1 Обязательные задачи к лекциям

1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

Задача 1. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ — простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}$, имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.*

Решение. Разобьем линию времени на промежутки длины $|a-b|$. Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение -1 (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для N промежутков получаем вероятность P^N; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение -1, равна

$$\lim_{N\to\infty} P^N = 0.$$

Задача 2. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ и $S' = \{S'_n,\, n \geqslant 0\}$ — независимые простые случайные блуждания в $\mathbb{Z}^d$, имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n\geqslant 1}$ и $\left(X'_n\right)_{n\geqslant 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что*

$$\mathsf{P}\left(X_1 = e_k\right) = \mathsf{P}\left(X_1 = -e_k\right) = \mathsf{P}\left(X'_1 = e_k\right) = \mathsf{P}\left(X'_1 = -e_k\right) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k — вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого k-я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \ldots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\},$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A. Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathsf{E}N < \infty$.

Решение. Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\left\{S_n^k - S_m^{k\prime} = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{i\left(S_n^k - S_m^{k\prime}\right)t_k}}{2\pi}\, dt_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\, dt,$$

поскольку

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi}\,dx \;=\; \mathbb{I}\left\{n=0\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\,dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^n(t)\varphi^m(-t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\,dt,\end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{i(X_1,t)}.$$

Получаем, что

$$\mathsf{E}N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\,dt \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{\bigl(1-\varphi(t)\bigr)^2}\,dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1-\varphi(t) = 1 - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos t_k \sim \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d} t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{\bigl(1-\varphi(t)\bigr)^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель R в степени $d-1$, то интеграл сходится $\Leftrightarrow d \geqslant 5$.

1.2 Задачи к лекции от 15.02.17

Задача 3. *Пусть в модели Гальтона–Ватсона* $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi = 2) = 1/2$, $\mathsf{P}(\xi = 6) = 1/4$. *Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше* $1/2$.

Решение. Выпишем производящую функцию данного процесса:

$$\psi_\xi(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^6.$$

Будем рассматривать функцию $\psi_\xi(z) - z$. Заметим, что

$$\left(\psi_\xi(z) - z\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \ \ \left(\psi_\xi(z) - z\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{31}{256}.$$

Поскольку $\psi_\xi(z) - z$ — непрерывная функция, то уравнение $\psi_\xi(z) - z = 0$ будет иметь корень на интервале $(0,\, 1/2)$. Поскольку вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона — это наименьший корень этого уравнения, эта вероятность будет меньше $1/2$.

Задача 4. *Пусть* $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ — *процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин* $X_1, X_2, \ldots$ *таких, что* $\mathsf{E}X_1 = \mu \in (0, \infty)$ *и* $var X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. *Доказать, что*

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{law} N(0,\, 1), \ t \to \infty.$$

Решение. Введем следующее обозначение:

$$P_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

где

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n.$$

Тогда по ЦПТ

$$P_n \xrightarrow{\text{law}} N(0,\, 1).$$

Запишем

$$\mathsf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) = \mathsf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right).$$

Введем обозначение

$$n(t) := \left\lceil x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right\rceil,$$

где

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ [x] + 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что
$$\mathsf{P}\left(Z(t) < n\right) = \mathsf{P}\left(S_n > t\right) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$
Тогда продолжим цепочку равенств:
$$\mathsf{P}\left(Z(t) < n(t)\right) = \mathsf{P}\left(Z(t) < x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}\right) = \mathsf{P}\left(S_{n(t)} > t\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\frac{S_{n(t)} - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right).$$
Ищем асимптотику правой части неравенства. Подставляем вместо $n(t)$ его значение (с точностью до не влияющей на асимптотику целой части):
$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{t - n(t)\mu}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right).$$
Поскольку нас интересует асимптотика при $t \to \infty$, получаем, что
$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > \frac{-x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}} + \frac{t}{\mu}}}\right) = \mathsf{P}\left(P_{n(t)} > -xA(t)\right),$$
где
$$A(t) \to 1, \ \ t \to \infty.$$
Перепишем:
$$\mathsf{P}\left(P_{n(t)} > -xA(t)\right) = \mathsf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right).$$
Воспользуемся леммой Слуцкого и теоремой о наследовании сходимости: поскольку
$$P_{n(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\, 1), \ \ A(t) \to 1, \ \ t \to \infty,$$
то
$$\frac{P_{n(t)}}{A(t)} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\, 1).$$
Тогда получаем, что в каждой точке x непрерывности функции распределения $\Phi(x)$ случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (то есть в каждой точке x),
$$\mathsf{P}\left(\frac{P_{n(t)}}{A(t)} > -x\right) \to 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$
Итак, получили, что
$$\mathsf{P}\left(\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) \to \Phi(x),$$

что и означает, что

$$\frac{Z(t) - \frac{1}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \xrightarrow{\text{law}} N(0,\, 1),\ t \to \infty.$$

1.3 Задачи к лекции от 22.02.17

Задача 5. *Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?*

Решение. Вообще говоря, это неверно. Приведем контрпример. Пусть случайная величина ξ равновероятно (с вероятностью $1/3$) принимает значения 0, 1 и 2. Построим на последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n \sim \xi$ процесс восстановления:

$$Z(t) := \sup\left\{n : \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant t\right\}.$$

Покажем, что его приращения не являются независимыми: рассмотрим $Z(2) - Z(1)$, $Z(1)$.

$$\mathsf{P}\left(Z(2) - Z(1) = 0,\, Z(1) = 0\right) = 0,$$

поскольку $\xi_n \leqslant 2$. Вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(Z(2) - Z(1) = 0\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\xi_1 = 1,\, \xi_2 = 2\right) = \frac{1}{9},\ \ \mathsf{P}\left(Z(1) = 0\right) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, показано, что приращения не являются независимыми.

