Содержание

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Тогда $(V, \mathscr{A})$ называется *измеримым пространством.*

Определение 1.2. Пусть есть $(V, \mathscr{A})$ и $(S, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства, $f\colon V \to S$ — отображение. f называется *$\mathscr{A}|\mathscr{B}$-измеримым*, если $\forall\, B \in \mathscr{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. *Обозначение*: $f \in \mathscr{A}|\mathscr{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — отображение. Если $Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$, то Y называется *случайным элементом.*

Определение 1.4. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом* Y, — это функция на множествах из $\mathscr{B}$, задаваемая равенством

$$\mathsf{P}_Y(B) := \mathsf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством,* — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где

$$X(t) : \Omega \to S_t,\ X(t) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t\ \ \forall\, t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле.*

Определение 1.6. Случайные элементы $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \in B_k)\ \forall\, B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n.$

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама)**.** *Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q}_t)_{t\in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ существует семейство* независимых *случайных элементов $X_t\colon \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ таких, что $\mathsf{P}_{X_t} = \mathsf{Q}_t$, $t \in T$.*

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениеми. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q})_{t\in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности $\forall$ конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. *Случайным блужданием в* $\mathbb{R}^d$ называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ такой, что

$$\begin{aligned} &S_0 := x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(начальная точка)};\\ &S_n := x + X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ — это такое случайное блуждание, что

$$\mathsf{P}(X = e_k) = \mathsf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0),\ k = 1, \ldots, d.$

Определение 1.9. Введем $N := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ $(\leqslant \infty)$. Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathsf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0$ $\forall\, n \in N$) называется *моментом первого возвращения в 0.*

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathsf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. *Для* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N = n) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n+1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S'_m = 0\right\} = n\right) \mathsf{P}(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N' = n)\, \mathsf{P}(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независиые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \mathsf{P}(N = n)\,\mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) + \mathsf{P}(N = n+1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n+1 \geqslant 2$. Из этого следует, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n)\,\mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $\mathsf{P}(N = \infty)$ *равно 0 или 1.* $\mathsf{P}(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$*.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$\mathsf{P}(N < \infty) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)} =$
$= \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{\mathsf{P}(\tau=\infty)} = 1.$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}\big((\tau = \infty) = 0\big) \Rightarrow \mathsf{P}(N = n) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{P}(N < \infty) = 0.$

Следствие доказано. □

Теорема 1.3. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ *возвратно* $\Leftrightarrow \mathsf{E}N = \infty$ *(соответственно, невозвратно* $\Leftrightarrow \mathsf{E}N < \infty$*).*

Доказательство. Если $\mathsf{E}N < \infty$, то $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\mathsf{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} =$$
$$= \mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n\right)' = \left(\frac{1}{1-p}\right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathsf{P}(\tau=\infty)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau<\infty)^{n-1}=\frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{(1-\mathsf{P}(\tau<\infty))^2}=\frac{1}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Замечание. Заметим, что поскольку $N=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{I}\{S_n=0\}$, то

$$\mathsf{E}N=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{E}\mathbb{I}\{S_n=0\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(S_n=0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(S_n=0)=\infty.$$

Следствие. *S возвратно при $d=1$ и $d=2$.*

Доказательство. $\mathsf{P}(S_{2n}=0)=(\frac{1}{2d})^{2n}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d\geqslant 0\\ n_1+\ldots+n_d=n}}\frac{(2n)!}{(n_1!)^2\ldots(n_d!)^2}$.

Случай $d=1$: $\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n}$.

Согласно формуле Стирлинга,

$$m!\sim\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m},\quad m\to\infty.$$

Соответственно,

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=\infty\Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается *случай $d=2$*:

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\ldots=\left\{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}^2\sim\frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$ ряд тоже разойдется $\Rightarrow$ блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. □

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. *Для простого случайного блуждания в $\mathbb{Z}^d$*

$$\mathsf{E}N=\lim_{c\uparrow 1}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-c\varphi(t)}\,\mathrm{d}t,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X, $t\in\mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} \, \mathrm{d}t_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)} \, \mathrm{d}t.$$

По теореме Фубини

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E} e^{i(S_n,t)} \, \mathrm{d}t.$$

Заметим, что

$$\mathsf{E} e^{i(S_n,t)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \big(\varphi\,(t)\big)^n \, \mathrm{d}t.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \, \mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n \, \mathrm{d}t, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leqslant c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} \, \mathrm{d}t$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \, \mathsf{P}(S_n = 0) \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0) = \mathsf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие. *При $d \geqslant 3$ простое случайное блуждание невозвратно.*

Доказательство. Запишем характеристическую функцию X в явном виде:

$$\varphi(t) = \mathsf{E} e^{i(t,X)} = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{1}{2d} e^{it_k} + \frac{1}{2d} e^{-it_k} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathsf{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \ldots + \cos(t_d))} \, dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности $t = 0$. Введем обозначения

$$B_\delta := (-\delta,\, \delta)^d, \;\; V_\delta := [-\pi,\, \pi]^d \setminus B_\delta.$$

Ясно, что

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \int\limits_{V_\delta} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \ldots + \cos(t_d))}\, dt < \infty.$$

Поэтому для того чтобы понять, сходится интеграл или нет, достаточно смотреть на интеграл по замыканию малой окрестности нуля B_δ. Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \ldots + \cos(t_k))} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{t_1^2} + \ldots + 1 - \frac{1}{t_d^2})} \sim \frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c \uparrow 1, \;\; t \to 0.$$

Поскольку якобиан перехода к d–мерной сферической системе координат содержит множитель R в степени $d - 1$, то интеграл сойдется $\Leftrightarrow$ $d \geqslant 3$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(S_{2n} = 0\right) &= \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1 + \ldots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \ldots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1 + \ldots + n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \ldots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leqslant \\ &\leqslant \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{\Big((n/d)!\Big)^d} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1 + \ldots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_d!} = \Theta\left(n^{-d/2}\right) \end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geqslant 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). $\square$

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в $\mathbb{R}^d$, если $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε-окрестность точки x.

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \Big\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{ блуждание возвратно в } \varepsilon\text{–окрестности точки } x \Big\}$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *точки, достижимые случайным блужданием* S, — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall\, z \in P(S) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n\colon \;\; \mathsf{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса)**.** *Если $R(S) \neq \varnothing$, то $R(S) = P(S)$.*

Следствие. *Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \varnothing$.*

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathsf{P}(\xi = m) = p_m \geqslant 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$\begin{aligned} Z_0(\omega) &:= 1, \\ Z_n(\omega) &:= \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega \colon \exists n = n(\omega),\ Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции.* Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leqslant 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathsf{P}(Y = k)$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\, \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E} s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. *Вероятность $\mathsf{P}(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_\xi$ и $p \in [0, 1]$.*

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
f_{Z_n}(s) = \mathsf{E}s^{Z_n} = \mathsf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}}\right) &= \\
= \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}}\right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\}\right] &= \\
= \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\}\right]&.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k},\ m = 1, \dots, r,\ k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}$, $i = 1, \dots, n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathsf{E}\mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} &= \\
= \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \mathsf{E}s^{\xi_{n,k}}\, \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) &= \\
= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi^j(s)\, \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}\left(\psi_\xi\left(s\right)\right)&
\end{aligned}
$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$
f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}\left(\psi_\xi\left(s\right)\right), \quad s \in [0, 1].
$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$
f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}\left(\psi_\xi\left(0\right)\right)
$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}\left(\psi_\xi\left(\psi_\xi\left(s\right)\right)\right) = \ldots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \ldots (\psi_\xi}_{n \text{ итераций}}(s)) \ldots) &= \\
= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s))&.
\end{aligned}
$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$
\mathsf{P}(Z_n = 0) = \psi_\xi\left(\mathsf{P}\left(Z_{n-1} = 0\right)\right).
$$

Но $\mathsf{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathsf{P}(A)$ при $n \to \infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \to \infty$. Тогда

$$
\mathsf{P}(A) = \psi_\xi(\mathsf{P}(A)),
$$

то есть $\mathsf{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_\xi(p)$, $p \in [0, 1]$. $\square$

Теорема 2.2. *Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть* ***наименьший*** *корень уравнения*

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0,1], \tag{1}$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n,k}\{\xi_{n,k} \geqslant 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geqslant 1$ при $\forall\, n$, то есть $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0,1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = \big[\psi_n(0),\ \psi_{n+1}(0)\big),\ n = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n. Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0,1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s \ > \ \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) \ = \ \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) \ = \ 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на Δ_n $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \big[0,\ \mathsf{P}(A)\big), \quad \psi_n(0) \nearrow \mathsf{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathsf{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.3. 1. *Вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.*
2. *Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $\mathsf{E}\xi \leqslant 1$ имеем $\mathsf{P}(A) = 1$, при $\mathsf{E}\xi > 1$ имеем $\mathsf{P}(A) < 1$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathsf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).
2. Знаем, что

$$\psi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \ \ \psi_\xi(1) = 1, \ \ \exists \psi'_\xi(s),\ s \in (0,\ 1).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\forall s \in (0,\ 1) \ \ \psi_\xi(1) - \psi_\xi(s) = \psi'_\xi(\theta)(1 - s),\ \theta \in (s,\ 1).$$

Формулой Лагранжа можно пользоваться, поскольку $\psi_\xi(s)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$ и дифференцируема на интервале $(0,\ 1)$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s \ = \ 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) \ = \ (1 - s)\Big(1 - \psi'_\xi(\theta)\Big)\,.$$

Знаем, что при $s \in (0,\,1)$

$$\psi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k, \;\; \psi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k.$$

Заметим, что если $\exists p_k > 0,\ k \geqslant 2$, то $\psi''_\xi(s) > 0,\ s \in (0,\,1)$, а значит, $\psi'_\xi(s)$ строго возрастает на $s \in (0,\,1)$. Будем сначала рассматривать этот случай.

(a) Пусть $\mathsf{E}\xi = \psi'_\xi(1) \leqslant 1$. Из этого следует, что $\psi'_\xi(\theta) < 1$. Тогда получаем, что

$$\psi_\xi(s) - s \;=\; 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1-s) \;=\; (1-s)\Big(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\Big) > 0 \;\; \forall s \in (0,\,1),$$

причем $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Из этого следует, что наименьшим корнем уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ будет $s = 1$.

(b) Пусть $\mathsf{E}\xi = \psi'_\xi(1) > 1$. Тогда для всех s, достаточно близких к 1,

$$\psi'_\xi(\theta) > 1,\ \theta \in (s,\,1),$$

в силу непрерывности производящей функции на отрезке $[0,\,1]$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s \;=\; 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1-s) \;=\; (1-s)\Big(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\Big) < 0,$$

при этом $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Это значит, что на интервале $(0,\,1)$ найдется корень уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ в силу непрерывности производящей функции.

(c) Рассмотрим теперь случай $p_k = 0\ \forall k \geqslant 2$. В рамках этого предположения

$$\psi_\xi(s) = p_0 + (1-p_0)s,$$

а значит,

$$\psi_\xi(s) - s = p_0 + (1-p_0)s - s = p_0(1-s) > 0 \;\; \forall s < 1.$$

Из этого следует, что у уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ наименьший корень на отрезке $[0,\,1]$ — это $s = 1$. Теорема доказана.

□

Следствие. *Пусть* $\mathsf{E}\xi < \infty$. *Тогда* $\mathsf{E}Z_n = (\mathsf{E}\xi)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathsf{E}Z_1 = \mathsf{E}\xi$.

Индуктивный переход:

$$\mathsf{E}Z_n = \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,\mathsf{E}\xi\,\mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathsf{E}\xi\,\mathsf{E}Z_{n-1} = (\mathsf{E}\xi)^n\,.$$

□

Определение 2.2.

При $\mathsf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим.*

При $\mathsf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим.*

При $\mathsf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим.*

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Положим

$$Z(0) := 0;$$
$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \ S_n \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что $\sup\varnothing := \infty$). Таким образом,

$$Z(t,\omega) = \sup\left\{n \in \mathbb{N} : \ S_n(\omega) \leqslant t\right\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления.*

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leqslant t\}, \ t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^\star(t),\, t \geqslant 0\}$, который строится по $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$\mathsf{P}(Y = \alpha) = p \in (0,1); \ \ \mathsf{P}(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = const$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \ \ \forall\, t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left[\frac{t}{c}\right]$.

Лемма 2.4.

$$\mathsf{P}(Z^\star(t) = m) = \begin{cases} C_m^j\, p^{j+1} q^{m-j}, \textit{ где } j = \left[\frac{t}{\alpha}\right] & , \textit{если } m \geqslant j; \\ 0 & , \textit{если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0,1)$, если $\mathsf{P}(U = k) = (1-p)^k p, \ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. *Рассмотрим независимые геометрические величины* $U_0, \ldots, U_{j+m}$ *с параметром* $p \in (0,1)$. *Тогда* $\forall t \geqslant \alpha$ *и* $m \geqslant j$

$$\mathsf{P}(j + U_0 + \ldots + U_j = m) = \mathsf{P}(Z^\star(t) = m).$$

3 Лекция от 22.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}(U_0 + \ldots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0,\ldots,\, k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j = m-j}} \mathsf{P}(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j = m-j}} \mathsf{P}(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,\, k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j = m-j}} \mathsf{P}(U_0 = k_0) \ldots \mathsf{P}(U_j = k_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j = m-j}} p(1-p)^{k_0} \ldots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j = m-j}} p^{j+1}(1-p)^{k_0+\ldots+k_j} =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j = m-j}} p^{j+1}(1-p)^{m-j} = p^{j+1}(1-p)^{m-j} \# M,$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j, удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\# M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\# M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m - j$ и числом перегородок j. Таким образом,

$$\# M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathsf{P}(U_0 + \ldots + U_j = m - j) = C_m^j \, p^{j+1}(1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. □

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. *Пусть $t > \alpha$. Тогда*

$$\mathsf{E} Z^\star(t) \leqslant At, \quad \mathsf{E}(Z^\star(t))^2 \leqslant Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$\mathsf{E} Z^\star(t) = \mathsf{E}(j + U_0 + \ldots + U_j) = j + (j+1)\mathsf{E} U,$$

где

$$\mathsf{E}U = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p \;=\; a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)\mathsf{E}U = j + (j+1)a(p) \leqslant (j+1)\big(a(p)+1\big) \leqslant \frac{2t}{\alpha}\big(a(p)+1\big) = At,$$

поскольку $j = \left[\frac{t}{\alpha}\right] \leqslant \frac{t}{\alpha}$, а $t > \alpha$; здесь $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2$.

$$\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2 = \mathsf{D}Z^\star(t) + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2 = (j+1)\mathsf{D}U + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := \mathsf{D}U$. Используя оценку выше для $\mathsf{E}Z^\star(t)$, получаем, что

$$(j+1)\mathsf{D}U + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2 \leqslant (j+1)^2\left(\sigma^2(p) + \big(a(p)+1\big)^2\right) \leqslant Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geqslant (j+1)$. Лемма доказана. □

Замечание. Пусть случайная величина $X \geqslant 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : \mathsf{P}(X > \alpha) = p \in (0,1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^\star = \left\{Z^\star(t),\ t \geqslant 0\right\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leqslant \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leqslant X_n \;\Rightarrow\; Z(t) \leqslant Z^\star(t)\;\; \forall t \geqslant 0$. Тогда $\forall \alpha > t$

$$\mathsf{E}Z(t) \leqslant \mathsf{E}Z^\star(t) < \infty,\;\; \mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2 \leqslant \mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

Следствие. $\mathsf{P}\left(\forall t \geqslant 0\;\; Z(t) < \infty\right) = 1.$

Доказательство. Z является неубываюшим процессом:

$$s \leqslant t \to Z(s) \leqslant Z(t) \Rightarrow \mathsf{P}\left(Z(n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство. □

Следствие. $\mathsf{E}Z(t) \leqslant At$; $\mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2 < Bt^2,\;\; t > \alpha.$

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0, \infty],\ n \to \infty,$$

где $\mu = \mathsf{E}X$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ.
Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leqslant c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ \geqslant\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V_k \ =\ \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ \geqslant\ \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\} = \mathsf{E}X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Теорема 3.3. *Пусть $Z = \{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \ldots,\ X \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty;$$

$$\frac{\mathsf{E}Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty,$$

где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = \infty\ \ \forall t$).
Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leqslant t < S_{Z(t)+1}. \tag{2}$$

Поскольку $Z(t_n,\ \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \to \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим $(t,\ \omega)$ такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих $(t,\ \omega)$ поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leqslant \frac{t}{Z(t)} \leqslant \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1}\frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \ t \to \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ \ t \to \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.
Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathsf{E}\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}\xi,\ t \to \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t\to\alpha} \mathsf{E}\left(|\xi_t|\,\mathbb{I}\left\{|\xi_t| > c\right\}\right) \to 0,\ \ c \to \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. *Если $\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathsf{E}\xi_t \to \mathsf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.*

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена)**.** *$\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow$ $\exists$ неубывающая функция g такая, что*

$$\frac{g(t)}{t} \to \infty,\ \ t \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathsf{E}g\left(|\xi_t|\right) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathsf{E}\left(\xi_t\right)^2 = \frac{\mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2}{t^2} \leqslant \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. □

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Тогда *пуассоновский процесс интенсивности* λ $N = \big\{N(t),\ t \geqslant 0\big\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$X_1^t := S_{N(t)+1} - t,$$
$$X_k^t := X_{N(t)+k},\ k \geqslant 2.$$

Лемма 3.6. *Для* $\forall t > 0$ *величины* $N(t),\ X_1^t,\ X_2^t, \ldots$ *независимы, причем*

$$N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t),\ X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall u_1, \ldots, u_k \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u, \ldots,\ X_k^t \geqslant u_k\right) = \\ = \mathsf{P}\left(N(t) = n\right) \mathsf{P}(X_1^t \geqslant u_1) \ldots \mathsf{P}(X_k^t \geqslant u_k).$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k.
Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t,\ S_{N(t)+1} - t \geqslant u_1\Big) = \\ = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big),$$

поскольку

$$\{S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t\} = \big\{N(t) = n\big\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & , x \geqslant 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t+u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_n + X_{n+1} \geqslant t+u_1\Big) =$$
$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_n+1}(y)\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1\\ y\geqslant 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y}\, dx\, dy$$

в силу независимости S_n и X_{n+1}. Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1\\ y\geqslant 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y}\, dx\, dy \;=\; \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx \int\limits_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y}\, dy =$$
$$= \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)}\, dx \;=\; e^{-\lambda(t+u_1)} \int\limits_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx =$$
$$= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \tag{3}$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1 = 0$ и получим, что

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n\Big) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(X_1^t \geqslant u_1\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} \;=$$
$$= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \;=\; e^{-\lambda u_1},$$

то есть

$$X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t \geqslant u, \ldots,\ X_k^t \geqslant u_k\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(\underbrace{S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t,\ S_{n+1} - t \geqslant u_1}_{\text{зависят от } X_1,\ldots,X_{n+1}},\ \underbrace{X_{n+2} \geqslant u_2, \ldots,\ X_{n+k} \geqslant u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2},\ldots}\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(N(t)=n\right) \underbrace{\mathsf{P}\left(X_1 \geqslant u_1\right)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \ldots e^{-\lambda u_k} = \mathsf{P}\left(N(t)=n\right) e^{-\lambda u_1} \ldots e^{-\lambda u_k}
\end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. □

Замечание (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени S_n, то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени X_i, а мы пришли на остановку в момент времени t и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

4 Лекция от 01.03.17

Точечные процессы

4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

Определение 4.1. Процесс $\{Y(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет *независимые приращения*, если

$$\forall\, 0 \leqslant t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0), Y(t_1) - Y(t_0), \ldots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Теорема 4.1. *Пуассоновский процесс интенсивности λ имеет независимые приращения.*

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции по n. Введем процесс

$$N^t(s) := \sup\left\{n : \sum_{k=1}^{n} X_k^t \leqslant s\right\}, \ \ s \geqslant 0.$$

Из доказанного ранее следует, что $\left\{N^t(s),\, s \geqslant 0\right\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Заметим, что по определению

$$N^t(s) \in \sigma\left\{X_1^t,\, X_2^t,\, \dots\right\},$$

из чего следует, что $N(t)$ независима с $N^t(s)\ \forall\, s$. Но

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t),$$

а значит, для $n = 1$ утверждение доказано: $t_0 = t$, $t_1 = t + s$. Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем t_0 и рассмотрим $N^{t_0}(s)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N^{t_0}\left(t_k - t_0\right) - N^{t_0}\left(t_{k-1} - t_0\right) = \\ = N\left(t_k - t_0 + t_0\right) - N(t_0) - \big(N\left(t_{k-1} - t_0 + t_0\right) - N\left(t_0\right)\big) = \\ = N(t_k) - N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0},\, N(t_1) - N(t_0),\, \dots,\, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0},\, N^{t_0}(s_1),\, \dots,\, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где $s_k = t_k - t_0$, $k = 1, \dots, n$. Но поскольку мы знаем, что N_{t_0} независима с $N^t(s)\ \forall\, s$, мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1),\, \dots,\, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности λ $N^t(s)$. Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана. $\square$

4.2 Пространственный пуассоновский процесс

Определение 4.2. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \ \ S_q \in \mathcal{B}, \ \ \mu(S_q) < \infty \ \forall q.$$

Тогда процесс $N = \left\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности* μ, если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \operatorname{Poiss}\big(\mu\,(B)\big)\,, \ B \in \mathscr{B};$$

во-вторых,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall\, B_1,\, \ldots,\, B_n \in \mathscr{B} \text{ таких, что } B_iB_j = \emptyset \text{ при } i \neq j,$$
$$\mu(B_i) < \infty\ \forall i = 1,\, \ldots,\, n, \text{ выполнено, что } N(B_1),\, \ldots,\, N(B_n) \text{ независимы.}$$

Замечание. В определении выше сознательно не отбрасывались случаи $\mu(B) = 0$ и $\mu(B) = \infty$. Положим по определению, что если $\xi \sim \mathrm{Poiss(a)}$, то

$$\begin{aligned} a = 0 \quad &\Rightarrow \quad \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty \quad &\Rightarrow \quad \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{P}(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Определение 4.3. Пусть $(S,\, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — σ-конечная мера на нем. Пусть $\mu(S) < \infty$. Введем независимые случайные величины $Y, X_1, X_2, \ldots$ такие, что

$$\begin{aligned} &Y : \Omega \to \mathbb{Z}_+, \quad Y \sim \mathrm{Poiss}\left(\mu\left(S\right)\right), \\ &X_i : \Omega \to S, \quad X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}, \quad \mathsf{P}\left(X_1 \in B\right) = \frac{\mu\left(B\right)}{\mu\left(S\right)}. \end{aligned}$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N\left(B\right) = \sum_{n=1}^{Y} \mathbb{I}_B\left(X_n\right), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Более подробно,

$$N\left(B,\, \omega\right) = \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B\left(X_n(\omega)\right), \quad B \in \mathscr{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

Замечание. $\sum\limits_{1}^{0} := 0.$

Теорема 4.2. *В терминах определения 4.3* $\left\{N\left(B\right),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ *есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности* μ.

Доказательство. Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1,\, \ldots,\, B_n \in \mathscr{B}, \text{ что } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что
$$\mu\left(B_i\right) < \mu\left(S\right) < \infty.$$

Убедимся, что $\forall m_1,\, \ldots,\, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left(N\left(B_1\right) = m_1,\, \ldots,\, N\left(B_n\right) = m_n\right) = \\ &\qquad = \mathsf{P}\left(N\left(B_1\right) = m_1\right),\, \ldots,\, \mathsf{P}\left(N\left(B_n\right) = m_n\right) = \\ &\qquad\qquad = \frac{\mu\left(B_1\right)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \ldots \frac{\mu\left(B_n\right)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(N(B_1) = m_1, \ldots, N(B_n) = m_n\big)\big) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\big(N(B_1) = m_1, \ldots, N(B_n) = m_n, Y = k\big) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathsf{P}(Y = k)
\end{aligned}
$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&m := m_1 + \ldots + m_n; \\
&m_0 := k - m; \\
&B_0 := S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).
\end{aligned}
$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы") X_i, $i = 1, \ldots, k$, которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках") B_j, $j = 0, \ldots, n$; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно m_j частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что Y — пуассоновская случайная величина:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathsf{P}(Y = k) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\
&\quad = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \ldots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)}\right)^{m_0} \ldots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)}\right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\
&\quad = e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}.
\end{aligned}
$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества B_j попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} = \\
&\quad = e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{\mu(B_0)} = \\
&\quad = \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)},
\end{aligned}
$$

потому что
$$e^{-\mu(S)}e^{\mu(B_0)} = e^{-\left(\mu(B_1)+\ldots+\mu(B_n)\right)}.$$

Теорема доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\xi_k \sim \mathrm{Poiss}(\lambda k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right),$$

где ряд может расходиться.

Доказательство. Если некоторое $\lambda_k = \infty$, то $\xi_k = \infty$, как и вся левая часть. Далее все $\lambda_k < \infty$.

1. Пусть
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Имеем
$$\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$

по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что ξ_k неотрицательны). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \xi < \infty$$

почти наверное. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\text{d}} \xi.$$

Тогда

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k\left(e^{iu}-1\right)} =$$
$$= \exp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\left(e^{iu}-1\right) \to \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\left(e^{iu}-1\right),\ n \to \infty.$$

Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right).$$

2. Пусть теперь
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$
Находим последовательность r_j со свойством
$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \geqslant 1,$$
которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение
$$\eta_j := \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \xi_k;$$
Тогда $\eta_1, \eta_2, \ldots$ независимы, к тому же
$$\eta_j \sim \text{Poiss}\left(\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k\right).$$
Отсюда вытекает, что
$$\mathsf{P}\left(\eta_j \geqslant 1\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\eta_j = 0\right) \geqslant 1 - e^{-1} > 0.$$
Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_j \geqslant 1) = \infty,$$
то
$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$$
почти наверное. Лемма доказана.

□

Определение 4.4. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем, то есть
$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \ \forall q.$$
Пусть теперь $\mu(S) = \infty$. Для каждого S_q вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):
$$Y_q : \Omega \to \mathbb{Z}_+, \quad Y_q \sim \text{Poiss}\Big(\mu\left(S_q\right)\Big),$$
$$X_{q_i} : \Omega \to S_q, \quad X \in \mathscr{F} | \mathscr{B} \cap S_q, \quad \mathsf{P}\left(X_{q_i} \in C\right) = \frac{\mu\left(C\right)}{\mu\left(S_q\right)},$$

где
$$C \in \mathscr{B} \cap S_q \in \mathscr{B}.$$
Строим процесс
$$N_q(C) := \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C\left(X_{q,n}\right).$$
Положим
$$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q\left(B \cap S_q\right), \quad B \in \mathscr{B}.$$
Заметим, что все члены ряда независимы, а также что
$$N_q\left(B \cap S_q\right) \sim \mathrm{Poiss}\left(\mu(B \cap S_q)\right).$$
Тогда по лемме 4.3
$$N(B) \sim \mathrm{Poiss}\left(\sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q)\right) = \mathrm{Poiss}\left(\mu\left(B\right)\right).$$

4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

Определение 4.5. Процесс $\left\{X(B),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ называется *(простым) точечным процессом*, если
$$X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n),\ B \in \mathscr{B},$$
где
$$Z_n : \Omega \to S,\ Z_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}.$$

Определение 4.6. Пусть $\mu\left(S\right) = \infty$, $\mu - \sigma$–конечная мера на $(S, \mathscr{B})$, а также
$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_{B \cap S_q}\left(X_{q,n}\right).$$
Пусть
$$V_0 := 0,\ \ V_k := \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$
Введем Z_n, $n \in \mathbb{N}$. Пусть для $\omega \in \Omega$
$$V_{k-1}(\omega) \leqslant n < V_k(\omega).$$
Определим
$$Z_n(\omega) := X_{k, n-V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$
Тогда
$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n).$$

Определение 4.7. Пусть $f : S \to \mathbb{R}_+,\ f \in \mathscr{B}|\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда *функционал Лапласа* $\mathscr{L}(f)$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(f) := \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$

где $e^{-\infty} := 0$.

4.4 Маркирование пуассоновских процессов

Определение 4.8. Рассмотрим $T, T_1, T_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ независима с $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. На следующей лекции будет показано, что процесс, заданный элементами

$$Z_n := (S_n, T_n)_{n \geqslant 1},$$

является пространственным пуассоновским процессом с мерой

$$\lambda\nu \otimes \mathsf{G},$$

где ν — мера Лебега на $B(\mathbb{R}_+)$, G — мера, задаваемая распределением T.

Замечание. Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть S_n — время начала работы с клиентом, T_n — время работы с клиентом, Y_t — число клиентов, обслуживание которых происходит в момент t. Такая модель называется моделью $M|G|\infty$: M указывает на то, что процесс пуассоновский, G (general) указывает на то, что распределение времени обслуживания клиента произвольно, а ∞ означает, что имеется бесконечное число приборов (в том смысле, что не создается очередей: работа с клиентом начинается в момент его прихода). Тогда

$$Y_t = \#\{n : S_n \leqslant t < S_n + T_n\} = \#\big\{n : (S_n,\, T_n) \in B_t\big\} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n,\, T_n) \sim \mathrm{Poiss}\,\big((\lambda\nu \otimes \mathsf{G})\,(B_t)\big),$$

где

$$B_t := \big\{(x,\, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant t < x + y\big\},$$

а точка $(x,\, y)$ задается парой $(S_n,\, T_n)$. Вычислим:

$$(\lambda\nu \otimes \mathsf{G})\,(B_t) = \iint\limits_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{I}_{B_t}(x,\, y)\,\lambda\nu(dx)\mathsf{G}(dy) =$$

$$= \int\limits_0^t \mathsf{G}(dy) \int\limits_{t-y}^t \lambda\,dx + \int\limits_t^\infty \mathsf{G}(dy) \int\limits_0^t \lambda\,dx = \int\limits_0^t \lambda y\,\mathsf{G}(dy) + \int\limits_t^\infty \lambda t\,\mathsf{G}(dy) =$$

$$= \lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\,\mathsf{G}(dy).$$

Итак,
$$Y_t \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\, \mathsf{G}(dy)\right) \quad \forall t > 0.$$
Если $\mathsf{E}T < \infty$, то
$$\mathrm{Poiss}\left(\lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\, \mathsf{G}(dy)\right) \to \mathrm{Poiss}(\lambda \mathsf{E}T), \quad t \to \infty.$$

5 Лекция от 15.03.17

Процессы с независимыми приращениями

5.1 Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)

Напоминание. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Z_n : \Omega \to S,\ Z_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$. Пусть также есть точечный процесс
$$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{I}_B(Z_n(\omega)),\ B \in \mathscr{B}$$
согласно определению 4.5. Введем для него функционал Лапласа согласно определению 4.7 по следующей формуле:
$$\mathscr{L}(f) := \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^\infty f(Z_n)} < \infty,$$
где $f : S \to \mathbb{R}_+,\ f \in \mathscr{B}|\mathcal{B}_+,\ e^{-\infty} := 0,\ \mathcal{B}_+$ — борелевская σ–алгебра на $\mathbb{R}_+$.

Теорема 5.1. $N = \big\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\big\}$ *является пространственным пуассоновским процессом с* σ*–конечной мерой интенсивности* $\mu \Leftrightarrow$
$$\mathscr{L}(f) = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx)\right].$$

Доказательство. Сначала докажем **необходимость** ($\Rightarrow$). Возьмем простую функцию f. Пусть $N = \big\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\big\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой μ. Сначала положим
$$f(x) := \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k(x)},\quad a_i \geqslant 0,\quad i = 1, \ldots, k, \tag{4}$$
где
$$B_i \cap B_j = \emptyset\ \ \forall i \neq j;\ \ B_i \in \mathscr{B},\ i = 1, \ldots, m;\ \ \mu(B_i) < \infty,\ i = 1, \ldots, m.$$
Тогда
$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^\infty \sum\limits_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{k=1}^m a_k \sum\limits_{n=1}^\infty \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{k=1}^m a_k N(B_k)},$$

где перестановка знаков суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Заметим, что если $\xi \sim \mathrm{Poiss}(a)$, то

$$\mathsf{E} e^{-v\xi} \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr}\, \mathsf{P}(\xi = r) \;=\; e^{a(e^{-v}-1)}.$$

Воспользуемся также независимостью в совокупности $N(B_k)$ в силу того, что множества B_i попарно не пересекаются. Тогда получим, что

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)} \;=\; \prod_{k=1}^{m} \mathsf{E} e^{-a_k N(B_k)} \;=\; \prod_{k=1}^{m} e^{\mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} \;=$$
$$=\; e^{\sum\limits_{k=1}^{m} \mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} \;=\; e^{\int\limits_S (e^{-f(x)}-1)\,\mu(dx)}.$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 5.2. *Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство с σ–конечной мерой μ, $f : S \to \mathbb{R}_+$ — измеримая функция на нем. Тогда существует последовательность $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ простых функций вида (4) таких, что*

$$f_j \nearrow f \text{ на } S \text{ при } j \to \infty.$$

Доказательство. Как и на прошлой лекции, разобьем S на множества S_q, $\mu(S_q) < \infty$, что возможно ввиду σ–конечности меры μ. Определим

$$f_{q,\,j}(x) = \mathbb{I}_{S_q}(x) \left(\sum_{r=0}^{2^{2j}-1} r 2^{-j}\, \mathbb{I}\left\{ r2^{-j} \leqslant f(x) < (r+1)2^{-j} \right\} + 2^j\, \mathbb{I}\left\{ f(x) \geqslant 2^j \right\} \right).$$

Тогда несложно проверить, что

$$0 \;\leqslant\; f_{q,\,j} \;\leqslant\; f_{q,\,j+1}, \quad 0 \;\leqslant\; f_j = \sum_{q=1}^{j} f_{q,\,j} \;\nearrow f \text{ на } S.$$

$\square$

Замечание. Про это (с несколько другим построением простых функций) также можно почитать в [3] (страница 189).

Лемма 5.3. *Пусть $0 \leqslant a_{n,\,j} \nearrow a_n$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad j \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n < \frac{\epsilon}{3}.$$

Из монотонной сходимости и предельного перехода в неравенстве получаем, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n,\,j} < \frac{\epsilon}{3} \ \ \forall j.$$

Зафиксируем N. Из сходимости следует, что

$$\forall n \ \ \exists N(n) \ : \ \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,\,m(n)} - a_n| < \frac{\epsilon}{3N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1,\ldots,N} N(n).$$

Тогда для любого $j > M$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{n,\,j}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \left|a_n - a_{n,\,j}\right| + \frac{2\epsilon}{3} \ \leqslant \ N\frac{\epsilon}{3N} + \frac{2\epsilon}{3} \ = \ \epsilon.$$

Таким образом, показано, что $\forall \epsilon\ \exists M : \forall j > M$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \ \leqslant \ \epsilon,$$

то есть показана требуемая сходимость.

2. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Тогда $\forall C > 0\ \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=1}^{m} a_n > 2C.$$

Снова зафиксируем N. Из сходимости следует, что

$$\forall n \ \ \exists N(n) \ : \ \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,\,m(n)} - a_n| < \frac{C}{N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1,\ldots,N} N(n).$$

Тогда для любого $j > M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_{n,\,j} \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} |a_n - a_{n,\,j}| \ \geqslant \ 2C - N\frac{C}{N} \ = \ C,$$

чем снова показана требуемая сходимость. Лемма доказана.

$\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем $0 \leqslant f_j \nearrow f$ по лемме 5.2. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n) \ \rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n), \ \ j \to \infty,$$

по лемме 5.3. Тогда

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n)} \to \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)}$$

по теореме Лебега. Итак,

$$\mathscr{L}(f) = \lim_{j\to\infty} \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f_j(x)} - 1\right) \mu(dx)\right] = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx)\right],$$

поскольку

$$\int\limits_S \left(e^{-f_j(x)} - 1\right) \mu(dx) \to \int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx), \ \ j \to \infty,$$

ввиду неотрицательности подынтегрального выражения.
Перейдем к доказательству **достаточности** ($\Leftarrow$). Пусть

$$\mathscr{L}(f) = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx)\right].$$

Возьмем

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}, \ \ B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j.$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)}.$$

Если $f = \mathbb{I}_B$, то

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)} = \mathsf{E} e^{-aN(B)} = e^{\mu(B)\left(e^{-a}-1\right)},$$

из чего следует, что $\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ в силу непрерывного соответствия между преобразованием Лапласа и функциями распределения. Теорема доказана. $\square$

Приведем доказательство утверждения, которое было дано без доказательства в конце прошлой лекции.

Теорема 5.4. *Пусть $(S_n,\, T_n)_{n=1}^{\infty}$ — точечный процесс, причем (S_n) и (T_n) независимы, где (S_n) — пуассоновский процесс с мерой интенсивности ν, где ν — мера Лебега. Тогда $(S_n,\, T_n)$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\nu \otimes \mathsf{G}$, где G — распределение T_i.*

Доказательство. Вспомним, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n,\, T_n)}.$$

Из курса математической статистики известно, что

$$\mathsf{E}\left(g(\xi,\eta)\mid \xi = u\right) = \mathsf{E} g(u,\,\eta),$$

если ξ независима с η. Тогда

$$\mathsf{E}\left(e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n,\, T_n)}\,\middle|\, S_1 = u_1, S_2 = u_2, \ldots\right) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(u_n,\, T_n)} = \\ = \prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{E} e^{-f(u_n,\, T_n)}$$

в силу независимости (T_i). Введем обозначение

$$g(u) \;:=\; \mathsf{E} e^{-f(u,\, T_n)} \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-f(u,\, x)}\, \mathsf{G}(dx).$$

Заметим, что $0 < g(u) \leqslant 1$. Из курса математической статистики известно, что

$$\mathsf{E}\left(g(\xi,\,\eta)\right) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\left(g(\xi,\,\eta)\mid\xi\right)\Big).$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) \;=\; \mathsf{E}\prod_{n=1}^{\infty} g\left(S_n\right) \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\log\, g(S_n)\right)} \;=\; \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} h(S_n)},$$

где $h := -\log\, g \geqslant 0$. Воспользуемся тем, что (S_n) — пуассоновский процесс:

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} h(S_n)} \;=\; \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} (e^{-h(x)} - 1)\, \nu(dx)\right] \;=\; \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+} (g(x) - 1)\, \nu(dx)\right] = \\ = \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-f(x,y)}\mathsf{G}(dy) - 1\right)\nu(dx)\right] = \\ = \exp\left[\iint\limits_{\mathbb{R}_+^2}\left(e^{-f(x,y)} - 1\right)\mathsf{G}(dy)\nu(dx)\right].$$

Соответственно, в силу теоремы 5.1, процесс $(S_n,\, T_n)$ является пространственным пуассоновским процессом. Теорема доказана. $\square$

5.2 Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — семейство измеримых пространств, T — произвольное множество. Введем случайный процесс

$$X := \{X_t,\, t \in T\}, \;\; X_t : \Omega \to S_t, \;\; X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t \;\; \forall t \in T.$$

Рассмотрим упорядоченный набор

$$\tau := (t_1, \ldots, t_n), \;\; t_i \neq t_j \;\; \forall i \neq j.$$

Определим тогда

$$S_\tau := S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_n}, \quad \mathscr{B}_\tau := \mathscr{B}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_{t_n}.$$

Введем прямоугольник

$$(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}), \;\; B_{t_i} \in \mathscr{B}_{t_i}, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Введем также случайный элемент

$$X_\tau : \Omega \to S_\tau, \;\; X_\tau \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_\tau \;\; \big(\Leftrightarrow X_{t_k} \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_{t_k},\, k = 1, \ldots, n\big).$$

Распределение X_τ обозначим через $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$, где набор $t_1, \ldots, t_n$ упорядочен.

Определение 5.1. Семейство мер $\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$, где

$$t_1, \ldots, t_n \in T, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; t_i \neq t_j \;\; \forall i \neq j,$$

называется *семейством конечномерных распределений* $X = \{X_t,\, t \in T\}$.

Рассмотрим прямоугольник $B = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}) = \mathsf{P}\big((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B\big) = \\ &\quad = \mathsf{P}(X_{t_1} \in B_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \in B_{t_n}) = \mathsf{P}\big(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}\big) = \\ &\qquad\qquad = \mathsf{P}_{t_{i_1} \ldots t_{i_n}}\big(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}\big) \end{aligned}$$

для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$. Таким образом, получили свойство:

Свойство 5.1. $\forall n$ $\forall$ перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$

$$\mathsf{P}_{t_{i_1} \ldots t_{i_n}}\big(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}\big) = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}).$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_k \ldots t_n}\big(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\big) = \\ &\qquad = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_{k-1} t_{k+1} \ldots t_n}\big(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\big), \end{aligned}$$

поскольку $\big\{X_{t_k} \in S_{t_k}\big\} = \Omega$. Таким образом, получили еще одно свойство:

Свойство 5.2.

$$\mathsf{P}_{t_1\ldots t_k\ldots t_n}\left(B_{t_1}\times\ldots B_{t_{k-1}}\times S_{t_k}\times B_{t_{k+1}}\times\ldots\times B_{t_n}\right)= \\ =\mathsf{P}_{t_1\ldots t_{k-1}t_{k+1}\ldots t_n}\left(B_{t_1}\times\ldots B_{t_{k-1}}\times B_{t_{k+1}}\times\ldots\times B_{t_n}\right).$$

Определение 5.2. Свойства 5.1 и 5.2 называются *условиями согласованности.*

Определение 5.3. Измеримые пространства $(S,\,\mathscr{B})$ и $(V,\,\mathscr{A})$ *изоморфны*, если

$$\exists h\quad : S\to V,\ \ h\quad\in\mathscr{B}|\mathscr{A}, \\ \exists h^{-1}: V\to S,\ \ h^{-1}\in\mathscr{A}|\mathscr{B}.$$

Определение 5.4. Измеримое пространство $(S,\,\mathscr{B})$ называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подмножеству отрезка $[0,\,1]$.

Определение 5.5. Метрическое пространство $(X,\,\rho)$ называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным.

Замечание. Любое борелевское подмножество польского пространства является борелевским пространством.

Теорема 5.5 (Колмогорова). *Пусть $(S_t,\,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство борелевских пространств. Пусть $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}$ — мера на $(S_{t_1}\times\ldots\times S_{t_n},\,\mathscr{B}_{t_1}\otimes\ldots\otimes\mathscr{B}_{t_n})$, которая удовлетворяет условиям согласованности 5.1 и 5.2. Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\,\mathscr{F},\,\mathsf{P})$ существует случайный процесс $X=\{X_t,\,t\in T\}$ такой, что $X_t:\Omega\to S_t,\quad X_t\in\mathscr{F}|\mathscr{B}_t\quad\forall t\in T$ и конечномерные распределения которого — это меры $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}$.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. В отличие от теоремы Ломницкого–Улама, в этой теореме накладываются ограничения топологического характера.

Определение 5.6. Пусть Q — мера на $\left(\mathbb{R}^n,\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$. *Характеристической функцией меры* Q называется

$$\varphi_{\mathsf{Q}}(u):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(u,\,x)}\,\mathsf{Q}(dx),\quad u\in\mathbb{R}^n.$$

Замечание. Если $\xi=(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)$, то

$$\varphi_\xi(u):=\varphi_{\mathsf{P}_\xi}(u)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(u,\,x)}\ \mathsf{P}_\xi(dx)=\int\limits_{\Omega}e^{i(u,\,\xi)}\,d\,\mathsf{P}=\mathsf{E}e^{i(u,\,\xi)}.$$

Теорема 5.6. *Пусть $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ — семейство характеристических функций мер на $\left(\mathbb{R}^n,\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$. Тогда существует случайный процесс $X=\{X_t,\,t\in T\}$, $X_t:\Omega\to\mathbb{R},\ t\in T$, для которого $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ — характеристические функции конечномерных распределений, в том и только в том случае, когда*

1. $\varphi_{t_1\ldots t_n}(u_1,\,\ldots,\,u_n)=\varphi_{t_{i_1}\ldots t_{i_n}}(u_{i_1},\,\ldots,\,u_{i_n})\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall(i_1,\,\ldots,\,i_n)$ — *— перестановки* $(1,\,\ldots,\,n)$*;*

2. $\varphi_{t_1\ldots t_k\ldots t_n}(u_1,\,\ldots,\,u_{k-1},\,0,\,u_{k+1},\,\ldots,\,u_n) = \varphi_{t_1\ldots\widehat{t_k}\ldots t_n}(u_1,\,\ldots,\,\widehat{0},\,\ldots,\,u_n)$.

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. Если $X = \{X_t,\, t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, то достаточно рассмотреть $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n},\;\; t_1 < \ldots < t_n$.

Замечание. Про эти теоремы почитать подробнее можно в [1].

5.3 Процессы с независимыми приращениями

Теорема 5.7. *Для того чтобы существовал процесс $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ с независимыми приращениями такой, чтобы характеристическая функция случайной величины $X(t) - X(s)$ была равна $\varphi(s,\,t,\,\cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(s,\,t,\,v) = \varphi(s,\,u,\,v)\,\varphi(u,\,t,\,v) \quad \forall\, 0 < s < u < t \;\; \forall v \in \mathbb{R}.$$

При этом начальное распределение процесса P_0 может быть выбрано любым.

Замечание (от наборщика)*.* Судя по всему, знание доказательства этой теоремы является обязательным. Доказательство см. [1], стр. 47.

5.4 Модификация процесса

Определение 5.7. Процесс $Y = \{Y_t,\, t \in T\}$ называется *модификацией* процесса $X = \{X_t,\, t \in T\}$, если

$$\mathsf{P}\left(Y_t = X_t\right) = 1 \;\; \forall t \in T.$$

Лемма 5.8. *Из теоремы 5.6 следует, что существует процесс с независимыми приращениями $N = \{N_t,\, t \geqslant 0\}$ такой, что*

$$N_t - N_s \sim \text{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right) \;\; \forall\, 0 < s < t.$$

Доказательство. Вспомним, что если $\xi \sim \text{Poiss}(a)$, то характеристическая функция ξ равна

$$\varphi_\xi(v) = e^{a\left(e^{iv}-1\right)}.$$

Тогда запишем

$$\varphi_{N_t-N_s}(v) = e^{\lambda(t-s)\left(e^{iv}-1\right)} = \varphi(s,\,t,\,v).$$

Но тогда

$$\varphi(s,\,t,\,v) = \varphi(s,\,u,\,v)\,\varphi(u,\,t,\,v),$$

что и требовалось показать. □

Замечание. Можно доказать, что у построенного процесса существует такая модификация, что ее траектории обладают следующими свойствами:

- они неубывают;
- они непрерывны справа;
- они имеют предел слева;
- все их скачки имеют величину 1;
- длина промежутков между скачками распределена экспоненциально;
- промежутки между скачками независимы.

Таким образом, этот процесс можно рассматривать как процесс восстановления.

Пример 5.1. Рассмотрим вероятностное пространство $\big([0,\,1],\,\mathcal{B}[0,\,1],\,\nu\big)$, где ν — мера Лебега, и измеримое пространство $\big([0,\,1],\,\mathcal{B}[0,\,1]\big)$. Введем случайные процессы $X = \{X_t,\,t \in T\}$ и $Y = \{Y_t,\,t \in T\}$ следующим образом:

$$X(t,\,\omega) \equiv 0, \quad Y(t,\,\omega) = \begin{cases} 1, & t = w \\ 0, & t \neq w \end{cases}, \quad t,\,\omega \in [0,\,1].$$

Тогда все траектории X непрерывны, а все траектории Y разрывны, но вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(X_t \neq Y_t\right) = \nu(\{t\}) = 0,$$

то есть Y является модификацией X. Таким образом, отношение эквивалентности, порождаемое свойством 'быть модификацией друг друга', не сохраняет непрерывности траекторий.

6 Лекция от 22.03.17 Винеровский процесс

6.1 Фильтрации. Марковские моменты

Определение 6.1. Пусть $(\Omega,\,\mathscr{F},\,\mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Семейство σ–алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ на этом вероятностном пространстве, где $T \subset \mathbb{R}$, называется *фильтрацией*, если $\forall\, s < t,\ s,\, t \in T$,

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}.$$

Определение 6.2. *Естественная фильтрация* процесса $X = (X_t,\,t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, — это семейство

$$\mathscr{F}_t := \sigma\left\{X_s,\,s \leqslant t,\,s \in T\right\},\ t \in T.$$

Определение 6.3. Отображение $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется *марковским моментом относительно фильтрации* $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$, если

$$\forall t \in T \quad \big\{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\big\} \in \mathscr{F}_t.$$

Марковский момент τ называется *моментом остановки*, если $\tau < \infty$ почти наверное.

Замечание. Если τ — марковский момент, то $\forall t \in T$ $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$, поскольку

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau < t\}, \ \ \{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{k}\right\}.$$

Замечание. Если $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, то

$$\tau \text{ — марковский момент } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

Пример 6.1. Рассмотрим действительный процесс с дискретным временем $X = \{X_n, \, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Введем

$$\tau_B(\omega) := \inf_n \{n : \ X_n(\omega) \in B\}, \ \ \mathscr{F}_n = \sigma\{X_0, \, X_1, \, \ldots, \, X_n\}, \ n \in \mathbb{Z}_+$$

(если $X_n \notin B \ \ \forall n = 0, \, 1, \, 2, \ldots$, то $\tau = \infty$). Тогда τ_B — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$: проверим, что $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$:
- $n = 0: \ \ \{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \sigma\{X_0\} = \mathscr{F}_0$;
- $n \geqslant 1: \ \ \{\tau = 0\} = \big\{X_0 \notin B, \, \ldots, \, X_{n-1} \notin B, \, X_n \in B\big\} \in$ $\in \sigma\{X_0, \, X_1, \, \ldots, \, X_n\} = \mathscr{F}_n$.

Определение 6.4. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$. Определим σ–алгебру

$$\mathscr{F}_\tau := \big\{A \in \mathscr{F} : \ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \ \ \forall t \in T\big\}.$$

Эта σ–алгебра называется *σ–алгеброй событий, наблюдаемых до момента* τ.

Упражнение 6.1. Доказать, что объект из 6.4 — σ–алгебра.

6.2 Строго марковское свойство

Определение 6.5. Процесс $X = \{X_t, \, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, имеет *стационарные приращения*, если $\forall t_0 < t_1 < \ldots < t_n \ \ \forall n \in \mathbb{Z} \ \ \forall h : t_0, \, \ldots, \, t_n, \, t_0 + h, \, \ldots, \, t_n + h \in T$

$$\begin{multline} \operatorname{Law}\big(X_{t_1} - X_{t_0}, \, \ldots, \, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\big) = \\ = \operatorname{Law}\big(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \, \ldots, \, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\big) \quad (5) \end{multline}$$

Замечание. Если процесс X имеет еще и независимые приращения, то

$$(5) \Leftrightarrow \operatorname{Law}(X_t - X_s) = \operatorname{Law}(X_{t+h} - X_{s+h}) \ \ \forall t, \, s, \, t+h, \, s+h \in T, \, s < t.$$

Замечание. Пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ — процесс со стационарными независимыми приращениями.

Лемма 6.1. *Пусть $X = \{X_t, \, t \geqslant 0\}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда $\forall$ константы $a > 0$ процесс $Z(t) := X(t+a) - X(a)$, $t \geqslant 0$, имеет независимые приращения и*

$$\{Z_t, \, t \geqslant 0\} \ \textit{независим с} \ \mathscr{F}_a = \sigma\{X_s, \, s \leqslant a\}.$$

Доказательство. Докажем независимсть приращений по определению: возьмем $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и рассмотрим

$$Z(t_0),\, Z(t_1) - Z(t_0),\, \ldots,\, Z(t_n) - Z(t_{n-1}).$$

Заметим, что по определению $Z(t)$

$$Z(t_0) = X(t_0 + a) - X(a), \;\; Z(t_k) - Z(t_{k-1}) = X(t_k + a) - X(t_{k-1} + a);$$

из этого получаем, что приращения Z независимы вследствие независимости приращений X, которая есть по условию леммы. Докажем второе утверждение леммы: заметим, что σ–алгебра $\mathscr{F}_a$ порождается системой событий

$$\{X_{s_1} \in B_1,\, \ldots,\, X_{s_m} \in B_m\}\,, \;\; 0 \leqslant s_1 < \ldots < s_m \leqslant a.$$

Поэтому достаточно проверить, что независимы векторы

$$\xi = (X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m}) \;\text{ и }\; \eta = (Z_{t_1},\, \ldots,\, Z_{t_n})\,, \;\; 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n.$$

Заметим, что

$$\xi = \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} \\ \vdots \\ X_{s_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} - X_{s_1} \\ \vdots \\ X_{s_m} - X_{s_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\zeta := \left(X_{s_1},\, X_{s_2} - X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m} - X_{s_{m-1}}\right)$. Тогда ζ и η независимы, поскольку X имеет независимые приращения. Но ξ — это борелевская функция от ζ, следовательно, ξ независим с η. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что его траектории непрерывны справа. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации X. Введем*

$$Y(t,\, \omega) := \begin{cases} X(t + \tau(\omega)) - X(\tau(\omega),\, \omega)\;, & \tau(\omega) < \infty, \\ 0 & ,\;\; \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

По сути, $Y(t) = X(t + \tau) - X(\tau)$, $t \geqslant 0$. Тогда процесс $Y = \{Y_t,\, t \geqslant 0\}$ независим с $\mathscr{F}_\tau$ и имеет те же конечномерные распределения, что и процесс $\{X_t - X_0,\, t \geqslant 0\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что процесс Y корректно задан. Пополним исходное вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ классом нулевых событий $\mathscr{N}$ и получим $\left(\Omega,\, \bar{\mathscr{F}},\, \bar{\mathsf{P}}\right)$, то есть

$$\forall A : \mathsf{P}\,(A) = 0 \;\; \forall C \subset A \quad C \in \mathscr{N},\, \bar{\mathsf{P}}\,(C) := 0,$$

где новая σ–алгебра определяется как

$$\bar{\mathscr{F}} = \sigma\,\{\mathscr{F},\, \mathscr{N}\}\,.$$

Известно, что

$$\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cup \mathcal{N}, \;\; \bar{\mathsf{P}}\,(A \cup C) = \mathsf{P}\,(A) \;\forall A \in \mathscr{F},\, C \in \mathcal{N}.$$

Поэтому можно считать, что с самого начала рассматривалось пополненное вероятностное пространство $\left(\Omega,\, \bar{\mathscr{F}},\, \bar{\mathsf{P}}\right)$, которое и будет дальше обозначаться просто $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$. Дальше считаем, что все σ–алгебры также пополнены классом нулевых событий.
Если τ — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ и $\alpha \leqslant \tau$ почти наверное, то α — тоже марковский момент относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$. Поэтому далее можем считать, что $\tau < \infty$ на Ω.
Покажем, что $Y(t)$ — случайная величина $\forall t \geqslant 0$. Введем

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n}\, \mathbb{I}_{A_{n,\,k}},$$

где

$$\begin{aligned} &A_{n,\,1} := \left\{\omega : \tau(\omega) \leqslant 2^{-n}\right\}, \\ &A_{n,\,k} := \left\{\omega : (k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leqslant k2^{-n}\right\}, \;\; k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Тогда $\tau_n \searrow \tau$ на всем Ω. Заметим, что τ_n — марковские моменты относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$:

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \left\{\tau \leqslant k2^{-n}\right\} \in \mathscr{F}_{k2^{-n}} \subset \mathscr{F}_t,$$

где $k := \sup\left\{r : \; r2^{-n} \leqslant t\right\}$.
Поскольку траектории X непрерывны справа почти наверное, то

$$X\left(t + \tau_n(\omega),\, \omega\right) \to X\left(t + \tau(\omega),\, \omega\right),\; n \to \infty \;\; \forall t \geqslant 0.$$

Заметим, что

$$\Big\{\omega : \; X\left(t + \tau(\omega),\, \omega\right) \leqslant z\Big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{X\left(t + k2^{-n},\, \omega\right) \leqslant z,\; \tau_n = k2^{-n}\Big\}.$$

Поскольку

$$\Big\{X\left(t + k2^{-n},\, \omega\right) \leqslant z\Big\} \in \mathscr{F},\; \left\{\tau_n = k2^{-n}\right\} \in \mathscr{F},$$

то $X(t+\tau_n)$ — случайная величина $\forall n$. Поскольку $X(t+\tau_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t+\tau)$, то $X(t+\tau)$ — тоже случайная величина из полноты случайного пространства.
Таким образом, показали, что $Y(t) = X(t+\tau) - X(\tau)$ — случайная величина $\forall t \geqslant 0$.
Докажем, что Y независим с $\mathscr{F}_\tau$. Для этого достаточно проверить, что

$$\mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right) = \mathsf{P}\,(A)\,\mathsf{P}\,(\xi \in C) \;\; \forall A \in \mathscr{F}_\tau,\, C \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}),$$

где

$$\xi := \left(Y(t_1),\, \ldots,\, Y(t_m)\right),\;\; 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m.$$

Воспользуемся свойством регулярности вероятностной меры:
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \;\; \exists$ открытое множество G и замкнутое множество F

такие, что $F \subset C \subset G$ и $\mathsf{P}\left(G \setminus F\right) < \varepsilon$ (доказательство см., например, [4], стр. 4). Соответственно, достаточно рассматривать только замкнутые C. Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right) = \mathsf{P}\left(A\right)\mathsf{P}\left(\xi \in C\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\xi)$$

для любой непрерывной ограниченной $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Положим

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 \quad , & t \leqslant 0, \\ 1 - t\,, & t \in [0,\, 1], \\ 0 \quad , & t > 1. \end{cases}$$

Определим $\rho\left(x,\, B\right) := \inf\limits_{y \in B} \rho(x,\, y)$, где $\rho(x,\, y)$ — евклидово расстояние между точками. Заметим, что $\rho\left(x,\, B\right)$ — непрерывная функция от x. Положим

$$f_j(x) := \varphi\left(j \rho\left(x,\, B\right)\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f_j(x) \searrow \mathbb{I}_B,\ j \to \infty$ (здесь важно, что B — замкнутое множество!). Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f_j(\xi) \;&\to\; \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{\{\xi \in B\}}, \\ \mathsf{E} f_j(\xi) \;&\to\; \mathsf{E}\mathbb{I}_{\{\xi \in B\}}. \end{aligned}$$

Положим

$$\xi_n := \left(X(t_1 + \tau_n) - X(\tau_n),\, \ldots,\, X(t_m + \tau_n) - X(\tau_n)\right).$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, поскольку $\tau_n \searrow \tau$. Следовательно, $\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n)$. Положим

$$\xi_{n,\,k} := \Big(X\left(t_1 + k2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right),\, \ldots,\, X\left(t_m + k2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right)\Big).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} A \cap \left\{\tau_n = k2^{-n}\right\} = A \cap A_{n,\,k} = A \cap \left\{(k-1)2^{-n} < \tau \leqslant k2^{-n}\right\} = \\ = \left\{\tau \leqslant k2^{-n}\right\} \setminus \left\{\tau \leqslant (k-1)2^{-n}\right\}. \end{aligned}$$

По лемме 6.1 $\xi_{n,\,k}$ независим с $\mathscr{F}_{k2^{-n}}$. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n) \mathbb{I}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(\xi_{n,\,k}) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathsf{E} f(\xi_{n,\,k}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\xi_{n,\,k} \overset{\text{law}}{=} \left(X(t_1) - X(0),\, \ldots,\, X(t_n) - X(0)\right) \;=:\; \gamma.$$

Тогда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathsf{E} f(\xi_{n,\,k}) = \mathsf{E} f(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \mathsf{E} f(\gamma) \mathsf{E}\mathbb{I}_A = \\ = \mathsf{E} f(\gamma)\, \mathsf{P}\,(A)\,.$$

Таким образом, получили, что $\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\gamma) \quad \forall A \in \mathscr{F}_\tau$. Осталось взять $A = \Omega$: тогда получится, что $\mathsf{E} f(\xi) = \mathsf{E} f(\gamma)$ и, как следствие,

$$\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\xi) \;\; \forall A \in \mathscr{F}_\tau.$$

$\square$

6.3 Функции Хаара и Шаудера

Определение 6.6. *Функции Хаара* $H_k(x)$ задаются следующими формулами на $[0,\,1]$:

$H_0(x) \equiv 1;$

$H_1(x) = \mathbb{I}_{[0,\,\frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{I}_{(\frac{1}{2},\,1]}(x);$

$$H_k(x) = 2^{n/2}\left(\mathbb{I}_{\left(\frac{k-2^n}{2^n},\,\frac{1/2+k-2^n}{2^n}\right]}(x) - \mathbb{I}_{\left(\frac{1/2+k-2^n}{2^n},\,\frac{1+k-2^n}{2^n}\right]}(x)\right),\;\; 2^n \leqslant k < 2^{n+1},$$
$n \in \mathbb{N};\;\; H_{2^n}(0) = 1\; \forall n \in \mathbb{N}.$

Замечание. Известно, что $\left\{H_k(x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ — полная ортонормированная система в $\mathrm{L}^2[0,\,1]$.

Определение 6.7. *Функции Шаудера* $S_k(t)$ задаются следующими формулами на $[0,\,1]$:

$$S_k(t) = \int\limits_{[0,\,t]} H_k(u)\,\mathrm{d}u = \left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\,t]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2},\;\; k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $H_k(u)$ — функции Хаара.

Замечание. Известно, что $S_k(t)$ непрерывны $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 6.3. *Пусть* $a_k = \mathrm{O}\left(k^\varepsilon\right)$ *при* $k \to \infty$*, где* $0 < \varepsilon < 1/2$*. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$$

сходится равномерно на $[0,\,1]$*.*

Доказательство. Доказательство будет добавлено позднее (через две недели). $\square$

Замечание. Из леммы 6.3 и теоремы Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится к непрерывной функции.

Лемма 6.4. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — случайные величины на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall c > \sqrt{2}$ и для почти всех $\omega \in \Omega$ $\exists N_0(c\ \omega)$:*

$$|\xi_k| \leqslant c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}} \quad \forall k \geqslant N_0(c, \omega).$$

Доказательство. Поскольку $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то

$$\mathsf{P}\,(\xi \geqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ \ \forall x > 0.$$

Оценим этот интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty \frac{u}{u} e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ \leqslant \ \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty u e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \ = $$

$$= \ \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty -\,\mathrm{d}e^{\frac{-u^2}{2}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x} e^{\frac{-u^2}{2}}.$$

Тогда получаем, что

$$\mathsf{P}\,\big(|\xi| \geqslant x\big) \ \leqslant \ \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{-u^2}{2}}.$$

Воспользуемся леммой Бореля–Кантелли:

$$\sum_{k=2}^\infty \mathsf{P}\left(|\xi_k| \geqslant c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}}\right) \ \leqslant \ \sum_{k=2}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-c^2 \ln k}{2}} \ \leqslant \ \widetilde{c} \sum_{k=2}^\infty k^{\frac{-c^2}{2}} < \infty.$$

Поскольку ряд из вероятностей сошелся почти наверное, то событий происходит конечное число почти наверное. Из этого следует, что для каждого фиксированного ω можно выбрать k, после которого события выполняться перестают. Лемма доказана. □

6.4 Винеровские процессы

Определение 6.8. Процесс $W = \big\{W(t),\, t \geqslant 0\big\}$ называется *винеровским*, если

1. $W(0) = 0$ почти наверное;
2. W имеет независимые приращения;
3. $W(t) - W(s) \ \sim \ \mathcal{N}(0, t-s) \ \ \forall\, 0 \leqslant s < t$;
4. траектории W непрерывны почти наверное.

Теорема 6.5 (явная конструкция винеровского процесса)**.** *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Введем*

$$W(t, \omega) \ := \ \sum_{k=1}^\infty \xi_k(\omega) S_k(t), \ \ t \in [0, 1],$$

где $S_k(t)$ — функции Шаудера.

Доказательство. Доказательство будет дано позднее. □

Следствие (построение W на $[0,\,\infty)$)**.** *Для каждого* $j \in \mathbb{N}$ *берем* $\xi_1^j,\,\xi_2^j,\,\ldots$ *— независимые одинаково распределенные* $\mathcal{N}(0,\,1)$ *случайные величины. Определяем*

$$W^j(t,\,\omega) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j(\omega) S_k(t).$$

Дальше склеиваем эти процессы последовательно и непрерывно:

$$W(t) := W^j(t) + W(j-1), \;\; W(0) \equiv 0, \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Тогда W *— винеровский процесс.*

Доказательство. Доказательство будет дано позднее. □

Список литературы

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.
[3] Ширяев А. Н. Вероятность.
[4] Шашкин А. П. Слабая сходимость вероятностных мер. МГУ, 2013