1 Обязательные задачи к лекциям

1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

Задача 1. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ — простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}$, имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.*

Решение. Разобьем линию времени на промежутки длины $|a-b|$. Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение -1 (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для N промежутков получаем вероятность P^N; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение -1, равна

$$\lim_{N \to \infty} P^N = 0.$$

Задача 2. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ и $S' = \{S'_n,\, n \geqslant 0\}$ — независимые простые случайные блуждания в $\mathbb{Z}^d$, имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n \geqslant 1}$ и $\left(X'_n\right)_{n \geqslant 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что*

$$\mathsf{P}\left(X_1 = e_k\right) = \mathsf{P}\left(X_1 = -e_k\right) = \mathsf{P}\left(X'_1 = e_k\right) = \mathsf{P}\left(X'_1 = -e_k\right) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k — вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого k-я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \ldots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\},$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A. Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathsf{E}N < \infty$.

Решение. Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\left\{S_n^k - S_m^{k\prime} = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{i\left(S_n^k - S_m^{k\prime}\right)t_k}}{2\pi}\, dt_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\, dt,$$

поскольку

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi}\,dx \;=\; \mathbb{I}\left\{n=0\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\mathbb{I}\left\{S_n-S'_m=0\right\} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i\left(S_n-S'_m,\,t\right)}\,dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^n(t)\varphi^m(-t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\,dt,\end{aligned}$$

где

$$\varphi(t)=\mathsf{E}e^{i(X_1,t)}.$$

Получаем, что

$$\mathsf{E}N=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\varphi^{n+m}(t)\,dt \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{\bigl(1-\varphi(t)\bigr)^2}\,dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1-\varphi(t)=1-\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos t_k\sim\frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{\bigl(1-\varphi(t)\bigr)^2}=\Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель R в степени $d-1$, то интеграл сходится $\Leftrightarrow d\geqslant 5$.

1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

Задача 3. *Пусть в модели Гальтона–Ватсона* $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi = 2) = 1/2$, $\mathsf{P}(\xi = 6) = 1/4$. *Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше* $1/2$.

Решение. Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию $\psi_\xi(z) - z$. Заметим, что

$$\big(\psi_\xi(z) - z\big)\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \ \ \big(\psi_\xi(z) - z\big)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку $\psi_\xi(z) - z$ — непрерывная функция, то уравнение $\psi_\xi(z) - z = 0$ будет иметь корень на интервале $(0,\, 1/2)$. Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше $1/2$.

Задача 4. *Пусть* $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ — *процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин* $X_1,\, X_2,\, \ldots$ *таких, что* $\mathsf{E}X_1 = \mu \in (0, \infty)$ *и* $varX_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. *Доказать, что*

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{law} N(0,\, 1),\ t \to \infty.$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0,\, 1).$$

Запишем

$$\mathsf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) = \mathsf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что
$$\mathsf{P}\left(Z(t) < n\right) = \mathsf{P}\left(S_n > t\right) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$
Тогда продолжим цепочку равенств:
$$\mathsf{P}\left(Z(t) < n(t)\right) = \mathsf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathsf{P}\left(S_{n(t)} > t\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right).$$
Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо $n(t)$ его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику целой части):
$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$
Поскольку нас интересует асимптотика при $t \to \infty$, получаем, что
$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > -xA(t)\right),$$
где
$$A(t) \to 1, \ \ t \to \infty.$$
Перепишем:
$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > -xA(t)\right) = \mathsf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$
Воспользуемся леммой Слуцкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку
$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\,1), \ \ A(t) \to 1, \ \ t \to \infty,$$
то
$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\,1).$$
Тогда получаем, что в каждой точке x непрерывности функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке x),
$$\mathsf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \to 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$
Итак, получили, что
$$\mathsf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \to \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\, 1),\ t \to \infty.$$

1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

Задача 5. *Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?*

Решение. Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина ξ равновероятно (с вероятностью $1/3$) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n \sim \xi$ процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup\left\{n : \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant t\right\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим $Z(2) - Z(1)$, $Z(1)$.

$$\mathsf{P}\left(Z(2) - Z(1) = 0,\, Z(1) = 0\right) = 0,$$

поскольку $\xi_n \leqslant 2$. Вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(Z(2) - Z(1) = 0\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\xi_1 = 1,\, \xi_2 = 2\right) = \frac{1}{9},\ \ \mathsf{P}\left(Z(1) = 0\right) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

