Версия v15.15 09:35 12.06.17

1 Обязательные задачи к лекциям

1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

Задача 1. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ — простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}$, имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.*

Решение. Разобьем линию времени на промежутки длины $|a-b|$. Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение -1 (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для N промежутков получаем вероятность P^N; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение -1, равна

$$\lim_{N\to\infty} P^N = 0.$$

Задача 2. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ и $S' = \{S'_n,\, n \geqslant 0\}$ — независимые простые случайные блуждания в $\mathbb{Z}^d$, имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n\geqslant 1}$ и $\left(X'_n\right)_{n\geqslant 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что*

$$\mathsf{P}\left(X_1 = e_k\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X_1 = -e_k\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X'_1 = e_k\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X'_1 = -e_k\right) \;=\; \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k — вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого k-я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \ldots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\},$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A. Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathsf{E}N < \infty$.

Решение. Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\left\{S_n^k - S_m^{k\prime} = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{i\left(S_n^k - S_m^{k\prime}\right)t_k}}{2\pi}\, dt_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\, dt,$$

поскольку

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi}\, dx \;=\; \mathbb{I}\left\{n = 0\right\}.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^n(t)\varphi^m(-t)\, dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\, dt,$$

где

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{i(X_1, t)}.$$

Получаем, что

$$\mathsf{E}N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\, dt \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{\big(1 - \varphi(t)\big)^2}\, dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos t_k \sim \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d} t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{\big(1 - \varphi(t)\big)^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель R в степени $d-1$, то интеграл сходится $\Leftrightarrow d \geqslant 5$.

1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

Задача 3. *Пусть в модели Гальтона–Ватсона* $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi = 2) = 1/2$, $\mathsf{P}(\xi = 6) = 1/4$. *Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше* $1/2$.

Решение. Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию $\psi_\xi(z) - z$. Заметим, что

$$\big(\psi_\xi(z) - z\big)\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \ \ \big(\psi_\xi(z) - z\big)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку $\psi_\xi(z) - z$ — непрерывная функция, то уравнение $\psi_\xi(z) - z = 0$ будет иметь корень на интервале $(0,\, 1/2)$. Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше $1/2$.

Задача 4. *Пусть* $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ — *процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин* $X_1, X_2, \ldots$ *таких, что* $\mathsf{E}X_1 = \mu \in (0, \infty)$ *и* $varX_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. *Доказать, что*

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{law} N(0,\,1),\ t \to \infty.$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0,\,1).$$

Запишем

$$\mathsf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) = \mathsf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(Z(t) < n\right) = \mathsf{P}\left(S_n > t\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\mathsf{P}\left(Z(t) < n(t)\right) = \mathsf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathsf{P}\left(S_{n(t)} > t\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right).$$

Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо $n(t)$ его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику дробной части):

$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$

Поскольку нас интересует асимптотика при $t \to \infty$, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > -xA(t)\right),$$

где

$$A(t) \to 1, \quad t \to \infty.$$

Перепишем:

$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > -xA(t)\right) = \mathsf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$

Воспользуемся леммой Слуцкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку

$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\,1), \quad A(t) \to 1, \quad t \to \infty,$$

то

$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\,1).$$

Тогда получаем, что в каждой точке x непрерывности функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке x),

$$\mathsf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \to 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Итак, получили, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \to \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t)-\frac{1}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\,1),\ t\to\infty.$$

1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

Задача 5. *Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?*

Решение. Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина ξ равновероятно (с вероятностью $1/3$) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n \sim \xi$ процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup \{n : \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant t\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим $Z(2) - Z(1)$, $Z(1)$.

$$\mathsf{P}\left(Z(2) - Z(1) = 0,\, Z(1) = 0\right) = 0,$$

поскольку $\xi_n \leqslant 2$. Вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(Z(2) - Z(1) = 0\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\xi_1 = 1,\, \xi_2 = 2\right) = \frac{1}{9}, \quad \mathsf{P}\left(Z(1) = 0\right) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

Задача 6. *Найти ковариационную функцию процесса $Z(t) = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N.*

Решение. Сначала предположим, что $t > s$. Вычислим ковариационную функцию:

$$cov\left(Z(t),\, Z(s)\right) = cov\left(\xi_0(-1)^{N(t)},\, \xi_0(-1)^{N(s)}\right) = \\ = \mathsf{E}\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(t)}\, \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(s)}.$$

Поскольку

$$\mathsf{E}\xi_0 = 0,\ \xi_0^2 = 1,\ (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$\mathsf{E}\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(t)}\, \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(s)} = \mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности λ является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right).$$

Тогда получаем, что

$$\mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай $t \leqslant s$ рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$cov\left(Z(t),\, Z(s)\right) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

1.4 Задачи к лекции от 01.03.17

Задача 7. *Пусть* $N = \{N(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ *— пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности* $\lambda\mu(\cdot)$, *где* λ *— положительная константа, а* μ *— мера Лебега в* $\mathbb{R}^d$. *Пусть* $\{x_i\}$ *— ансамбль случайных точек в* $\mathbb{R}^d$, *образующих этот процесс. Для* $z \in \mathbb{R}^d$ *введем случайную величину* $Y(z) := \inf_{i\in\mathbb{N}} \|z - x_i\|$, *где* $\|\cdot\|$ *— евклидова норма в* $\mathbb{R}^d$ *(иначе говоря, рассматривается расстояние от точки* z *до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найти функцию распределения величины* $Y(z)$ *и ее математическое ожидание.*

Решение. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(Y(z) \geqslant R\right) = \mathsf{P}\left(N(\mathrm{B}_{z,\,R}) = 0\right),$$

где $\mathrm{B}_{z,\,R}$ — шар с центром z и радиусом R. Известно, что мера Лебега, то есть объем, d–мерного шара, равен

$$\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} R^d.$$

По определению пространственного пуассоновского процесса,

$$\mathsf{P}\left(N(\mathrm{B}_{z,\,R}) = 0\right) = e^{-\lambda\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right)};$$

таким образом,

$$F_{Y(z)}(R) = \mathsf{P}\left(Y(z) < R\right) = 1 - e^{-\lambda\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right)} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leqslant 0. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание $Y(z)$. Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$p_{Y(z)}(R) = F'_{Y(z)}(R) = \begin{cases} \lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} dR^{d-1}\, e^{-\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leqslant 0 \end{cases}$$

