

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания</b>	<b>2</b>
1.1	Понятие случайного блуждания . . . . .	2
1.2	Случайные блуждания . . . . .	3
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления</b>	<b>8</b>
2.1	Модель Гальтона–Ватсона . . . . .	8
2.2	Процессы восстановления . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы</b>	<b>13</b>
3.1	Процессы восстановления (продолжение) . . . . .	13
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным . . . . .	13
3.3	Элементарная теорема восстановления . . . . .	15
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Лекция от 01.03.17. Точечные процессы</b>	<b>19</b>
4.1	Независимость приращений пуассоновского процесса . . . . .	19
4.2	Пространственный пуассоновский процесс . . . . .	20
4.3	Функционал Лапласа точечного процесса . . . . .	25
4.4	Маркирование пуассоновских процессов . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Лекция от 15.03.17. Процессы с независимыми приращениями</b>	<b>27</b>
5.1	Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение) . . . . .	27
5.2	Теорема Колмогорова о согласованных распределениях . . . . .	32
5.3	Процессы с независимыми приращениями . . . . .	34
5.4	Модификация процесса . . . . .	34
	<b>Список литературы</b>	<b>36</b>

# 1 Лекция от 08.02.17

## Случайные блуждания

### 1.1 Понятие случайного блуждания

**Определение 1.1.** Пусть  $V$  — множество, а  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Тогда  $(V, \mathcal{A})$  называется *измеримым пространством*.

**Определение 1.2.** Пусть есть  $(V, \mathcal{A})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — два измеримых пространства,  $f: V \rightarrow S$  — отображение.  $f$  называется  $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если  $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Обозначение:  $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ .

**Определение 1.3.** Пусть есть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — отображение. Если  $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ , то  $Y$  называется *случайным элементом*.

**Определение 1.4.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом  $Y$* , — это функция на множествах из  $\mathcal{B}$ , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

**Определение 1.5.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов  $X = \{X(t), t \in T\}$ , где

$$X(t): \Omega \rightarrow S_t, \quad X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Здесь  $T$  — это произвольное параметрическое множество,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — произвольные измеримые пространства.

*Замечание.* Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то  $t \in T$  интерпретируется как время. Если  $T = \mathbb{R}$ , то время *непрерывно*; если  $T = \mathbb{Z}$  или  $T = \mathbb{Z}_+$ , то время *дискретно*; если  $T \subset \mathbb{R}^d$ , то говорят о *случайном поле*.

**Определение 1.6.** Случайные элементы  $X_1, \dots, X_n$  называются *независимыми*, если  $P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$ .

**Теорема 1.1** (Ломницкого-Улама). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует семейство независимых случайных элементов  $X_t: \Omega \rightarrow S_t, X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$  таких, что  $P_{X_t} = Q_t, t \in T$ .

*Замечание.* Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом  $T$  по-прежнему любое, как и  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности  $\forall$  конечного поднабора.

## 1.2 Случайные блуждания

**Определение 1.7.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Случайным блужданием в  $\mathbb{R}^d$  называется случайный процесс с дискретным временем  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Определение 1.8.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  — это такое случайное блуждание, что

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где  $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d$ .

**Определение 1.9.** Введем  $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$  ( $\leq \infty$ ). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  называется *возвратным*, если  $P(N = \infty) = 1$ ; *невозвратным*, если  $P(N < \infty) = 1$ .

*Замечание.* Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

**Определение 1.10.** Число  $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$  ( $\tau := \infty$ , если  $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ) называется *моментом первого возвращения в 0*.

*Замечание.* Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что  $P(N = \infty)$  равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

**Лемма 1.2.** Для  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

*Доказательство.* При  $n = 1$  формула верна:  $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$ . Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S'_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где  $N'$  определяется по последовательности  $X'_1 = X_{k+1}$ ,  $X'_2 = X_{k+2}$  и так далее. Из того, что  $X_i$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что  $N'$  и  $N$  распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что  $n + 1 \geq 2$ . Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Следствие.**  $P(N = \infty)$  равно 0 или 1.  $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $P(\tau < \infty) < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано.  $\square$

**Теорема 1.3.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  возвратно  $\Leftrightarrow EN = \infty$  (соответственно, невозвратно  $\Leftrightarrow EN < \infty$ ).

*Доказательство.* Если  $EN < \infty$ , то  $P(N < \infty) = 1$ . Пусть теперь  $P(N < \infty) = 1$ . Это равносильно тому, что  $P(\tau < \infty) < 1$ .

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left( \frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

*Замечание.* Заметим, что поскольку  $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ , то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

**Следствие.**  $S$  возвратно при  $d = 1$  и  $d = 2$ .

*Доказательство.*  $P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

*Случай  $d = 1$ :*  $P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$  блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай  $d = 2$ :

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$  ряд тоже разойдется  $\Rightarrow$  блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана.  $\square$

### 1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

**Теорема 1.4.** Для простого случайного блуждания в  $\mathbb{Z}^d$

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $X$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

*Доказательство.*  $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ . Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку  $|c\varphi| \leq c < 1$ , то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Следствие.** При  $d \geq 3$  простое случайное блуждание невозвратно.

