Содержание

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Тогда $(V, \mathscr{A})$ называется *измеримым пространством.*

Определение 1.2. Пусть есть $(V, \mathscr{A})$ и $(S, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства, $f\colon V \to S$ — отображение. f называется *$\mathscr{A}|\mathscr{B}$-измеримым*, если $\forall B \in \mathscr{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. *Обозначение*: $f \in \mathscr{A}|\mathscr{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — отображение. Если $Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$, то Y называется *случайным элементом.*

Определение 1.4. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y,* — это функция на множествах из $\mathscr{B}$, задаваемая равенством

$$\mathsf{P}_Y(B) := \mathsf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством,* — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где

$$X(t) : \Omega \to S_t,\ X(t) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t\ \ \forall\, t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле.*

Определение 1.6. Случайные элементы $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \in B_k)$ $\forall\, B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n$.

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). *Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q}_t)_{t\in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ существует семейство* независимых *случайных элементов X_t: $\Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ таких, что $\mathsf{P}_{X_t} = \mathsf{Q}_t$, $t \in T$.*

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениеми. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q})_{t\in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности $\forall$ конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. *Случайным блужданием в* $\mathbb{R}^d$ называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) такой, что

$$S_0 := x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(начальная точка);}$$
$$S_n := x + X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение 1.8. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ — это такое случайное блуждание, что

$$\mathsf{P}(X = e_k) = \mathsf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0),\ k = 1, \ldots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leqslant \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathsf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0$ $\forall\, n \in N$) называется *моментом первого возвращения в 0.*

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathsf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. *Для* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N = n) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n+1, \tau = k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S'_m = 0\right\} = n\right) \mathsf{P}(\tau = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N' = n) \, \mathsf{P}(\tau = k),$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независиые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \mathsf{P}(N = n) \, \mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) + \mathsf{P}(N = n+1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n+1 \geqslant 2$. Из этого следует, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n) \, \mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(\tau = \infty) \, \mathsf{P}(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $\mathsf{P}(N = \infty)$ *равно 0 или 1.* $\mathsf{P}(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$\mathsf{P}(N < \infty) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = \infty) \, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)} =$
$= \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{\mathsf{P}(\tau=\infty)} = 1.$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}\big((\tau = \infty) = 0\big) \Rightarrow \mathsf{P}(N = n) = 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{P}(N < \infty) = 0.$

Следствие доказано. □

Теорема 1.3. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ *возвратно* $\Leftrightarrow \mathsf{E}N = \infty$ *(соответственно, невозвратно* $\Leftrightarrow \mathsf{E}N < \infty$*).*

Доказательство. Если $\mathsf{E}N < \infty$, то $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\mathsf{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathsf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathsf{P}(\tau = \infty) \, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} =$$
$$= \mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathsf{P}(\tau=\infty)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau<\infty)^{n-1}=\frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{(1-\mathsf{P}(\tau<\infty))^2}=\frac{1}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Замечание. Заметим, что поскольку $N=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{I}\{S_n=0\}$, то

$$\mathsf{E}N=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{E}\mathbb{I}\{S_n=0\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(S_n=0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}(S_n=0)=\infty.$$

Следствие. *S возвратно при $d=1$ и $d=2$.*

Доказательство. $\mathsf{P}(S_{2n}=0)=(\frac{1}{2d})^{2n}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d\geqslant 0\\ n_1+\ldots+n_d=n}}\frac{(2n)!}{(n_1!)^2\ldots(n_d!)^2}$.

Случай $d=1$: $\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n}$.

