

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания</b>	<b>2</b>
1.1	Понятие случайного блуждания . . . . .	2
1.2	Случайные блуждания . . . . .	3
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления</b>	<b>7</b>
2.1	Модель Гальтона–Ватсона . . . . .	7
2.2	Процессы восстановления . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы</b>	<b>12</b>
3.1	Процессы восстановления (продолжение) . . . . .	12
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным . . . . .	13
3.3	Элементарная теорема восстановления . . . . .	14
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления . . . . .	16
	<b>Список литературы</b>	<b>19</b>
	<b>Предметный указатель</b>	<b>20</b>

# 1 Лекция от 08.02.17

## Случайные блуждания

### 1.1 Понятие случайного блуждания

**Определение 1.1.** Пусть  $V$  — множество, а  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Тогда  $(V, \mathcal{A})$  называется *измеримым пространством*.

**Определение 1.2.** Пусть есть  $(V, \mathcal{A})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — два измеримых пространства,  $f: V \rightarrow S$  — отображение.  $f$  называется  $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если  $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Обозначение:  $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ .

**Определение 1.3.** Пусть есть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — отображение. Если  $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ , то  $Y$  называется *случайным элементом*.

**Определение 1.4.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом  $Y$* , — это функция на множествах из  $\mathcal{B}$ , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

**Определение 1.5.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов  $X = \{X(t), t \in T\}$ , где

$$X(t): \Omega \rightarrow S_t, \quad X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Здесь  $T$  — это произвольное параметрическое множество,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — произвольные измеримые пространства.

*Замечание.* Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то  $t \in T$  интерпретируется как время. Если  $T = \mathbb{R}$ , то время *непрерывно*; если  $T = \mathbb{Z}$  или  $T = \mathbb{Z}_+$ , то время *дискретно*; если  $T \subset \mathbb{R}^d$ , то говорят о *случайном поле*.

**Определение 1.6.** Случайные элементы  $X_1, \dots, X_n$  называются *независимыми*, если  $P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$ .

**Теорема 1.1** (Ломницкого-Улама). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует семейство независимых случайных элементов  $X_t: \Omega \rightarrow S_t, X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$  таких, что  $P_{X_t} = Q_t, t \in T$ .

*Замечание.* Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом  $T$  по-прежнему любое, как и  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности  $\forall$  конечного поднабора.

## 1.2 Случайные блуждания

**Определение 1.7.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Случайным блужданием в  $\mathbb{R}^d$  называется случайный процесс с дискретным временем  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Определение 1.8.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  — это такое случайное блуждание, что

$$\mathbf{P}(X = e_k) = \mathbf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где  $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d$ .

**Определение 1.9.** Введем  $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$  ( $\leq \infty$ ). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  называется *возвратным*, если  $\mathbf{P}(N = \infty) = 1$ ; *невозвратным*, если  $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$ .

*Замечание.* Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

**Определение 1.10.** Число  $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$  ( $\tau := \infty$ , если  $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ) называется *моментом первого возвращения в 0*.

*Замечание.* Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что  $\mathbf{P}(N = \infty)$  равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

**Лемма 1.2.** Для  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(\tau = \infty) \mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

*Доказательство.* При  $n = 1$  формула верна:  $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$ . Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S'_m = 0\} = n\right) \mathbf{P}(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(N' = n) \mathbf{P}(\tau = k), \end{aligned}$$

где  $N'$  определяется по последовательности  $X'_1 = X_{k+1}$ ,  $X'_2 = X_{k+2}$  и так далее. Из того, что  $X_i$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что  $N'$  и  $N$  распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что  $n + 1 \geq 2$ . Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Следствие.**  $P(N = \infty)$  равно 0 или 1.  $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $P(\tau < \infty) < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано.  $\square$

**Теорема 1.3.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  возвратно  $\Leftrightarrow EN = \infty$  (соответственно, невозвратно  $\Leftrightarrow EN < \infty$ ).

*Доказательство.* Если  $EN < \infty$ , то  $P(N < \infty) = 1$ . Пусть теперь  $P(N < \infty) = 1$ . Это равносильно тому, что  $P(\tau < \infty) < 1$ .

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left( \frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

*Замечание.* Заметим, что поскольку  $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ , то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

**Следствие.**  $S$  возвратно при  $d = 1$  и  $d = 2$ .

*Доказательство.*  $P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

*Случай  $d = 1$ :*  $P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$  блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай  $d = 2$ :

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$  ряд тоже разойдется  $\Rightarrow$  блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана.  $\square$

### 1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

**Теорема 1.4.** Для простого случайного блуждания в  $\mathbb{Z}^d$

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $X$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

*Доказательство.*  $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ . Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку  $|c\varphi| \leq c < 1$ , то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Следствие.** При  $d \geq 3$  простое случайное блуждание невозвратно.