Задача 6. *Найти ковариационную функцию процесса $Z(t) = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N.*

Решение. Сначала предположим, что $t > s$. Вычислим ковариационную функцию:

$$cov\left(Z(t),\, Z(s)\right) = cov\left(\xi_0(-1)^{N(t)},\, \xi_0(-1)^{N(s)}\right) = \\ = \mathsf{E}\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(t)}\,\mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(s)}.$$

Поскольку

$$\mathsf{E}\xi_0 = 0,\ \xi_0^2 = 1,\ (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$\mathsf{E}\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(t)}\,\mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(s)} = \mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности λ является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right).$$

Тогда получаем, что

$$\mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай $t \leqslant s$ рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$cov\left(Z(t),\, Z(s)\right) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

1.4 Задачи к лекции от 01.03.17

Задача 7. *Пусть* $N = \left\{N(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right\}$ — *пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности* $\lambda\mu(\cdot)$, *где* λ — *положительная константа, а* μ — *мера Лебега в* $\mathbb{R}^d$. *Пусть* $\{x_i\}$ — *ансамбль случайных точек в* $\mathbb{R}^d$, *образующих этот процесс. Для* $z \in \mathbb{R}^d$ *введем случайную величину* $Y(z) := \inf_{i\in\mathbb{N}} \|z - x_i\|$, *где* $\|\cdot\|$ — *евклидова норма в* $\mathbb{R}^d$ *(иначе говоря, рассматривается расстояние от точки* z *до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найти функцию распределения величины* $Y(z)$ *и ее математическое ожидание.*

Решение. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(Y(z) \geqslant R\right) = \mathsf{P}\left(N(\mathrm{B}_{z,\,R}) = 0\right),$$

где $\mathrm{B}_{z,\,R}$ — шар с центром z и радиусом R. Известно, что мера Лебега, то есть объем, d–мерного шара, равен

$$\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} R^d.$$

По определению пространственного пуассоновского процесса,

$$\mathsf{P}\left(N(\mathrm{B}_{z,\,R}) = 0\right) = e^{-\lambda\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right)};$$

таким образом,

$$F_{Y(z)}(R) = \mathsf{P}\left(Y(z) < R\right) = 1 - e^{-\lambda\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right)} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leqslant 0. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание $Y(z)$. Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$p_{Y(z)}(R) = F'_{Y(z)}(R) = \begin{cases} \lambda\,\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} dR^{d-1}\, e^{-\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leqslant 0 \end{cases}$$

Вычислим интеграл. Для упрощения введем обозначение

$$Q := \lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Тогда

$$\mathsf{E}Y(z) = \int\limits_0^\infty QdR^d e^{-QR^d}\,\mathrm{d}R = -\int\limits_0^\infty Re^{-QR^d}\,\mathrm{d}(-QR^d) = -\int\limits_0^\infty R\,\mathrm{d}(e^{-QR^d}) =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-QR^d}\,\mathrm{d}R = \int\limits_0^\infty e^{-Qu}\,\mathrm{d}(\sqrt[d]{u}) = \frac{1}{d}\int\limits_0^\infty u^{\frac{1}{d}-1}e^{-Qu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{d}Q^{-\frac{1}{d}}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{d}-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{d}Q^{-\frac{1}{d}}\Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}\left(\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)^{-\frac{1}{d}}\Gamma\left(\frac{1}{d}\right).$$

Задача 8. *Пусть* $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ *— пуассоновский процесс интенсивности* $\lambda > 0$*, то есть процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин* $X,\, X_1,\, X_2,\, \ldots$ *таких, что* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$*. Положим* $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$*. Найти функционал Лапласа процесса* $Y = \left\{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B\,(S_n)\,,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$.

