

# 1 Обязательные задачи к лекциям

## 1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

**Задача 1.** Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  — простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}$ , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых  $a, b \in \mathbb{Z}$  таких, что  $a < 0 < b$ , с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми  $y = a$  и  $y = b$ .

*Решение.* Разобьем линию времени на промежутки длины  $|a - b|$ . Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение  $-1$  (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для  $N$  промежутков получаем вероятность  $P^N$ ; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение  $-1$ , равна

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N = 0.$$

**Задача 2.** Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  и  $S' = \{S'_n, n \geq 0\}$  — независимые простые случайные блуждания в  $\mathbb{Z}^d$ , имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями  $(X_n)_{n \geq 1}$  и  $(X'_n)_{n \geq 1}$ , состоящими из независимых векторов таких, что

$$P(X_1 = e_k) = P(X_1 = -e_k) = P(X'_1 = e_k) = P(X'_1 = -e_k) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь  $e_k$  — вектор в  $\mathbb{R}^d$ , у которого  $k$ -я координата равна единице, а остальные равны нулю,  $k = 1, \dots, d$ . Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\},$$

где  $\mathbb{I}(A)$  — индикатор события  $A$ . Найти все  $d \in \mathbb{N}$ , для которых  $EN < \infty$ .

*Решение.* Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^k - S_m^{k'} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i(S_n^k - S_m^{k'})t_k}}{2\pi} dt_k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \mathbb{I}\{n = 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E}e^{i(S_n - S'_m, t)} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^n(t) \varphi^m(-t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{i(X_1, t)}.$$

Получаем, что

$$\mathbb{E}N = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos t_k \sim \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель  $R$  в степени  $d - 1$ , то интеграл сходится  $\Leftrightarrow d \geq 5$ .

## 1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

**Задача 3.** Пусть в модели Гальтона–Ватсона  $P(\xi = 0) = 1/4$ ,  $P(\xi = 2) = 1/2$ ,  $P(\xi = 6) = 1/4$ . Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше  $1/2$ .

*Решение.* Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию  $\psi_\xi(z) - z$ . Заметим, что

$$(\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \quad (\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку  $\psi_\xi(z) - z$  — непрерывная функция, то уравнение  $\psi_\xi(z) - z = 0$  будет иметь корень на интервале  $(0, 1/2)$ . Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше  $1/2$ .

**Задача 4.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  таких, что  $EX_1 = \mu \in (0, \infty)$  и  $\text{var} X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$ . Доказать, что

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

*Решение.* Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Запишем

$$P \left( \frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x \right) = P \left( Z(t) < x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(Z(t) < n) = \mathbf{P}(S_n > t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z(t) < n(t)) &= \mathbf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathbf{P}(S_{n(t)} > t) = \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right). \end{aligned}$$

Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо  $n(t)$  его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику целой части):

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$

Поскольку нас интересует асимптотика при  $t \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)),$$

где

$$A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Перепишем:

$$\mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)) = \mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$

Воспользуемся леммой Слущкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку

$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Тогда получаем, что в каждой точке  $x$  непрерывности функции распределения  $\Phi(x)$  случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке  $x$ ),

$$\mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \rightarrow 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Итак, получили, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

### 1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

**Задача 5.** Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

*Решение.* Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина  $\xi$  равновероятно (с вероятностью  $1/3$ ) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_n \sim \xi$  процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup \{n : \xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим  $Z(2) - Z(1)$ ,  $Z(1)$ .

$$P(Z(2) - Z(1) = 0, Z(1) = 0) = 0,$$

поскольку  $\xi_n \leq 2$ . Вместе с этим

$$P(Z(2) - Z(1) = 0) \geq P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = \frac{1}{9}, \quad P(Z(1) = 0) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

**Задача 6.** Найти ковариационную функцию процесса  $Z(t) = \{Z(t), t \geq 0\}$  (называемого телеграфной волной), где  $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$ ,  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ , случайная величина  $\xi_0$  принимает значения 1 и  $-1$  с вероятностью  $1/2$ , причем  $\xi_0$  не зависит от процесса  $N$ .

*Решение.* Сначала предположим, что  $t > s$ . Вычислим ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z(t), Z(s)) &= \text{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = \\ &= E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$E\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = 1, \quad (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)} = E(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Тогда получаем, что

$$E(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай  $t \leq s$  рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$\text{cov}(Z(t), Z(s)) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

## 1.4 Задачи к лекции от 01.03.17

**Задача 7.** Пусть  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  — пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\lambda\mu(\cdot)$ , где  $\lambda$  — положительная константа, а  $\mu$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть  $\{x_i\}$  — ансамбль случайных точек в  $\mathbb{R}^d$ , образующих этот процесс. Для  $z \in \mathbb{R}^d$  введем случайную величину  $Y(z) := \inf_{i \in \mathbb{N}} \|z - x_i\|$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^d$  (иначе говоря, рассматривается расстояние от точки  $z$  до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найдите функцию распределения величины  $Y(z)$  и ее математическое ожидание.