Вычислим интеграл. Для упрощения введем обозначение

$$Q := \lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}.$$

Тогда

$$\mathsf{E}Y(z) = \int\limits_0^\infty QdR^d e^{-QR^d}\,\mathrm{d}R = -\int\limits_0^\infty Re^{-QR^d}\,\mathrm{d}(-QR^d) = -\int\limits_0^\infty R\,\mathrm{d}(e^{-QR^d}) =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-QR^d}\,\mathrm{d}R = \int\limits_0^\infty e^{-Qu}\,\mathrm{d}(\sqrt[d]{u}) = \frac{1}{d}\int\limits_0^\infty u^{\frac{1}{d}-1}e^{-Qu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{d}Q^{-\frac{1}{d}}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{d}-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}\left(\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\right)^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right).$$

Задача 8. *Пусть $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, то есть процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин $X,\, X_1,\, X_2,\, \ldots$ таких, что $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Положим $S_n := X_1 + \ldots + X_n,\ n \in \mathbb{N}$. Найти функционал Лапласа процесса $Y = \left\{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B\left(S_n\right),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$.*

Решение. Для начала возьмем простую функцию:

$$f(x) := c\,\mathbb{I}\left(0 \leqslant x \leqslant t\right).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c\,\mathbb{I}\left(S_n \leqslant t\right) = cN(t), \quad N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t).$$

Из этого получаем, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathsf{E} e^{-cN(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ck} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t\left(1-e^{-c}\right)}.$$

Заметим, что

$$e^{-\lambda t\left(1-e^{-c}\right)} = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-f(x)}\right) dx}.$$

Будем доказывать, что

$$\mathscr{L}(f) = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-f(x)}\right) dx}.$$

Рассмотрим теперь

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathbb{I}(t_{i-1} \leqslant x < t_i), \quad c_i > 0, \quad 0 \leqslant t_0 < \ldots < t_n.$$

Из независимости приращений пуассоновского процесса и из полученного выше значения функционала Лапласа на простой функции следует, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathsf{E} \prod_{i=1}^{n} e^{-c_i \xi_i}, \ \ \xi_i \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t_i - t_{i-1})\right),$$

то есть

$$\mathscr{L}(f) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t\left(1-e^{-c_i}\right)} = e^{-\lambda t \sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-e^{-c_i}\right)}.$$

Снова отметим, что

$$\mathscr{L}(f) = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-f(x)}\right) dx}.$$

Из курса действительного анализа известно, что любая неотрицательная измеримая функция приближается монотонно возрастающей последовательностью линейных комбинаций простых функций (этот факт также доказан в лекциях, см. Лемму 5.2). Возьмем такую последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $f_n \nearrow f$ почти наверное. Заметим, что интеграл в экспоненте, рассматриваемый как функция от аргумента $f(x)$, монотонно зависит от $f(x)$. Поскольку функционал Лапласа определен только для неотрицательных функций, то

$$e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f(S_p)}$$

по теореме о монотонной сходимости. Тогда

$$\mathscr{L}(f_n) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_n\left(S_p\right)} \searrow \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f\left(S_p\right)} = \mathscr{L}(f).$$

Вместе с этим

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_n\left(S_p\right)} = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty} \left(1-e^{-f_n(x)}\right) dx} \searrow e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty} \left(1-e^{-f(x)}\right) dx}$$

по теореме о монотонной сходимости. Получили, что

$$\mathscr{L}(f) = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty} \left(1-e^{-f(x)}\right) dx}.$$

1.5 Задачи к лекции от 15.03.17

Задача 9. *Пусть* $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ *— пуассоновский процесс интенсивности* $\lambda > 0$, $Y,\, Y_1, Y_2, \ldots$ *— независимые одинаково распределенные неотрицательные величины, причем семейства* $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ *и* $\{Y_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *независимы. Определим процесс Крамера–Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент* $t \geqslant 0$, *формулой*

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geqslant 0,$$

где C_0 *и* c *— положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс* $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ *имеет независимые приращения.*

Решение. Проверим независимость приращений. Для этого необходимо показать, что случайные величины

$$Z(t_0),\, Z(t_1) - Z(t_0),\, \ldots,\, Z(t_n) - Z(t_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, 0 \leqslant t_0 < \ldots < t_n,$$

независимы в совокупности. Для этого достаточно (поскольку борелевские функции от независимых случайных величин независимы) показать, что случайные величины

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{N(t_0)} Y_k, \quad \xi_2 = \sum_{k=N(t_0)+1}^{N(t_1)} Y_k, \quad \ldots, \quad \xi_{n+1} = \sum_{k=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)} Y_k$$

независимы в совокупности. Известно (см., например, [2], страница 304), что для того чтобы компоненты случайного вектора $(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$ были независимы в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathsf{E} e^{i(u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n)} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E} e^{iu_k\xi_k}.$$

Проверим, что в данном случае это свойство выполнено. Составим вектор из этих случайных сумм и найдем его характеристическую функцию:

$$\varphi_{\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{n+1}}(u_1,\, \ldots,\, u_{n+1}) = \mathsf{E} \exp\left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right],$$

где $N(t_{-1}) \equiv 0$. Будем использовать аппарат условных математических ожиданий. Рассмотрим

$$\mathsf{E} \left(\exp\left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] \,\middle|\, N(t_0) = v_1,\, \ldots,\, N(t_n) = v_n \right),$$

где $v_0 = 0$. Из курса математической статистики известны следующие свойства условного математического ожидания: во–первых, если ξ и η — независимые случайные векторы, то

$$\mathsf{E}\left(f(\xi,\, \eta) \,|\, \eta = y \right) = \mathsf{E} f(\xi,\, y);$$

во–вторых,
$$\mathsf{E}\left(\xi\,\middle|\,\eta\right)=\psi(\eta)\;\Leftrightarrow\;\mathsf{E}\left(\xi\,\middle|\,\eta=y\right)=\psi(y);$$
в–третьих,
$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\xi\,\middle|\,\eta\right)\right)=\mathsf{E}\xi.$$
Воспользуемся первым свойством с $\xi=(Y_1,\,\ldots,\,Y_{n+1})$, $\eta=\big(N(t_0),\,\ldots,\,N(t_{n+1})\big)$, а также независимостью в совокупности Y_k:
$$\mathsf{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1}u_j\sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}Y_k\right]\,\middle|\,N(t_0)=v_1,\,\ldots,\,N(t_n)=v_n\right)=$$
$$=\mathsf{E}\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1}u_j\sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}Y_k\right]=\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n+1}\exp\left[iu_j\sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}Y_k\right]=$$
$$=\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n+1}\prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}e^{iu_jY_k}=\prod_{j=1}^{n+1}\prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}\mathsf{E}e^{iu_jY_k}=$$
$$=\prod_{j=1}^{n+1}\Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^{v_j-v_{j-1}}.$$
Воспользуемся вторым свойством:
$$\mathsf{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1}u_j\sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}Y_k\right]\,\middle|\,N(t_0),\,\ldots,\,N(t_n)\right)=$$
$$=\prod_{j=1}^{n+1}\Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^{N(t_{j-1})-N(t_{j-2})}.$$
По условию N — пуассоновский процесс, то есть
$$\forall\,0\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_n\quad N(t_0),\,N(t_1)-N(t_0),\,\ldots,\,N(t_n)-N(t_{n-1})$$
независимы в совокупности и
$$\forall\,s\leqslant t\;\;N(t)-N(s)\sim\mathrm{Poiss}\big(\lambda(t-s)\big)\,.$$
Воспользуемся тогда третьим свойством, а также тем, что N — пуассоновский процесс:
$$\mathsf{E}\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1}u_j\sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})}Y_k\right]=$$
$$=\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1}u_j\sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j}Y_k\right]\,\middle|\,N(t_0),\,\ldots,\,N(t_n)\right)\right)=$$