Решение. Для начала возьмем простую функцию:

$$f(x) := c\,\mathbb{I}\,(0 \leqslant x \leqslant t)\,.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\,(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c\,\mathbb{I}\,(S_n \leqslant t) = cN(t), \quad N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t).$$

Из этого получаем, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathsf{E} e^{-cN(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ck}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t\left(1 - e^{-c}\right)}.$$

Заметим, что

$$e^{-\lambda t\left(1-e^{-c}\right)} = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(1 - e^{-f(x)}\right)dx}.$$

Будем доказывать, что

$$\mathscr{L}(f) = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(1 - e^{-f(x)}\right)dx}.$$

Рассмотрим теперь

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{I}(t_{i-1} \leqslant x < t_i), \quad c_i > 0, \quad 0 \leqslant t_0 < \ldots < t_n.$$

Из независимости приращений пуассоновского процесса и из полученного выше значения функционала Лапласа на простой функции следует, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathsf{E}\prod_{i=1}^{n} e^{-c_i \xi_i}, \ \ \xi_i \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t_i - t_{i-1})\right),$$

то есть

$$\mathscr{L}(f) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t\left(1 - e^{-c_i}\right)} = e^{-\lambda t \sum\limits_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-c_i}\right)}.$$

Снова отметим, что

$$\mathscr{L}(f) = e^{-\lambda \int\limits_0^{\infty}\left(1 - e^{-f(x)}\right)dx}.$$

Из курса действительного анализа известно, что любая неотрицательная измеримая функция приближается монотонно возрастающей последовательностью линейных комбинаций простых функций (этот факт также доказан в лекциях, см. Лемму 5.2). Возьмем такую последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $f_n \nearrow f$ почти наверное. Заметим, что интеграл в экспоненте, рассматриваемый как функция от аргумента $f(x)$, монотонно зависит от $f(x)$.

Поскольку функционал Лапласа определен только для неотрицательных функций, то

$$e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f(S_p)}$$

по теореме о монотонной сходимости. Тогда

$$\mathscr{L}(f_n) = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_n\left(S_p\right)} \searrow \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f\left(S_p\right)} = \mathscr{L}(f).$$

Вместе с этим

$$\mathsf{E}e^{-\sum\limits_{p=1}^{\infty} f_n\left(S_p\right)} = e^{-\lambda\int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-f_n(x)}\right)dx} \searrow e^{-\lambda\int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-f(x)}\right)dx}$$

по теореме о монотонной сходимости. Получили, что

$$\mathscr{L}(f) = e^{-\lambda\int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-f(x)}\right)dx}.$$

1.5 Задачи к лекции от 15.03.17

Задача 9. *Пусть $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные величины, причем семейства $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ и $\{Y_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ независимы. Определим процесс Крамера–Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент $t \geqslant 0$, формулой*

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geqslant 0,$$

где C_0 и c — положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет независимые приращения.

Решение. Проверим независимость приращений. Для этого необходимо показать, что случайные величины

$$Z(t_0),\, Z(t_1) - Z(t_0),\, \ldots,\, Z(t_n) - Z(t_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, 0 \leqslant t_0 < \ldots < t_n,$$

независимы в совокупности. Для этого достаточно (поскольку борелевские функции от независимых случайных величин независимы) показать, что случайные величины

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{N(t_0)} Y_k, \quad \xi_2 = \sum_{k=N(t_0)+1}^{N(t_1)} Y_k, \quad \ldots, \quad \xi_{n+1} = \sum_{k=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)} Y_k$$

независимы в совокупности. Известно (см., например, [2], страница 304), что для того чтобы компоненты случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ были независимы в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathsf{E} e^{i(u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n)} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E} e^{iu_k\xi_k}.$$

Проверим, что в данном случае это свойство выполнено. Составим вектор из этих случайных сумм и найдем его характеристическую функцию:

$$\varphi_{\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \mathsf{E} \exp\left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right],$$

где $N(t_{-1}) \equiv 0$. Будем использовать аппарат условных математических ожиданий. Рассмотрим

$$\mathsf{E}\left(\exp\left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] \middle|\, N(t_0) = v_1, \ldots, N(t_n) = v_n \right),$$