Согласно формуле Стирлинга,

$$m!\sim\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m},\quad m\to\infty.$$

Соответственно,

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=\infty\Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается *случай $d=2$*:

$$\mathsf{P}(S_{2n}=0)=\ldots=\left\{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}^2\sim\frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$ ряд тоже разойдется $\Rightarrow$ блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. □

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. *Для простого случайного блуждания в $\mathbb{Z}^d$*

$$\mathsf{E}N=\lim_{c\uparrow 1}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-c\varphi(t)}\,\mathrm{d}t,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X, $t\in\mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi}\, \mathrm{d}t_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\, \mathrm{d}t.$$

По теореме Фубини

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{E}\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i(S_n,t)}\, \mathrm{d}t.$$

Заметим, что

$$\mathsf{E}e^{i(S_n,t)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \big(\varphi\,(t)\big)^n\, \mathrm{d}t.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n\, \mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n\, \mathrm{d}t, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leqslant c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)}\, \mathrm{d}t$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n\, \mathsf{P}(S_n = 0) \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0) = \mathsf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие. *При $d \geqslant 3$ простое случайное блуждание невозвратно.*

Доказательство. Запишем характеристическую функцию X в явном виде:

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{i(t,X)} = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{1}{2d} e^{it_k} + \frac{1}{2d} e^{-it_k} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathsf{E}N = \lim_{c\uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \ldots + \cos(t_d))}\, dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности $t = 0$. Введем обозначения

$$B_\delta := (-\delta,\, \delta)^d, \;\; V_\delta := [-\pi,\, \pi]^d \setminus B_\delta.$$

Ясно, что

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \int\limits_{V_\delta} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \ldots + \cos(t_d))}\, dt < \infty.$$

Поэтому для того чтобы понять, сходится интеграл или нет, достаточно смотреть на интеграл по замыканию малой окрестности нуля B_δ. Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \ldots + \cos(t_k))} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{t_1^2} + \ldots + 1 - \frac{1}{t_d^2})} \sim \frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c \uparrow 1, \;\; t \to 0.$$

Поскольку якобиан перехода к d–мерной сферической системе координат содержит множитель R в степени $d - 1$, то интеграл сойдется $\Leftrightarrow$ $d \geqslant 3$. Теорема доказана. □

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(S_{2n} = 0\right) &= \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d=n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \ldots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d=n}} \left(\frac{n!}{n_1! \ldots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leqslant \\
&\leqslant \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{\Big((n/d)!\Big)^d} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d=n}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_d!} = \Theta\left(n^{-d/2}\right)
\end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geqslant 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). □

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в $\mathbb{R}^d$, если $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε-окрестность точки x.

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \Big\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{ блуждание возвратно в } \varepsilon\text{–окрестности точки } x \Big\}$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *точки, достижимые случайным блужданием* S, — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall\, z \in P(S) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n\colon \;\; \mathsf{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса)**.** *Если* $R(S) \neq \varnothing$, *то* $R(S) = P(S)$.

Следствие. *Если* $0 \in R(S)$, *то* $R(S) = P(S)$; *если* $0 \notin R(S)$, *то* $R(S) = \varnothing$.

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathsf{P}(\xi = m) = p_m \geqslant 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$\begin{aligned} Z_0(\omega) &:= 1, \\ Z_n(\omega) &:= \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega \colon \exists n = n(\omega),\ Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции.* Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leqslant 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathsf{P}(Y = k)$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\, \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E} s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. *Вероятность* $\mathsf{P}(A)$ *является корнем уравнения* $\psi(p) = p$, *где* $\psi = f_\xi$ *и* $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$f_{Z_n}(s) = \mathsf{E}s^{Z_n} = \mathsf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}\xi_{n,k}}\right) = \\
= \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\}\right] = \\
= \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\}\right].$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k},\ m=1,\ldots,r,\ k\in\mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k},\ k\in\mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}$, $i=1,\ldots,n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\}\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathsf{E}\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\} = \\
= \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathsf{P}(Z_{n-1}=j) = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\mathsf{E}s^{\xi_{n,k}}\,\mathsf{P}(Z_{n-1}=j) = \\
= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_\xi^j(s)\,\mathsf{P}(Z_{n-1}=j) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big)$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big), \quad s\in[0,1].$$