$$= \mathsf{E} \prod_{j=1}^{n+1} \Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^{N(t_{j-1})-N(t_{j-2})} = \prod_{j=1}^{n+1} \mathsf{E} \Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^{N(t_{j-1})-N(t_{j-2})} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^k e^{-\lambda(t_{j-1}-t_{j-2})} \frac{\left(\lambda\left(t_{j-1}-t_{j-2}\right)\right)^k}{k!} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n+1} e^{\lambda\left(t_{j-1}-t_{j-2}\right)\left(\varphi_Y(u_j)-1\right)}.$$

Таким образом, мы показали, что характеристическая функция вектора распадается в произведение одномерных функций, что и показывает независимость в совокупности исходных случайных величин.

Задача 10. *Для пуассоновского процесса* $N = \big\{N(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *интенсивности* $\lambda > 0$ *(вводимого как процесс с независимыми приращениями,* $N(0) = 0$ *почти наверное,* $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$*) доказать, что не существует модификации, непрерывной почти наверное.*

Решение. См. [3], стр. 93, пример 18.

1.6 Задачи к лекции от 22.03.17

Задача 11. *Пусть* $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ *— пуассоновский процесс интенсивности* λ *(как процесс восстановления). Доказать, что* $\tau := \gamma S_1$*, где константа* $\gamma \in (0,\, 1)$*, не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса* N *(*S_1 *— длина промежутка до первого скачка процесса* N*).*

Решение. Пусть τ — марковский момент. Тогда τ — момент остановки, поскольку S_1 конечен с вероятностью 1. Тогда к τ применимо строго марковское свойство, из чего следует, что процесс $X_t = N_{t+\tau} - N_\tau$ — тоже пуассоновский процесс интенсивности λ, который при этом не зависит от τ. Заметим, однако, что $N_\tau = 0$ почти наверное, так как $\tau < S_1$. Значит,

$$N_{t+\tau} \sim \mathrm{Poiss}\,(\lambda t)\,.$$

Но тогда из независимости $N_{t+\tau}$ и τ получаем искомое противоречие:

$$e^{-\lambda t} = \mathsf{P}\,(N_{t+\tau} = 0) \;=\; \mathsf{P}\left(N_{t+\tau} = 0 \,\middle|\, \tau = x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(N_{t+x} = 0 \,\middle|\, \tau = x\right) \;= \\ =\; \mathsf{P}\,(N_{t+x} = 0) \;=\; e^{-\lambda(t+x)}.$$

Задача 12. *Доказать, что для каждого* $a > 0$ *величина* $\tau_a(\omega) := := \inf\{t \geqslant 0 :\, W(t,\, \omega) = a\}$ *является конечным почти наверное марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса* $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$*.*

Решение. Пусть $a > 0$. Тогда

$$\{\tau_a > t\} = \{\forall s \leqslant t \;\; W_s < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\forall s \leqslant t \;\; W_s \leqslant a - \frac{1}{k}\right\}.$$

Воспользуемся непрерывностью траекторий винеровского процесса:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\forall s \leqslant t \;\; W_s \leqslant a - \frac{1}{k}\right\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s \leqslant t}} \left\{W_s \leqslant a - \frac{1}{k}\right\} \in \mathscr{F}_t^W.$$

Покажем теперь, что τ_a — момент остановки. Для этого воспользуемся законом повторного логарифма:

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{t \to +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1\right) = 1.$$

Это, в свою очередь, значит, что для почти каждой реализации винеровского процесса есть подпоследовательность W_{t_k}, которая растет как $\sqrt{2t \ln \ln t}$ и, соответственно, "перескочит" любое a за конечное время.

1.7 Задачи к лекции от 29.03.17

Задача 13. *Доказать, что если* $0 \leqslant a < b \leqslant c < d$*, то с вероятностью единица*

$$\sup_{t \in [a,\, b]} W(t) \neq \sup_{t \in [c,\, d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка $[u,\, v] \subset \mathbb{R}$ *с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина* $T^\star = T^\star(\omega)$ *такая, что*

$$\sup_{t \in [u,\, v]} W(t) = W\left(T^\star\right).$$

Решение. Покажем, что $\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant c < d$

$$\mathsf{P}\left(\max_{t \in [a,\, b]} W_t = \max_{t \in [c,\, d]} W_t\right) \;=\; 0.$$

Введем процесс $X_t := W_{t+c} - W_c$. Тогда по марковскому свойству он будет винеровским процессом, независимым с $\mathscr{F}_c^W$. Перепишем:

$$\mathsf{P}\left(\max_{t \in [a,\, b]} W_t = \max_{t \in [c,\, d]} W_t\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\max_{t \in [a,\, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0,\, d-c]} X_t\right).$$

Обозначим

$$\xi \;:=\; \max_{t \in [a,\, b]} W_t - W_c.$$

Заметим, что ξ — $\mathscr{F}_c^W$–измеримая случайная величина. Еще раз перепишем:

$$\mathsf{P}\left(\max_{t \in [a,\, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0,\, d-c]} X_t\right) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\left(\max_{t \in [0,\, d-c]} X_t = x \,\middle|\, \xi = x\right) p_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из независимости получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\left(\max_{t \in [0,\, d-c]} X_t = x \,\middle|\, \xi = x\right) p_\xi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\left(\max_{t \in [0,\, d-c]} X_t = x\right) p_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(\max_{t \in [0,\, d-c]} X_t = x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(|W_{d-c}| = x\right) \;=\; 0,$$

