mathbb{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}),$$

из чего получаем, что

$$\mathbb{E}(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

то есть $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Теорема доказана. \square

Замечание. Несмотря на то что все равенства случайных величин в теореме 8.1 считаются равенствами почти наверное, в формулировке теоремы A_0 полагается тождественно равным нулю. Это делается, чтобы обеспечить измеримость A_0 относительно антидискретной σ -алгебры \mathcal{F}_{-1} . Если договориться, что все σ -алгебры пополняются классом нулевых событий, то можно считать, что $A_0 = 0$ почти наверное.

При этом если $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — мартингал, то и $(X_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in T}$ — мартингал, где $\tilde{\mathcal{F}}_t$ — σ -алгебра \mathcal{F}_t , пополненная классом нулевых событий.

8.3 Формула Танаки

Лемма 8.2. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция. Тогда

$$(h(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ — субмартингал.}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Йенсена для условного математического ожидания:

$$\mathbb{E}(h(X_n) | \mathcal{F}_{n-1}) \geq h(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) = h(X_{n-1}).$$

\square

Пример 8.5 (формула Танаки). Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = 1/2$. Построим по ним процесс $S_n := \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 := 0$. Тогда из примера 8.1 следует, что $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал, а из леммы 8.2 следует, что $(|S_n|)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — субмартингал относительно фильтрации, состоящей из σ -алгебр вида $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Найдем разложение Дуба для этого субмартингала, подходящего под условия теоремы 8.1.

Знаем из 8.1, что

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad X_k = |S_k|,$$

то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|S_k| - |S_{k-1}| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{E}(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) - |S_{k-1}| \right).$$

Рассмотрим первое слагаемое члена суммы, зная, что S_{k-1} \mathcal{F}_{k-1} -измеримо, что ε_k независимо с \mathcal{F}_{k-1} и что $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$, $|\varepsilon| = 1$ почти наверное:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(|S_{k-1} + \varepsilon_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= \mathbb{E}(|S_{k-1} + \varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + |S_{k-1} + \varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} + \\ &+ |S_{k-1} + \varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}((S_{k-1} + \varepsilon_k) \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \\ &+ \mathbb{E}(|\varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) - \mathbb{E}((S_{k-1} + \varepsilon_k) \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} \mathbb{E}((S_{k-1} + \varepsilon_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - \\ &- \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \mathbb{E}((S_{k-1} + \varepsilon_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}. \end{aligned}$$

Итак, получили, что

$$\mathbb{E}(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.$$

Заметим, что

$$|S_{k-1}| = S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.$$

Из двух равенств выше получаем, что

$$\mathbb{E}(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) - |S_{k-1}| = \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\},$$

то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}.$$

Рассмотрим M_n (напомним, что $S_0 \equiv 0$):

$$\begin{aligned} M_n &= X_n - A_n = \sum_{k=1}^n (|S_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (|S_{k-1} + \varepsilon_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - \varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} + |\varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - \varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \operatorname{sign} S_{k-1}, \end{aligned}$$

где

$$\text{sign } x := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили, что

$$\underbrace{|S_n|}_{X_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \Delta S_k \text{sign } S_{k-1}}_{M_n}.$$

Это разложение Дуба и называется **формулой Танаки**.

Следствие. Обозначим через $L_n(0)$ число нулей последовательности $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$. Из формулы выше явно видно, что $L_n(0) = A_n$. Верно следующее утверждение:

$$\mathbb{E}L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Так как $\mathbb{E}M_n = 0 \quad \forall n$, то $\mathbb{E}A_n = \mathbb{E}|S_n|$. Поскольку $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, то

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty$$

по центральной предельной теореме. Тогда

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} |Y|.$$

Как было показано в теореме 3.3,

$$\xi_n \xrightarrow{\text{law}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E}\xi_n \rightarrow \mathbb{E}\xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Согласно теоремам 3.4 и 3.5, для того чтобы показать сходимость матожиданий, достаточно найти $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_n \mathbb{E}|\xi_n|^{1+\delta} < \infty.$$

Возьмем $\delta = 1$. Тогда

$$\mathbb{E} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \mathbb{E} \frac{S_n^2}{n} = \frac{\mathbb{D}S_n}{n} = \frac{n\mathbb{D}\varepsilon_1}{n} = 1 < \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{E} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathbb{E}|Y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть

$$\mathbb{E}L_n(0) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} n,$$

что и требовалось доказать. □

8.4 Теорема Дуба об остановке

Теорема 8.3. Пусть X_n измерима относительно $\mathcal{F}_n \forall n$, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, $E|X_n| < \infty \forall n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. (X_n, \mathcal{F}_n) — мартингал;
2. \forall марковских моментов $0 \leq \sigma \leq \tau \leq m$, где $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число,

$$E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

Доказательство. Докажем $1. \Rightarrow 2.$

Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — мартингал. Заметим, что

$$E|X_\tau| = E \sum_{k=0}^m |X_\tau| \mathbb{I}\{\tau = k\} \leq \sum_{k=0}^m E|X_k| < \infty,$$

поэтому вообще целесообразно говорить о матожидании из утверждения 2. Для того чтобы доказать, что $E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$, необходимо и достаточно проверить, что X_σ — \mathcal{F}_σ -измеримая случайная величина, а также что $\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$EX_\tau \mathbb{I}(A) = EX_\sigma \mathbb{I}(A),$$

то есть что выполнено интегральное свойство.