Подставим $s=0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(0)\big)$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}\Big(\psi_\xi\big(\psi_\xi(s)\big)\Big) = \ldots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi\ldots(\psi_\xi}_{n\ \text{итераций}}(s))\ldots) = \\
= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s=0$ имеем, что

$$\mathsf{P}(Z_n=0) = \psi_\xi\big(\mathsf{P}(Z_{n-1}=0)\big).$$

Но $\mathsf{P}(Z_n=0)\nearrow\mathsf{P}(A)$ при $n\to\infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0,1]$. Переходим к пределу при $n\to\infty$. Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \psi_\xi(\mathsf{P}(A)),$$

то есть $\mathsf{P}(A)$ — корень уравнения $p=\psi_\xi(p)$, $p\in[0,1]$. $\square$

Теорема 2.2. *Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть* ***наименьший*** *корень уравнения*

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0,1], \tag{1}$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geqslant 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geqslant 1$ при $\forall\, n$, то есть $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists\, m \in \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0,1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = \big[\psi_n(0),\ \psi_{n+1}(0)\big),\ n = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n. Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0,1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s \ > \ \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) \ = \ \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) \ = \ 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \big[0,\ \mathsf{P}(A)\big), \ \ \psi_n(0) \nearrow \mathsf{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathsf{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.3. *1. Вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.*

2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $\mathsf{E}\xi \leqslant 1$ имеем $\mathsf{P}(A) = 1$, при $\mathsf{E}\xi > 1$ имеем $\mathsf{P}(A) < 1$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathsf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. Знаем, что

$$\psi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \ \ \psi_\xi(1) = 1, \ \ \exists \psi'_\xi(s),\ s \in (0,\ 1).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\forall s \in (0,\ 1) \ \ \psi_\xi(1) - \psi_\xi(s) = \psi'_\xi(\theta)(1 - s),\ \theta \in (s,\ 1).$$

Формулой Лагранжа можно пользоваться, поскольку $\psi_\xi(s)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$ и дифференцируема на интервале $(0,\ 1)$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s \ = \ 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) \ = \ (1 - s)\Big(1 - \psi'_\xi(\theta)\Big).$$

Знаем, что при $s \in (0,\,1)$

$$\psi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k, \;\; \psi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k.$$

Заметим, что если $\exists p_k > 0,\ k \geqslant 2$, то $\psi''_\xi(s) > 0,\ s \in (0,\,1)$, а значит, $\psi'_\xi(s)$ строго возрастает на $s \in (0,\,1)$. Будем сначала рассматривать этот случай.

(a) Пусть $\mathsf{E}\xi = \psi'_\xi(1) \leqslant 1$. Из этого следует, что $\psi'_\xi(\theta) < 1$. Тогда получаем, что

$$\psi_\xi(s) - s \;=\; 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1-s) \;=\; (1-s)\Big(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\Big) > 0 \;\;\forall s \in (0,\,1),$$

причем $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Из этого следует, что наименьшим корнем уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ будет $s = 1$.

(b) Пусть $\mathsf{E}\xi = \psi'_\xi(1) > 1$. Тогда для всех s, достаточно близких к 1,

$$\psi'_\xi(\theta) > 1,\;\theta \in (s,\,1),$$

в силу непрерывности производящей функции на отрезке $[0,\,1]$. Тогда

$$\psi_\xi(s) - s \;=\; 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1-s) \;=\; (1-s)\Big(1 - \psi'_\xi\,(\theta)\Big) < 0,$$

при этом $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$ по условию. Это значит, что на интервале $(0,\,1)$ найдется корень уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ в силу непрерывности производящей функции.

(c) Рассмотрим теперь случай $p_k = 0\ \forall k \geqslant 2$. В рамках этого предположения

$$\psi_\xi(s) = p_0 + (1-p_0)s,$$

а значит,

$$\psi_\xi(s) - s = p_0 + (1-p_0)s - s = p_0(1-s) > 0 \;\;\forall s < 1.$$

Из этого следует, что у уравнения $\psi_\xi(s) - s = 0$ наименьший корень на отрезке $[0,\,1]$ — это $s = 1$. Теорема доказана.