то есть и интеграл также равен нулю, что и требовалось доказать.
Выведем отсюда корректность определения $T^\star$. Пусть максимум $W(t)$ на отрезке $[u,\, v]$ достигается в двух различных точках $t_1 \neq t_2$. Введем счетное семейство отрезков

$$I_{n,\, k} \;:=\; \left[u + \frac{k}{2^n}(v-u),\, u + \frac{k+1}{2^n}(v-u)\right],$$

где $n \in \mathbb{N}$, $k = 0,\, \ldots,\, 2^n - 1$. Введем события

$$A_{n,\, k_1,\, k_2} \;:=\; \left\{t_1 \in I_{n,\, k_1}\right\} \cap \left\{t_2 \in I_{n,\, k_2}\right\} \cap \left\{k_1 \neq k_2\right\}.$$

Тогда по предыдущему

$$\mathsf{P}\left(A_{n,\,k_1,\,k_2}\right) \;=\; 0;$$

из-за счетности числа отрезков

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n,\,k_1,\,k_2} A_{n,\,k_1,\,k_2}\right) \;=\; 0.$$

Вместе с этим наше предположение о существовании двух таких точек является событием, вложенным в это объединение событий, то есть событием нулевой вероятности, что и требовалось доказать.

Задача 14. *Пусть* $T := \arg\max\limits_{t\in[0,\,1]} W(t)$, *то есть* $T(\omega)$ — *та точка отрезка* $[0,\,1]$, *в которой непрерывная траектория* $W(t)$, $t \in [0,\,1]$, *достигает максимума (величина* T *определена с точностью до эквивалентности в силу предыдущей задачи). Доказать, что*

$$\mathsf{P}\left(T \leqslant t\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{t}, \;\; t \in [0,\,1].$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$M_t^W \;:=\; \max_{s\in[0,\,t]} W(s).$$

Перепишем в терминах этого обозначения $\mathsf{P}\left(T \leqslant t\right)$:

$$\mathsf{P}\left(T \leqslant t\right) \;=\; \mathsf{P}\left(M_t^W \geqslant \max_{s\in[t,\,1]} W(s)\right).$$

Вычтем из обеих частей второго неравенства $W(t)$:

$$\mathsf{P}\left(M_t^W \geqslant \max_{s\in[t,\,1]} W(s)\right) \;=\; \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant \max_{s\in[t,\,1]} \bigl(W(s) - W(t)\bigr)\right) \;=$$
$$=\; \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant \max_{s\in[0,\,1-t]} X(s)\right) \;=\; \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X\right),$$

где $X = \bigl\{X(t),\, t \geqslant 0\bigr\}$ — винеровский процесс, независимый с σ–алгеброй $\mathscr{F}_t^W$ по марковскому свойству.
Дальнейший ход решения можно представить следующим образом:

1. сначала найдем совместное распределение случайных величин M_t^W и $W(t)$;
2. затем найдем распределение случайной величины $M_t^W - W(t)$;
3. затем интегрированием условного распределения найдем искомую вероятность.

Приступим к реализации этого плана.
Найдем совместное распределение: $\forall\, y \geqslant x,\; y \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(W(t) < x,\, M_t^W < y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W(t) < x\right) - \mathsf{P}\left(W(t) < x,\, M_t^W \geqslant y\right) \;=$$

$$= \mathsf{P}\left(W(t) < x\right) - \mathsf{P}\left(W(t) \geqslant 2y - x\right) \;=\; \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)$$

по лемме 7.3 из лекций. Дальше для решения задачи достаточно значений этой функции распределения на $y \geqslant \max(0,\, x)$. Совместное распределение нашли.

Для того чтобы найти распределение $M_t^W - W(t)$, вычислим совместную плотность последовательным дифференцированием по x и y совместной функции распределения:

$$p(x,\, y) \;=\; \left(\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\right)''_{xy} \;=\; -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right),$$

где $\mathrm{p}(x)$ — плотность случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$. Проинтегрируем:

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) > u\right) \;=\; \iint\limits_{\substack{y - x > u \\ y \geqslant 0}} \mathrm{p}'(x,\, y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Этот интеграл удобно считать в виде суммы двух интегралов (читателю рекомендуется нарисовать картинку и заштриховать область интегрирования, чтобы в этом убедиться):

$$\iint\limits_{\substack{y - x > u \\ y \geqslant 0}} \mathrm{p}'(x,\, y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \;=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-u} \left(\int\limits_{0}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{-u}^{+\infty} \left(\int\limits_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Вычислим эти интегралы по отдельности:

$$\int\limits_{-\infty}^{-u} \left(\int\limits_{0}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{-\infty}^{-u} \left(\int\limits_{0}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\right) \mathrm{d}x \;=$$

$$=\; -\int\limits_{-\infty}^{-u} \mathrm{p}\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) \;=\; 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

$$\int\limits_{-u}^{+\infty} \left(\int\limits_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-u}^{+\infty} \left(\int\limits_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\right) \mathrm{d}x =$$

$$=\; \int\limits_{-u}^{+\infty} \mathrm{p}\left(\frac{2u + x}{\sqrt{t}}\right)\, \mathrm{d}\left(\frac{2u + x}{\sqrt{t}}\right) \;=\; 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

Таким образом, $\forall u \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) > u\right) \;=\; 2 - 2\,\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

Распределение $M_t^W - W(t)$ нашли.
Вычислим, наконец, искомую вероятность:

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X\right) = \\ = \int\limits_0^{+\infty} \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X \,\middle|\, M_{1-t}^X = u\right) p_{M_{1-t}^X}(u)\,\mathrm{d}u = \\ = \int\limits_0^{+\infty} \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant u\right) p_{M_{1-t}^X}(u)\,\mathrm{d}u$$

в силу независимости M_{1-t}^X и $\mathscr{F}_t^W$. Из теоремы 7.4 знаем, что

$$\mathsf{P}\left(M_{1-t}^X > v\right) = \mathsf{P}\left(\left|X(1-t)\right| > v\right),$$

то есть

$$p_{M_{1-t}^X}(u) = \frac{2}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X\right) = \int\limits_0^{+\infty}\left(2 - 2\,\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right)\frac{2}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right)\,\mathrm{d}u = \\ = 2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right)\,\mathrm{d}\frac{u}{\sqrt{1-t}}.$$

В явном виде этот интеграл считать оказалось проблематичным, так что будем делать следующее: возьмем производную по параметру и убедимся в том, что она совпадает с производной ответа. Сделаем замену $y = \frac{u}{\sqrt{1-t}}$:

$$2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right)\,\mathrm{d}\frac{u}{\sqrt{1-t}} = 2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\,(y)\;\mathrm{d}y;$$

тогда

$$\left(2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\,(y)\;\mathrm{d}y\right)_t' = \\ = 2\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{p}\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\;\mathrm{p}(y)\,y\,\frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}y = \\ = \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{p}\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\;\mathrm{p}(y)\mathrm{d}y^2 = \\ = \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2(1-t)}{2t}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y^2 = \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2t}}\,\mathrm{d}y^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}};$$

вместе с этим

$$\left(\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} \right)' = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}.$$

Значит, производные совпадают, а значит, совпадают и первообразные с точностью до константы. Но так как речь идет о вероятностях, то путем подстановки в равенство

$$\mathsf{P}\left(T \leqslant t\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} + C$$

$t = 1$ сразу получаем, что $C = 0$. Задача решена.