*Доказательство.* Все как в обязательной задаче 2 к этой лекции; единственное отличие заключается в том, что случайное блуждание одно  $\Rightarrow$  знаменатель будет порядка  $\|t\|^2$  и, следовательно, сходимость интеграла будет происходить тогда и только тогда, когда  $d \geq 3$ .  $\square$

*Доказательство (комбинаторное).* Заметим, что

$$\begin{aligned}
P(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \dots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leq \\
&\leq \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{((n/d)!)^d} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} = \Theta(n^{-d/2})
\end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при  $d \geq 3$  ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354).  $\square$

*Замечание.* Можно говорить и о случайных блужданиях в  $\mathbb{R}^d$ , если  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ .

**Определение 1.11.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания  $S$  — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

**Определение 1.12.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием  $S$* , — это множество  $P(S)$  такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

**Теорема 1.5** (Чжуна-Фукса). Если  $R(S) \neq \emptyset$ , то  $R(S) = P(S)$ .

**Следствие.** Если  $0 \in R(S)$ , то  $R(S) = P(S)$ ; если  $0 \notin R(S)$ , то  $R(S) = \emptyset$ .

*Замечание.* Подробнее см. [1], стр. 65.

## 2 Лекция от 15.02.17

### Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

#### 2.1 Модель Гальтона–Ватсона

**Описание модели** Пусть  $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$  — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$\begin{aligned}
Z_0(\omega) &:= 1, \\
Z_n(\omega) &:= \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что если  $Z_{n-1}(\omega) = 0$ , то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим  $A = \{\omega: \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$  — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если  $Z_n(\omega) = 0$ , то  $Z_{n+1}(\omega) = 0$ . Таким образом,  $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ .

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

**Определение 2.1.** Пусть дана последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  неотрицательных чисел такая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ . *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать  $s \in [0, 1]$ ).

Заметим, что если  $a_k = P(Y = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

**Лемма 2.1.** *Вероятность  $P(A)$  является корнем уравнения  $\psi(p) = p$ , где  $\psi = f_{\xi}$  и  $p \in [0, 1]$ .*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= E s^{Z_n} = E \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$ , которая независима с  $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$  (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от  $\xi_{n,\bullet}$ , а второй — от  $\xi_{i,\bullet}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) E \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) P(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j E s^{\xi_{n,k}} P(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) P(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$



в силу независимости и одинаковой распределенности  $\xi_{n,k}$  и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим  $s = 0$  и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_\xi(\psi_\xi(s))) = \dots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \dots (\psi_\xi(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\ &= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при  $s = 0$  имеем, что

$$P(Z_n = 0) = \psi_\xi(P(Z_{n-1} = 0)).$$

Но  $P(Z_n = 0) \nearrow P(A)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\psi_\xi$  непрерывна на  $[0, 1]$ . Переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$P(A) = \psi_\xi(P(A)),$$

то есть  $P(A)$  — корень уравнения  $p = \psi_\xi(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ .  $\square$

**Теорема 2.2.** Вероятность  $p$  вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $\psi = \psi_\xi$ .

*Доказательство.* Пусть  $p_0 := P(\xi = 0) = 0$ . Тогда

$$P(\xi \geq 1) = 1, \quad P\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\}\right) = 1.$$

Поэтому  $Z_n \geq 1$  при  $\forall n$ , то есть  $P(A)$  — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь  $p_0 = 1$ . Тогда  $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$  — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец,  $0 < p_0 < 1$ . Из этого следует, что  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $p_m > 0$ , а значит,  $\psi$  строго возрастает на  $[0, 1]$ . Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_n(s)$  — это производящая функция  $Z_n$ . Пусть  $s \in \Delta_n$ . Тогда из монотонности  $\psi$  на  $[0, 1]$  получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на  $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1  $P(A)$  является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что  $P(A)$  — наименьший корень, что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.3.** 1. Вероятность вырождения  $P(A)$  есть нуль  $\Leftrightarrow p_0 = 0$ .  
 2. Пусть  $p_0 > 0$ . Тогда при  $E\xi \leq 1$  имеем  $P(A) = 1$ , при  $E\xi > 1$  имеем  $P(A) < 1$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $P(A) = 0$ . Тогда  $p_0 = 0$ , потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания  $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$ . В другую сторону, если  $p_0 = 0$ , то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. (а) Пусть  $\mu = E\xi \leq 1$ . Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только  $\xi$  не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что  $\psi'_\xi(z)$  возрастает на  $z > 0$ . Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где  $z \in (0, 1)$ , в силу монотонности  $\psi'_\xi(z)$ . Следовательно, если  $z < 1$ , то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть  $z = 1$  — это единственный корень уравнения (1). Значит,  $P(A) = 1$ .