□

Следствие. *Пусть* $\mathsf{E}\xi < \infty$. *Тогда* $\mathsf{E}Z_n = (\mathsf{E}\xi)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathsf{E}Z_1 = \mathsf{E}\xi$.

Индуктивный переход:

$$\mathsf{E}Z_n = \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,\mathsf{E}\xi\,\mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathsf{E}\xi\,\mathsf{E}Z_{n-1} = (\mathsf{E}\xi)^n\,.$$

□

Определение 2.2.

При $\mathsf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим.*

При $\mathsf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим.*

При $\mathsf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим.*

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Положим

$$
\begin{aligned}
&Z(0) := 0;\\
&Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} :\ S_n \leqslant t\}, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

(здесь считаем, что $\sup \varnothing := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \left\{n \in \mathbb{N} :\ S_n(\omega) \leqslant t\right\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления.*

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leqslant t\},\ t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^\star(t),\, t \geqslant 0\}$, который строится по $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$\mathsf{P}(Y = \alpha) = p \in (0, 1);\ \ \mathsf{P}(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = const$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty\ \ \forall\, t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left[\frac{t}{c}\right]$.

Лемма 2.4.

$$\mathsf{P}(Z^\star(t) = m) = \begin{cases} C_m^j\, p^{j+1} q^{m-j},\ \text{где } j = \left[\frac{t}{\alpha}\right] & ,\ \text{если } m \geqslant j;\\ 0 & ,\ \text{если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если $\mathsf{P}(U = k) = (1 - p)^k p,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. *Рассмотрим независимые геометрические величины* $U_0, \ldots, U_{j+m}$ *с параметром* $p \in (0, 1)$. *Тогда* $\forall t \geqslant \alpha$ *и* $m \geqslant j$

$$\mathsf{P}(j + U_0 + \ldots + U_j = m) = \mathsf{P}(Z^\star(t) = m).$$

3 Лекция от 22.02.17
Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}(U_0 + \ldots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0,\ldots,\,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} \mathsf{P}(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} \mathsf{P}(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,\,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} \mathsf{P}(U_0 = k_0) \ldots \mathsf{P}(U_j = k_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} p(1-p)^{k_0} \ldots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} p^{j+1}(1-p)^{k_0+\ldots+k_j} =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \geqslant 0 \\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} p^{j+1}(1-p)^{m-j} = p^{j+1}(1-p)^{m-j} \# M,$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j, удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\# M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\# M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j. Таким образом,

$$\# M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathsf{P}(U_0 + \ldots + U_j = m - j) = C_m^j \, p^{j+1}(1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. □

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. *Пусть $t > \alpha$. Тогда*

$$\mathsf{E} Z^\star(t) \leqslant At, \quad \mathsf{E}(Z^\star(t))^2 \leqslant Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$\mathsf{E} Z^\star(t) = \mathsf{E}(j + U_0 + \ldots + U_j) = j + (j+1)\mathsf{E} U,$$