1.8 Задачи к лекции от 05.04.17

Задача 15. *Пусть $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс. Найти все действительные параметры α, β и γ, для которых процесс $Y = \left\{Y(t) := \exp\left\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\right\},\, t \geqslant 0\right\}$ является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса W.*

Решение. Запишем субмартингальное свойство: $\forall\, t \geqslant s$

$$\mathsf{E}\left(Y_t \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \;\geqslant\; Y_s,$$

где $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — естественная фильтрация процесса Y. Запишем в явном виде левую часть неравенства, воспользовавшись независимостью приращений винеровского процесса:

$$\mathsf{E}\left(e^{\alpha W(t)+\beta t+\gamma} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \;=\; \mathsf{E}\left(e^{\alpha\left(W(t)-W(s)+W(s)\right)+\beta t+\gamma} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \;=$$
$$=\; e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \mathsf{E} e^{\alpha\left(W(t)-W(s)\right)}.$$

Заметим, что поскольку характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ случайной величины ξ определяется как $\mathsf{E}e^{it\xi}$, то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \mathsf{E} e^{\alpha\left(W(t)-W(s)\right)} \;=\; e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \varphi_{W(t)-W(s)}(-i\alpha).$$

Поскольку $W(t)-W(s) \sim \mathcal{N}(0,\, t-s)$ и поскольку характеристическая функция случайной величины $\eta \sim \mathcal{N}(a,\, \sigma^2)$ равна

$$\varphi_\eta(t) \;=\; e^{ita-\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \varphi_{W(t)-W(s)}(-i\alpha) \;=\; e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma+\frac{\alpha^2}{2}(t-s)}.$$

Таким образом, субмартингальное свойство заключается в том, что $\forall\, t \geqslant s$

$$e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma+\frac{\alpha^2}{2}(t-s)} \;\geqslant\; e^{\alpha W(s)+\beta s+\gamma},$$

то есть

$$e^{\left(\frac{\alpha^2}{2}+\beta\right)(t-s)} \geqslant 1,$$

или

$$\frac{\alpha^2}{2} + \beta \;\geqslant\; 0.$$

Задача 16. *Привести пример мартингала $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и момента остановки τ (относительно естественной фильтрации процесса X), для которых $\mathsf{E}X_\tau \neq \mathsf{E}X_0$.*

Решение. Возьмем простейшее симметричное случайное блуждание с началом в 0 в качестве X и $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$. Тогда τ — момент остановки, как показано в первой задаче к первой лекции, но

$$0 \;=\; \mathsf{E}X_0 \;\neq\; \mathsf{E}X_\tau \;=\; 1.$$

1.9 Задачи к лекции от 12.04.17

Задача 17. *Пусть* $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ *— цепь Маркова. Будет ли* $Y := \Big\{X_{[t]},\, t \geqslant 0\Big\}$ *марковской цепью относительно своей естественной фильтрации? Можно ли утверждать, что процесс* $Z = \big\{Z(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *является марковским, если* $Z(t)$ *для* $t \in [n,\, n+1]$ *получается линейной интерполяцией значений* X_n *и* X_{n+1}*?*

Решение. Y будет марковской цепью: по определению $\forall\, 0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t$ и $\forall$ измеримой и ограниченной функции f

$$\mathsf{E}\Big(f\left(Y_t\right) \,\Big|\, Y_{s_n},\, \ldots,\, Y_{s_1}\Big) \;=\; \mathsf{E}\left(f\left(Y_{[t]}\right) \,\middle|\, Y_{[s_n]},\, \ldots,\, Y_{[s_1]}\right) \;=$$

$$= \mathsf{E}\left(f\left(X_{[t]}\right) \,\middle|\, X_{[s_n]},\, \ldots,\, X_{[s_1]}\right) = \mathsf{E}\left(f\left(X_{[t]}\right) \,\middle|\, X_{[s_n]}\right) = \mathsf{E}\Big(f\left(Y_t\right) \,\Big|\, Y_{s_n}\Big).$$

Вместе с этим Z не обязательно является марковским процессом. Приведем контрпример: возьмем пуассоновский процесс в целых точках X (который будет марковской цепью) и получим по нему процесс Z, линейно интерполируя его значения. Тогда, например,

$$\mathsf{P}\left(Z_{1.5} = 1.5,\, Z_1 = 0\right) \;>\; 0,$$

но вместе с этим

$$\mathsf{P}\Big(Z_2 = 2 \,\Big|\, Z_{1.5} = 1.5\Big) \;\neq\; 0 \;=\; \mathsf{P}\Big(Z_2 = 2 \,\Big|\, Z_{1.5} = 1.5,\, Z_1 = 0\Big).$$

Задача 18. *Доказать, что процесс* $N = \big\{N(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *является пуассоновским процессом интенсивности* λ *(то есть* N *— процесс с независимыми приращениями такой, что* $N(0) = 0$ *почти наверное и* $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\big(\lambda(t-s)\big)\, \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty$*) тогда и только тогда, когда* N *— марковская цепь со значениями в пространстве* $\mathbb{Z}_+$ *и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для* $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $i,\, j \in \mathbb{Z}_+$, *определяются формулой*

$$\mathrm{p}_{ij}(s,\, t) \;=\; \begin{cases} \frac{\left(\lambda(t-s)\right)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leqslant j; \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Решение. См. [1], стр. 191.

1.10 Задачи к лекции от 19.04.17

Задача 19. *Пусть $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний S. Для $i \in S$ положим*

$$c_i \;:=\; gcd\left\{n \geqslant 1 : \mathrm{p}_{ii}(n) > 0\right\},$$

где gcd означает наибольший общий делитель. Состояние i называется периодическим с периодом d ($d > 1$), когда $c_i = d$. Если $c_i = 1$, то i — непериодическое состояние.
Доказать, что если цепь X неразложима (то есть для любых $i, j \in S\,(i \neq j)$ найдутся $k, m \in \mathbb{N}$ такие, что $\mathrm{p}_{ij}(k) > 0$ и $\mathrm{p}_{ji}(m) > 0$), то все состояния одновременно непериодические или периодические, причем в последнем случае все периоды совпадают. Доказать, что если цепь X неразложима и непериодична, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathrm{p}_{ij}(n) > 0$ при всех i, j и $n \geqslant m$.

