

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания | 1 |
| 1.1 | Понятие случайного блуждания | 1 |
| 1.2 | Случайные блуждания | 2 |
| 1.3 | Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции | 5 |
| 2 | Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления | 6 |
| 2.1 | Модель Гальтона–Ватсона | 6 |
| 2.2 | Процессы восстановления | 10 |
| 3 | Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы | 10 |
| 3.1 | Процессы восстановления (продолжение) | 10 |
| 3.2 | Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным | 11 |
| 3.3 | Элементарная теорема восстановления | 12 |
| 3.4 | Пуассоновский процесс как процесс восстановления | 14 |
| | Предметный указатель | 17 |

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение 1.2. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Определение 1.4. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y* , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где $X(t): \Omega \rightarrow S_t$, $X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ $\forall t \in T$. Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле*.

Определение 1.6. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если
$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n.$$

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t$, $X_t \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_t}$ таких, что $\mathbb{P}_{X_t} = Q_t$, $t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности \forall конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . Случайным блужданием в \mathbb{R}^d называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geq 0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d — это такое случайное блуждание, что

$$\mathbb{P}(X = e_k) = \mathbb{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leq \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathbb{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Замечание (от наборщика). Судя по всему, в лемме ниже подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Лемма 1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}$.

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Следствие. $P(N = \infty)$ равно 0 или 1. $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $P(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. \square

Теорема 1.3. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow \mathbb{E}N = \infty$ (соответственно, не возвратно $\Leftrightarrow \mathbb{E}N < \infty$).

Доказательство. Если $\mathbb{E}N < \infty$, то $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\tau = \infty) \mathbb{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= \mathbb{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathbb{P}(\tau = \infty)}{(1 - \mathbb{P}(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - \mathbb{P}(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$\mathbb{E}N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.

Доказательство. $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

Случай $d = 1$: $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

\Rightarrow ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается

случай $d = 2$: $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$ ряд тоже разойдется \Rightarrow блуждание возвратно. Теорема доказана. \square

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. \square

Следствие. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание невозвратно.

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S* , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n: \quad P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega : \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = P(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_{\xi}$ и $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= E s^{Z_n} = E \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} E \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) E \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) P(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j E s^{\xi_{n,k}} P(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) P(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\ &= \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$P(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(P(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $P(Z_n = 0) \nearrow P(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$P(A) = \psi_\xi(P(A)),$$

то есть $P(A)$ — корень уравнения $p = \psi_\xi(p)$, $p \in [0, 1]$. \square

Теорема 2.2. *Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения*

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := P(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$P(\xi \geq 1) = 1, \quad P\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $P(A)$ — наименьший корень уравнения (2). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$ — наименьший корень уравнения (2). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n . Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (2) нет корней на $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1 $P(A)$ является корнем уравнения (2). Следовательно, показано, что $P(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.3. 1. *Вероятность вырождения $P(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.*
2. *Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $E\xi \leq 1$ имеем $P(A) = 1$, при $E\xi > 1$ имеем $P(A) < 1$.*

Доказательство. 1. Пусть $P(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. (а) Пусть $\mu = E\xi \leq 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

- (b) Пусть $\mu = E\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $P(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $P(A) < 1$, что и требовалось доказать. \square

Следствие. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда $EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$.

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

\square

Определение 2.2.

При $E\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $E\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $E\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где $P(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$; $P(Y = 0) = q = 1 - p$. Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left\lceil \frac{t}{C} \right\rceil$.

Лемма 2.4.