Покажем \mathcal{F}_σ -измеримость X_σ . Для этого по определению \mathcal{F}_σ нужно показать, что \forall борелевских B и $\forall k$

$$\{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leq k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leq k\} &= \bigcup_{r=0}^m \{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma = r\} \cap \{\sigma \leq k\} = \\ &= \bigcup_{r=0}^{\min(m, k)} \{X_r \in B\} \cap \{\sigma = r\}. \end{aligned}$$

При этом $\{X_r \in B\} \in \mathcal{F}_r$ и $\{\sigma = r\} \in \mathcal{F}_r$, поскольку σ — марковский момент. Тогда, поскольку $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — фильтрация,

$$\{X_r \in B\} \cap \{\sigma = r\} \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_{\min(m, k)} \subset \mathcal{F}_k.$$

Измеримость доказана.

Проверим **интегральное свойство**. Напомним, что для этого нужно доказать равенство

$$EX_\tau \mathbb{I}(A) = EX_\sigma \mathbb{I}(A)$$

$\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$. Сначала заметим, что, поскольку $\sigma \leq \tau$ почти наверное,

$$\mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\} \stackrel{\text{п.н.}}{=} 1.$$

Тогда

$$\mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\} = \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\}.$$

Обозначим $\mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} = \mathbb{I}_{A \cap \{\sigma=k\}} = \mathbb{I}_{B_k}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\} &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} (\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}) = \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}. \end{aligned}$$

Поскольку X — мартингал, то

$$\mathbb{E}(X_{k+1} | \mathcal{F}_k) = X_k.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} &= \\ = \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(X_{k+1} | \mathcal{F}_k) \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\{\tau \geq k+1\} = \Omega \setminus \{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_k$, так как τ — марковский момент, и $B_k \in \mathcal{F}_k$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(X_{k+1} | \mathcal{F}_k) \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} \right] &= \\ = \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\tau \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(X_{k+1} \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} | \mathcal{F}_k) \right] &= \\ = \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\tau \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(X_{k+1} \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что

$$\sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\tau \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_{k+1} \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}.$$

Продолжая далее, расписывая $\{\tau \geq k+1\} = \{\tau = k+1\} + \{\tau \geq k+2\}$ и так далее, получаем, что

$$\sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} (\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau = k+1\} + \dots + \mathbb{I}\{\tau = m\}) = \\
&= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_\tau \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_\tau \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \\
&= \mathbb{E} X_\tau \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\tau \geq \sigma\} = \mathbb{E} X_\tau \mathbb{I}_A,
\end{aligned}$$

поскольку, как указывалось выше, $\mathbb{I}\{\tau \geq \sigma\} = 1$. Таким образом, интегральное свойство доказано, а значит, доказано $1. \Rightarrow 2.$

Докажем $1. \Leftarrow 2.$

Пусть известно, что \forall моментов остановки $\sigma \leq \tau \leq m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E} (X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma,$$

и нужно доказать, что $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Проверим свойство 3.: возьмем $i < j$, $\sigma \equiv i$, $\tau \equiv j$. Тогда $\mathcal{F}_\sigma \equiv \mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_\sigma \equiv \mathcal{F}_i$, а значит, $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Теорема доказана. \square

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 8.3. Тогда для любого ограниченного марковского момента $\tau \leq m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_0,$$

поскольку 0 — ограниченный марковский момент, $0 \leq \tau$.

Следствие. Пусть $|X_{\min(\tau, n)}| \leq C \forall n \geq 0$. Тогда

$$\mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_0.$$

Доказательство. Заметим, что $\tau_n := \min(\tau, n)$ — это ограниченный марковский момент. Значит, для него и нуля применима теорема 8.3 и, следовательно,

$$\mathbb{E} X_{\tau_n} = \mathbb{E} X_0.$$

Заметим также, что $X_{\tau_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\tau$, поскольку для каждой реализации процесса (то есть для каждой $\omega \in \Omega$) найдется достаточно большое n такое, что $n > \tau(\omega)$ и что, следовательно, $\min(n, \tau(\omega)) = \tau(\omega)$. При этом по условию $|X_{\min(\tau, n)}| \leq C \forall n \geq 0$. Поэтому применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости, по которой

$$\mathbb{E} X_0 = \mathbb{E} X_{\tau_n} \rightarrow \mathbb{E} X_\tau, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать. \square

Теорема 8.4 (первое тождество Вальда). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{E} |\xi_1| < \infty$, τ — марковский момент относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\mathbb{E} \tau < \infty$. Тогда

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \right) = \mathbb{E} \xi_1 \mathbb{E} \tau.$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geq k\}.$$

Заметим, что

$$\{\tau \geq k\} = \Omega \setminus \{\tau \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Поэтому, поскольку ξ_i — независимые случайные величины, ξ_k независима с $\mathbb{I}\{\tau \geq k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \right) &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k \mathbb{E} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \\ &= \mathbb{E} \xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \mathbb{E} \xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq k). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq k) = \sum_{p=1}^{\infty} p \mathbb{I}\{\tau = p\},$$

то есть

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \right) = \mathbb{E} \xi_1 \mathbb{E} \tau,$$

что и требовалось доказать. \square

9 Лекция от 12.04.17

Марковские процессы

9.1 Задача о разорении игрока

Пример 9.1 (задача о разорении игрока). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = 1 - p =: q$. Возьмем целые числа x, a, b такие, что $a < b$, $x \in (a, b)$. Положим

$$\begin{aligned} S_0 &:= x, \\ S_n &:= x + \xi_1 + \dots + \xi_n. \end{aligned}$$

Сразу отметим, что $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал, поскольку это процесс с независимыми приращениями и постоянным матожиданием. Введем также

$$\begin{aligned} \tau_a &:= \inf\{n : S_n = a\}, \\ \tau_b &:= \inf\{n : S_n = b\}, \\ \tau &:= \inf\{n : S_n \notin (a, b)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что все они являются марковскими моментами относительно естественной фильтрации процесса $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где $\mathcal{F}_n := \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $n \geq 1$, а $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Также отметим, что τ — это момент остановки (это следует из обязательной задачи 1.1).