Решение. См. [2], стр. 536.

Задача 20. *Пусть матрица $Q = \Big(q_{ij}\Big)$, где $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, имеет вид $q_{i\,i+1} = \lambda$ при $i = 0, \ldots, n-1$, $q_{i\,i-1} = i\mu$ при $i = 1, \ldots, n$, $q_{ii} = -\lambda - i\mu$ при $i = 0, \ldots, n-1$, $q_{nn} = -n\mu$, а остальные q_{ij} равны нулю (λ и μ — положительные параметры). Объяснить, почему существует однородная марковская цепь с пространством состояний $S = \{0, \ldots, n\}$ и инфинитезимальной матрицей Q. Доказать, что имеется единственное стационарное распределение. Найти это распределение (предварительно показать, что для стандартной марковской цепи с конечным числом состояний при $t \geqslant 0$ справедливы обе системы уравнений Колмогорова: $P'(t) = QP(t)$ и $P'(t) = P(t)Q$, где $P(t) = \Big(\mathrm{p}_{ij}(t)\Big)$ и Q — инфинитезимальная матрица; вывести отсюда, что $pQ = 0$, где вектор–строка p задает стационарное распределение).*

Решение. См. [1], стр. 208.

1.11 Задачи к лекции от 26.04.17

Задача 21. *(Модель Эренфестов) Пусть имеются две урны, содержащие в начальный момент времени соответственно k_1 и k_2 шаров, причем $k_1 + k_2 = k$. В каждый момент времени n ($n \in \mathbb{N}$) с вероятностью $1/k$ выбирается любой из этих k шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть X_n обозначает число шаров в первой урне в момент времени n. Доказать, что $X_0, X_1, \ldots$ образуют однородную цепь Маркова с пространством состояний $\{0, 1, \ldots, k\}$. Проверить, что эта цепь обратима. Найти ее стационарное распределение.*

Решение. Этот процесс является марковским, так как

$$\mathsf{P}\Big(X_n = x \,\Big|\, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0\Big) \;=\; \mathsf{P}\Big(X_n = x \,\Big|\, X_{n-1} = x_{n-1}\Big)$$

по построению. Этот процесс также однороден, так как переходные вероятности за единицу времени не зависят от времени, в которое они рассматриваются.

Проверим обратимость этой цепи. Для этого найдем вектор, задающий обратимое распределение. Сначала выпишем матрицу переходных вероятностей за один шаг:

$$P \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{k-1}{k} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} & 0 & \frac{k-2}{k} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть это матрица с нулевыми элементами везде, кроме двух побочных диагоналей, причем $\mathrm{p}_{i\,i+1} = \frac{k-i}{k}$ и $\mathrm{p}_{i\,i-1} = \frac{i}{k}$.

Напомним, что вектор π задает обратимое распределение, если $\forall\, i,\, j$

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

В случае нашей матрицы P это условие превращается в систему линейных уравнений

$$\pi_{i+1} \;=\; \frac{i+1}{k-i}\,\pi_i, \;\; i = 0, \ldots, n.$$

Поскольку π по определению обязан задавать распределение вероятностей, то $\pi_0 + \ldots + \pi_{k+1} = 1$. Поэтому, решая однородную систему линейных уравнений, получаем, что

$$\pi_i \;=\; \frac{C_k^i}{2^k}.$$

Обратимый вектор нашли.

Напомним, что вектор π задает стационарное распределение, если $\forall j$

$$\sum_i \pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j.$$

Проверим это для найденного выше вектора π: так как он обратим, то

$$\sum_i \pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \sum_i \pi_j \mathrm{p}_{ji} \;=\; \pi_j \sum_i \mathrm{p}_{ji} \;=\; \pi_j,$$

то есть найденный выше вектор π задает стационарное распределение.

Задача 22. *Построить пример необратимой марковской цепи $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с конечным пространством состояний.*

Решение. Рассмотрим марковскую цепь $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие на обратимый вектор

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}$$

превратится в систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \pi_1 \mathrm{p}_{12} \;=\; \pi_2 \mathrm{p}_{21} \\ \pi_2 \mathrm{p}_{23} \;=\; \pi_3 \mathrm{p}_{32} \\ \pi_3 \mathrm{p}_{31} \;=\; \pi_1 \mathrm{p}_{13} \end{cases},$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} \pi_2 \;=\; 0 \\ \pi_3 \;=\; 0 \\ \pi_1 \;=\; 0 \end{cases},$$

то есть имеет только тождественно нулевое решение, которое не может задавать вероятностного распределения.

1.12 Задачи к лекции от 03.05.17

Задача 23. *Пусть* $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$ *— гауссовский процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что почти наверное его траектории непрерывны на* $\mathbb{R}_+$ *и* $X(0) = 0$ *почти наверное. Доказать, что найдутся винеровский процесс* $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$, *константы* $a \in \mathbb{R}$ *и* $b \in \mathbb{R}_+$ *такие, что* $X(t) = at + bW(t)$ *почти наверное для всех* $t \geqslant 0$.

Решение. Сначала докажем, что для такого процесса X $\mathsf{E}X(t) = t\,\mathsf{E}X(1)$ и $\mathsf{D}X(t) = t\,\mathsf{D}X(1)$. Действительно, пусть сначала $t \in \mathbb{Z}_+$. Тогда из-за стационарности и независимости приращений

$$\mathsf{E}X(t) \;=\; \mathsf{E}\Big(\big(X(1) - X(0)\big) + \big(X(2) - X(1)\big) + \ldots + \big(X(t) - X(t-1)\big)\Big) \;= \\ =\; t\,\mathsf{E}X(1)$$

и

$$\mathsf{D}X(t) \;=\; \mathsf{D}\Big(\big(X(1) - X(0)\big) + \big(X(2) - X(1)\big) + \ldots + \big(X(t) - X(t-1)\big)\Big) \;= \\ =\; t\,\mathsf{D}X(1).$$

Пусть теперь $t \in \mathbb{Q}_+$, то есть $t = \frac{p}{q}$, p, $q \in \mathbb{N}$. Тогда, поскольку

$$\mathsf{E}X(1) = \mathsf{E}\left(\left(X\left(\frac{1}{q}\right) - X\left(\frac{0}{q}\right)\right) + \ldots + X\left(\frac{q}{q}\right) - X\left(\frac{q-1}{q}\right)\right) = q\,\mathsf{E}\left(\frac{1}{q}\right),$$