где $v_0 = 0$. Из курса математической статистики известны следующие свойства условного математического ожидания: во–первых, если ξ и η — независимые случайные векторы, то

$$\mathsf{E}\Big(f(\xi, \eta) \,\big|\, \eta = y \Big) = \mathsf{E} f(\xi, y);$$

во–вторых,
$$\mathsf{E}\Big(\xi \,\Big|\, \eta\Big) = \psi(\eta) \;\Leftrightarrow\; \mathsf{E}\Big(\xi \,\Big|\, \eta = y\Big) = \psi(y);$$
в–третьих,
$$\mathsf{E}\bigg(\mathsf{E}\Big(\xi \,\Big|\, \eta\Big)\bigg) = \mathsf{E}\xi.$$
Воспользуемся первым свойством с $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$,
$\eta = \big(N(t_0), \ldots, N(t_{n+1})\big)$, а также независимостью в совокупности Y_k:

$$\mathsf{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k\right] \middle| N(t_0) = v_1, \ldots, N(t_n) = v_n\right) =$$
$$= \mathsf{E}\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k\right] = \mathsf{E}\prod_{j=1}^{n+1}\exp\left[iu_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k\right] =$$
$$= \mathsf{E}\prod_{j=1}^{n+1}\prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} e^{iu_jY_k} = \prod_{j=1}^{n+1}\prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} \mathsf{E}e^{iu_jY_k} =$$
$$= \prod_{j=1}^{n+1}\Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^{v_j - v_{j-1}}.$$

Воспользуемся вторым свойством:

$$\mathsf{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k\right] \middle| N(t_0), \ldots, N(t_n)\right) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n+1}\Big(\varphi_Y\left(u_j\right)\Big)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})}.$$

По условию N — пуассоновский процесс, то есть

$$\forall\, 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \quad N(t_0),\, N(t_1) - N(t_0),\, \ldots,\, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

независимы в совокупности и

$$\forall\, s \leqslant t \;\; N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right).$$

Воспользуемся тогда третьим свойством, а также тем, что N — пуассоновский процесс:

$$\mathsf{E}\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k\right] =$$
$$= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k\right] \middle| N(t_0), \ldots, N(t_n)\right)\right) =$$

$$= \mathsf{E} \prod_{j=1}^{n+1} \left(\varphi_Y\left(u_j\right)\right)^{N(t_{j-1})-N(t_{j-2})} = \prod_{j=1}^{n+1} \mathsf{E} \left(\varphi_Y\left(u_j\right)\right)^{N(t_{j-1})-N(t_{j-2})} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n+1} \left(\varphi_Y\left(u_j\right)\right)^{k} e^{-\lambda(t_{j-1}-t_{j-2})} \frac{\left(\lambda\left(t_{j-1}-t_{j-2}\right)\right)^k}{k!} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n+1} e^{\lambda\left(t_{j-1}-t_{j-2}\right)\left(\varphi_Y(u_j)-1\right)}.$$

Таким образом, мы показали, что характеристическая функция вектора распадается в произведение одномерных функций, что и показывает независимость в совокупности исходных случайных величин.

Задача 10. *Для пуассоновского процесса* $N = \left\{N(t),\, t \geqslant 0\right\}$ *интенсивности* $\lambda > 0$ *(вводимого как процесс с независимыми приращениями,* $N(0) = 0$ *почти наверное,* $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$*) доказать, что не существует модификации, непрерывной почти наверное.*

Решение. Предположим противное: пусть существует непрерывная почти наверное модификация пуассоновского процесса, то есть существует процесс $Y = \left\{Y(t),\, t \geqslant 0\right\}$ такой, что

$$\mathsf{P}\left(N(t) = Y(t)\right) = 1 \;\; \forall t \geqslant 0.$$

Поскольку счетное пересечение множеств полной меры есть множество полной меры по непрерывности вероятности, то

$$\mathsf{P}\left(N(t) = Y(t) \;\; \forall t \in \mathbb{Q}_+\right) = 1.$$

Таким образом, можно считать, что почти наверное значения процессов совпадают на счетном всюду плотном множестве. Из непрерывности почти наверное модификации Y следует, что с вероятностью 1 траектории Y продолжаются единственным образом по непрерывности справа со значений на счетном всюду плотном множестве. На лекции утверждалось без доказательства, что у пуассоновского процесса есть непрерывная справа кусочно–постоянная модификация со скачками 1. Из этого следует искомое противоречие: по значениям на счетном всюду плотном непрерывная справа функция восстанавливается однозначно, но вместе с этим один из результатов этого продолжения разрывен почти наверное (из-за дискретности скачков), а другой — непрерывен почти наверное по предположению.