*Доказательство.* Запишем характеристическую функцию  $X$  в явном виде:

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(t, X)} = \sum_{k=1}^d \left( \frac{1}{2d} e^{it_k} + \frac{1}{2d} e^{-it_k} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности  $t = 0$ . Введем обозначения

$$B_\delta := (-\delta, \delta)^d, \quad V_\delta := [-\pi, \pi]^d \setminus B_\delta.$$

Ясно, что

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \int_{V_\delta} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt < \infty.$$

Поэтому для того чтобы понять, сходится интеграл или нет, достаточно посмотреть на интеграл по замыканию малой окрестности нуля  $B_\delta$ . Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_k))} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{t_1^2} + \dots + 1 - \frac{1}{t_d^2})} \sim \frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c \uparrow 1, \quad t \rightarrow 0.$$

Поскольку якобиан перехода к  $d$ -мерной сферической системе координат содержит множитель  $R$  в степени  $d - 1$ , то интеграл сойдется  $\Leftrightarrow d \geq 3$ . Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство (комбинаторное).* Заметим, что

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \dots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leq \\ &\leq \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{\left((n/d)!\right)^d} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} = \Theta(n^{-d/2}) \end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при  $d \geq 3$  ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354).  $\square$

*Замечание.* Можно говорить и о случайных блужданиях в  $\mathbb{R}^d$ , если  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ .

**Определение 1.11.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания  $S$  — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

**Определение 1.12.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием  $S$* , — это множество  $P(S)$  такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

**Теорема 1.5** (Чжуна-Фукса). Если  $R(S) \neq \emptyset$ , то  $R(S) = P(S)$ .

**Следствие.** Если  $0 \in R(S)$ , то  $R(S) = P(S)$ ; если  $0 \notin R(S)$ , то  $R(S) = \emptyset$ .

*Замечание.* Подробнее см. [1], стр. 65.

## 2 Лекция от 15.02.17

### Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

#### 2.1 Модель Гальтона–Ватсона

**Описание модели** Пусть  $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$  — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если  $Z_{n-1}(\omega) = 0$ , то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим  $A = \{\omega: \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$  — событие вырождения популяции. Заметим, что если  $Z_n(\omega) = 0$ , то  $Z_{n+1}(\omega) = 0$ . Таким образом,  $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ .

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

**Определение 2.1.** Пусть дана последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  неотрицательных чисел такая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ . Производящая функция для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать  $s \in [0, 1]$ ).

Заметим, что если  $a_k = P(Y = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

**Лемма 2.1.** Вероятность  $P(A)$  является корнем уравнения  $\psi(p) = p$ , где  $\psi = f_{\xi}$  и  $p \in [0, 1]$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= E s^{Z_n} = E \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$



Поскольку  $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$ , которая независима с  $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$  (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от  $\xi_{n,\bullet}$ , а второй — от  $\xi_{i,\bullet}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковости распределенности  $\xi_{n,k}$  и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим  $s = 0$  и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\ &= \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при  $s = 0$  имеем, что

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но  $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(A)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\psi_{\xi}$  непрерывна на  $[0, 1]$ . Переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(A)),$$

то есть  $\mathbb{P}(A)$  — корень уравнения  $p = \psi_{\xi}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ . □

**Теорема 2.2.** Вероятность  $p$  вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $\psi = \psi_{\xi}$ .

*Доказательство.* Пусть  $p_0 := \mathbb{P}(\xi = 0) = 0$ . Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1, \quad \mathbb{P} \left( \bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\} \right) = 1.$$

Поэтому  $Z_n \geq 1$  при  $\forall n$ , то есть  $P(A)$  — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь  $p_0 = 1$ . Тогда  $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$  — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец,  $0 < p_0 < 1$ . Из этого следует, что  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $p_m > 0$ , а значит,  $\psi$  строго возрастает на  $[0, 1]$ . Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_n(s)$  — это производящая функция  $Z_n$ . Пусть  $s \in \Delta_n$ . Тогда из монотонности  $\psi$  на  $[0, 1]$  получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на  $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)), \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1  $P(A)$  является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что  $P(A)$  — наименьший корень, что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.3.** 1. Вероятность вырождения  $P(A)$  есть нуль  $\Leftrightarrow p_0 = 0$ .  
2. Пусть  $p_0 > 0$ . Тогда при  $E\xi \leq 1$  имеем  $P(A) = 1$ , при  $E\xi > 1$  имеем  $P(A) < 1$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $P(A) = 0$ . Тогда  $p_0 = 0$ , потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания  $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$ . В другую сторону, если  $p_0 = 0$ , то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. Зная, что

$$\psi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad \psi_\xi(1) = 1, \quad \exists \psi'_\xi(s), s \in (0, 1).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\forall s \in (0, 1) \quad \psi_\xi(1) - \psi_\xi(s) = \psi'_\xi(\theta)(1 - s), \quad \theta \in (s, 1).$$

Формулой Лагранжа можно пользоваться, поскольку  $\psi_\xi(s)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$  и дифференцируема на интервале  $(0, 1)$ . Тогда

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left( 1 - \psi'_\xi(\theta) \right).$$

Зная, что при  $s \in (0, 1)$

$$\psi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k, \quad \psi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k.$$

Заметим, что если  $\exists p_k > 0, k \geq 2$ , то  $\psi''_\xi(s) > 0, s \in (0, 1)$ , а значит,  $\psi'_\xi(s)$  строго возрастает на  $s \in (0, 1)$ . Будем сначала рассматривать этот случай.