Задача состоит в том, чтобы найти $P(\tau_a < \tau_b)$.

Рассмотрим сначала отдельно (являющийся особым) случай $p = q = 1/2$. Заметим, что

$$|S_{\tau_n}| := |S_{\min(\tau, n)}| \leq \max(|a|, |b|),$$

поскольку либо момент τ первого выхода на границу интервала (a, b) наступил до n , и тогда неравенство верно, либо не наступил, тогда верно даже строгое неравенство (потому что все еще находимся внутри интервала). Это означает, что можно применить следствие 2 из теоремы 8.3 и сказать, что

$$ES_\tau = ES_0 = x.$$

При этом

$$ES_\tau = aP(S_\tau = a) + bP(S_\tau = b).$$

Поскольку τ — момент (первого) выхода на границу интервала (a, b) , то $P(S_\tau = a) + P(S_\tau = b) = 1$. Таким образом,

$$x = aP(S_\tau = a) + b(1 - P(S_\tau = a)),$$

то есть

$$P(\tau_a < \tau_b) = P(S_\tau = a) = \frac{b - x}{b - a}.$$

Теперь рассмотрим случай $p \neq q$.

Положим

$$X_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Действительно, проверим три свойства из определения мартингала:

1. X_n измерим относительно \mathcal{F}_n ;
2. $E|X_n| < \infty$, так как

$$E|X_n| = \sum_{k=x-n}^{x+n} \left|\frac{q}{p}\right|^k P(S_n = k);$$

- 3.

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1 + \dots + \xi_n + \xi_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} E\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} = \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \left(p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = X_n. \end{aligned}$$

Таким образом, показали, что это мартингал. При этом

$$|X_n| \leq \max\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a, \left(\frac{q}{p}\right)^b\right).$$

Тогда, как и выше, применимо следствие 2 из теоремы 8.3 и, следовательно,

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Вместе с этим

$$\mathbb{E}X_\tau = \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathbb{P}(S_\tau = b)$$

и

$$\mathbb{P}(S_\tau = a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1,$$

то есть

$$\left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b (1 - \mathbb{P}(S_\tau = a)) = \left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

или

$$\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \mathbb{P}(S_\tau = a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

9.2 Марковские процессы

Определение 9.1. Введем σ -алгебру $\mathcal{F}_{\geq s} = \sigma\{X_u, u \geq s, u \in T\}$. Тогда процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, называется *марковским процессом*, если $\forall s \in T$ и $\forall B \in \mathcal{F}_{\geq s}$

$$\mathbb{P}(B | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(B | X_s).$$

Замечание (эквивалентное определение 1). Пусть $X_t : \Omega \rightarrow S_t$, где $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство борелевских пространств. Тогда процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ является марковским процессом тогда и только тогда, когда для любых $s \leq t$, $s, t \in T$ и для любой \mathcal{B}_t -измеримой функции $f : S_t \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s).$$

Доказательство. Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 184. \square

Замечание (эквивалентное определение 2). Марковость относительно своей естественной фильтрации процесса $X = \{X_t, t \in T\}$, принимающего при каждом $t \in T$ значения в борелевском пространстве (S_t, \mathcal{B}_t) , равносильна следующему свойству: для любого $m \geq 1$ и всех $s_1 < \dots < s_m < s \leq t$, где s, t и все s_i лежат в T , а также для произвольной ограниченной \mathcal{B}_t -измеримой функции f

$$\mathbb{E}(f(X_t) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s).$$

Последнее соотношение эквивалентно тому, что для любого множества $B \in \mathcal{B}_t$

$$\mathbb{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = \mathbb{P}(X_t \in B | X_s).$$

Доказательство. Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 185. \square

Теорема 9.1. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда X — марковский процесс относительно своей естественной фильтрации.

Доказательство. Будем показывать, что выполнены условия замечания выше. Возьмем $\forall s_1, \dots, s_m \in T < t \in T \forall m \in \mathbb{N}$. Положим $\zeta_1 := X_{s_1}$, $\zeta_2 := X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, \zeta_m := X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$, $\eta := X_t - X_{s_m}$. Тогда $\sigma\{X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\} = \sigma\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$, поскольку связь линейна и невырождена. Следовательно,

$$\mathbb{E}\left(f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\right) = \mathbb{E}\left(f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta) \mid \zeta_1, \dots, \zeta_m\right).$$

Обозначим

$$\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_m); \quad g(\zeta, \eta) := f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta).$$

Тогда ζ и η независимы, g — борелевская функция и

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta) \mid \zeta_1 = x_1, \dots, \zeta_m = x_m\right) &= \mathbb{E}\left(g(\zeta, \eta) \mid \zeta = x\right) = \\ &= \mathbb{E}g(\eta, x), \end{aligned}$$

поскольку ζ и η независимы. Обозначим

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) := \mathbb{E}f\left(\sum_{i=1}^m x_i + \eta\right).$$

Тогда для любой ограниченной измеримой функции f φ — измеримая ограниченная функция (это нуждается в дополнительном доказательстве). Таким образом,

$$\mathbb{E}\left(f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta) \mid \zeta_1 = x_1, \dots, \zeta_m = x_m\right) = \varphi(x),$$

то есть

$$\mathbb{E}\left(f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i\right).$$

Заметим тогда, что по телескопическому свойству условного математического ожидания

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f(X_t) \mid X_{s_m}\right) &= \mathbb{E}\left(f(X_t) \mid \sum_{i=1}^m \zeta_i\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(f(X_t) \mid \zeta_1, \dots, \zeta_m\right) \mid \sum_{i=1}^m \zeta_i\right) = \mathbb{E}\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i\right) \mid \sum_{i=1}^m \zeta_i\right) = \end{aligned}$$

$$= \varphi \left(\sum_{i=1}^m \zeta_i \right) = \mathbb{E} \left(f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m} \right),$$

то есть

$$\mathbb{E} \left(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s \right) = \mathbb{E} \left(f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m} \right) = \mathbb{E} \left(f(X_t) \mid X_{s_m} \right),$$

что и требовалось доказать. \square

Следствие. *Случайное блуждание, пуассоновский процесс и винеровский процесс являются марковскими процессами.*

Определение 9.2. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — марковский процесс, при этом $X_t : \Omega \rightarrow S$, S конечно или счетно. Тогда X называется *марковской цепью*.