1.6 Задачи к лекции от 22.03.17

Задача 11. *Пусть $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ (как процесс восстановления). Доказать, что $\tau := \gamma S_1$, где константа $\gamma \in (0,\, 1)$, не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса N (S_1 — длина промежутка до первого скачка процесса N).*

Решение. Пусть τ — марковский момент. Тогда τ — момент остановки, поскольку S_1 конечен с вероятностью 1. Тогда к τ применимо строго марковское свойство, из чего следует, что процесс $X_t = N_{t+\tau} - N_\tau$ — тоже пуассоновский процесс интенсивности λ, который при этом не зависит от τ. Заметим, однако, что $N_\tau = 0$ почти наверное, так как $\tau < S_1$. Значит,

$$N_{t+\tau} \sim \mathrm{Poiss}\,(\lambda t)\,.$$

Но тогда из независимости $N_{t+\tau}$ и τ получаем искомое противоречие:

$$e^{\lambda t} = \mathsf{P}\,(N_{t+\tau} = 0) \;=\; \mathsf{P}\left(N_{t+\tau} = 0 \,\Big|\, \tau = x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(N_{t+\tau} = 0 \,\Big|\, \tau = x\right) \;= \\ =\; \mathsf{P}\,(N_{t+x} = 0) \;=\; e^{\lambda(t+x)}.$$

Задача 12. *Доказать, что для каждого $a > 0$ величина $\tau_a(\omega) :=$ $:= \inf\{t \geqslant 0 : \; W(t,\, \omega) = a\}$ является конечным почти наверное марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$.*

Решение. Пусть $a > 0$. Тогда

$$\{\tau_a > t\} = \{\forall s \leqslant t \;\; W_s < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\forall s \leqslant t \;\; W_s \leqslant a - \frac{1}{k}\right\}.$$

Воспользуемся непрерывностью траекторий винеровского процесса и тем, что образ компакта (отрезка $[0,\, t]$) при непрерывном отображении компактен и, следовательно, замкнут:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\forall s \leqslant t \;\; W_s \leqslant a - \frac{1}{k}\right\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s \leqslant t}} \left\{W_s \leqslant a - \frac{1}{k}\right\} \in \mathscr{F}_t^W.$$

Покажем теперь, что τ_a — момент остановки. Для этого воспользуемся законом повторного логарифма:

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{t \to +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1\right) = 1.$$

Это, в свою очередь, значит, что для почти каждой реализации винеровского процесса есть подпоследовательность W_{t_k}, которая растет как $\sqrt{2t \ln \ln t}$ и, соответственно, "перескочит" любое a за конечное время.

1.7 Задачи к лекции от 29.03.17

Задача 13. *Доказать, что если* $0 \leqslant a < b \leqslant c < d$, *то с вероятностью единица*

$$\sup_{t\in[a,\,b]} W(t) \neq \sup_{t\in[c,\,d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка $[u,\,v] \subset \mathbb{R}$ *с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина* $T^\star = T^\star(\omega)$ *такая, что*

$$\sup_{t\in[u,\,v]} W(t) = W\left(T^\star\right).$$

Решение. Покажем, что $\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant c < d$

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[a,\,b]} W_t = \max_{t\in[c,\,d]} W_t\right) \;=\; 0.$$

Введем процесс $X_t := W_{t+c} - W_c$. Тогда по марковскому свойству он будет винеровским процессом, независимым с $\mathscr{F}_c^W$. Перепишем:

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[a,\,b]} W_t = \max_{t\in[c,\,d]} W_t\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\max_{t\in[a,\,b]} W_t - W_c = \max_{t\in[0,\,d-c]} X_t\right).$$

Обозначим

$$\xi \;:=\; \max_{t\in[a,\,b]} W_t - W_c.$$

Заметим, что ξ — $\mathscr{F}_c^W$–измеримая случайная величина. Еще раз перепишем:

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[a,\,b]} W_t - W_c = \max_{t\in[0,\,d-c]} X_t\right) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,\,d-c]} X_t = x \,\middle|\, \xi = x\right)\,\mathrm{d}x.$$

Из независимости получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,\,d-c]} X_t = x \,\middle|\, \xi = x\right)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,\,d-c]} X_t = x\right)\,\mathrm{d}x.$$

Вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,\,d-c]} X_t = x\right) \;=\; \mathsf{P}\big(|W_{d-c}| = x\big) \;=\; 0,$$

то есть и интеграл также равен нулю, что и требовалось доказать.