Задача 6. *Найти ковариационную функцию процесса $Z(t) = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N.*

Решение. Сначала предположим, что $t > s$. Вычислим ковариационную функцию:

$$cov\left(Z(t),\, Z(s)\right) = cov\left(\xi_0(-1)^{N(t)},\, \xi_0(-1)^{N(s)}\right) = \\ = \mathsf{E}\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(t)}\,\mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(s)}.$$

Поскольку

$$\mathsf{E}\xi_0 = 0,\ \xi_0^2 = 1,\ (-1)^{N(t)+N(s)} = (-1)^{N(t)-N(s)},$$

то

$$\mathsf{E}\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)} - \mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(t)}\,\mathsf{E}\xi_0(-1)^{N(s)} = \mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)}.$$

Известно, что пуассоновский процесс интенсивности λ является процессом с независимыми приращениями, причем эти приращения распределены по следующему закону:

$$N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda(t-s)\right).$$

Тогда получаем, что

$$\mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

Случай $t \leqslant s$ рассматривается аналогично. Таким образом, итоговый ответ:

$$cov\left(Z(t),\, Z(s)\right) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

1.4 Задачи к лекции от 01.03.17

Задача 7. *Пусть* $N = \big\{N(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big\}$ *— пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности* $\lambda\mu(\cdot)$, *где* λ *— положительная константа, а* μ *— мера Лебега в* $\mathbb{R}^d$. *Пусть* $\{x_i\}$ *— ансамбль случайных точек в* $\mathbb{R}^d$, *образующих этот процесс. Для* $z \in \mathbb{R}^d$ *введем случайную величину* $Y(z) := \inf_{i\in\mathbb{N}} \|z - x_i\|$, *где* $\|\cdot\|$ *— евклидова норма в* $\mathbb{R}^d$ *(иначе говоря, рассматривается расстояние от точки* z *до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найти функцию распределения величины* $Y(z)$ *и ее математическое ожидание.*

Решение. Заметим, что

$$\mathsf{P}\big(Y(z) \geqslant R\big) = \mathsf{P}\big(N(\mathrm{B}_{z,\,R}) = 0\big),$$

где $\mathrm{B}_{z,\,R}$ — шар с центром z и радиусом R. Известно, что мера Лебега, то есть объем, d–мерного шара, равен

$$\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^d.$$

По определению пространственного пуассоновского процесса,

$$\mathsf{P}\big(N(\mathrm{B}_{z,\,R}) = 0\big) = e^{-\lambda\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right)};$$

таким образом,

$$F_{Y(z)}(R) = \mathsf{P}\big(Y(z) < R\big) = 1 - e^{-\lambda\mu\left(\mathrm{B}_{z,\,R}\right)} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leqslant 0. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание $Y(z)$. Плотность распределения равна производной от функции распределения:

$$p_{Y(z)}(R) = F'_{Y(z)}(R) = \begin{cases} \lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} dR^{d-1}\, e^{-\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^d}, & R > 0 \\ 0, & R \leqslant 0 \end{cases}$$

Вычислим интеграл. Для упрощения введем обозначение

$$Q := \lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Тогда

$$\mathsf{E}Y(z) = \int\limits_0^\infty QdR^d e^{-QR^d}\,\mathrm{d}R = -\int\limits_0^\infty Re^{-QR^d}\,\mathrm{d}(-QR^d) = -\int\limits_0^\infty R\,\mathrm{d}(e^{-QR^d}) =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-QR^d}\,\mathrm{d}R = \int\limits_0^\infty e^{-Qu}\,\mathrm{d}(\sqrt[d]{u}) = \frac{1}{d}\int\limits_0^\infty u^{\frac{1}{d}-1}e^{-Qu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{d}Q^{-\frac{1}{d}}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{d}-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{d}Q^{-\frac{1}{d}}\Gamma\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}\left(\lambda\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)^{-\frac{1}{d}}\Gamma\left(\frac{1}{d}\right).$$

Задача 8. *Пусть* $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ *— пуассоновский процесс интенсивности* $\lambda > 0$*, то есть процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин* $X,\, X_1,\, X_2,\, \ldots$ *таких, что* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$*. Положим* $S_n := X_1 + \ldots + X_n,\ n \in \mathbb{N}$*. Найти функционал Лапласа процесса* $Y = \left\{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B\,(S_n)\,,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$.

Решение.

1.5 Задачи к лекции от 15.03.17

Задача 9. *Пусть* $N = \big\{N(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *— пуассоновский процесс интенсивности* $\lambda > 0$, $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ *— независимые одинаково распределенные неотрицательные величины, причем семейства* $\big\{N(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *и* $\{Y_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *независимы. Определим процесс Крамера–Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент* $t \geqslant 0$*, формулой*

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_j, \quad t \geqslant 0,$$

где C_0 *и* c *— положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс* $Z = \big\{Z(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *имеет независимые приращения.*

Решение.

Задача 10. *Для пуассоновского процесса* $N = \big\{N(t),\, t \geqslant 0\big\}$ *интенсивности* $\lambda > 0$ *(вводимого как процесс с независимыми приращениями,* $N(0) = 0$ *почти наверное,* $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poiss}\big(\lambda(t-s)\big)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$*) доказать, что не существует модификации, непрерывной почти наверное.*

Решение.