- (б) Пусть  $\mu = E\xi > 1$ . Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно,  $\psi''_\xi(z)$  монотонно возрастает и больше нуля при  $z > 0$ . Из этого следует, что  $1 - \psi'_\xi(z)$  строго убывает, причём

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь  $z - \psi_\xi(z)$  при  $z = 0$ . Поскольку  $1 - \psi_\xi(1) = 0$ , производная этой функции монотонно убывает, а  $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$ , то график функции  $z - \psi_\xi(z)$  пересечёт ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале  $(0, 1)$ . Так как вероятность вырождения  $P(A)$  равна наименьшему корню уравнения (1), то  $P(A) < 1$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $E\xi < \infty$ . Тогда  $EZ_n = (E\xi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится по индукции.

База индукции:  $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$ .

Индуктивный переход:

$$\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbb{E}\xi \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \mathbb{E}\xi \mathbb{E}Z_{n-1} = (\mathbb{E}\xi)^n.$$

□

## Определение 2.2.

При  $\mathbb{E}\xi < 1$  процесс называется *докритическим*.  
 При  $\mathbb{E}\xi = 1$  процесс называется *критическим*.  
 При  $\mathbb{E}\xi > 1$  процесс называется *надкритическим*.

## 2.2 Процессы восстановления

**Определение 2.3.** Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что  $\sup \emptyset := \infty$ ). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс  $Z(t)$  называется *процессом восстановления*.

*Замечание.* Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

**Определение 2.4.** Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления*  $\{Z^*(t), t \geq 0\}$ , который строится по  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$\mathbb{P}(Y = \alpha) = p \in (0, 1); \quad \mathbb{P}(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда  $Y = C = \text{const}$ : если  $C = 0$ , то  $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$ ; если же  $C > 0$ , то  $Z(t) = \lceil \frac{t}{C} \rceil$ .

## Лемма 2.4.

$$\mathbb{P}(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lceil \frac{t}{\alpha} \rceil, \text{ если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j, \end{cases}$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

**Определение 2.5.**  $U$  имеет *геометрическое распределение* с параметром  $p \in (0, 1)$ , если  $\mathbb{P}(U = k) = (1 - p)^k p$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

*Замечание.* Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна  $p$ , а вероятность неудачи, соответственно, равна  $1 - p$ .

**Лемма 2.5.** Рассмотрим независимые геометрические величины  $U_0, \dots, U_{j+m}$  с параметром  $p \in (0, 1)$ . Тогда  $\forall t \geq \alpha$  и  $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

### 3 Лекция от 22.02.17

#### Пуассоновские процессы

##### 3.1 Процессы восстановления (продолжение)

*Доказательство.* Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости  $U_i$  получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) &= \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p(1-p)^{k_0} \dots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1}(1-p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1}(1-p)^{m-j} = p^{j+1}(1-p)^{m-j} \#M, \end{aligned}$$

где  $M$  — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел  $k_j$ , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а  $\#M$  — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения  $\#M$  эквивалентна "задаче о перегородах" из курса теории вероятностей с числом элементов  $m - j$  и числом перегородок  $j$ . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = C_m^j p^{j+1}(1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

### 3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

**Лемма 3.1.** Пусть  $t > \alpha$ . Тогда

$$\mathbb{E}Z^*(t) \leq At, \quad \mathbb{E}(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где  $A = A(p, \alpha) > 0$ ,  $B = B(p, \alpha) > 0$ .

*Доказательство.* По лемме 2.5

$$\mathbb{E}Z^*(t) = \mathbb{E}(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)\mathbb{E}U,$$

где

$$\mathbb{E}U = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)\mathbb{E}U = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p)+1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p)+1) = At,$$

поскольку  $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$ , а  $t > \alpha$ ; здесь  $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$ . Рассмотрим теперь  $\mathbb{E}(Z^*(t))^2$ .

$$\mathbb{E}(Z^*(t))^2 = \mathbb{E}Z^*(t) + (\mathbb{E}Z^*(t))^2 = (j+1)\mathbb{E}U + (\mathbb{E}Z^*(t))^2.$$