Задача 14. *Пусть* $T := \arg\max\limits_{t\in[0,\,1]} W(t)$, *то есть* $T(\omega)$ *— та точка отрезка* $[0,\,1]$, *в которой непрерывная траектория* $W(t)$, $t \in [0,\,1]$, *достигает максимума (величина* T *определена с точностью до эквивалентности в силу предыдущей задачи). Доказать, что*

$$\mathsf{P}\left(T \leqslant t\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t},\;\; t \in [0,\,1].$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$M_t^W \;:=\; \max_{s\in[0,\,t]} W(s).$$

Перепишем в терминах этого обозначения $\mathsf{P}\,(T \leqslant t)$:

$$\mathsf{P}\,(T \leqslant t) \;=\; \mathsf{P}\left(M_t^W \geqslant \max_{s\in[t,\,1]} W(s)\right).$$

Вычтем из обеих частей второго неравенства $W(t)$:

$$\mathsf{P}\left(M_t^W \geqslant \max_{s\in[t,\,1]} W(s)\right) \;=\; \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant \max_{s\in[t,\,1]} \big(W(s) - W(t)\big)\right) \;=$$

$$=\; \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant \max_{s\in[0,\,1-t]} X(s)\right) \;=\; \mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X\right),$$

где $X \;=\; \big\{X(t),\, t \geqslant 0\big\}$ — винеровский процесс, независимый с σ–алгеброй $\mathscr{F}_t^W$ по марковскому свойству.
Дальнейший ход решения можно представить следующим образом:

1. сначала найдем совместное распределение случайных величин M_t^W и $W(t)$;
2. затем найдем распределение случайной величины $M_t^W - W(t)$;
3. затем интегрированием условного распределения найдем искомую вероятность.

Приступим к реализации этого плана.
Найдем совместное распределение: $\forall\, y \geqslant x,\; y \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(W(t) < x,\, M_t^W < y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W(t) < x\right) - \mathsf{P}\left(W(t) < x,\, M_t^W \geqslant y\right) \;=$$

$$=\; \mathsf{P}\left(W(t) < x\right) - \mathsf{P}\left(W(t) \geqslant 2y - x\right) \;=\; \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)$$

по лемме 7.3 из лекций. Дальше для решения задачи достаточно значений этой функции распределения на $y \geqslant \max(0,\, x)$. Совместное распределение нашли.
Для того чтобы найти распределение $M_t^W - W(t)$, вычислим совместную плотность последовательным дифференцированием по x и y совместной функции распределения:

$$p(x,\, y) \;=\; \left(\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)\right)''_{xy} \;=\; -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right),$$

где $\mathrm{p}(x)$ — плотность случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(0,\,1)$. Проинтегрируем:

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) > u\right) \;=\; \iint\limits_{\substack{y - x > u\\ y \geqslant 0}} \mathrm{p}'(x,\, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Этот интеграл удобно считать в виде суммы двух интегралов (читателю рекомендуется нарисовать картинку и заштриховать область интегрирования, чтобы в этом убедиться):

$$\iint\limits_{\substack{y-x>u\\ y\geqslant 0}} \mathrm{p}'(x,\,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-u}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-u}^{+\infty}\left(\int\limits_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

Вычислим эти интегралы по отдельности:

$$\int\limits_{-\infty}^{-u}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{-\infty}^{-u}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\right)\,\mathrm{d}x \;=$$

$$= \;-\int\limits_{-\infty}^{-u}\mathrm{p}\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) \;=\; 1-\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

$$\int\limits_{-u}^{+\infty}\left(\int\limits_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\mathrm{p}'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-u}^{+\infty}\left(\int\limits_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t}\,\frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-u}^{+\infty}\mathrm{p}\left(\frac{2u+x}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{2u+x}{\sqrt{t}}\right) \;=\; 1-\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

Таким образом, $\forall u \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) > u\right) \;=\; 2-2\,\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