Замечание. В данном случае будем отождествлять каждый элемент S с его номером.

Замечание. Если $X_t : \Omega \rightarrow S$, где S конечно или счетно, то определение марковости можно переписать в следующей эквивалентной формулировке: $\forall m \forall s_1 < \dots < s_m < t, s_i, t \in T, \forall i_1, \dots, i_m, j \in S$

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_{s_m} = i_m)$$

при условии, что

$$\mathbb{P}(X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m) \neq 0.$$

9.3 Свойства переходных вероятностей

Определение 9.3. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — марковский процесс, причем $X_t : \Omega \rightarrow S$. Обозначим

$$\mathbb{S}_t := \{i : \mathbb{P}(X_t = i) \neq 0\}.$$

Введем для $s \leq t, i \in \mathbb{S}_s, j \in \mathbb{S}_t$

$$p_{ij}(s, t) := \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i).$$

Число $p_{ij}(s, t)$ называется *переходной вероятностью* (из i в момент s в j в момент t).

Теорема 9.2 (свойства переходных вероятностей). *Если X — марковская цепь, то $p_{ij}(s, t)$ обладают следующими свойствами:*

1. $p_{ij}(s, t) \geq 0$;
2. $\sum_{j \in \mathbb{S}_t} p_{ij}(s, t) = 1$;
3. $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$;
4. $\forall s < u < t \ p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{S}_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t)$.

Доказательство. Проверим свойства.

1. Следует из определения: вероятности неотрицательны.
2. Следует из формулы полной вероятности.
3. Следует из определения.
4. По определению

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s, t) &= P(X_t = j \mid X_s = i) = \frac{P(X_t = j, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P(X_t = j, X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\
&= \sum_{k: P(X_u = k, X_s = i) \neq 0} P(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) \frac{P(X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)}
\end{aligned}$$

Поскольку X — марковская цепь, то

$$P(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) = P(X_t = j \mid X_u = k).$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k: P(X_u = k, X_s = i) \neq 0} P(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) \frac{P(X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\
&= \sum_{k: P(X_u = k, X_s = i) \neq 0} P(X_t = j \mid X_u = k) \frac{P(X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} P(X_t = j \mid X_u = k) P(X_u = k \mid X_s = i) = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t).
\end{aligned}$$

□

Замечание (доопределение переходных вероятностей). В определении 9.3 переходные вероятности $p_{ij}(s, t)$ вводились не для всех возможных состояний $i, j \in S$, а только для $i \in \mathbb{S}_s, j \in \mathbb{S}_t$. Доопределим для всех $i, j \in S, s < t \in T$ следующим образом:

1. если $i \in \mathbb{S}_s, j \notin \mathbb{S}_t$, то $p_{ij}(s, t) := 0$;
2. если $i \notin \mathbb{S}_s$, то выбираем и фиксируем произвольное $i_0 = i_0(s) \in \mathbb{S}_s$ и определяем $p_{ij}(s, t) := p_{i_0 j}(s, t)$.

В случае $s = t$ по определению полагаем $p_{ij}(s, t) := \delta_{ij}$.

Тогда для так определенных переходных вероятностей выполнены свойства 1.–4. из теоремы 9.2.

Теорема 9.3. Конечномерные распределения цепи Маркова $X = \{X_t, t \in T\}$, где $0 \in T \subset [0, \infty)$, однозначно определяются начальным распределением $P(X_0 = i)$ и переходными вероятностями $p_{ij}(s, t)$.

Доказательство. Действительно, возьмем $\forall t_1 < \dots < t_n$ и $i_1, \dots, i_n \in S$. Тогда запишем

$$\begin{aligned}
& P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = \\
& = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \\
& = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}),
\end{aligned}$$

поскольку X — марковская цепь. Продолжаем таким же образом далее и получаем, что

$$\begin{aligned}
& P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n}) = \\
& = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \dots P(X_{t_2} = i_2 \mid X_{t_1} = i_1) P(X_{t_1} = i_1) = \\
& = P(X_{t_1} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_1, t_2) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1}, t_n).
\end{aligned}$$

Вместе с этим

$$\begin{aligned}
P(X_{t_1} = i_1) &= \sum_{k \in S} P(X_{t_1} = i_1 \mid X_0 = k) P(X_0 = k) = \\
&= \sum_{k \in S} p_{k i_1}(0, t_1) P(X_0 = k),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

10 Лекция от 19.04.17

Свойства марковских процессов

10.1 Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний

Определение 10.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Введем

$$p_{ij}^{(n)} := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Замечание. Тогда $p_{ij}^{(n)} \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$. Аналогично рассуждению в теореме

9.3 получаем, что

$$\begin{aligned}
& P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \\
& = P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1}(0, 1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(n-1, n) = p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}^{(0)} \dots p_{i_{n-1} i_n}^{(n-1)},
\end{aligned}$$

то есть вероятность цепочки состояний определяется начальным распределением и переходными вероятностями за единицу времени.