Обозначим через  $\sigma^2(p) := \mathbb{E}U$ . Используя оценку выше для  $\mathbb{E}Z^*(t)$ , получаем, что

$$(j+1)\mathbb{E}U + (\mathbb{E}Z^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left( \sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как  $(j+1)^2 \geq (j+1)$ . Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* Пусть случайная величина  $X \geq 0$ ,  $X$  отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : \mathbb{P}(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по  $X$  вспомогательный процесс восстановления  $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$ : пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению  $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \quad \forall t \geq 0$ . Тогда  $\forall \alpha > t$

$$\mathbb{E}Z(t) \leq \mathbb{E}Z^*(t) < \infty, \quad \mathbb{E}(Z(t))^2 \leq \mathbb{E}(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

**Следствие.**  $\mathbb{P}(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$ .

*Доказательство.*  $Z$  является неубывающим процессом:

$$s \leq t \rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow \mathbf{P}(Z(n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство.  $\square$

**Следствие.**  $\mathbf{E}Z(t) \leq At$ ;  $\mathbf{E}(Z(t))^2 < Bt^2$ ,  $t > \alpha$ .

### 3.3 Элементарная теорема восстановления

**Лемма 3.2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.n.} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\mu = \mathbf{E}X$ .

*Доказательство.* Если  $\mu < \infty$ , то утверждение следует из УЗБЧ.

Пусть теперь  $\mu = \infty$ . Положим для  $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n.n.} \mathbf{E}X \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем  $c = m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = \mathbf{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbf{E}X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Теорема 3.3.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин  $X, X_1, X_2, \dots$ ,  $X \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Z(t)}{t} &\xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty; \\ \frac{\mathbf{E}Z(t)}{t} &\xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{0} := \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} := 0$ .

*Доказательство.* Если  $\mu = 0$ , то  $X_n = 0$  почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ( $Z(t) = \infty \forall t$ ).

Далее  $\mu > 0$ . Заметим, что для  $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку  $Z(t_n, \omega) = n$ , если  $t_n = S_n(\omega)$ , то  $Z(t) \rightarrow \infty$  почти наверное ( $Z$  монотонна по  $t$ ). Итак, рассмотрим  $(t, \omega)$  такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих  $(t, \omega)$  поделим обе части неравенства (2) на  $Z(t)$ :

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E} \xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E} \xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

**Определение 3.1.** Семейство случайных величин  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \rightarrow \alpha} \mathbb{E} \left( |\xi_t| \mathbb{I} \{ |\xi_t| > c \} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

**Теорема 3.4.** Если  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  равномерно интегрируемо, то  $\mathbb{E} \xi_t \rightarrow \mathbb{E} \xi$ . Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

**Теорема 3.5** (де ла Валле Пуссена).  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  равномерно интегрируемо  $\Leftrightarrow \exists$  неубывающая функция  $g$  такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E} g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем  $g(t) := t^2$ ,  $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$ ,  $t > 0$ . Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E}(\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E}(Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать.  $\square$

### 3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

**Определение 3.2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  есть процесс восстановления, построенный на  $\{X_i\}$ .

**Определение 3.3.** Определим для  $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k} - S_{N(t)+k-1}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.6.** Для  $\forall t > 0$  величины  $N(t)$ ,  $X_1^t$ ,  $X_2^t, \dots$  независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t), \quad X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

*Доказательство.* Для доказательства независимости достаточно показать, что для  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по  $k$ .

Докажем базу индукции:  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1) = \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$



Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где  $X_i$  независимы и  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1) = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy \end{aligned}$$

в силу независимости  $S_n$  и  $X_{n+1}$ . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3)  $u_1 = 0$  и получим, что

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем  $n \in \mathbb{Z}_+$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\ &= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1}, \end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} & P(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) = \\ &= P \left( \underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots} \right) = \\ &= P(N(t) = n) \underbrace{P(X_1 \geq u_1)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = P(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана.  $\square$

*Замечание* (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины  $X_{N(t)+1}$  содержит отрезок длины  $X_1^t$  по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени  $S_n$ , то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени  $X_i$ , а мы пришли на остановку в момент времени  $t$  и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

## Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

## Предметный указатель

- Измеримое
  - отображение, 2
  - пространство, 2
- Множество
  - достижимости, 7
  - возвратности, 7
- Модель Гальтона-Ватсона, 7
- Процесс восстановления, 11
- Производящая функция, 8
- Распределение
  - геометрическое, 11
  - случайного элемента, 2
- Случайный
  - элемент, 2
  - процесс, 2
- Случайное блуждание, 3
  - простое, 3
  - возвратное, 3
- Теорема
  - Чжуна-Фукса, 7
  - Ломницкого-Улама, 2
- Вырождение, 8