Распределение $M_t^W - W(t)$ нашли.
Вычислим, наконец, искомую вероятность:

$$\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X\right) \;=$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty}\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant M_{1-t}^X \,\middle|\, M_{1-t}^X = u\right) p_{M_{1-t}^X}(u)\,\mathrm{d}u \;=$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty}\mathsf{P}\left(M_t^W - W(t) \geqslant u\right) p_{M_{1-t}^X}(u)\,\mathrm{d}u$$

в силу независимости M_{1-t}^X и $\mathscr{F}_t^W$. Из теоремы 7.4 знаем, что

$$\mathsf{P}\left(M_{1-t}^X > v\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\left|X(1-t)\right| > v\right),$$

то есть

$$p_{M^X_{1-t}}(u) \;=\; \frac{2}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left(M^W_t - W(t) \geqslant M^X_{1-t}\right) \;=\; \int\limits_0^{+\infty}\left(2 - 2\,\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right)\frac{2}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \;2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right)\,\mathrm{d}\frac{u}{\sqrt{1-t}}.$$

В явном виде этот интеграл считать оказалось проблематичным, так что будем делать следующее: возьмем производную по параметру и убедимся в том, что она совпадает с производной ответа. Сделаем замену $y = \frac{u}{\sqrt{1-t}}$:

$$2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right)\,\mathrm{d}\frac{u}{\sqrt{1-t}} \;=\; 2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\,(y)\;\mathrm{d}y;$$

тогда

$$\left(2 - 4\int\limits_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{p}\,(y)\;\mathrm{d}y\right)'_t =$$

$$= \;2\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{p}\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\;\mathrm{p}(y)\,y\,\frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}y \;=$$

$$= \;\frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{p}\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right)\;\mathrm{p}(y)\mathrm{d}y^2 \;=$$

$$= \;\frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2(1-t)}{2t}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y^2 \;=\; \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2t}}\,\mathrm{d}y^2 \;=$$

$$= \;\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}};$$

вместе с этим

$$\left(\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}\right)' \;=\; \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}.$$

Значит, производные совпадают, а значит, совпадают и первообразные с точностью до константы. Но так как речь идет о вероятностях, то путем подстановки в равенство

$$\mathsf{P}\,(T \leqslant t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t} + C$$

$t = 1$ сразу получаем, что $C = 0$. Задача решена.

1.8 Задачи к лекции от 05.04.17

Задача 15. *Пусть $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс. Найти все действительные параметры α, β и γ, для которых процесс $Y =$ $= \Big\{Y(t) := \exp\left\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\right\},\, t \geqslant 0\Big\}$ является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса W.*

Решение. Запишем субмартингальное свойство: $\forall\, t \geqslant s$

$$\mathsf{E}\left(Y_t \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \;\geqslant\; Y_s,$$

где $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — естественная фильтрация процесса Y. Запишем в явном виде левую часть неравенства, воспользовавшись независимостью приращений винеровского процесса:

$$\mathsf{E}\left(e^{\alpha W(t)+\beta t+\gamma} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \;=\; \mathsf{E}\left(e^{\alpha\left(W(t)-W(s)+W(s)\right)+\beta t+\gamma} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \;=$$
$$= \; e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \mathsf{E} e^{\alpha\left(W(t)-W(s)\right)}.$$

Заметим, что поскольку характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ случайной величины ξ определяется как $\mathsf{E}e^{it\xi}$, то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \mathsf{E} e^{\alpha\left(W(t)-W(s)\right)} \;=\; e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \varphi_{W(t)-W(s)}(-i\alpha).$$

Поскольку $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0,\, t-s)$ и поскольку характеристическая функция случайной величины $\eta \sim \mathcal{N}(a,\, \sigma^2)$ равна

$$\varphi_\eta(t) \;=\; e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma}\, \varphi_{W(t)-W(s)}(-i\alpha) \;=\; e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma+\frac{\alpha^2}{2}(t-s)}.$$

Таким образом, субмартингальное свойство заключается в том, что $\forall\, t \geqslant s$

$$e^{\alpha W(s)+\beta t+\gamma+\frac{\alpha^2}{2}(t-s)} \;\geqslant\; e^{\alpha W(s)+\beta s+\gamma},$$