Лемма 10.1. Пусть $X_0, U_0, U_1 \dots$ — независимые случайные величины, $X_0 : \Omega \rightarrow S$, U_i равномерно распределены на $[0, 1]$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Введем

$$X_{n+1} := h_n(X_n, U_{n+1}), n \in \mathbb{Z}_+,$$

где h_n — измеримая функция. Тогда X_0, X_1, \dots — цепь Маркова.

Доказательство. Проверим, что

$$\mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n \right) = \mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_n \right)$$

для любой ограниченной измеримой функции f . Заметим, что по определению X_{n+1}

$$\mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n \right) = \mathbb{E} \left(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_1, \dots, X_n \right).$$

Поскольку для любых независимых случайных величин ξ и η и любой измеримой функции g

$$\mathbb{E} \left(g(\xi, \eta) \mid \xi = x \right) = \mathbb{E} g(x, \eta)$$

и поскольку по построению $X_n = H_n(X_0, U_0, \dots, U_n)$ независим с U_{n+1} , где H_k — измеримая функция, то

$$\mathbb{E} \left(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \right) = \mathbb{E} f(h_n(x_n, U_{n+1})).$$

По той же самой причине

$$\mathbb{E} \left(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_n = x_n \right) = \mathbb{E} f(h_n(x_n, U_{n+1})).$$

Таким образом, доказали, что

$$\mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \right) = \mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_n = x_n \right),$$

что эквивалентно тому, что

$$\mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n \right) = \mathbb{E} \left(f(X_{n+1}) \mid X_n \right).$$

Лемма доказана. \square

Пример 10.1 (модель марковской цепи). Как выбрать h_n так, чтобы построенная марковская цепь имела заданное начальное распределение $p_i(0)$ и заданные переходные вероятности $p_{ij}^{(n)}$? Для начального распределения $p_i(0)$, $i \in S$, $\#S = N$, рассмотрим следующее разбиение отрезка $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= [0, p_1(0)), \\ \Delta_2 &:= [p_1(0), p_1(0) + p_2(0)), \\ &\vdots \\ \Delta_N &:= [p_1(0) + \dots + p_{N-1}(0), 1]. \end{aligned}$$

Определим для $x \in [0, 1]$ $f(x) := k$, если $x \in \Delta_k$. Положим

$$X_0 := f(U_0).$$

Тогда

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \mathbb{P}(f(U_0) = i) = \mathbb{P}(U_0 \in \Delta_i) = |\Delta_i| = p_i(0).$$

Для переходных вероятностей $p_{ij}^{(n)}$ рассмотрим аналогичное разбиение отрезка $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}\Delta_{i1}^{(n)} &:= [0, p_{i1}^{(n)}), \\ \Delta_{i2}^{(n)} &:= [p_{i1}^{(n)}, p_{i1}^{(n)} + p_{i2}^{(n)}), \\ &\vdots \\ \Delta_{iN}^{(n)} &:= [p_{i1}^{(n)} + \dots + p_{i(N-1)}^{(n)}, 1].\end{aligned}$$

Снова определим для $x \in [0, 1]$ $g_n(i, x) := j$, если $x \in \Delta_{ij}^{(n)}$. Положим

$$X_{n+1} := g_n(X_n, U_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда по лемме 10.1 X_0, X_1, \dots — марковская цепь с пространством состояний S , причем $P(X_0 = i) = p_i(0)$, $i \in S$, то есть начальное распределение получилось именно таким, каким мы его хотели. То же самое верно и для переходных вероятностей: поскольку по построению X_n независим с U_{n+1} , то

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) &= P(g_n(X_n, U_{n+1}) = j \mid X_n = i) = \\ &= P(g_n(i, U_{n+1})) = P(U_{n+1} \in g_n^{-1}(i, \{j\})) = |\Delta_{ij}^{(n)}| = p_{ij}^{(n)}\end{aligned}$$

по построению. Таким образом, для любых наперед заданных переходных вероятностей и начального распределения смогли в явном виде предъявить цепь Маркова, соответствующую им.

Замечание. Фактически это означает, что все цепи Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний устроены именно так.

Замечание. Для компьютерного моделирования с помощью этого метода подходят только цепи Маркова с относительно малым числом N .

10.2 Предельное поведение переходных вероятностей

Определение 10.2. Марковская цепь $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *однородной* (во времени), если

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(s + h, t + h)$$

$\forall s < t, s, t, s + h, t + h \in T, \forall i, j \in S$.

Замечание. Это определение означает именно то, что переходные вероятности зависят только от длины промежутка времени, за который происходит переход, а не от его начала или конца. Поэтому вместо $p_{ij}(s, t)$ для однородных цепей будем писать $p_{ij}(t - s)$, $t > s$.

Так что дальше будем рассматривать $p_{ij}(t)$, $i, j \in S, t \in T$.

Замечание (переформулировка свойств марковской цепи). Для однородной цепи переформулируем свойства марковской цепи из теоремы 9.2:

1. $p_{ij}(t) \geq 0$;
2. $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$;
3. $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$;
4. $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$.

Определение 10.3. Введем для однородной марковской цепи матрицы

$$P(t) := \left(p_{ij}(t) \right)_{i, j \in S}, \quad i, j \in S.$$

Замечание. Переформулируем для этих матриц свойства однородной марковской цепи:

1. элементы $P(t)$ неотрицательны;
2. $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$;
3. $P(0) = I$;
4. $P(s+t) = P(s)P(t)$.