то

$$\mathsf{E}X(t) \;=\; \mathsf{E}X\left(\frac{p}{q}\right) \;=\; \frac{p}{q}\,\mathsf{E}X(1) \;=\; t\,\mathsf{E}X(1)$$

(с дисперсиями аналогично). Пусть, наконец, $t \in \mathbb{R}$. Возьмем последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \in \mathbb{Q}_+$ такую, что $t_n \to t$. Тогда из непрерывности почти наверное траекторий имеем, что $X(t_n) \to X(t)$ почти наверное. Из сходимости почти наверное следует сходимость по распределению, которая эквивалентна сходимости характеристических функций. Поскольку процесс гауссовский, то это значит, что

$$\exp\left(iu\,\mathsf{E}X(t_n) - \frac{u^2\,\mathsf{D}X(t_n)}{2}\right) \;\to\; \exp\left(iu\,\mathsf{E}X(t) - \frac{u^2\,\mathsf{D}X(t)}{2}\right).$$

При этом

$$\exp\left(iu\,\mathsf{E}X(t_n) - \frac{u^2\,\mathsf{D}X(t_n)}{2}\right) \;=\; \exp\left(iu\,t_n\,\mathsf{E}X(1) - \frac{u^2\,t_n\,\mathsf{D}X(1)}{2}\right)$$

и

$$\exp\left(iu\,t_n\,\mathsf{E}X(1) - \frac{u^2\,t_n\,\mathsf{D}X(1)}{2}\right) \;\to\; \exp\left(iu\,t\,\mathsf{E}X(1) - \frac{u^2\,t\,\mathsf{D}X(1)}{2}\right)$$

из-за непрерывности экспоненты, из чего и заключаем, что $\mathsf{E}X(t) = t\,\mathsf{E}X(1)$ и $\mathsf{D}X(t) = t\,\mathsf{D}X(1)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим теперь процесс

$$W^\star(t) \ := \ \frac{X(t) - t\mathsf{E}X(1)}{\sqrt{\mathsf{D}X(1)}}.$$

Покажем, что он винеровский. Очевидно, его траектории непрерывны почти наверное. Из условия $X(0) = 0$ получаем, что $W^\star(0) = 0$. Приращения $W^\star$ независимы как борелевская функция от независимых случайных величин. Наконец, поскольку выше уже выяснили, что $\mathsf{E}X(t) = t\mathsf{E}X(1)$ и $\mathsf{D}X(t) = t\mathsf{D}X(1)$, то из того, что X — гауссовский процесс со стационарными приращениями, получаем, что $\forall t \geqslant s$

$$X(t) - X(s) \ \sim \ \mathcal{N}\big(\,(t-s)\,\mathsf{E}X\,(1)\,,\,(t-s)\,\mathsf{D}X\,(1)\,\big),$$

из чего сразу же следует, что

$$W^\star(t) - W^\star(s) \ \sim \ \mathcal{N}\,(0,\, t-s)\,.$$

Таким образом, по определению показали, что $W^\star$ — винеровский процесс. Но тогда

$$X(t) \ = \ \sqrt{\mathsf{D}X(1)}W^\star(t) + t\mathsf{E}X(1),$$

что и требовалось доказать.

Задача 24. *Выяснить, являются ли ковариационными функциями некоторых процессов следующие функции:*

1. $r(s,\,t) \ = \ 2\cos(s-t)\exp\big\{-\alpha|s-t|\big\}\,,\ s,\,t \in \mathbb{R}_+,\ \alpha > 0$*;*

2. $r(s,\,t) \ = \ \big(1-(s-t)^2\big)\,\mathbb{I}\,\big\{|s-t| \leqslant 1\big\}\,,\ s,\,t \in \mathbb{R}_+$*;*

3. $r(s,\,t) \ = \ \exp\Big\{ia(s-t) - \frac{(s-t)^2\sigma^2}{2}\Big\} + C,\ a \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbb{R}_+,$
$C \in \{-1,\,1\},\ s,\,t \in \mathbb{R}_+$.

Решение. Известно, что если функция симметрична (кососимметрична в комплексном случае) и неотрицательно определена, то она является ковариационной функцией некоторого процесса. По теоремам Герглотца и Бохнера–Хинчина характеристические функции случайных величин неотрицательно определены. Также верно, что суммы и произведения неотрицательно определенных функций неотрицательно определены.
Сразу отметим, что все данные функции симметричны (когда нужно, кососимметричны).

1. Функция 2 является неотрицательно определенной; функция $\cos\,(s-t)$ является неотрицательно определенной, так как функция $\cos(t)$ является характеристической функцией случайной величины, принимающей равновероятно значения 1 и -1; функция $\exp\big\{-\alpha|s-t|\big\}$ является неотрицательно определенной, так как функция $\exp\big\{-\alpha|t|\big\}$ является характеристической функцией случайной величины, распределенной по закону Коши. Таким образом, данная функция является неотрицательно определенной

2. Предположим, что данная функция неотрицательно определена. Тогда
$$r(t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,\mathsf{G}(\mathrm{d}x),$$
или
$$\frac{r(t)}{\mathsf{G}\,(\mathbb{R})} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{\mathsf{G}(\mathrm{d}x)}{\mathsf{G}\,(\mathbb{R})} \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,\mathsf{P}_{\xi}(\mathrm{d}x),$$
где ξ — некоторая случайная величина; таким образом, функция $\frac{r(t)}{\mathsf{G}(\mathbb{R})}$ является характеристической функцией ξ. Известно, что если φ — характеристическая функция некоторой случайной величины η и $\mathsf{E}|\eta|^k < < \infty$, то $\exists\varphi^{(k)}(t)\ \forall t$; также известно, что если $\exists\varphi^{(2m)}(0)$, то $\mathsf{E}\xi^{2m} < \infty$. Поэтому из существования второй производной в нуле должно следовать существование первой производной в произвольной точке t, что нарушается для данной функции в точках $t = 1$, $t = -1$. Таким образом, данная функция не является неотрицательно определенной.
3. Если $C = 1$, то данная функция является неотрицательно определенной, так как она является суммой характеристической функции нормальной случайной величины и положительной константы. Пусть теперь $C = -1$. Предположим, что
$$r(t) \;=\; \exp\left\{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\} - 1$$
является ковариационной функцией некоторого процесса X, то есть
$$r(t) \;=\; \operatorname{cov}\big(X(t),\, X(0)\big)\,.$$
Заметим, что $r(0) = 0$. Тогда
$$\big|r(t)\big| \;=\; \Big|\operatorname{cov}\big(X(t),\, X(0)\big)\Big| \;\leqslant\; \sqrt{\mathsf{D}X(t)\mathsf{D}X(0)} \;=\; 0,$$
то есть функция получилась тождественно равной нулю, что противоречит условию. Таким образом, данная функция не является неотрицательно определенной.