где
$$\mathsf{E}U=\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^k p \;=\; a(p)<\infty.$$
Следовательно,
$$j+(j+1)\mathsf{E}U=j+(j+1)a(p)\leqslant(j+1)\big(a(p)+1\big)\leqslant\frac{2t}{\alpha}\big(a(p)+1\big)=At,$$
поскольку $j=\left[\frac{t}{\alpha}\right]\leqslant\frac{t}{\alpha}$, а $t>\alpha$; здесь $A=\frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2$.
$$\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2=\mathsf{D}Z^\star(t)+\left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2=(j+1)\mathsf{D}U+\left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2.$$
Обозначим через $\sigma^2(p):=\mathsf{D}U$. Используя оценку выше для $\mathsf{E}Z^\star(t)$, получаем, что
$$(j+1)\mathsf{D}U+\left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2\leqslant(j+1)^2\left(\sigma^2(p)+\big(a(p)+1\big)^2\right)\leqslant Bt^2,$$
так как $(j+1)^2\geqslant(j+1)$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Пусть случайная величина $X\geqslant 0$, X отлична от константы. Тогда
$$\exists\alpha>0:\mathsf{P}(X>\alpha)=p\in(0,1).$$
Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^\star=\left\{Z^\star(t),\ t\geqslant 0\right\}$: пусть
$$Y_n=\begin{cases}\alpha, & X_n>\alpha\\ 0, & X_n\leqslant\alpha\end{cases}.$$
По построению $Y_n\leqslant X_n\ \Rightarrow\ Z(t)\leqslant Z^\star(t)\ \ \forall t\geqslant 0$. Тогда $\forall\alpha>t$
$$\mathsf{E}Z(t)\leqslant\mathsf{E}Z^\star(t)<\infty,\ \mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2\leqslant\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2\Rightarrow Z(t)<\infty$$
почти наверное.

Следствие. $\mathsf{P}\left(\forall t\geqslant 0\ \ Z(t)<\infty\right)=1.$

Доказательство. Z является неубываюшим процессом:
$$s\leqslant t\to Z(s)\leqslant Z(t)\Rightarrow\mathsf{P}\left(Z(n)<\infty\ \forall n\in\mathbb{N}\right)=\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n)<\infty\}\right).$$
Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то
$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n)<\infty\}\right)=1,$$
что и завершает доказательство. $\square$

Следствие. $\mathsf{E}Z(t)\leqslant At$; $\mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2<Bt^2,\ t>\alpha.$

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины,* $X \geqslant 0$. *Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \mu \in [0, \infty],\ n \to \infty,$$

где $\mu = \mathsf{E}X$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ.
Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leqslant c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \ \geqslant\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \ =\ \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \ \geqslant\ \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\} = \mathsf{E}X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Теорема 3.3. *Пусть* $Z = \{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ — *процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин* $X, X_1, X_2, \ldots,\ X \geqslant 0$. *Тогда*

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{п.н.} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty;$$

$$\frac{\mathsf{E}Z(t)}{t} \xrightarrow{п.н.} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty,$$

где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = \infty\ \ \forall t$).
Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leqslant t < S_{Z(t)+1}. \tag{2}$$

Поскольку $Z(t_n,\ \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \to \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим $(t,\ \omega)$ такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих $(t,\ \omega)$ поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leqslant \frac{t}{Z(t)} \leqslant \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1}\frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\quad t \to \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\quad t \to \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.
Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathsf{E}\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}\xi,\ t \to \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \to \alpha} \mathsf{E}\left(|\xi_t|\, \mathbb{I}\left\{|\xi_t| > c\right\}\right) \to 0,\quad c \to \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. *Если $\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathsf{E}\xi_t \to \mathsf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.*

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена)**.** *$\{\xi_t,\ t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow$ $\exists$ неубывающая функция g такая, что*

$$\frac{g(t)}{t} \to \infty,\quad t \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathsf{E}g\left(|\xi_t|\right) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathsf{E}\left(\xi_t\right)^2 = \frac{\mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2}{t^2} \leqslant \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. □

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda),\ \lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0 &, x < 0 \end{cases}.$$

Тогда *пуассоновский процесс интенсивности* λ $N = \big\{N(t),\ t \geqslant 0\big\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$X_1^t := S_{N(t)+1} - t,$$
$$X_k^t := X_{N(t)+k},\ k \geqslant 2.$$

Лемма 3.6. *Для* $\forall t > 0$ *величины* $N(t),\ X_1^t,\ X_2^t, \ldots$ *независимы, причем*

$$N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t),\ X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall u_1, \ldots, u_k \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u, \ldots,\ X_k^t \geqslant u_k\right) = \\ = \mathsf{P}\left(N(t) = n\right) \mathsf{P}(X_1^t \geqslant u_1) \ldots \mathsf{P}(X_k^t \geqslant u_k).$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k.
Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t,\ S_{N(t)+1} - t \geqslant u_1\Big) = \\ = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big),$$