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \left\lceil \frac{t}{\alpha} \right\rceil, \text{ если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если $P(U = k) = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p , а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_{j+m} с параметром $p \in (0, 1)$. Тогда $\forall t \geq \alpha$ и $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

3 Лекция от 08.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} \mathbb{P}(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\
& = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} \mathbb{P}(U_0 = k_0) \dots \mathbb{P}(U_j = k_j) = \\
& = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} p(1-p)^{k_0} \dots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} p^{j+1} (1-p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\
& = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} p^{j+1} (1-p)^{m-j} = p^{j+1} (1-p)^{m-j} \#M,
\end{aligned}$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\#M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\#M$ эквивалентна "задаче о перегородах" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathbb{P}(U_0 + \dots + U_j = m-j) = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. \square

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. Пусть $t > \alpha$. Тогда

$$\mathbb{E}Z^*(t) \leq At, \quad \mathbb{E}(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$\mathbb{E}Z^*(t) = \mathbb{E}(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)\mathbb{E}U,$$

где

$$\mathbb{E}U = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)\mathbb{E}U = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p) + 1) = A(t),$$

поскольку $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$, а $t > \alpha$; здесь $A(t) = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $\mathbb{E}(Z^*(t))^2$.

$$\mathbb{E}(Z^*(t))^2 = \mathbb{D}Z^*(t) + (\mathbb{E}Z^*(t))^2 = (j+1)\mathbb{D}U + (\mathbb{E}Z^*(t))^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := DU$. Используя оценку выше для $EZ^*(t)$, получаем, что

$$(j+1)DU + (EZ^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geq (j+1)$. Лемма доказана. \square

Замечание. Пусть случайная величина $X \geq 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : P(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \quad \forall t \geq 0$. Тогда $\forall \alpha > 0$

$$EZ(t) \leq EZ^*(t) < \infty, \quad E(Z(t))^2 \leq E(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

Следствие. $P(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$.

Доказательство. Z является неубывающим процессом:

$$s \leq t \rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow P(Z(n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Из непрерывности вероятностной меры получаем, что

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z(n) < \infty) = 1.$$

\square

Следствие. $EZ(t) \leq At; \quad E(Z(t))^2 < Bt^2, \quad t > \alpha$.

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.n.} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mu = EX$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ. Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbb{E}X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Теорема 3.3. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \dots, X \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Z(t)}{t} &\xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, t \rightarrow \infty; \\ \frac{\mathbb{E}Z(t)}{t} &\xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = 0 \forall t$). Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \rightarrow \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим (t, ω) такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \text{ почти наверное.}$$

Тогда для этих (t, ω) поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E}\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t, t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \rightarrow \alpha} \mathbb{E} \left(|\xi_t| \mathbb{I} \{|\xi_t| > c\} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. Если $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathbb{E}\xi_t \rightarrow \mathbb{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссен). $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow \exists$ неубывающая функция g такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E}g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E}(\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E}(Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. \square

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k} - S_{N(t)+k-1}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Для $\forall t > 0$ величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k .

Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1) = \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1) = \\ &= \int \int_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \int \int_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy \end{aligned}$$

в силу независимости S_n и X_{n+1} . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P} \left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1 \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1 = 0$ и получим, что

$$\mathbf{P} \left(N(t) = n \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} \left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1 \right) &= \mathbf{P} \left(X_1^t \geq u_1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\ &= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1}, \end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k \right) &= \\ &= \mathbf{P} \left(\underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots} \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(N(t) = n \right) \underbrace{\mathbf{P} \left(X_1 \geq u_1 \right)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \mathbf{P} \left(N(t) = n \right) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. \square

Следствие (парадокс времени ожидания). *Из доказанного следует, что*

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению.

Предметный указатель

- Измеримое
 - отображение, 1
 - пространство, 1
- Множество
 - достижимости, 6
 - возвратности, 6
- Модель Гальтона-Ватсона, 6
- Процесс восстановления, 10
- Производящая функция, 6
- Распределение
 - геометрическое, 10
 - случайного элемента, 1
- Случайный
 - элемент, 1
 - процесс, 1
- Случайное блуждание, 2
 - простое, 2
 - возвратное, 2
- Теорема
 - Чжуна-Фукса, 6
 - Ломницкого-Улама, 2
- Вырождение, 6