Определение 10.4. Введем вектор-строку $p := (p_1(0), p_2(0), \dots)$. Тогда, соответственно,

$$P(X_t = j) = p P(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t).$$

Распределение вероятностей, задаваемое вектором p , называется *стационарным*, если

$$p P(t) = p \quad \forall t \in T.$$

Теорема 10.2 (эргодичности). Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ — однородная марковская цепь такая, что для некоторого $j_0 \in S$ и некоторых $h > 0$ и $0 < \varepsilon \leq 1$

$$p_{ij_0}(h) \geq \varepsilon \quad \forall i \in S.$$

Тогда для любого вектора μ , задающего начальное распределение цепи, существует и единственен вектор π , задающий стационарное распределение вероятностей, такой, что для любого начального распределения μ

$$\|\mu P(t) - \pi\|_{l_1} \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сформулируем и докажем лемму.

Лемма 10.3. Пусть выполнены условия теоремы и $\sum_i \rho_i = 0$. Тогда

$$\|\rho P(t)\|_{l_1} = \|\rho\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}.$$

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции.

База индукции: пусть $t \in [0, h)$. Тогда $\lfloor t/h \rfloor = 0$. Вместе с этим

$$\begin{aligned}\|\rho P(t)\|_{l_1} &= \sum_j |(\rho P(t))_j| = \sum_j \left| \sum_i \rho_i p_{ij}(t) \right| \leq \sum_j \sum_i |\rho_i| |p_{ij}(t)| = \\ &= \sum_i \sum_j |\rho_i| p_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| \sum_j p_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| = \|\rho\|_{l_1} = \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor},\end{aligned}$$

где перемена порядка суммирования возможна в силу абсолютной сходимости ряда. Таким образом, для $t \in [0, h)$ лемма справедлива.

Индуктивный переход: пусть лемма верна для $t \in [0, mh)$, $m \in \mathbb{N}$; покажем, что она верна для $t \in [mh, (m+1)h)$. При таких t

$$\rho P(t) = \rho P(t-h)P(h).$$

Поскольку

$$\sum_j (\rho P(t-h))_j = \sum_j \sum_i \rho_i p_{ij}(t-h) = \sum_i \rho_i \sum_j p_{ij}(t-h) = \sum_i \rho_i = 0,$$

то

$$\begin{aligned}(\rho P(t-h)P(h))_j &= \sum_i (\rho P(t-h))_i p_{ij}(h) = \\ &= \sum_i (\rho P(t-h))_i (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0})\end{aligned}$$

(j_0 здесь берется из формулировки теоремы!). Тогда

$$\begin{aligned}\|\rho P(t)\|_{l_1} &= \sum_j |(\rho P(t-h)P(h))_j| = \\ &= \sum_j \left| \sum_i (\rho P(t-h))_i (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}) \right| \leq \\ &\leq \sum_j \sum_i |(\rho P(t-h))_i| |p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}|.\end{aligned}$$

Заметим, что $(p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}) \geq 0$, поскольку $p_{ij_0}(h) \geq \varepsilon$ по условию теоремы, так что модуль можно снять. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_j \sum_i |(\rho P(t-h))_i| |p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}| &= \\ &= \sum_i |(\rho P(t-h))_i| \sum_j (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}) = \sum_i |(\rho P(t-h))_i| (1-\varepsilon).\end{aligned}$$

При этом, поскольку $(t-h) < mh$, применимо предположение индукции, и поэтому

$$\sum_i |(\rho P(t-h))_i| (1-\varepsilon) \leq \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\lfloor \frac{t-h}{h} \rfloor} (1-\varepsilon) = \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor},$$

то есть

$$\|\rho P(t)\|_{l_1} \leq \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor},$$

что и требовалось доказать. \square

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольный вектор μ , задающий начальное распределение цепи. Тогда $\mu_i \geq 0$ и $\sum_i \mu_i = 1$. Покажем, что последовательность $\mu P(n)$ фундаментальна по норме l_1 : поскольку

$$\sum_i \left((\mu P(u))_i - \mu_i \right) = 0,$$

то можно применить лемму 10.3 с $\rho = (\mu P(u) - \mu)$:

$$\begin{aligned} \|\mu P(t+u) - \mu P(t)\|_{l_1} &= \|\mu P(u)P(t) - \mu P(t)\|_{l_1} = \|(\mu P(u) - \mu)P(t)\|_{l_1} \leq \\ &\leq \|\mu P(u) - \mu\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor}, \end{aligned}$$

поскольку оба вектора $\mu P(u)$ и μ задают вероятностное распределение. Фундаментальность последовательности показали. В силу полноты пространства l_1 существует вектор π такой, что

$$\|\mu P(t) - \pi\|_{l_1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Тогда $\pi_i \geq 0 \forall i$ (иначе бы l_1 -норма разности была всегда больше модуля отрицательного π_i и, следовательно, не сходилась бы к нулю) и $\|\pi\|_{l_1} = 1$, поскольку $\|\mu P(t)\|_{l_1} = 1$ то есть π задает вероятностное распределение. Докажем, что вектор π задает стационарное распределение. Для этого нужно показать, что $\forall t \in T \quad \pi P(t) = \pi$. По лемме 10.3 $\forall t \in T$

$$\begin{aligned} \|\mu P(u+t) - \pi P(t)\|_{l_1} &= \|\mu P(u)P(t) - \pi P(t)\|_{l_1} = \|(\mu P(u) - \pi)P(t)\|_{l_1} \leq \\ &\leq \|\mu P(u) - \pi\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

вместе с этим

$$\|\mu P(u+t) - \pi\|_{l_1} \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \|\pi - \pi P(t)\|_{l_1} &= \|\pi - \mu P(u+t) + \mu P(u+t) - \pi P(t)\|_{l_1} \leq \\ &\leq \|\mu P(u+t) - \pi\|_{l_1} + \|\mu P(u+t) - \pi P(t)\|_{l_1} \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и означает, что $\forall t \in T \quad \pi P(t) = \pi$. Теперь покажем единственность такого вектора π . От противного: пусть существует еще один задающий вероятностное распределение вектор ν такой, что $\nu P(t) = \nu$. Тогда по лемме 10.3

$$\|\pi - \nu\|_{l_1} = \|\pi P(t) - \nu P(t)\|_{l_1} = \|(\pi - \nu)P(t)\|_{l_1} \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

то есть $\nu = \pi$. Теорема доказана. \square

Следствие. Возьмем $\mu = \left(0, \dots, 0, \underbrace{0}_i, 0, \dots\right)$. Тогда $\forall i$ существует

$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ (который не зависит от i). Таким образом, система за большое время как бы "забывает" состояние, из которого она стартовала.