то есть

$$e^{\left(\frac{\alpha^2}{2}+\beta\right)(t-s)} \geqslant 1,$$

или

$$\frac{\alpha^2}{2} + \beta \;\geqslant\; 0.$$

Задача 16. *Привести пример мартингала $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и момента остановки τ (относительно естественной фильтрации процесса X), для которых $\mathsf{E}X_\tau \neq \mathsf{E}X_0$.*

Решение. Возьмем простейшее симметричное случайное блуждание с началом в 0 в качестве X и $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$. Тогда τ — момент остановки, как показано в первой задаче к первой лекции, но

$$0 \;=\; \mathsf{E}X_0 \;\neq\; \mathsf{E}X_\tau \;=\; 1.$$

1.9 Задачи к лекции от 12.04.17

Задача 17. *Пусть* $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ *— цепь Маркова. Будет ли* $Y := \Big\{X_{[n]},\, n \in \mathbb{Z}_+\Big\}$ *марковской цепью относительно своей естественной фильтрации? Можно ли утверждать, что процесс* $Z = \big\{Z(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *является марковским, если* $Z(t)$ *для* $t \in [n,\, n+1]$ *получается линейной интерполяцией значений* X_n *и* X_{n+1}*?*

Решение.

Задача 18. *Доказать, что процесс* $N = \big\{N(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *является пуассоновским процессом интенсивности* λ *(то есть* N *— процесс с независимыми приращениями такой, что* $N(0) = 0$ *почти наверное и* $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\big(\lambda(t-s)\big)\, \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty$*) тогда и только тогда, когда* N *— марковская цепь со значениями в пространстве* $\mathbb{Z}_+$ *и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для* $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $i,\, j \in \mathbb{Z}_+$, *определяются формулой*

$$\mathrm{p}_{ij}(s,\, t) \;=\; \begin{cases} \frac{\big(\lambda(t-s)\big)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leqslant j; \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Решение.

1.10 Задачи к лекции от 19.04.17

Задача 19. *Пусть* $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ *— однородная цепь Маркова с конечным числом состояний* S. *Для* $i \in S$ *положим*

$$c_i \;:=\; gcd\left\{n \geqslant 1 : \mathrm{p}_{ii}(n) > 0\right\},$$

где gcd *означает наибольший общий делитель. Состояние* i *называется периодическим с периодом* d *(*$d > 1$*), когда* $c_i = d$. *Если* $c_i = 1$, *то* i *— непериодическое состояние.*
Доказать, что если цепь X *неразложима (то есть для любых* $i, j \in S\, (i \neq j)$ *найдутся* $k, m \in \mathbb{N}$ *такие, что* $\mathrm{p}_{ij}(k) > 0$ *и* $\mathrm{p}_{ji}(m) > 0$*), то все состояния одновременно непериодические или периодические, причем в последнем случае все периоды совпадают. Доказать, что если цепь* X *неразложима и непериодична, то найдется* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\mathrm{p}_{ij}(n) > 0$ *при всех* i, j *и* $n \geqslant m$.

Решение.

Задача 20. *Пусть матрица* $Q = \left(q_{ij}\right)$, *где* $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, *имеет вид* $q_{i\,i+1} = \lambda$ *при* $i = 0, \ldots, n-1$, $q_{i\,i-1} = i\mu$ *при* $i = 1, \ldots, n$, $q_{ii} = -\lambda - i\mu$ *при* $i = 0, \ldots, n-1$, $q_{nn} = -n\mu$, *а остальные* q_{ij} *равны нулю (*λ *и* μ *— положительные параметры). Объяснить, почему существует однородная марковская цепь с пространством состояний* $S = \{0, \ldots, n\}$ *и инфинитезимальной матрицей* Q. *Доказать, что имеется единственное стационарное распределение. Найти это распределение (предварительно показать, что для стандартной марковской цепи с конечным числом состояний при* $t \geqslant 0$ *справедливы обе системы уравнений Колмогорова:* $P'(t) = QP(t)$ *и* $P'(t) = P(t)Q$, *где* $P(t) = \left(\mathrm{p}_{ij}(t)\right)$ *и* Q *— инфинитезимальная матрица; вывести отсюда, что* $pQ = 0$, *где вектор–строка* p *задает стационарное распределение).*

Решение.

Список литературы

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

[2] Ширяев А. Н. Вероятность.