*Решение.* Заметим, что

$$P(Y(z) \geq R) = P(N(B_{z,R}) = 0),$$

где  $B_{z,R}$  — шар с центром  $z$  и радиусом  $R$ . Известно, что мера Лебега, то есть объем,  $d$ -мерного шара, равен

$$\mu(B_{z,R}) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d.$$

По определению пространственного пуассоновского процесса,

$$P(N(B_{z,R}) = 0) = e^{-\lambda\mu(B_{z,R})};$$

таким образом,

$$F_{Y(z)}(R) = P(Y(z) < R) = 1 - e^{-\lambda\mu(B_{z,R})} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leq 0. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание  $Y(z)$ . Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$p_{Y(z)}(R) = F'_{Y(z)}(R) = \begin{cases} \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} dR^{d-1} e^{-\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leq 0 \end{cases}$$

Вычислим интеграл. Для упрощения введем обозначение

$$Q := \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} EY(z) &= \int_0^\infty QdR^d e^{-QR^d} dR = - \int_0^\infty R e^{-QR^d} d(-QR^d) = - \int_0^\infty R d(e^{-QR^d}) = \\ &= \int_0^\infty e^{-QR^d} dR = \int_0^\infty e^{-Qu} d(\sqrt[d]{u}) = \frac{1}{d} \int_0^\infty u^{\frac{1}{d}-1} e^{-Qu} du = \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{d}-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} \left( \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \right)^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right). \end{aligned}$$

**Задача 8.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda > 0$ , то есть процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин  $X, X_1, X_2, \dots$  таких, что  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Положим  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Найдите функционал Лапласа процесса  $Y = \{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(S_n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ .

*Решение.* Для начала возьмем простую функцию:

$$f(x) := c \mathbb{I}(0 \leq x \leq t).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c \mathbb{I}(S_n \leq t) = cN(t), \quad N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t).$$

Из этого получаем, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathbb{E} e^{-cN(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ck} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t(1-e^{-c})}.$$

Заметим, что

$$e^{-\lambda t(1-e^{-c})} = e^{-\lambda \int_0^t (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Будем доказывать, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Рассмотрим теперь

$$f(x) := \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}(t_{i-1} \leq x < t_i), \quad c_i > 0, \quad 0 \leq t_0 < \dots < t_n.$$

Из независимости приращений пуассоновского процесса и из полученного выше значения функционала Лапласа на простой функции следует, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-c_i \xi_i}, \quad \xi_i \sim \text{Pois}(\lambda(t_i - t_{i-1})),$$

то есть

$$\mathcal{L}(f) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda t(1-e^{-c_i})} = e^{-\lambda t \sum_{i=1}^n (1-e^{-c_i})}.$$

Снова отметим, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Из курса действительного анализа известно, что любая неотрицательная измеримая функция приближается монотонно возрастающей последовательностью линейных комбинаций простых функций (этот факт также доказан в лекциях, см. Лемму 5.2). Возьмем такую последовательность  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда  $f_n \nearrow f$  почти наверное. Заметим, что интеграл в экспоненте, рассматриваемый как функция от аргумента  $f(x)$ , монотонно зависит от  $f(x)$ .



Поскольку функционал Лапласа определен только для неотрицательных функций, то

$$e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f(S_p)}$$

по теореме о монотонной сходимости. Тогда

$$\mathcal{L}(f_n) = \mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow \mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f(S_p)} = \mathcal{L}(f).$$

Вместе с этим

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f_n(x)}) dx} \searrow e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx}$$

по теореме о монотонной сходимости. Получили, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx}.$$

## 1.5 Задачи к лекции от 15.03.17

**Задача 9.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda > 0$ ,  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные неотрицательные величины, причем семейства  $\{N(t), t \geq 0\}$  и  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  независимы. Определим процесс Крамера–Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент  $t \geq 0$ , формулой

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0,$$

где  $C_0$  и  $c$  — положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  имеет независимые приращения.