Замечание. В теореме 10.2 показано, что π не зависит от μ , хотя изначально он от μ зависел по построению. О других следствиях этой теоремы можно почитать в [1], стр. 198.

10.3 Генератор марковской цепи с непрерывным временем

Определение 10.5. Однородная марковская цепь называется *стандартной*, если

$$P(t) \rightarrow P(0) = I, \quad t \rightarrow 0+,$$

то есть

$$p_{ij}(t) \rightarrow \delta_{ij}, \quad t \rightarrow 0+.$$

Теорема 10.4. Пусть однородная марковская цепь стандартна. Тогда $\forall i \neq j$

1. существует конечный

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t - 0} =: q_{ij};$$

2. существует

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} =: q_{ii} \in [-\infty, 0].$$

Определение 10.6. Однородная марковская цепь называется *консервативной*, если матрица $Q := (q_{ij})_{i,j \in S}$ (называемая *генератором* или *инфинитезимальной матрицей*) содержит только конечные элементы и

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0.$$

Замечание. Если однородная марковская стандартная цепь имеет конечное число состояний, то она консервативна: в силу свойства 2 переходных вероятностей

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1,$$

то есть $\forall t > 0$

$$\frac{1 - p_{ij}(t)}{t} = \frac{\sum_{i \neq j} p_{ij}}{t}.$$

По теореме 10.4 для $i \neq j$ существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij},$$

то есть существует (поскольку сумма конечна) конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sum_{i \neq j} p_{ij}(t)}{t} = \sum_{i \neq j} q_{ij},$$

а значит, существует и конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij},$$

то есть

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0,$$

что и доказывает, что цепь консервативна.

10.4 Инфинитезимальная матрица конечной марковской цепи

Теорема 10.5. Пусть дана матрица $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ такая, что $Q \in \text{Mat}(N \times N)$, $\forall i \neq j \ q_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^N q_{ij} = 0$. Тогда существует однородная марковская цепь с генератором Q и пространством состояний мощности N .

Доказательство. Напомним определение матричной экспоненты:

$$e^B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!},$$

при этом $B^0 := I$. Следовательно,

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!}.$$

Известно следующее свойство матричной экспоненты: если $BC = CB$, то

$$e^{B+C} = e^B e^C.$$

Положим по определению

$$P(t) := e^{tQ}, \ t \geq 0.$$

Докажем, что $P(t)$ обладает свойствами 1.–4., которыми должна обладать матрица переходных вероятностей однородной марковской цепи.

1. Проверим, что $p_{ij}(t) \geq 0 \ \forall i, j \in S \ \forall t \geq 0$. Обозначим

$$\gamma = \min_{i=1 \dots N} q_{ii}.$$

Введем также обозначение

$$\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}) := Q - \gamma I_N.$$

Тогда $\tilde{q}_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$. Пусть

$$\tilde{P}(t) := e^{t\tilde{Q}}.$$

Тогда $\tilde{P}(t)$ имеет неотрицательные элементы по определению. Заметим, что

$$e^{t\tilde{Q}} = e^{tQ - t\gamma I_N} = e^{tQ} e^{-t\gamma I_N} = P(t) e^{-t\gamma I_N},$$

то есть

$$P(t) = \tilde{P}(t) e^{t\gamma I_N}.$$

Вместе с этим у обеих матриц справа элементы неотрицательны. Значит, и у матрицы $P(t)$ элементы также неотрицательны.

2. Проверим, что $\forall i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1.$$

Обозначим через α единичный вектор–столбец. Тогда по определению $Q\alpha = 0$. Тогда

$$P(t)\alpha = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!} \right) \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n \alpha}{n!} = I_N \alpha = \alpha,$$

что и означает, что $\forall i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1.$$

3. $P(0) = e^{0 \cdot Q} = I_N$ по определению.

4. $P(s+t) = e^{s+Q} Q = e^{sQ} e^{tQ} = P(s)P(t)$.

Таким образом, выполнены свойства 1.–4., а значит (см. [1], стр.190–191), существует (однородная) марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q . \square

Замечание. Заметим, что условия, наложенные на матрицу Q в формулировке теоремы, являются не только достаточными, но и необходимыми, что видно из замечания после определения консервативной марковской цепи.

11 Лекция от 26.04.17

Применения марковских цепей

11.1 Формулировка теоремы Дуба о консервативных цепях. Стационарные марковские цепи

Замечание. Известно (см. обязательную задачу 9.2), что пуассоновский процесс интенсивности λ является марковской цепью, причем процесс остается в покое время, распространенное экспоненциально. Оказывается, это верно для всех однородных консервативных марковских цепей.

Теорема 11.1 (Дуба о консервативных цепях). Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — однородная консервативная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q . Тогда

$$P(X(u) = i, s \leq i \leq s + t \mid X(s) = i) = e^{q_{ii}t},$$

то есть время ожидания между переходами из состояния в состояние распределено экспоненциально.

Доказательство. Доказательства на лекции не было, знать на экзамене его не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 217. \square

Определение 11.1. $X = \{X_t, t \in T\}$ — строго стационарный процесс, если $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1 < \dots < t_n, t_1 + h < \dots < t_n + h \in T$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\text{law}}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

Теорема 11.2. Пусть однородная марковская цепь $X = \{X_t, t \in T\}$ имеет начальное распределение π , которое также является ее стационарным распределением. Тогда X — строго стационарный процесс.

Доказательство. Заметим, что

$$P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_1} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1});$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} P(X_{t_1+h} = i_1, \dots, X_{t_n+h} = i_n) &= \\ &= P(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 + h - t_1 - h) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n + h - t_{n-1} - h) = \\ &= P(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Вместе с этим в силу стационарности начального распределения π

$$P(X_t = i_1) = (\pi P(t))_{i_1} = (\pi P(t+h))_{i_1} = P(X_{t+h} = i_1),$$

что и завершает доказательство леммы. \square

11.2 Обратимые цепи

Определение 11.2. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — однородная марковская цепь с переходными вероятностями за единицу времени p_{ij} . Тогда вектор π , задающий распределение вероятностей, называется *обратимым*, если $\forall i, j \in S$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Марковская цепь называется *обратимой*, если у нее есть обратимый вектор.

Пример 11.1 (случайные блуждания на графах). Рассмотрим граф (V, E) , где V — множество вершин графа, а E — множество его ребер. Две вершины v_i и v_j из V будем называть соседними, если их соединяет ребро из E . Пусть

d_i — кратность вершины v_i , то есть число инцидентных ей ребер. Введем переходные вероятности (из i в j):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем также вектор π , задающий вероятностное распределение:

$$\pi_i = \frac{d_i}{\sum_{i \in S} d_i}.$$

Тогда π — обратимый вектор:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} = \frac{1}{d} \mathbb{I}\{v_i \text{ и } v_j \text{ — соседи}\}.$$

Заметим, что если цепь обратима и π — ее обратимый вектор, то π задает стационарное распределение:

$$(\pi P(t))_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \pi_j p_{ji} = \pi_j.$$

11.3 Метод Монте-Карло, использующий цепи Маркова

Замечание (от наборщика). Этот раздел будет до- и переписан после ближайшей консультации.

Пример 11.2 (алгоритм Метрополиса–Хастингса). Возьмем связный граф с вершинами из S такой, что $d_i < \infty \forall i$ и введем на нем цепь:

$$p_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{d_i} \min \left\{ \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j}, 1 \right\}, & v_i \text{ и } v_j \text{ соседние;} \\ 0, & v_i \text{ и } v_j \text{ не соседние;} \\ 1 - \sum_i \frac{1}{d_i} \min \left\{ \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j}, 1 \right\}, & i = j. \end{cases}$$

Такая цепь обратима, причем ее обратимое распределение есть π . Действительно, проверим, что $\forall i, j$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Пусть сначала $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \geq 1$. Тогда $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \leq 1$ и

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{1}{d_i} = \pi_j \frac{1}{d_j} \frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} = \pi_j p_{ji}.$$

Пусть теперь $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \leq 1$. Тогда $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \geq 1$ и

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{1}{d_i} \frac{\pi_j d_i}{\pi_j d_j} = \pi_j \frac{1}{d_j} = \pi_j p_{ji}.$$

Определение 11.3. Пусть $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ — граф с конечным числом вершин. Пусть также $X = \{X_t, t \in \mathbb{V}\}$ — случайное поле, $X_t : \Omega \rightarrow S$, где S конечно. Поле X называется *марковским*, если $\forall t \in \mathbb{V}$ таких, что

$$P(X_s = x_s, s \neq t) \neq 0$$

выполнено

$$P(X_t = x_t \mid X_s = x_s, s \neq t) = P(X_t = x_t \mid X_s = x_s, s \in \delta\{t\}),$$

где $\delta\{t\}$ — множество соседних с t вершин.

Определение 11.4. *Энергией* называется любая функция $E : S^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{R}$, где $S^{\mathbb{V}}$ — множество функций из \mathbb{V} в S .

Определение 11.5. Распределение вероятностей на $S^{\mathbb{V}}$

$$P(B) := \begin{cases} \sum_{\omega \in B} \frac{e^{-E(\omega)}}{\sum_{\omega \in S^{\mathbb{V}}} e^{-E(\omega)}}, & B \neq \emptyset; \\ 0, & B = \emptyset, \end{cases}$$

называется *гиббсовским полем*.

Определение 11.6. *Потенциалом* называется любая действительная функция $V_A(\omega) : \mathbb{V} \times S^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $V_A(\omega) = 0 \ \forall \omega \in S^{\mathbb{V}}$, если $A = \emptyset$.

Замечание. Известно, что любая энергия представляется с помощью потенциала:

$$E(\omega) = \sum_{A \subset \mathbb{V}} V_A(\omega).$$

Определение 11.7. Потенциал $V_A(\omega)$ называется *потенциалом ближайших соседей*, если

$$V_A(\omega) = 0 \ \forall \omega \in S^{\mathbb{V}},$$

когда A не является кликой, то есть множеством вершин таким, что любые две вершины в нем соединены ребром.

Теорема 11.3 (Аверинцева–Клиффорда–Хэммерсли). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. мера P на $(S^{\mathbb{V}}, A)$ является распределением марковского поля относительно графа (\mathbb{V}, E) и $P(B) > 0, B \neq \emptyset$;
2. мера P на $(S^{\mathbb{V}}, A)$ является мерой Гиббса с потенциалом ближайших соседей.

Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.
- [3] Ширяев А. Н. Вероятность.
- [4] Шашкин А. П. Слабая сходимость вероятностных мер. МГУ, 2013