

1 Обязательные задачи к лекциям

1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

Задача 1. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание в \mathbb{Z} , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.

Решение. Разобьем линию времени на промежутки длины $|a - b|$. Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение -1 (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для N промежутков получаем вероятность P^N ; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение -1 , равна

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N = 0.$$

Задача 2. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ и $S' = \{S'_n, n \geq 0\}$ — независимые простые случайные блуждания в \mathbb{Z}^d , имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n \geq 1}$ и $(X'_n)_{n \geq 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что

$$P(X_1 = e_k) = P(X_1 = -e_k) = P(X'_1 = e_k) = P(X'_1 = -e_k) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k — вектор в \mathbb{R}^d , у которого k -я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \dots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\},$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A . Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathbb{E}N < \infty$.

Решение. Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^k - S_m^{k'} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i(S_n^k - S_m^{k'})t_k}}{2\pi} dt_k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \mathbb{I}\{n = 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^n(t) \varphi^m(-t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(X_1, t)}.$$

Получаем, что

$$\mathbb{E} N = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos t_k \sim \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель R в степени $d - 1$, то интеграл сходится $\Leftrightarrow d \geq 5$.

1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

Задача 3. Пусть в модели Гальтона–Ватсона $P(\xi = 0) = 1/4$, $P(\xi = 2) = 1/2$, $P(\xi = 6) = 1/4$. Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше $1/2$.

Решение. Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию $\psi_\xi(z) - z$. Заметим, что

$$(\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \quad (\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку $\psi_\xi(z) - z$ — непрерывная функция, то уравнение $\psi_\xi(z) - z = 0$ будет иметь корень на интервале $(0, 1/2)$. Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше $1/2$.

Задача 4. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots таких, что $EX_1 = \mu \in (0, \infty)$ и $\text{var} X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Доказать, что

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Запишем

$$P \left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x \right) = P \left(Z(t) < x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(Z(t) < n) = \mathbf{P}(S_n > t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z(t) < n(t)) &= \mathbf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathbf{P}(S_{n(t)} > t) = \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right). \end{aligned}$$

Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо $n(t)$ его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику целой части):

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$

Поскольку нас интересует асимптотика при $t \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)),$$

где

$$A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Перепишем:

$$\mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)) = \mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$

Воспользуемся леммой Слущкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку

$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Тогда получаем, что в каждой точке x непрерывности функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке x),

$$\mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \rightarrow 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Итак, получили, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

Задача 5. Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

Решение. Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина ξ равновероятно (с вероятностью $1/3$) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n \sim \xi$ процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup \{n : \xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим $Z(2) - Z(1), Z(1)$.

$$P(Z(2) - Z(1) = 0, Z(1) = 0) = 0,$$

поскольку $\xi_n \leq 2$. Вместе с этим

$$P(Z(2) - Z(1) = 0) \geq P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = \frac{1}{9}, \quad P(Z(1) = 0) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

Задача 6. Найти ковариационную функцию процесса $Z(t) = \{Z(t), t \geq 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ , случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N .

Решение. Сначала предположим, что $t > s$. Вычислим ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z(t), Z(s)) &= \text{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = \\ &= E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$E\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = 1, \quad (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)} = E(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности λ является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Тогда получаем, что

$$E(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай $t \leq s$ рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$\text{cov}(Z(t), Z(s)) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$