1.13 Задачи к лекции от 10.05.17

Задача 25. *Пусть* $X = \Big\{ X(t) = e^{-\alpha t} W\left(e^{2\alpha t}\right) \Big\}$, $t \geqslant 0$, *где* $W(\cdot)$ *— винеровский процесс и параметр* $\alpha > 0$. *Является ли процесс* X *стационарным в узком и/или широком смысле?*

Решение. Заметим, что процесс X является гауссовским, причем

$$\mathsf{E}X(t) \;=\; 0$$

и

$$\operatorname{cov}\big(X(t),\, X(s)\big) \;=\; e^{-\alpha(t+s)} \min\Big(e^{2\alpha t},\, e^{2\alpha s}\Big) \;=\; e^{-\alpha|t-s|},$$

то есть процесс стационарен в широком смысле. Поскольку для гауссовских процессов понятия стационарности в широком и в узких смыслах совпадают, то X стационарен и в узком смысле тоже.

Задача 26. *Доказать, что для центрированной стационарной в широком смысле последовательности* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *выполнен закон больших чисел в смысле сходимости в среднем квадратическом, а именно,*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} Z(0), \quad N \to \infty,$$

где $Z(\cdot)$ *— спектральная мера упомянутой последовательности.*

Решение. См. [1], стр. 241.

1.14 Задачи к лекции от 17.05.17

Задача 27. *Рассмотрим разбиение отрезка* $[0, T]$ *точками* $0 = t_{n,0} < < t_{n,1} < \ldots < t_{n,N_n} = T$, *где* $n \in \mathbb{N}$. *Зафиксируем* $\lambda \in [0, 1]$ *и выберем промежуточные точки* $\tau_{n,k} := (1-\lambda)t_{n,k-1} + \lambda t_{n,k}$, $k = 1, \ldots, N_n$. *Предположим, что* $\max_{1 \leqslant k \leqslant N_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Найти предел в среднем квадратическом при* $n \to \infty$ *интегральных сумм вида*

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) \left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right),$$

где W *— винеровский процесс.*

Решение. Заметим сначала, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} \left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right)^2 \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} T;$$

действительно,

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{N_n} \left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right)^2 = \sum_{k=1}^{N_n} \mathsf{E}\left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right)^2 = T,$$

при этом в силу независимости приращений

$$\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{N_n} \left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right)^2 - T\right)^2 = \mathsf{D}\sum_{k=1}^{N_n} \left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_n} \mathsf{D}\left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right)^2 = \sum_{k=1}^{N_n} \Big(3(t_k - t_{k-1})^2 - (t_k - t_{k-1})^2\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_n} 2(t_k - t_{k-1})^2 \leqslant 2T \max_{1 \leqslant k \leqslant N_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \to 0$$

по условию; из этого и следует утверждение.
Также заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} \left(W(t_{n,k}) + W(t_{n,k-1})\right)\left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right) = W^2(t_{n,N_n}) = W^2(T).$$

Запишем теперь, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) \left(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) \left(W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) \left(W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\right).$$

Разберемся с этими слагаемыми по отдельности: сначала распишем

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,\,k})\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr) \ = \\
= \sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) + W(\tau_{n,\,k})\bigr)\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr) - \\
- \sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr)\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr).
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr)\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr) \ = \ \sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr)^2
$$

и

$$
\mathsf{E}\sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr)^2 \ = \ \sum_{k=1}^{N_n}(t_{n,\,k} - \tau_{n,\,k}) \ = \ (1-\lambda)T,
$$

причем

$$
\mathsf{D}\sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr)^2 \ \to \ 0
$$

(объяснение идейно то же, что и раньше). Таким образом,

$$
\sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(t_{n,\,k}) - W(\tau_{n,\,k})\bigr)^2 \ \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} \ (1-\lambda)T.
$$

Теперь второе слагаемое:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,\,k})\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{n,\,k-1})\bigr) \ = \\
= \sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(\tau_{n,\,k}) + W(t_{k-1,\,n})\bigr)\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{n,\,k-1})\bigr) + \\
+ \sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{k-1,\,n})\bigr)\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{n,\,k-1})\bigr).
\end{aligned}
$$

Снова заметим, что

$$
\sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{k-1,\,n})\bigr)\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{n,\,k-1})\bigr) = \sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{k-1,\,n})\bigr)^2
$$

и (аналогично) что

$$
\sum_{k=1}^{N_n}\bigl(W(\tau_{n,\,k}) - W(t_{k-1,\,n})\bigr)^2 \ \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} \ \lambda T.
$$

Осталось заметить еще, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} \big(W(t_{n,k}) + W(\tau_{n,k})\big)\big(W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})\big) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_n} \big(W(\tau_{n,k}) + W(t_{k-1,n})\big)\big(W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\big) \;=\; W(T)^2.$$

Складываем все, что было вычислено и получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k})\big(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})\big) \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} \frac{W(T)^2 + \lambda T - (1-\lambda)T}{2}.$$

Задача 28. *С помощью формулы Ито найти*

$$\int\limits_{[0,T]} W(t)\,\mathrm{d}W(t),$$

где W — винеровский процесс.

Решение. Обозначим

$$Y(T) \;:=\; \int\limits_{[0,T]} W(t)\,\mathrm{d}W(t).$$

Предположим, что

$$Y(t) \;=\; H\big(t, W(t)\big),$$

где $H(t, x)$ — гладкая функция двух переменных. Тогда по формуле Ито

$$\mathrm{d}Y(t) \;=\; \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\mathrm{d}\big(W(t)\big)^2 \;=\; W(t)\mathrm{d}W(t).$$

Из соотношения

$$\mathrm{d}\big(W(t)\big)^2 \;=\; \mathrm{d}t$$

получаем, что

$$\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\mathrm{d}t \;=\; W(t)\mathrm{d}W(t),$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} \;=\; x \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \;=\; 0, \end{cases}$$

из чего получаем, что

$$H(t, x) \;=\; \frac{x^2 - t}{2} + C,$$

где C — некоторая константа. Заметим, что из начальных условий $H(0, 0) = {} = 0$. Поэтому $C = 0$ и

$$Y(T) \;=\; \int\limits_{[0,T]} W(t)\,\mathrm{d}W(t) \;=\; \frac{W(t)^2 - t}{2}.$$

Список литературы

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

[2] Ширяев А. Н. Вероятность.

[3] Булинский А.В. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения.