

1 Обязательные задачи к лекциям

1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

Задача 1. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание в \mathbb{Z} , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.

Решение. Разобьем линию времени на промежутки длины $|a - b|$. Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение -1 (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для N промежутков получаем вероятность P^N ; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение -1 , равна

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N = 0.$$

Задача 2. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ и $S' = \{S'_n, n \geq 0\}$ — независимые простые случайные блуждания в \mathbb{Z}^d , имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n \geq 1}$ и $(X'_n)_{n \geq 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что

$$P(X_1 = e_k) = P(X_1 = -e_k) = P(X'_1 = e_k) = P(X'_1 = -e_k) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k — вектор в \mathbb{R}^d , у которого k -я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \dots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\},$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A . Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathbb{E}N < \infty$.

Решение. Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^k - S_m^{k'} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i(S_n^k - S_m^{k'})t_k}}{2\pi} dt_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt,$$

поскольку

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \mathbb{I}\{n = 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n - S'_m = 0\} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n - S'_m, t)} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^n(t) \varphi^m(-t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(X_1, t)}.$$

Получаем, что

$$\mathbb{E} N = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi^{n+m}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos t_k \sim \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{(1 - \varphi(t))^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель R в степени $d - 1$, то интеграл сходится $\Leftrightarrow d \geq 5$.

1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

Задача 3. Пусть в модели Гальтона–Ватсона $P(\xi = 0) = 1/4$, $P(\xi = 2) = 1/2$, $P(\xi = 6) = 1/4$. Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше $1/2$.

Решение. Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию $\psi_\xi(z) - z$. Заметим, что

$$(\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \quad (\psi_\xi(z) - z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку $\psi_\xi(z) - z$ — непрерывная функция, то уравнение $\psi_\xi(z) - z = 0$ будет иметь корень на интервале $(0, 1/2)$. Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше $1/2$.

Задача 4. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots таких, что $EX_1 = \mu \in (0, \infty)$ и $\text{var} X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Доказать, что

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Запишем

$$P \left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x \right) = P \left(Z(t) < x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu} \right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(Z(t) < n) = \mathbf{P}(S_n > t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z(t) < n(t)) &= \mathbf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathbf{P}(S_{n(t)} > t) = \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right). \end{aligned}$$

Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо $n(t)$ его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику дробной части):

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$

Поскольку нас интересует асимптотика при $t \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)),$$

где

$$A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Перепишем:

$$\mathbf{P}(P_{n(t)} > -xA(t)) = \mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$

Воспользуемся леммой Слущкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку

$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1).$$

Тогда получаем, что в каждой точке x непрерывности функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке x),

$$\mathbf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \rightarrow 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Итак, получили, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

Задача 5. Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

Решение. Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина ξ равновероятно (с вероятностью $1/3$) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n \sim \xi$ процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup \{n : \xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим $Z(2) - Z(1)$, $Z(1)$.

$$P(Z(2) - Z(1) = 0, Z(1) = 0) = 0,$$

поскольку $\xi_n \leq 2$. Вместе с этим

$$P(Z(2) - Z(1) = 0) \geq P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = \frac{1}{9}, \quad P(Z(1) = 0) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

Задача 6. Найти ковариационную функцию процесса $Z(t) = \{Z(t), t \geq 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ , случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N .

Решение. Сначала предположим, что $t > s$. Вычислим ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z(t), Z(s)) &= \text{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = \\ &= E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$E\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = 1, \quad (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$E\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - E\xi_0(-1)^{N(t)} E\xi_0(-1)^{N(s)} = E(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности λ является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Тогда получаем, что

$$E(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай $t \leq s$ рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$\text{cov}(Z(t), Z(s)) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

1.4 Задачи к лекции от 01.03.17

Задача 7. Пусть $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ — пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\lambda\mu(\cdot)$, где λ — положительная константа, а μ — мера Лебега в \mathbb{R}^d . Пусть $\{x_i\}$ — ансамбль случайных точек в \mathbb{R}^d , образующих этот процесс. Для $z \in \mathbb{R}^d$ введем случайную величину $Y(z) := \inf_{i \in \mathbb{N}} \|z - x_i\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d (иначе говоря, рассматривается расстояние от точки z до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найдите функцию распределения величины $Y(z)$ и ее математическое ожидание.

Решение. Заметим, что

$$\mathbf{P}(Y(z) \geq R) = \mathbf{P}(N(B_{z,R}) = 0),$$

где $B_{z,R}$ — шар с центром z и радиусом R . Известно, что мера Лебега, то есть объем, d -мерного шара, равен

$$\mu(B_{z,R}) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} R^d.$$

По определению пространственного пуассоновского процесса,

$$\mathbf{P}(N(B_{z,R}) = 0) = e^{-\lambda\mu(B_{z,R})};$$

таким образом,

$$F_{Y(z)}(R) = \mathbf{P}(Y(z) < R) = 1 - e^{-\lambda\mu(B_{z,R})} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leq 0. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание $Y(z)$. Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$p_{Y(z)}(R) = F'_{Y(z)}(R) = \begin{cases} \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} dR^{d-1} e^{-\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leq 0 \end{cases}$$

Вычислим интеграл. Для упрощения введем обозначение

$$Q := \lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y(z) &= \int_0^\infty Q dR^d e^{-QR^d} dR = - \int_0^\infty R e^{-QR^d} d(-QR^d) = - \int_0^\infty R d(e^{-QR^d}) = \\ &= \int_0^\infty e^{-QR^d} dR = \int_0^\infty e^{-Qu} d(\sqrt[d]{u}) = \frac{1}{d} \int_0^\infty u^{\frac{1}{d}-1} e^{-Qu} du = \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{d}-1} e^{-t} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{d} Q^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} \left(\lambda \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \right)^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{1}{d}\right).$$

Задача 8. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, то есть процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин X, X_1, X_2, \dots таких, что $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Положим $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите функционал Лапласа процесса $Y = \{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(S_n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Решение. Для начала возьмем простую функцию:

$$f(x) := c \mathbb{I}(0 \leq x \leq t).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c \mathbb{I}(S_n \leq t) = cN(t), \quad N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t).$$

Из этого получаем, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathbb{E} e^{-cN(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ck} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t(1-e^{-c})}.$$

Заметим, что

$$e^{-\lambda t(1-e^{-c})} = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Будем доказывать, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Рассмотрим теперь

$$f(x) := \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}(t_{i-1} \leq x < t_i), \quad c_i > 0, \quad 0 \leq t_0 < \dots < t_n.$$

Из независимости приращений пуассоновского процесса и из полученного выше значения функционала Лапласа на простой функции следует, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{-c_i \xi_i}, \quad \xi_i \sim \text{Pois}(\lambda(t_i - t_{i-1})),$$

то есть

$$\mathcal{L}(f) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda t(1-e^{-c_i})} = e^{-\lambda t \sum_{i=1}^n (1-e^{-c_i})}.$$

Снова отметим, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1-e^{-f(x)}) dx}.$$

Из курса действительного анализа известно, что любая неотрицательная измеримая функция приближается монотонно возрастающей последовательностью линейных комбинаций простых функций (этот факт также доказан в лекциях, см. Лемму 5.2). Возьмем такую последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $f_n \nearrow f$ почти наверное. Заметим, что интеграл в экспоненте, рассматриваемый как функция от аргумента $f(x)$, монотонно зависит от $f(x)$. Поскольку функционал Лапласа определен только для неотрицательных функций, то

$$e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f(S_p)}$$

по теореме о монотонной сходимости. Тогда

$$\mathcal{L}(f_n) = \mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} \searrow \mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f(S_p)} = \mathcal{L}(f).$$

Вместе с этим

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{p=1}^{\infty} f_n(S_p)} = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f_n(x)}) dx} \searrow e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx}$$

по теореме о монотонной сходимости. Получили, что

$$\mathcal{L}(f) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx}.$$

1.5 Задачи к лекции от 15.03.17

Задача 9. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, Y, Y_1, Y_2, \dots — независимые одинаково распределенные неотрицательные величины, причем семейства $\{N(t), t \geq 0\}$ и $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы. Определим процесс Крамера–Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент $t \geq 0$, формулой

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0,$$

где C_0 и c — положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ имеет независимые приращения.

Решение. Проверим независимость приращений. Для этого необходимо показать, что случайные величины

$$Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \dots, Z(t_n) - Z(t_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq t_0 < \dots < t_n,$$

независимы в совокупности. Для этого достаточно (поскольку борелевские функции от независимых случайных величин независимы) показать, что случайные величины

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{N(t_0)} Y_k, \quad \xi_2 = \sum_{k=N(t_0)+1}^{N(t_1)} Y_k, \quad \dots, \quad \xi_{n+1} = \sum_{k=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)} Y_k$$

независимы в совокупности. Известно (см., например, [2], страница 304), что для того чтобы компоненты случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) были независимы в совокупности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbb{E} e^{i(u_1 \xi_1 + \dots + u_n \xi_n)} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} e^{iu_k \xi_k}.$$

Проверим, что в данном случае это свойство выполнено. Составим вектор из этих случайных сумм и найдем его характеристическую функцию:

$$\varphi_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}}(u_1, \dots, u_{n+1}) = \mathbb{E} \exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right],$$

где $N(t_{-1}) \equiv 0$. Будем использовать аппарат условных математических ожиданий. Рассмотрим

$$\mathbb{E} \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] \middle| N(t_0) = v_1, \dots, N(t_n) = v_n \right),$$

где $v_0 = 0$. Из курса математической статистики известны следующие свойства условного математического ожидания: во-первых, если ξ и η — независимые случайные векторы, то

$$\mathbb{E} (f(\xi, \eta) | \eta = y) = \mathbb{E} f(\xi, y);$$

во-вторых,

$$\mathbb{E}(\xi | \eta) = \psi(\eta) \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi | \eta = y) = \psi(y);$$

в-третьих,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \eta)) = \mathbb{E}\xi.$$

Воспользуемся первым свойством с $\xi = (Y_1, \dots, Y_{n+1})$, $\eta = (N(t_0), \dots, N(t_{n+1}))$, а также независимостью в совокупности Y_k :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0) = v_1, \dots, N(t_n) = v_n \right) &= \\ &= \mathbb{E} \exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] = \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \exp \left[i u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] = \\ &= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} e^{i u_j Y_k} = \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} \mathbb{E} e^{i u_j Y_k} = \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (\varphi_Y(u_j))^{v_j - v_{j-1}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым свойством:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0), \dots, N(t_n) \right) &= \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (\varphi_Y(u_j))^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})}. \end{aligned}$$

По условию N — пуассоновский процесс, то есть

$$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad N(t_0), N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

независимы в совокупности и

$$\forall s \leq t \quad N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Воспользуемся тогда третьим свойством, а также тем, что N — пуассоновский процесс:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_k \right] &= \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=v_{j-1}+1}^{v_j} Y_k \right] \middle| N(t_0), \dots, N(t_n) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \prod_{j=1}^{n+1} \left(\varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})} = \prod_{j=1}^{n+1} \mathbb{E} \left(\varphi_Y(u_j) \right)^{N(t_{j-1}) - N(t_{j-2})} = \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} \left(\varphi_Y(u_j) \right)^k e^{-\lambda(t_{j-1} - t_{j-2})} \frac{(\lambda(t_{j-1} - t_{j-2}))^k}{k!} = \\
&= \prod_{j=1}^{n+1} e^{\lambda(t_{j-1} - t_{j-2})(\varphi_Y(u_j) - 1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что характеристическая функция вектора распадается в произведение одномерных функций, что и показывает независимость в совокупности исходных случайных величин.

Задача 10. Для пуассоновского процесса $N = \{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$ (вводимого как процесс с независимыми приращениями, $N(0) = 0$ почти наверное, $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$, $0 \leq s \leq t < \infty$) доказать, что не существует модификации, непрерывной почти наверное.

Решение. Предположим противное: пусть существует непрерывная почти наверное модификация пуассоновского процесса, то есть существует процесс $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ такой, что

$$\mathbb{P}(N(t) = Y(t)) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку счетное пересечение множеств полной меры есть множество полной меры по непрерывности вероятности, то

$$\mathbb{P}(N(t) = Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+) = 1.$$

Таким образом, можно считать, что почти наверное значения процессов совпадают на счетном всюду плотном множестве. Из непрерывности почти наверное модификации Y следует, что с вероятностью 1 траектории Y продолжаются единственным образом по непрерывности справа со значений на счетном всюду плотном множестве. На лекции утверждалось без доказательства, что у пуассоновского процесса есть непрерывная справа кусочно-постоянная модификация со скачками 1. Из этого следует искомое противоречие: по значениям на счетном всюду плотном непрерывная справа функция восстанавливается однозначно, но вместе с этим один из результатов этого продолжения разрывен почти наверное (из-за дискретности скачков), а другой — непрерывен почти наверное по предположению.

1.6 Задачи к лекции от 22.03.17

Задача 11. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ (как процесс восстановления). Доказать, что $\tau := \gamma S_1$, где константа $\gamma \in (0, 1)$, не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса N (S_1 — длина промежутка до первого скачка процесса N).

Решение. Пусть τ — марковский момент. Тогда τ — момент остановки, поскольку S_1 конечен с вероятностью 1. Тогда к τ применимо строго марковское свойство, из чего следует, что процесс $X_t = N_{t+\tau} - N_\tau$ — тоже пуассоновский процесс интенсивности λ , который при этом не зависит от τ . Заметим, однако, что $N_\tau = 0$ почти наверное, так как $\tau < S_1$. Значит,

$$N_{t+\tau} \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Но тогда из независимости $N_{t+\tau}$ и τ получаем искомое противоречие:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0) &= \mathbb{P}(N_{t+\tau} = 0 \mid \tau = x) = \mathbb{P}(N_{t+x} = 0 \mid \tau = x) = \\ &= \mathbb{P}(N_{t+x} = 0) = e^{-\lambda(t+x)}. \end{aligned}$$

Задача 12. Доказать, что для каждого $a > 0$ величина $\tau_a(\omega) := \inf \{t \geq 0 : W(t, \omega) = a\}$ является конечным почти наверное марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса $W = \{W(t), t \geq 0\}$.

Решение. Пусть $a > 0$. Тогда

$$\{\tau_a > t\} = \{\forall s \leq t \ W_s < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \forall s \leq t \ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\}.$$

Воспользуемся непрерывностью траекторий винеровского процесса и тем, что образ компакта (отрезка $[0, t]$) при непрерывном отображении компактен и, следовательно, замкнут:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \forall s \leq t \ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s \leq t}} \left\{ W_s \leq a - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F}_t^W.$$

Покажем теперь, что τ_a — момент остановки. Для этого воспользуемся законом повторного логарифма:

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right) = 1.$$

Это, в свою очередь, значит, что для почти каждой реализации винеровского процесса есть подпоследовательность W_{t_k} , которая растет как $\sqrt{2t \ln \ln t}$ и, соответственно, "перескочит" любое a за конечное время.

1.7 Задачи к лекции от 29.03.17

Задача 13. Доказать, что если $0 \leq a < b \leq c < d$, то с вероятностью единица

$$\sup_{t \in [a, b]} W(t) \neq \sup_{t \in [c, d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка $[u, v] \subset \mathbb{R}$ с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина $T^* = T^*(\omega)$ такая, что

$$\sup_{t \in [u, v]} W(t) = W(T^*).$$

Решение. Покажем, что $\forall 0 \leq a < b \leq c < d$

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in [a, b]} W_t = \max_{t \in [c, d]} W_t \right) = 0.$$

Введем процесс $X_t := W_{t+c} - W_c$. Тогда по марковскому свойству он будет винеровским процессом, независимым с \mathcal{F}_c^W . Перепишем:

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in [a, b]} W_t = \max_{t \in [c, d]} W_t \right) = \mathbb{P} \left(\max_{t \in [a, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0, d-c]} X_t \right).$$

Обозначим

$$\xi := \max_{t \in [a, b]} W_t - W_c.$$

Заметим, что $\xi - \mathcal{F}_c^W$ -измеримая случайная величина. Еще раз перепишем:

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in [a, b]} W_t - W_c = \max_{t \in [0, d-c]} X_t \right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \mid \xi = x \right) p_\xi(x) dx.$$

Из независимости получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \mid \xi = x \right) p_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \right) p_\xi(x) dx.$$

Вместе с этим

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in [0, d-c]} X_t = x \right) = \mathbb{P}(|W_{d-c}| = x) = 0,$$

то есть и интеграл также равен нулю, что и требовалось доказать.

Выведем отсюда корректность определения T^* . Пусть максимум $W(t)$ на отрезке $[u, v]$ достигается в двух различных точках $t_1 \neq t_2$. Введем счетное семейство отрезков

$$I_{n, k} := \left[u + \frac{k}{2^n}(v - u), u + \frac{k+1}{2^n}(v - u) \right],$$

где $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Введем события

$$A_{n, k_1, k_2} := \{t_1 \in I_{n, k_1}\} \cap \{t_2 \in I_{n, k_2}\} \cap \{k_1 \neq k_2\}.$$

Тогда по предыдущему

$$\mathbf{P}(A_{n, k_1, k_2}) = 0;$$

из-за счетности числа отрезков

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n, k_1, k_2} A_{n, k_1, k_2}\right) = 0.$$

Вместе с этим наше предположение о существовании двух таких точек является событием, вложенным в это объединение событий, то есть событием нулевой вероятности, что и требовалось доказать.

Задача 14. Пусть $T := \arg \max_{t \in [0, 1]} W(t)$, то есть $T(\omega)$ — та точка отрезка $[0, 1]$, в которой непрерывная траектория $W(t)$, $t \in [0, 1]$, достигает максимума (величина T определена с точностью до эквивалентности в силу предыдущей задачи). Доказать, что

$$\mathbf{P}(T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$M_t^W := \max_{s \in [0, t]} W(s).$$

Перепишем в терминах этого обозначения $\mathbf{P}(T \leq t)$:

$$\mathbf{P}(T \leq t) = \mathbf{P}\left(M_t^W \geq \max_{s \in [t, 1]} W(s)\right).$$

Вычтем из обеих частей второго неравенства $W(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(M_t^W \geq \max_{s \in [t, 1]} W(s)\right) &= \mathbf{P}\left(M_t^W - W(t) \geq \max_{s \in [t, 1]} (W(s) - W(t))\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(M_t^W - W(t) \geq \max_{s \in [0, 1-t]} X(s)\right) = \mathbf{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X\right), \end{aligned}$$

где $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, независимый с σ -алгеброй \mathcal{F}_t^W по марковскому свойству.

Дальнейший ход решения можно представить следующим образом:

1. сначала найдем совместное распределение случайных величин M_t^W и $W(t)$;
2. затем найдем распределение случайной величины $M_t^W - W(t)$;
3. затем интегрированием условного распределения найдем искомую вероятность.

Приступим к реализации этого плана.

Найдем совместное распределение: $\forall y \geq x, y \geq 0$

$$\mathbf{P}(W(t) < x, M_t^W < y) = \mathbf{P}(W(t) < x) - \mathbf{P}(W(t) < x, M_t^W \geq y) =$$

$$= \mathbf{P}(W(t) < x) - \mathbf{P}(W(t) \geq 2y - x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right)$$

по лемме 7.3 из лекций. Дальше для решения задачи достаточно значений этой функции распределения на $y \geq \max(0, x)$. Совместное распределение нашли.

Для того чтобы найти распределение $M_t^W - W(t)$, вычислим совместную плотность последовательным дифференцированием по x и y совместной функции распределения:

$$p(x, y) = \left(\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right) \right)''_{xy} = -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right),$$

где $p(x)$ — плотность случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Проинтегрируем:

$$\mathbf{P}(M_t^W - W(t) > u) = \iint_{\substack{y-x > u \\ y \geq 0}} p'(x, y) dx dy.$$

Этот интеграл удобно считать в виде суммы двух интегралов (читателю рекомендуется нарисовать картинку и заштриховать область интегрирования, чтобы в этом убедиться):

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{y-x > u \\ y \geq 0}} p'(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{-u} \left(\int_0^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx + \int_{-u}^{+\infty} \left(\int_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Вычислим эти интегралы по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-u} \left(\int_0^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx &= \int_{-\infty}^{-u} \left(\int_0^{+\infty} -\frac{2}{t} \frac{\sqrt{t}}{2} dp\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) \right) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{-u} p\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) d\left(\frac{-x}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-u}^{+\infty} \left(\int_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t} p'\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) dy \right) dx &= \int_{-u}^{+\infty} \left(\int_{x+u}^{+\infty} -\frac{2}{t} \frac{\sqrt{t}}{2} dp\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) \right) dx = \\ &= \int_{-u}^{+\infty} p\left(\frac{2u+x}{\sqrt{t}}\right) d\left(\frac{2u+x}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall u \geq 0$

$$\mathbf{P}(M_t^W - W(t) > u) = 2 - 2\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

Распределение $M_t^W - W(t)$ нашли.
Вычислим, наконец, искомую вероятность:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X\right) &= \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X \mid M_{1-t}^X = u\right) p_{M_{1-t}^X}(u) du = \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq u\right) p_{M_{1-t}^X}(u) du \end{aligned}$$

в силу независимости M_{1-t}^X и \mathcal{F}_t^W . Из теоремы 7.4 знаем, что

$$\mathbb{P}\left(M_{1-t}^X > v\right) = \mathbb{P}\left(|X(1-t)| > v\right),$$

то есть

$$p_{M_{1-t}^X}(u) = \frac{2}{\sqrt{1-t}} p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_t^W - W(t) \geq M_{1-t}^X\right) &= \int_0^{+\infty} \left(2 - 2\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right) \frac{2}{\sqrt{1-t}} p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right) du = \\ &= 2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right) d\frac{u}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

В явном виде этот интеграл считать оказалось проблематичным, так что будем делать следующее: возьмем производную по параметру и убедимся в том, что она совпадает с производной ответа. Сделаем замену $y = \frac{u}{\sqrt{1-t}}$:

$$2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) p\left(\frac{u}{\sqrt{1-t}}\right) d\frac{u}{\sqrt{1-t}} = 2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) dy;$$

тогда

$$\begin{aligned} \left(2 - 4 \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) dy\right)' &= \\ &= 2 \int_0^{+\infty} p\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) y \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} dy = \\ &= \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \int_0^{+\infty} p\left(\frac{y\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\right) p(y) dy^2 = \\ &= \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2(1-t)}{2t}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy^2 = \frac{1}{t\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}};$$

вместе с этим

$$\left(\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}\right)' = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}.$$

Значит, производные совпадают, а значит, совпадают и первообразные с точностью до константы. Но так как речь идет о вероятностях, то путем подстановки в равенство

$$P(T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} + C$$

$t = 1$ сразу получаем, что $C = 0$. Задача решена.

1.8 Задачи к лекции от 05.04.17

Задача 15. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти все действительные параметры α, β и γ , для которых процесс $Y = \{Y(t) := \exp\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\}, t \geq 0\}$ является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса W .

Решение. Запишем субмартингальное свойство: $\forall t \geq s$

$$\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) \geq Y_s,$$

где $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — естественная фильтрация процесса Y . Запишем в явном виде левую часть неравенства, воспользовавшись независимостью приращений винеровского процесса:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\alpha W(t) + \beta t + \gamma} | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{\alpha(W(t) - W(s) + W(s)) + \beta t + \gamma} | \mathcal{F}_s) = \\ &= e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \mathbb{E}e^{\alpha(W(t) - W(s))}. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ случайной величины ξ определяется как $\mathbb{E}e^{it\xi}$, то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \mathbb{E}e^{\alpha(W(t) - W(s))} = e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \varphi_{W(t) - W(s)}(-i\alpha).$$

Поскольку $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ и поскольку характеристическая функция случайной величины $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ равна

$$\varphi_\eta(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

то можно продолжить цепочку равенств:

$$e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma} \varphi_{W(t) - W(s)}(-i\alpha) = e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma + \frac{\alpha^2}{2}(t - s)}.$$

Таким образом, субмартингальное свойство заключается в том, что $\forall t \geq s$

$$e^{\alpha W(s) + \beta t + \gamma + \frac{\alpha^2}{2}(t - s)} \geq e^{\alpha W(s) + \beta s + \gamma},$$

то есть

$$e^{(\frac{\alpha^2}{2} + \beta)(t - s)} \geq 1,$$

или

$$\frac{\alpha^2}{2} + \beta \geq 0.$$

Задача 16. Привести пример мартингала $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и момента остановки τ (относительно естественной фильтрации процесса X), для которых $\mathbb{E}X_\tau \neq \mathbb{E}X_0$.

Решение. Возьмем простейшее симметричное случайное блуждание с началом в 0 в качестве X и $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$. Тогда τ — момент остановки, как показано в первой задаче к первой лекции, но

$$0 = \mathbb{E}X_0 \neq \mathbb{E}X_\tau = 1.$$

1.9 Задачи к лекции от 12.04.17

Задача 17. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — цепь Маркова. Будет ли $Y := \{X_{[t]}, t \geq 0\}$ марковской цепью относительно своей естественной фильтрации? Можно ли утверждать, что процесс $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ является марковским, если $Z(t)$ для $t \in [n, n+1]$ получается линейной интерполяцией значений X_n и X_{n+1} ?

Решение. Y будет марковской цепью: по определению $\forall 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t$ и \forall измеримой и ограниченной функции f

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(Y_t) | Y_{s_n}, \dots, Y_{s_1}) &= \mathbb{E}\left(f(Y_{[t]}) \mid Y_{[s_n]}, \dots, Y_{[s_1]}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(f(X_{[t]}) \mid X_{[s_n]}, \dots, X_{[s_1]}\right) = \mathbb{E}\left(f(X_{[t]}) \mid X_{[s_n]}\right) = \mathbb{E}(f(Y_t) | Y_{s_n}). \end{aligned}$$

Вместе с этим Z не обязательно является марковским процессом. Приведем контрпример: возьмем пуассоновский процесс в целых точках X (который будет марковской цепью) и получим по нему процесс Z , линейно интерполируя его значения. Тогда, например,

$$\mathbb{P}(Z_{1.5} = 1.5, Z_1 = 0) > 0,$$

но вместе с этим

$$\mathbb{P}(Z_2 = 2 | Z_{1.5} = 1.5) \neq 0 = \mathbb{P}(Z_2 = 2 | Z_{1.5} = 1.5, Z_1 = 0).$$

Задача 18. Доказать, что процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ является пуассоновским процессом интенсивности λ (то есть N — процесс с независимыми приращениями такой, что $N(0) = 0$ почти наверное и $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)) \forall 0 \leq s \leq t < \infty$) тогда и только тогда, когда N — марковская цепь со значениями в пространстве \mathbb{Z}_+ и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для $0 \leq s \leq t < \infty, i, j \in \mathbb{Z}_+$, определяются формулой

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t-s))^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leq j; \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Решение. См. [1], стр. 191.

1.10 Задачи к лекции от 19.04.17

Задача 19. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний S . Для $i \in S$ положим

$$c_i := \gcd \{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\},$$

где \gcd означает наибольший общий делитель. Состояние i называется периодическим с периодом d ($d > 1$), когда $c_i = d$. Если $c_i = 1$, то i — непериодическое состояние.

Доказать, что если цепь X неразложима (то есть для любых $i, j \in S$ ($i \neq j$) найдутся $k, m \in \mathbb{N}$ такие, что $p_{ij}(k) > 0$ и $p_{ji}(m) > 0$), то все состояния одновременно непериодические или периодические, причем в последнем случае все периоды совпадают. Доказать, что если цепь X неразложима и непериодична, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $p_{ij}(n) > 0$ при всех i, j и $n \geq m$.

Решение. См. [2], стр. 536.

Задача 20. Пусть матрица $Q = (q_{ij})$, где $i, j \in \{0, \dots, n\}$, имеет вид $q_{i,i+1} = \lambda$ при $i = 0, \dots, n-1$, $q_{i,i-1} = i\mu$ при $i = 1, \dots, n$, $q_{ii} = -\lambda - i\mu$ при $i = 0, \dots, n-1$, $q_{nn} = -n\mu$, а остальные q_{ij} равны нулю (λ и μ — положительные параметры). Объяснить, почему существует однородная марковская цепь с пространством состояний $S = \{0, \dots, n\}$ и инфинитезимальной матрицей Q . Доказать, что имеется единственное стационарное распределение. Найти это распределение (предварительно показать, что для стандартной марковской цепи с конечным числом состояний при $t \geq 0$ справедливы обе системы уравнений Колмогорова: $P'(t) = QP(t)$ и $P'(t) = P(t)Q$, где $P(t) = (p_{ij}(t))$ и Q — инфинитезимальная матрица; вывести отсюда, что $pQ = 0$, где вектор-строка p задает стационарное распределение).

Решение. См. [1], стр. 208.

1.11 Задачи к лекции от 26.04.17

Задача 21. (Модель Эренфестов) Пусть имеются две урны, содержащие в начальный момент времени соответственно k_1 и k_2 шаров, причем $k_1 + k_2 = k$. В каждый момент времени n ($n \in \mathbb{N}$) с вероятностью $1/k$ выбирается любой из этих k шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть X_n обозначает число шаров в первой урне в момент времени n . Доказать, что X_0, X_1, \dots образуют однородную цепь Маркова с пространством состояний $\{0, 1, \dots, k\}$. Проверить, что эта цепь обратима. Найти ее стационарное распределение.

Решение. Этот процесс является марковским, так как

$$P(X_n = x \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

по построению. Этот процесс также однороден, так как переходные вероятности за единицу времени не зависят от времени, в которое они рассматриваются.

Проверим обратимость этой цепи. Для этого найдем вектор, задающий обратимое распределение. Сначала выпишем матрицу переходных вероятностей за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{k-1}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} & 0 & \frac{k-2}{k} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть это матрица с нулевыми элементами везде, кроме двух побочных диагоналей, причем $P_{i, i+1} = \frac{k-i}{k}$ и $P_{i+1, i} = \frac{i}{k}$.

Напомним, что вектор π задает обратимое распределение, если $\forall i, j$

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}.$$

В случае нашей матрицы P это условие превращается в систему линейных уравнений

$$\pi_{i+1} = \frac{k-i}{i+1} \pi_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Поскольку π по определению обязан задавать распределение вероятностей, то $\pi_0 + \dots + \pi_{k+1} = 1$. Поэтому, решая однородную систему линейных уравнений, получаем, что

$$\pi_i = \frac{C_k^i}{2^k}.$$

Обратимый вектор нашли.

Напомним, что вектор π задает стационарное распределение, если $\forall j$

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j.$$

Проверим это для найденного выше вектора π : так как он обратим, то

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j,$$

то есть найденный выше вектор π задает стационарное распределение.

Задача 22. Построить пример необратимой марковской цепи $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с конечным пространством состояний.

Решение. Рассмотрим марковскую цепь $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие на обратимый вектор

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

превратится в систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \pi_1 p_{12} = \pi_2 p_{21} \\ \pi_2 p_{23} = \pi_3 p_{32} \\ \pi_3 p_{31} = \pi_1 p_{13} \end{cases},$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_1 = 0 \end{cases},$$

то есть имеет только тождественно нулевое решение, которое не может задавать вероятностного распределения.

1.12 Задачи к лекции от 03.05.17

Задача 23. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — гауссовский процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что почти наверное его траектории непрерывны на \mathbb{R}_+ и $X(0) = 0$ почти наверное. Доказать, что найдутся винеровский процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$, константы $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ такие, что $X(t) = at + bW(t)$ почти наверное для всех $t \geq 0$.

Решение. Сначала докажем, что для такого процесса X $\mathbb{E}X(t) = t\mathbb{E}X(1)$ и $\mathbb{D}X(t) = t\mathbb{D}X(1)$. Действительно, пусть сначала $t \in \mathbb{Z}_+$. Тогда из-за стационарности и независимости приращений

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X(t) &= \mathbb{E}\left((X(1) - X(0)) + (X(2) - X(1)) + \dots + (X(t) - X(t-1))\right) = \\ &= t\mathbb{E}X(1)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbb{D}X(t) &= \mathbb{D}\left((X(1) - X(0)) + (X(2) - X(1)) + \dots + (X(t) - X(t-1))\right) = \\ &= t\mathbb{D}X(1).\end{aligned}$$

Пусть теперь $t \in \mathbb{Q}_+$, то есть $t = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда, поскольку

$$\mathbb{E}X(1) = \mathbb{E}\left(\left(X\left(\frac{1}{q}\right) - X\left(\frac{0}{q}\right)\right) + \dots + X\left(\frac{q}{q}\right) - X\left(\frac{q-1}{q}\right)\right) = q\mathbb{E}\left(X\left(\frac{1}{q}\right)\right),$$

то

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\mathbb{E}X(1) = t\mathbb{E}X(1)$$

(с дисперсиями аналогично). Пусть, наконец, $t \in \mathbb{R}$. Возьмем последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \in \mathbb{Q}_+$ такую, что $t_n \rightarrow t$. Тогда из непрерывности почти наверное траекторий имеем, что $X(t_n) \rightarrow X(t)$ почти наверное. Из сходимости почти наверное следует сходимость по распределению, которая эквивалентна сходимости характеристических функций. Поскольку процесс гауссовский, то это значит, что

$$\exp\left(iu\mathbb{E}X(t_n) - \frac{u^2\mathbb{D}X(t_n)}{2}\right) \rightarrow \exp\left(iu\mathbb{E}X(t) - \frac{u^2\mathbb{D}X(t)}{2}\right).$$

При этом

$$\exp\left(iu\mathbb{E}X(t_n) - \frac{u^2\mathbb{D}X(t_n)}{2}\right) = \exp\left(iu t_n \mathbb{E}X(1) - \frac{u^2 t_n \mathbb{D}X(1)}{2}\right)$$

и

$$\exp\left(iu t_n \mathbb{E}X(1) - \frac{u^2 t_n \mathbb{D}X(1)}{2}\right) \rightarrow \exp\left(iu t \mathbb{E}X(1) - \frac{u^2 t \mathbb{D}X(1)}{2}\right)$$

из-за непрерывности экспоненты, из чего и заключаем, что $\mathbf{E}X(t) = t\mathbf{E}X(1)$ и $\mathbf{D}X(t) = t\mathbf{D}X(1) \forall t \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим теперь процесс

$$Y(t) := \mathbf{E}X(1)t + \sqrt{\mathbf{D}X(1)}W(t).$$

Очевидно, он гауссовский. При этом

$$\mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}X(1)t = \mathbf{E}X(t)$$

и

$$\text{cov}(Y(t), Y(s)) = \mathbf{D}X(1)\mathbf{E}W(t)W(s) = \mathbf{D}X(1) \min(t, s);$$

при этом

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \mathbf{D}X(1) (\min(t, s)),$$

то есть

$$\text{cov}(Y(t), Y(s)) = \text{cov}(X(t), X(s)).$$

Поскольку гауссовский процесс однозначно задается своими функцией среднего и ковариационной функцией, то верно равенство (почти наверное)

$$Y(t) = X(t),$$

что и требовалось доказать.

Задача 24. Выяснить, являются ли ковариационными функциями некоторых процессов следующие функции:

1. $r(s, t) = 2 \cos(s - t) \exp\{-\alpha|s - t|\}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$;
2. $r(s, t) = (1 - (s - t)^2) \mathbb{I}\{|s - t| \leq 1\}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$;
3. $r(s, t) = \exp\left\{ia(s - t) - \frac{(s - t)^2 \sigma^2}{2}\right\} + C$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$,
 $C \in \{-1, 1\}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Решение. Известно, что если функция симметрична (кососимметрична в комплексном случае) и неотрицательно определена, то она является ковариационной функцией некоторого процесса. По теоремам Герглота и Бохнера–Хинчина характеристические функции случайных величин неотрицательно определены. Также верно, что суммы и произведения неотрицательно определенных функций неотрицательно определены.

Сразу отметим, что все данные функции симметричны (когда нужно, кососимметричны).

1. Функция 2 является неотрицательно определенной; функция $\cos(s - t)$ является неотрицательно определенной, так как функция $\cos(t)$ является характеристической функцией случайной величины, принимающей равновероятно значения 1 и -1 ; функция $\exp\{-\alpha|s - t|\}$ является неотрицательно определенной, так как функция $\exp\{-\alpha|t|\}$ является характеристической функцией случайной величины, распределенной по закону Коши. Таким образом, данная функция является неотрицательно определенной

2. Предположим, что данная функция неотрицательно определена. Тогда

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} G(dx),$$

или

$$\frac{r(t)}{G(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{G(dx)}{G(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} P_{\xi}(dx),$$

где ξ — некоторая случайная величина; таким образом, функция $\frac{r(t)}{G(\mathbb{R})}$ является характеристической функцией ξ . Известно, что если φ — характеристическая функция некоторой случайной величины η и $E|\eta|^k < \infty$, то $\exists \varphi^{(k)}(t) \forall t$; также известно, что если $\exists \varphi^{(2m)}(0)$, то $E\xi^{2m} < \infty$. Поэтому из существования второй производной в нуле должно следовать существование первой производной в произвольной точке t , что нарушается для данной функции в точках $t = 1, t = -1$. Таким образом, данная функция не является неотрицательно определенной.

3. Если $C = 1$, то данная функция является неотрицательно определенной, так как она является суммой характеристической функции нормальной случайной величины и положительной константы. Пусть теперь $C = -1$. Предположим, что

$$r(t) = \exp \left\{ iat - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\} - 1$$

является ковариационной функцией некоторого процесса X , то есть

$$r(t) = \text{cov}(X(t), X(0)).$$

Заметим, что $r(0) = 0$. Тогда

$$|r(t)| = |\text{cov}(X(t), X(0))| \leq \sqrt{DX(t)DX(0)} = 0,$$

то есть функция получилась тождественно равной нулю, что противоречит условию. Таким образом, данная функция не является неотрицательно определенной.

1.13 Задачи к лекции от 10.05.17

Задача 25. Пусть $X = \left\{ X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}) \right\}, t \geq 0$, где $W(\cdot)$ — винеровский процесс и параметр $\alpha > 0$. Является ли процесс X стационарным в узком и/или широком смысле?

Решение. Заметим, что процесс X является гауссовским, причем

$$EX(t) = 0$$

и

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = e^{-\alpha(t+s)} \min(e^{2\alpha t}, e^{2\alpha s}) = e^{-\alpha|t-s|},$$

то есть процесс стационарен в широком смысле. Поскольку для гауссовских процессов понятия стационарности в широком и в узких смыслах совпадают, то X стационарен и в узком смысле тоже.

Задача 26. Доказать, что для центрированной стационарной в широком смысле последовательности $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ выполнен закон больших чисел в смысле сходимости в среднем квадратическом, а именно,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(0), \quad N \rightarrow \infty,$$

где $Z(\cdot)$ — спектральная мера упомянутой последовательности.

Решение. См. [1], стр. 241.

1.14 Задачи к лекции от 17.05.17

Задача 27. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,N_n} = T$, где $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $\lambda \in [0, 1]$ и выберем промежуточные точки $\tau_{n,k} := (1 - \lambda)t_{n,k-1} + \lambda t_{n,k}$, $k = 1, \dots, N_n$. Предположим, что $\max_{1 \leq k \leq N_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Найти предел в среднем квадратическом при $n \rightarrow \infty$ интегральных сумм вида

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})),$$

где W — винеровский процесс.

Решение. Заметим сначала, что

$$\sum_{k=1}^n (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} T;$$

действительно,

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{E} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 = T,$$

при этом в силу независимости приращений

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 &= \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{D} (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{N_n} (3(t_k - t_{k-1})^2 - (t_k - t_{k-1})^2) = \sum_{k=1}^{N_n} 2(t_k - t_{k-1})^2 \leq \\ &\leq 2T \max_{1 \leq k \leq N_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

по условию; из этого и следует утверждение.

Также заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) + W(t_{n,k-1})) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) = W(t_{n,N_n}) = W(T).$$

Запишем теперь, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})). \end{aligned}$$

Разберемся с этими слагаемыми по отдельности: сначала распишем

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) &= \\
&= \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) + W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) = \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2$$

и

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2 = \sum_{k=1}^{N_n} (t_{n,k} - \tau_{n,k}) = (1 - \lambda)T,$$

причем

$$\mathbb{D} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2 \rightarrow 0$$

(объяснение идейно то же, что и раньше). Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k}))^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} (1 - \lambda)T.$$

Теперь второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) &= \\
&= \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) + W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})).
\end{aligned}$$

Снова заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) = \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n}))^2$$

и (аналогично) что

$$\sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) - W(t_{k-1,n}))^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} \lambda T.$$

Осталось заметить еще, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_n} (W(t_{n,k}) + W(\tau_{n,k})) (W(t_{n,k}) - W(\tau_{n,k})) + \\ + \sum_{k=1}^{N_n} (W(\tau_{n,k}) + W(t_{k-1,n})) (W(\tau_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) = W(T)^2. \end{aligned}$$

Складываем все, что было вычислено и получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k}) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{W(T)^2 + \lambda T - (1 - \lambda)T}{2}.$$

Задача 28. С помощью формулы Ито найти

$$\int_{[0, T]} W(t) dW(t),$$

где W — винеровский процесс.

Решение. Обозначим

$$Y(T) := \int_{[0, T]} W(t) dW(t).$$

Предположим, что

$$Y(t) = H(t, W(t)),$$

где $H(t, x)$ — гладкая функция двух переменных. Тогда по формуле Ито

$$dY(t) = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} d(W(t))^2 = W(t) dW(t).$$

Из соотношения

$$d(W(t))^2 = dt$$

получаем, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dt = W(t) dW(t),$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = x \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

из чего получаем, что

$$H(t, x) = \frac{x^2 - t}{2} + C,$$

где C — некоторая константа. Заметим, что из начальных условий $H(0, 0) = 0$. Поэтому $C = 0$ и

$$Y(T) = \int_{[0, T]} W(t) dW(t) = \frac{W(T)^2 - T}{2}.$$

Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Ширяев А. Н. Вероятность.