- (а) Пусть  $E\xi = \psi'_\xi(1) \leq 1$ . Из этого следует, что  $\psi'_\xi(\theta) < 1$ . Тогда получаем, что

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left( 1 - \psi'_\xi(\theta) \right) > 0 \quad \forall s \in (0, 1),$$

причем  $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$  по условию. Из этого следует, что наименьшим корнем уравнения  $\psi_\xi(s) - s = 0$  будет  $s = 1$ .

- (б) Пусть  $E\xi = \psi'_\xi(1) > 1$ . Тогда для всех  $s$ , достаточно близких к 1,

$$\psi'_\xi(\theta) > 1, \quad \theta \in (s, 1),$$

в силу непрерывности производящей функции на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left( 1 - \psi'_\xi(\theta) \right) < 0,$$

при этом  $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$  по условию. Это значит, что на интервале  $(0, 1)$  найдется корень уравнения  $\psi_\xi(s) - s = 0$  в силу непрерывности производящей функции.

- (с) Рассмотрим теперь случай  $p_k = 0 \quad \forall k \geq 2$ . В рамках этого предположения

$$\psi_\xi(s) = p_0 + (1 - p_0)s,$$

а значит,

$$\psi_\xi(s) - s = p_0 + (1 - p_0)s - s = p_0(1 - s) > 0 \quad \forall s < 1.$$

Из этого следует, что у уравнения  $\psi_\xi(s) - s = 0$  наименьший корень на отрезке  $[0, 1]$  — это  $s = 1$ . Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $E\xi < \infty$ . Тогда  $EZ_n = (E\xi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится по индукции.

База индукции:  $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$ .

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left( \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

$\square$

## Определение 2.2.

При  $E\xi < 1$  процесс называется *докритическим*.

При  $E\xi = 1$  процесс называется *критическим*.

При  $E\xi > 1$  процесс называется *надкритическим*.

## 2.2 Процессы восстановления

**Определение 2.3.** Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Положим

$$\begin{aligned} Z(0) &:= 0; \\ Z(t) &:= \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что  $\sup \emptyset := \infty$ ). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс  $Z(t)$  называется *процессом восстановления*.

*Замечание.* Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

**Определение 2.4.** Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления*  $\{Z^*(t), t \geq 0\}$ , который строится по  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$P(Y = \alpha) = p \in (0, 1); \quad P(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда  $Y = C = \text{const}$ : если  $C = 0$ , то  $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$ ; если же  $C > 0$ , то  $Z(t) = \left\lfloor \frac{t}{c} \right\rfloor$ .

**Лемма 2.4.**

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor, \text{ если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j, \end{cases}$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

**Определение 2.5.**  $U$  имеет *геометрическое распределение* с параметром  $p \in (0, 1)$ , если  $P(U = k) = (1 - p)^k p$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

*Замечание.* Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна  $p$ , а вероятность неудачи, соответственно, равна  $1 - p$ .

**Лемма 2.5.** Рассмотрим независимые геометрические величины  $U_0, \dots, U_{j+m}$  с параметром  $p \in (0, 1)$ . Тогда  $\forall t \geq \alpha$  и  $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

### 3 Лекция от 22.02.17

#### Пуассоновские процессы

##### 3.1 Процессы восстановления (продолжение)

*Доказательство.* Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости  $U_i$  получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) &= \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p(1-p)^{k_0} \dots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1-p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1-p)^{m-j} = p^{j+1} (1-p)^{m-j} \#M, \end{aligned}$$

где  $M$  — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел  $k_j$ , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а  $\#M$  — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения  $\#M$  эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов  $m-j$  и числом перегородок  $j$ . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

##### 3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

**Лемма 3.1.** Пусть  $t > \alpha$ . Тогда

$$EZ^*(t) \leq At, \quad E(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где  $A = A(p, \alpha) > 0$ ,  $B = B(p, \alpha) > 0$ .

*Доказательство.* По лемме 2.5

$$EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)EU,$$

где

$$EU = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)EU = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p)+1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p)+1) = At,$$

поскольку  $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$ , а  $t > \alpha$ ; здесь  $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$ . Рассмотрим теперь  $E(Z^*(t))^2$ .

$$E(Z^*(t))^2 = DZ^*(t) + (EZ^*(t))^2 = (j+1)DU + (EZ^*(t))^2.$$

Обозначим через  $\sigma^2(p) := DU$ . Используя оценку выше для  $EZ^*(t)$ , получаем, что

$$(j+1)DU + (EZ^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left( \sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как  $(j+1)^2 \geq (j+1)$ . Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* Пусть случайная величина  $X \geq 0$ ,  $X$  отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : P(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по  $X$  вспомогательный процесс восстановления  $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$ : пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению  $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \forall t \geq 0$ . Тогда  $\forall \alpha > t$

$$EZ(t) \leq EZ^*(t) < \infty, \quad E(Z(t))^2 \leq E(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

**Следствие.**  $P(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$ .

*Доказательство.*  $Z$  является неубывающим процессом:

$$s \leq t \rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow P(Z(n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство.  $\square$

**Следствие.**  $EZ(t) \leq At$ ;  $E(Z(t))^2 < Bt^2$ ,  $t > \alpha$ .

### 3.3 Элементарная теорема восстановления

**Лемма 3.2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.n.} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\mu = EX$ .

*Доказательство.* Если  $\mu < \infty$ , то утверждение следует из УЗБЧ. Пусть теперь  $\mu = \infty$ . Положим для  $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n.n.} EX \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем  $c = m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = EX \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} EX \mathbb{I}\{X \leq m\} = EX = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Теорема 3.3.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин  $X, X_1, X_2, \dots$ ,  $X \geq 0$ . Тогда

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty;$$

$$\frac{EZ(t)}{t} \xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где  $\frac{1}{0} := \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} := 0$ .

*Доказательство.* Если  $\mu = 0$ , то  $X_n = 0$  почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ( $Z(t) = 0 \forall t$ ).

Далее  $\mu > 0$ . Заметим, что для  $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку  $Z(t_n, \omega) = n$ , если  $t_n = S_n(\omega)$ , то  $Z(t) \rightarrow \infty$  почти наверное ( $Z$  монотонна по  $t$ ). Итак, рассмотрим  $(t, \omega)$  такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \text{ почти наверное.}$$

Тогда для этих  $(t, \omega)$  поделим обе части неравенства (2) на  $Z(t)$ :

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E} \xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E} \xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

**Определение 3.1.** Семейство случайных величин  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( |\xi_t| \mathbb{I} \{ |\xi_t| > c \} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

**Теорема 3.4.** Если  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  равномерно интегрируемо, то  $\mathbb{E} \xi_t \rightarrow \mathbb{E} \xi$ . Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

**Теорема 3.5** (де ла Валле Пуссена).  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  равномерно интегрируемо  $\Leftrightarrow \exists$  неубывающая функция  $g$  такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E} g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем  $g(t) := t^2$ ,  $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$ ,  $t > 0$ . Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E} (\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E} (Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать.  $\square$



### 3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

**Определение 3.2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$   $N = \{N(t), t \geq 0\}$  есть процесс восстановления, построенный на  $\{X_i\}$ .

**Определение 3.3.** Определим для  $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= X_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.6.** Для  $\forall t > 0$  величины  $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$  независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t), \quad X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

*Доказательство.* Для доказательства независимости достаточно показать, что для  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по  $k$ .  
Докажем базу индукции:  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1) = \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где  $X_i$  независимы и  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1\right) &= \mathbb{P}\left(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1\right) = \\
&= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\
&= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy
\end{aligned}$$

в силу независимости  $S_n$  и  $X_{n+1}$ . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy = \\
&= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{P}\left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3)  $u_1 = 0$  и получим, что

$$\mathbb{P}\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем  $n \in \mathbb{Z}_+$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1\right) &= \mathbb{P}\left(X_1^t \geq u_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\
&= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1},
\end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} P(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= P\left(\underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots}\right) = \\ &= P(N(t) = n) \underbrace{P(X_1 \geq u_1)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = P(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана.  $\square$

*Замечание* (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины  $X_{N(t)+1}$  содержит отрезок длины  $X_1^t$  по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени  $S_n$ , то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени  $X_i$ , а мы пришли на остановку в момент времени  $t$  и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

## 4 Лекция от 01.03.17

### Точечные процессы

#### 4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

**Определение 4.1.** Процесс  $\{Y(t), t \geq 0\}$  имеет *независимые приращения*, если

$$\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0), Y(t_1) - Y(t_0), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

**Теорема 4.1.** Пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  имеет независимые приращения.

*Доказательство.* Доказательство будем проводить по индукции по  $n$ . Введем процесс

$$N^t(s) := \sup \left\{ n : \sum_{k=1}^n X_k^t \leq s \right\}, \quad s \geq 0.$$

Из доказанного ранее следует, что  $\{N^t(s), s \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ . Заметим, что по определению

$$N^t(s) \in \sigma \{X_1^t, X_2^t, \dots\},$$

из чего следует, что  $N(t)$  независима с  $N^t(s) \forall s$ . Но

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t),$$

а значит, для  $n=1$  утверждение доказано:  $t_0 = t, t_1 = t+s$ . Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем  $t_0$  и рассмотрим  $N^{t_0}(s)$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} N^{t_0}(t_k - t_0) - N^{t_0}(t_{k-1} - t_0) &= \\ &= N(t_k - t_0 + t_0) - N(t_0) - (N(t_{k-1} - t_0 + t_0) - N(t_0)) = \\ &= N(t_k) - N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0}, N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0}, N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где  $s_k = t_k - t_0, k = 1, \dots, n$ . Но поскольку мы знаем, что  $N_{t_0}$  независима с  $N^t(s) \forall s$ , мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности  $\lambda$   $N^t(s)$ . Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана.  $\square$

## 4.2 Пространственный пуассоновский процесс

**Определение 4.2.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство, а  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Тогда процесс  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности  $\mu$* , если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \text{Pois}(\mu(B)), \quad B \in \mathcal{B};$$

во-вторых,

$\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$  таких, что  $B_i B_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ ,  
 $\mu(B_i) < \infty \forall i = 1, \dots, n$ , выполнено, что  $N(B_1), \dots, N(B_n)$  независимы.

*Замечание.* В определении выше сознательно не отбрасывались случаи  $\mu(B) = 0$  и  $\mu(B) = \infty$ . Положим по определению, что если  $\xi \sim \text{Poiss}(a)$ , то

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty &\Rightarrow \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty &\Rightarrow P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Определение 4.3.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство, а  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на нем. Пусть  $\mu(S) < \infty$ . Введем независимые случайные величины  $Y, X_1, X_2, \dots$  такие, что

$$\begin{aligned} Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y &\sim \text{Poiss}(\mu(S)), \\ X_i : \Omega \rightarrow S, \quad X &\in \mathcal{F}|\mathcal{B}, \quad P(X_1 \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(S)}. \end{aligned}$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^Y \mathbb{I}_B(X_n), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Более подробно,

$$N(B, \omega) = \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B(X_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

*Замечание.*  $\sum_1^0 := 0$ .

**Теорема 4.2.** В терминах определения 4.3  $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\mu$ .

*Доказательство.* Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, \text{ что } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что

$$\mu(B_i) < \mu(S) < \infty.$$

Убедимся, что  $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} P(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= P(N(B_1) = m_1), \dots, P(N(B_n) = m_n) = \\ &= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n, Y = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k)
\end{aligned}$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$m := m_1 + \dots + m_n;$$

$$m_0 := k - m;$$

$$B_0 := S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right).$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы")  $X_i, i = 1, \dots, k$ , которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках")  $B_j, j = 0, \dots, n$ ; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно  $m_j$  частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что  $Y$  — пуассоновская случайная величина:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \dots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)}\right)^{m_0} \dots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)}\right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\
&= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}.
\end{aligned}$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества  $B_j$  попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} &= \\
&= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{\mu(B_0)} = \\
&= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)},
\end{aligned}$$

потому что

$$e^{-\mu(S)} e^{\mu(B_0)} = e^{-(\mu(B_1) + \dots + \mu(B_n))}.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Лемма 4.3.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\xi_k \sim \text{Pois}(\lambda_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right),$$

где ряд может расходиться.

*Доказательство.* Если некоторое  $\lambda_k = \infty$ , то  $\xi_k = \infty$ , как и вся левая часть. Далее все  $\lambda_k < \infty$ .

1. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Имеем

$$\mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$

по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что  $\xi_k$  неотрицательны). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \xi < \infty$$

почти наверное. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{d}} \xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(u) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(e^{iu} - 1)} = \\ &= \exp \sum_{k=1}^n \lambda_k (e^{iu} - 1) \rightarrow \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e^{iu} - 1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right).$$

2. Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$

Находим последовательность  $r_j$  со свойством

$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \geq 1,$$

которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение

$$\eta_j := \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \xi_k;$$

Тогда  $\eta_1, \eta_2, \dots$  независимы, к тому же

$$\eta_j \sim \text{Pois} \left( \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbb{P}(\eta_j \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\eta_j = 0) \geq 1 - e^{-1} > 0.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_j \geq 1) = \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$$

почти наверное. Лемма доказана. □

**Определение 4.4.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство, а  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Пусть теперь  $\mu(S) = \infty$ . Для каждого  $S_q$  вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):

$$Y_q : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y_q \sim \text{Pois} \left( \mu(S_q) \right),$$

$$X_{q_i} : \Omega \rightarrow S_q, \quad X \in \mathcal{F} | \mathcal{B} \cap S_q, \quad \mathbb{P}(X_{q_i} \in C) = \frac{\mu(C)}{\mu(S_q)},$$



где

$$C \in \mathcal{B} \cap S_q \in \mathcal{B}.$$

Строим процесс

$$N_q(C) := \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C(X_{q,n}).$$

Положим

$$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q(B \cap S_q), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что все члены ряда независимы, а также что

$$N_q(B \cap S_q) \sim \text{Pois}(\mu(B \cap S_q)).$$

Тогда по лемме 4.3

$$N(B) \sim \text{Pois}\left(\sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q)\right) = \text{Pois}(\mu(B)).$$

### 4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

**Определение 4.5.** Процесс  $\{X(B), B \in \mathcal{B}\}$  называется (*простым*) *точечным процессом*, если

$$X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n), \quad B \in \mathcal{B},$$

где

$$Z_n : \Omega \rightarrow S, \quad Z_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}.$$

**Определение 4.6.** Пусть  $\mu(S) = \infty$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на  $(S, \mathcal{B})$ , а также

$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_{B \cap S_q}(X_{q,n}).$$

Пусть

$$V_0 := 0, \quad V_k := \sum_{j=1}^k Y_j.$$

Введем  $Z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть для  $\omega \in \Omega$

$$V_{k-1}(\omega) \leq n < V_k(\omega).$$

Определим

$$Z_n(\omega) := X_{k,n-V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$

Тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n).$$

**Определение 4.7.** Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ . Тогда функционал Лапласа  $\mathcal{L}(f)$  определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}(f) := \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$

где  $e^{-\infty} := 0$ .

#### 4.4 Маркирование пуассоновских процессов

**Определение 4.8.** Рассмотрим  $T, T_1, T_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  независима с  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ . На следующей лекции будет показано, что процесс, заданный элементами

$$Z_n := (S_n, T_n)_{n \geq 1},$$

является пространственным пуассоновским процессом с мерой

$$\lambda \nu \otimes \mathbf{G},$$

где  $\nu$  — мера Лебега на  $B(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbf{G}$  — мера, задаваемая распределением  $T$ .

*Замечание.* Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть  $S_n$  — время начала работы с клиентом,  $T_n$  — время работы с клиентом,  $Y_t$  — число клиентов, обслуживание которых происходит в момент  $t$ . Такая модель называется моделью  $M|G|\infty$ :  $M$  указывает на то, что процесс пуассоновский,  $G$  (general) указывает на то, что распределение времени обслуживания клиента произвольно, а  $\infty$  означает, что имеется бесконечное число приборов (в том смысле, что не создается очередей: работа с клиентом начинается в момент его прихода). Тогда

$$\begin{aligned} Y_t &= \# \{n : S_n \leq t < S_n + T_n\} = \# \{n : (S_n, T_n) \in B_t\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n, T_n) \sim \text{Pois}((\lambda \nu \otimes \mathbf{G})(B_t)), \end{aligned}$$

где

$$B_t := \{(x, y) : 0 \leq x \leq t < x + y\},$$

а точка  $(x, y)$  задается парой  $(S_n, T_n)$ . Вычислим:

$$\begin{aligned} (\lambda \nu \otimes \mathbf{G})(B_t) &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{I}_{B_t}(x, y) \lambda \nu(dx) \mathbf{G}(dy) = \\ &= \int_0^t \mathbf{G}(dy) \int_{t-y}^t \lambda dx + \int_t^{\infty} \mathbf{G}(dy) \int_0^t \lambda dx = \int_0^t \lambda y \mathbf{G}(dy) + \int_t^{\infty} \lambda t \mathbf{G}(dy) = \\ &= \lambda \int_0^{\infty} \min(t, y) \mathbf{G}(dy). \end{aligned}$$

Итак,

$$Y_t \sim \text{Pois} \left( \lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy) \right) \quad \forall t > 0.$$

Если  $ET < \infty$ , то

$$\text{Pois} \left( \lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy) \right) \rightarrow \text{Pois}(\lambda ET), \quad t \rightarrow \infty.$$

## 5 Лекция от 15.03.17

### Процессы с независимыми приращениями

#### 5.1 Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)

*Напоминание.* Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Z_n : \Omega \rightarrow S$ ,  $Z_n \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$ . Пусть также есть точечный процесс

$$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}$$

согласно определению 4.5. Введем для него функционал Лапласа согласно определению 4.7 по следующей формуле:

$$\mathcal{L}(f) := \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} < \infty,$$

где  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f \in \mathcal{B} | \mathcal{B}_+$ ,  $e^{-\infty} := 0$ ,  $\mathcal{B}_+$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра на  $\mathbb{R}_+$ .

**Теорема 5.1.**  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  является пространственным пуассоновским процессом с  $\sigma$ -конечной мерой интенсивности  $\mu \Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[ \int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx) \right].$$

*Доказательство.* Возьмем простую функцию  $f$ .

Сначала докажем **необходимость** ( $\Rightarrow$ ). Пусть  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  — пространственный пуассоновский процесс с мерой  $\mu$ . Сначала положим

$$f(x) := \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(x), \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j; \quad B_i \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mu(B_i) < \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)},$$

где перестановка знаков суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Заметим, что если  $\xi \sim \text{Poiss}(a)$ , то

$$\mathbb{E}e^{-v\xi} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr} \mathbb{P}(\xi = r) = e^{a(e^{-v}-1)}.$$

Воспользуемся также независимостью в совокупности  $N(B_k)$  в силу того, что множества  $B_i$  попарно не пересекаются. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)} &= \prod_{k=1}^m \mathbb{E}e^{-a_k N(B_k)} = \prod_{k=1}^m e^{\mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = \\ &= e^{\sum_{k=1}^m \mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = e^{\int_S (e^{-f(x)}-1) \mu(dx)}. \end{aligned}$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем две леммы.

**Лемма 5.2.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $\mu$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  — измеримая функция на нем. Тогда существует последовательность  $(f_j)_{j=1}^{\infty}$  простых функций вида (4) таких, что

$$f_j \nearrow f \text{ на } S \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Как и на прошлой лекции, разобьем  $S$  на множества  $S_q$ ,  $\mu(S_q) < \infty$ , что возможно ввиду  $\sigma$ -конечности меры  $\mu$ . Определим

$$f_{q,j}(x) = \mathbb{I}_{S_q}(x) \left( \sum_{r=0}^{2^{2j}-1} r 2^{-j} \mathbb{I} \left\{ r 2^{-j} \leq f(x) < (r+1) 2^{-j} \right\} + 2^j \mathbb{I} \left\{ f(x) \geq 2^j \right\} \right).$$

Тогда несложно проверить, что

$$0 \leq f_{q,j} \leq f_{q,j+1}, \quad 0 \leq f_j = \sum_{q=1}^j f_{q,j} \nearrow f \text{ на } S.$$

□

*Замечание.* Про это (с несколько другим построением простых функций) также можно почитать в [3] (страница 189).

**Лемма 5.3.** Пусть  $0 \leq a_{n,j} \nearrow a_n$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad j \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Тогда  $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n < \frac{\epsilon}{3}.$$

Из монотонной сходимости и предельного перехода в неравенстве получаем, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n,j} < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall j.$$

Зафиксируем  $N$ . Из сходимости следует, что

$$\forall n \exists N(n) : \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,m(n)} - a_n| < \frac{\epsilon}{3N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1, \dots, N} N(n).$$

Тогда для любого  $j > M$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N a_{n,j} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{n,j} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N |a_n - a_{n,j}| + \frac{2\epsilon}{3} \leq N \frac{\epsilon}{3N} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что  $\forall \epsilon \exists M : \forall j > M$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \right| \leq \epsilon,$$

то есть показана требуемая сходимость.

2. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Тогда  $\forall C > 0 \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=1}^m a_n > 2C.$$

Снова зафиксируем  $N$ . Из сходимости следует, что

$$\forall n \exists N(n) : \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,m(n)} - a_n| < \frac{C}{N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1, \dots, N} N(n).$$

Тогда для любого  $j > M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \geq \sum_{n=1}^N a_{n,j} \geq \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N |a_n - a_{n,j}| \geq 2C - N \frac{C}{N} = C,$$

чем снова показана требуемая сходимость. Лемма доказана.

□

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем  $0 \leq f_j \nearrow f$  по лемме 5.2. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n), \quad j \rightarrow \infty,$$

по лемме 5.3. Тогда

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n)} \rightarrow \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)}$$

по теореме Лебега. Итак,

$$\mathcal{L}(f) = \lim_{j \rightarrow \infty} \exp \left[ \int_S (e^{-f_j(x)} - 1) \mu(dx) \right] = \exp \left[ \int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx) \right],$$

поскольку

$$\int_S (e^{-f_j(x)} - 1) \mu(dx) \rightarrow \int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx), \quad j \rightarrow \infty,$$

ввиду неотрицательности подынтегрального выражения.

Перейдем к доказательству **достаточности** ( $\Leftarrow$ ). Пусть

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[ \int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx) \right].$$

Возьмем

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)}.$$

Если  $f = \mathbb{I}_B$ , то

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)} = \mathbb{E} e^{-a N(B)} = e^{\mu(B)(e^{-a} - 1)},$$

из чего следует, что  $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\mu$  в силу непрерывного соответствия между преобразованием Лапласа и функциями распределения. Теорема доказана. □

Приведем доказательство утверждения, которое было дано без доказательства в конце прошлой лекции.

**Теорема 5.4.** Пусть  $(S_n, T_n)_{n=1}^{\infty}$  — точечный процесс, причем  $(S_n)$  и  $(T_n)$  независимы, где  $(S_n)$  — пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\nu$ , где  $\nu$  — мера Лебега. Тогда  $(S_n, T_n)$  — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\nu \otimes \mathbb{G}$ , где  $\mathbb{G}$  — распределение  $T_i$ .

*Доказательство.* Вспомним, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)}.$$

Из курса математической статистики известно, что

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \mid \xi = u) = \mathbb{E}g(u, \eta),$$

если  $\xi$  независима с  $\eta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)} \mid s_1 = u_1, s_2 = u_2, \dots \right) &= \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n, T_n)} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} e^{-f(u_n, T_n)} \end{aligned}$$

в силу независимости  $(T_i)$ . Введем обозначение

$$g(u) := \mathbb{E} e^{-f(S_n, T_n)} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-f(u, x)} G(dx).$$

Заметим, что  $0 \leq g(u) < 1$ . Из курса математической статистики известно, что

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \mid \xi)).$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} \prod_{n=1}^{\infty} g(S_n) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} (-\log g(S_n))} = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)},$$

где  $h := -\log g \geq 0$ . Воспользуемся тем, что  $(S_n)$  — пуассоновский процесс:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)} &= \exp \left[ \int_{\mathbb{R}_+} (e^{-h(x)} - 1) \nu(dx) \right] = \exp \left[ \int_{\mathbb{R}_+} (g(x) - 1) \nu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[ \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathbb{R}_+} e^{-f(x, y)} G(dy) - 1 \right) \nu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[ \iint_{\mathbb{R}_+^2} (e^{-f(x, y)} - 1) G(dy) \nu(dx) \right]. \end{aligned}$$

Соответственно, в силу теоремы 5.1, процесс  $(S_n, T_n)$  является пространственным пуассоновским процессом. Теорема доказана.  $\square$

## 5.2 Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — семейство измеримых пространств,  $T$  — произвольное множество. Введем случайный процесс

$$X := \{X_t, t \in T\}, \quad X_t : \Omega \rightarrow S_t, \quad X_t \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_t} \quad \forall t \in T.$$

Рассмотрим упорядоченный набор

$$\tau := (t_1, \dots, t_n), \quad t_i \neq t_j \quad \forall i \neq j.$$

Определим тогда

$$S_\tau := S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \quad \mathcal{B}_\tau := \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n}.$$

Введем прямоугольник

$$(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}), \quad B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем также случайный элемент

$$X_\tau : \Omega \rightarrow S_\tau, \quad X_\tau \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_\tau} \quad (\Leftrightarrow X_{t_k} \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_{t_k}}, \quad k = 1, \dots, n).$$

Распределение  $X_\tau$  обозначим через  $P_\tau = P_{t_1 \dots t_n}$ , где набор  $t_1, \dots, t_n$  упорядочен.

**Определение 5.1.** Семейство мер  $P_{t_1 \dots t_n}$ , где

$$t_1, \dots, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t_i \neq t_j \quad \forall i \neq j,$$

называется *семейством конечномерных распределений*  $X = \{X_t, t \in T\}$ .

Рассмотрим прямоугольник  $B = B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$ .

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = \\ &= P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n}) = P(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}) = \\ &= P_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}}) \end{aligned}$$

для любой перестановки  $(i_1, \dots, i_n)$ . Таким образом, получили свойство:

**Свойство 5.1.**  $\forall n \forall$  перестановки  $(i_1, \dots, i_n)$  индексов  $(1, \dots, n)$

$$P_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}}) = P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}).$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ &= P_{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}), \end{aligned}$$

поскольку  $\{X_{t_k} \in S_{t_k}\} = \Omega$ . Таким образом, получили еще одно свойство:



**Свойство 5.2.**

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_k \dots t_n} (B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) = \\ = P_{t_1 \dots t_{k-1} \widehat{t_k} t_{k+1} \dots t_n} (B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times \widehat{S_{t_k}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}). \end{aligned}$$

**Определение 5.2.** Свойства 5.1 и 5.2 называются *условиями согласованности*.

**Определение 5.3.** Измеримые пространства  $(S, \mathcal{B})$  и  $(V, \mathcal{A})$  *изоморфны*, если

$$\begin{aligned} \exists h : S \rightarrow V, \quad h \in \mathcal{B}|\mathcal{A}, \\ \exists h^{-1} : V \rightarrow S, \quad h^{-1} \in \mathcal{A}|\mathcal{B}. \end{aligned}$$

**Определение 5.4.** Измеримое пространство  $(S, \mathcal{B})$  называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подмножеству отрезка  $[0, 1]$ .

**Определение 5.5.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным.

*Замечание.* Любое борелевское подмножество польского пространства является борелевским пространством.

**Теорема 5.5** (Колмогорова). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство борелевских пространств. Пусть  $P_{t_1 \dots t_n}$  — мера на  $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n})$ , которая удовлетворяет условиям согласованности 5.1 и 5.2. Тогда на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  такой, что  $X_t : \Omega \rightarrow S_t, \quad X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T$  и конечномерные распределения которого — это меры  $P_{t_1 \dots t_n}$ .

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

*Замечание.* В отличие от теоремы Ломницкого–Улама, в этой теореме накладываются ограничения топологического характера.

**Определение 5.6.** Пусть  $Q$  — мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . *Характеристической функцией меры  $Q$*  называется

$$\varphi_Q(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u, x)} Q(dx), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

*Замечание.* Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , то

$$\varphi_\xi(u) := \varphi_P(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u, x)} P_\xi(dx) = \int_{\Omega} e^{i(u, \xi)} dP = E e^{i(u, \xi)}.$$

**Теорема 5.6.** Пусть  $\varphi_{t_1 \dots t_n}$  — семейство характеристических функций мер на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Тогда существует случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \in T$ , для которого  $\varphi_{t_1 \dots t_n}$  — характеристические функции конечномерных распределений, в том и только в том случае, когда

1.  $\varphi_{t_1 \dots t_n}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) —$   
— перестановки  $(1, \dots, n)$ ;

$$2. \varphi_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n) = \varphi_{t_1 \dots \hat{t}_k \dots t_n}(u_1, \dots, \hat{0}, \dots, u_n).$$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

*Замечание.* Если  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $T \subset \mathbb{R}$ , то достаточно рассмотреть  $P_{t_1 \dots t_n}$ ,  $t_1 < \dots < t_n$ .

*Замечание.* Про эти теоремы почитать подробнее можно в [1].

### 5.3 Процессы с независимыми приращениями

**Теорема 5.7.** Для того чтобы существовал процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  с независимыми приращениями такой, чтобы характеристическая функция случайной величины  $X(t) - X(s)$  была равна  $\varphi(s, t, \cdot)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \varphi(u, t, v) \quad \forall 0 < s < u < t \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

При этом начальное распределение процесса  $P_0$  может быть выбрано любым.

*Замечание.* Про это также можно почитать в [1].

### 5.4 Модификация процесса

**Определение 5.7.** Процесс  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  называется *модификацией* процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , если

$$P(Y_t = X_t) = 1 \quad \forall t \in T.$$

**Лемма 5.8.** Из теоремы 5.6 следует, что существует процесс с независимыми приращениями  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  такой, что

$$N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)) \quad \forall 0 < s < t.$$

*Доказательство.* Вспомним, что если  $\xi \sim \text{Pois}(a)$ , то характеристическая функция  $\xi$  равна

$$\varphi_\xi(v) = e^{a(e^{iv} - 1)}.$$

Тогда запишем

$$\varphi_{N_t - N_s}(v) = e^{\lambda(t-s)(e^{iv} - 1)} = \varphi(s, t, v).$$

Но тогда

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \varphi(u, t, v),$$

что и требовалось показать.  $\square$

*Замечание.* Можно доказать, что у построенного процесса существует такая модификация, что ее траектории обладают следующими свойствами:

- они неубывают;
- они непрерывны справа;
- они имеют предел слева;
- все их скачки имеют величину 1;
- длина промежутков между скачками распределена экспоненциально;
- промежутки между скачками независимы.

Таким образом, этот процесс можно рассматривать как процесс восстановления.

**Пример 5.1.** Рассмотрим вероятностное пространство  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \nu)$ , где  $\nu$  — мера Лебега, и измеримое пространство  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$ . Введем случайные процессы  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  следующим образом:

$$X(t, \omega) \equiv 0, \quad Y(t, \omega) = \begin{cases} 1, & t = \omega \\ 0, & t \neq \omega \end{cases}, \quad t, \omega \in [0, 1],$$

где  $\delta_{t, \omega}$  — символ Кронекера. Тогда все траектории  $X$  непрерывны, а все траектории  $Y$  разрывны, но вместе с этим

$$P(X_t \neq Y_t) = \nu(\{t\}) = 0,$$

то есть  $Y$  является модификацией  $X$ . Таким образом, отношение эквивалентности, порождаемое свойством 'быть модификацией друг друга', не сохраняет непрерывности траекторий.

## Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.
- [3] Ширяев А. Н. Вероятность.