*Решение.* Проверим независимость приращений. Для этого необходимо показать, что случайные величины

$$Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \dots, Z(t_n) - Z(t_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq t_0 < \dots < t_n,$$

независимы в совокупности. Для этого достаточно (поскольку борелевские функции от независимых случайных величин независимы) показать, что случайные величины

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{N(t_0)} Y_k, \quad \xi_2 = \sum_{k=N(t_0)+1}^{N(t_1)} Y_k, \quad \dots, \quad \xi_{n+1} = \sum_{k=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)} Y_k$$

независимы в совокупности. Известно (см., например, [2], страница 304), что для того чтобы компоненты случайного вектора  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  были независимы в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbb{E} e^{i(u_1 \xi_1 + \dots + u_n \xi_n)} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} e^{iu_k \xi_k}.$$

Проверим, что в данном случае это свойство выполнено. Составим вектор из этих случайных сумм и найдем его характеристическую функцию:

$$\varphi_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}}(u_1, \dots, u_{n+1}) = \mathbb{E} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right],$$

где  $N(t_{-1}) \equiv 0$ . Будем использовать аппарат условных математических ожиданий. Рассмотрим

$$\mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] \middle| N(t_0) = v_1, \dots, N(t_n) = v_n \right),$$

где  $v_0 = 0$ . Из курса математической статистики известны следующие свойства условного математического ожидания: во-первых, если  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные векторы, то

$$\mathbb{E} (f(\xi, \eta) | \eta = y) = \mathbb{E} f(\xi, y);$$

во-вторых,

$$\mathbb{E}(\xi | \eta) = \psi(\eta) \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi | \eta = y) = \psi(y);$$

в-третьих,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \eta)) = \mathbb{E}\xi.$$

Воспользуемся первым свойством с  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ ,  $\eta = (N(t_0), \dots, N(t_{n+1}))$ , а также независимостью в совокупности  $Y_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0) = v_1, \dots, N(t_n) = v_n \right) &= \\ &= \mathbb{E} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] = \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \exp \left[ i u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] = \\ &= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} e^{i u_j Y_k} = \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} \mathbb{E} e^{i u_j Y_k} = \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^{v_j - v_{j-1}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым свойством:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0), \dots, N(t_n) \right) &= \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})}. \end{aligned}$$

По условию  $N$  — пуассоновский процесс, то есть

$$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad N(t_0), N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

независимы в совокупности и

$$\forall s \leq t \quad N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Воспользуемся тогда третьим свойством, а также тем, что  $N$  — пуассоновский процесс:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] &= \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \exp \left[ i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0), \dots, N(t_n) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})} = \prod_{j=1}^{n+1} \mathbb{E} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})} = \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} \left( \varphi_Y(u_j) \right)^k e^{-\lambda(t_{j-1} - t_{j-2})} \frac{(\lambda(t_{j-1} - t_{j-2}))^k}{k!} = \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} e^{\lambda(t_{j-1} - t_{j-2})(\varphi_Y(u_j) - 1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что характеристическая функция вектора распадается в произведение одномерных функций, что и показывает независимость в совокупности исходных случайных величин.

**Задача 10.** Для пуассоновского процесса  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  интенсивности  $\lambda > 0$  (вводимого как процесс с независимыми приращениями,  $N(0) = 0$  почти наверное,  $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ ,  $0 \leq s \leq t < \infty$ ) доказать, что не существует модификации, непрерывной почти наверное.

*Решение.* Предположим противное: пусть существует непрерывная почти наверное модификация пуассоновского процесса, то есть существует процесс  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  такой, что

$$\mathbb{P}(N(t) = Y(t)) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку счетное пересечение множеств полной меры есть множество полной меры по непрерывности вероятности, то

$$\mathbb{P}(N(t) = Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+) = 1.$$

Таким образом, можно считать, что почти наверное значения процессов совпадают на счетном всюду плотном множестве. Из непрерывности почти наверное модификации  $Y$  следует, что с вероятностью 1 траектории  $Y$  продолжаются единственным образом по непрерывности справа со значений на счетном всюду плотном множестве. На лекции утверждалось без доказательства, что у пуассоновского процесса есть непрерывная справа кусочно-постоянная модификация со скачками 1. Из этого следует искомое противоречие: по значениям на счетном всюду плотном непрерывная справа функция восстанавливается однозначно, но вместе с этим один из результатов этого продолжения разрывен почти наверное (из-за дискретности скачков), а другой — непрерывен почти наверное по предположению.

## 1.6 Задачи к лекции от 22.03.17

**Задача 11.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  (как процесс восстановления). Доказать, что  $\tau := \gamma S_1$ , где константа  $\gamma \in (0, 1)$ , не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса  $N$  ( $S_1$  — длина промежутка до первого скачка процесса  $N$ ).

*Решение.* Пусть  $\tau$  — марковский момент. Тогда  $\tau$  — момент остановки, поскольку  $S_1$  конечен с вероятностью 1. Тогда к  $\tau$  применимо строго марковское свойство, из чего следует, что процесс  $X_t = N_{t+\tau} - N_\tau$  — тоже пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ , который при этом не зависит от  $\tau$ . Заметим, однако, что  $N_\tau = 0$  почти наверное, так как  $\tau < S_1$ . Значит,

$$N_{t+\tau} \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Но тогда из независимости  $N_{t+\tau}$  и  $\tau$  получаем искомое противоречие:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} = \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0) &= \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0 \mid \tau = x) = \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0 \mid \tau = x) = \\ &= \mathbb{P}(N_{t+x} = 0) = e^{\lambda(t+x)}. \end{aligned}$$

**Задача 12.** Доказать, что для каждого  $a > 0$  величина  $\tau_a(\omega) := \inf \{t \geq 0 : W(t, \omega) = a\}$  является конечным почти наверное марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ .

*Решение.* Пусть  $a > 0$ . Тогда

$$\{\tau_a > t\} = \{\forall s \leq t \ W_s < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \forall s \leq t \ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\}.$$

Воспользуемся непрерывностью траекторий винеровского процесса и тем, что образ компакта (отрезка  $[0, t]$ ) при непрерывном отображении компактен и, следовательно, замкнут:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \forall s \leq t \ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s \leq t}} \left\{ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F}_t^W.$$

Покажем теперь, что  $\tau_a$  — момент остановки. Для этого воспользуемся законом повторного логарифма:

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right) = 1.$$

Это, в свою очередь, значит, что для почти каждой реализации винеровского процесса есть подпоследовательность  $W_{t_k}$ , которая растет как  $\sqrt{2t \ln \ln t}$  и, соответственно, "перескочит" любое  $a$  за конечное время.

## 1.7 Задачи к лекции от 29.03.17

**Задача 13.** Доказать, что если  $0 \leq a < b \leq c < d$ , то с вероятностью единица

$$\sup_{t \in [a, b]} W(t) \neq \sup_{t \in [c, d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка  $[u, v] \subset \mathbb{R}$  с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина  $T^* = T^*(\omega)$  такая, что

$$\sup_{t \in [u, v]} W(t) = W(T^*).$$

*Решение.* Покажем, что  $\forall 0 \leq a < b \leq c < d$

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t = \max_{t \in [c, d]} W_t \right) = 0.$$

Введем процесс  $X_t := W_{t+c} - W_c$ . Тогда по марковскому свойству он будет винеровским процессом, независимым с  $\mathcal{F}_c^W$ . Перепишем:

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t = \max_{t \in [c, d]} W_t \right) = \mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0, d-c]} X_t \right).$$

Обозначим

$$\xi := \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c.$$

Заметим, что  $\xi - \mathcal{F}_c^W$ -измеримая случайная величина. Еще раз перепишем:

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0, d-c]} X_t \right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \mid \xi = x \right) dx.$$

Из независимости получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \mid \xi = x \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \right) dx.$$

Вместе с этим

$$\mathbb{P} \left( \max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \right) = \mathbb{P} (|W_{d-c}| = x) = 0,$$

то есть и интеграл также равен нулю, что и требовалось доказать.

**Задача 14.** Пусть  $T := \arg \max_{t \in [0, 1]} W(t)$ , то есть  $T(\omega)$  — та точка отрезка  $[0, 1]$ , в которой непрерывная траектория  $W(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , достигает максимума (величина  $T$  определена с точностью до эквивалентности в силу предыдущей задачи). Доказать, что

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

*Решение.*

## 1.8 Задачи к лекции от 05.04.17

**Задача 15.** Пусть  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Найти все действительные параметры  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , для которых процесс  $Y = \{Y(t) := \exp\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\}, t \geq 0\}$  является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса  $W$ .

*Решение.*

**Задача 16.** Привести пример мартингала  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  и момента остановки  $\tau$  (относительно естественной фильтрации процесса  $X$ ), для которых  $EX_\tau \neq EX_0$ .

*Решение.* Возьмем простейшее симметричное случайное блуждание с началом в 0 в качестве  $X$  и  $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$ . Тогда  $\tau$  — момент остановки, как показано в первой задаче к первой лекции, но

$$0 = EX_0 \neq EX_\tau = 1.$$

## 1.9 Задачи к лекции от 12.04.17

**Задача 17.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — цепь Маркова. Будет ли  $Y := \{X_{[n]}, n \in \mathbb{Z}_+\}$  марковской цепью относительно своей естественной фильтрации? Можно ли утверждать, что процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  является марковским, если  $Z(t)$  для  $t \in [n, n+1]$  получается линейной интерполяцией значений  $X_n$  и  $X_{n+1}$ ?

*Решение.*

**Задача 18.** Доказать, что процесс  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  является пуассоновским процессом интенсивности  $\lambda$  (то есть  $N$  — процесс с независимыми приращениями такой, что  $N(0) = 0$  почти наверное и  $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)) \forall 0 \leq s \leq t < \infty$ ) тогда и только тогда, когда  $N$  — марковская цепь со значениями в пространстве  $\mathbb{Z}_+$  и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для  $0 \leq s \leq t < \infty, i, j \in \mathbb{Z}_+$ , определяются формулой

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t-s))^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leq j; \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

*Решение.*



## Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Ширяев А. Н. Вероятность.