поскольку

$$\{S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t\} = \big\{N(t) = n\big\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} &, x \geqslant 0 \\ 0 &, x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_n + X_{n+1} \geqslant t + u_1\Big) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1}} p_{S_n}(x)p_{X_n+1}(y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1\\ y\geqslant 0}} \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\lambda y e^{-\lambda y}\,dx\,dy$$

в силу независимости S_n и X_{n+1}. Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1\\ y\geqslant 0}} \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\lambda y e^{-\lambda y}\,dx\,dy \;=\; \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\,dx \int\limits_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}e^{-\lambda(t+u_1-x)}\,dx \;=\; e^{-\lambda(t+u_1)}\int\limits_0^t \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx =$$

$$= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda u_1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t\geqslant u_1\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda u_1}. \tag{3}$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1=0$ и получим, что

$$\mathsf{P}\left(N(t)=n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t)\sim \mathrm{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n\in\mathbb{Z}_+$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t\geqslant u_1\right) = \mathsf{P}\left(X_1^t\geqslant u_1\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda u_1} \;=$$

$$=\; e^{-\lambda u_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \;=\; e^{-\lambda u_1},$$

то есть

$$X_1^t\sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k\geqslant 2$:

$$\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t\geqslant u,\ldots,\ X_k^t\geqslant u_k\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\underbrace{S_n\leqslant t,\ S_{n+1}>t,\ S_{n+1}-t\geqslant u_1}_{\text{зависят от } X_1,\ldots,X_{n+1}},\ \underbrace{X_{n+2}\geqslant u_2,\ldots,\ X_{n+k}\geqslant u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2},\ldots}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(N(t)=n\right) \underbrace{\mathsf{P}\left(X_1 \geqslant u_1\right)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \mathsf{P}\left(N(t)=n\right) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. □

Замечание (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени S_n, то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени X_i, а мы пришли на остановку в момент времени t и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

4 Лекция от 01.03.17

Точечные процессы

4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

Определение 4.1. Процесс $\{Y(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет *независимые приращения*, если

$$\forall\, 0 \leqslant t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0), Y(t_1) - Y(t_0), \ldots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Теорема 4.1. *Пуассоновский процесс интенсивности λ имеет независимые приращения.*

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции по n. Введем процесс

$$N^t(s) := \sup\left\{ n : \sum_{k=1}^{n} X_k^t \leqslant s \right\}, \;\; s \geqslant 0.$$

Из доказанного ранее следует, что $\left\{N^t(s),\, s \geqslant 0\right\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Заметим, что по определению

$$N^t(s) \in \sigma\left\{X_1^t,\, X_2^t,\, \ldots\right\},$$

из чего следует, что $N(t)$ независима с $N^t(s)\ \forall\, s$. Но

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t),$$

а значит, для $n=1$ утверждение доказано: $t_0 = t$, $t_1 = t+s$. Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем t_0 и рассмотрим $N^{t_0}(s)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N^{t_0}\left(t_k - t_0\right) - N^{t_0}\left(t_{k-1} - t_0\right) &= \\ = N\left(t_k - t_0 + t_0\right) - N(t_0) - \big(N\left(t_{k-1} - t_0 + t_0\right) - N\left(t_0\right)\big) &= \\ = N(t_k) - N(t_{k-1})&. \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0},\, N(t_1) - N(t_0),\, \ldots\,,\, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0},\, N^{t_0}(s_1),\, \ldots\,,\, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где $s_k = t_k - t_0$, $k = 1, \ldots, n$. Но поскольку мы знаем, что N_{t_0} независима с $N^t(s)\ \forall\, s$, мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1),\, \ldots\,,\, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности λ $N^t(s)$. Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана. $\square$

4.2 Пространственный пуассоновский процесс

Определение 4.2. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty\ \forall q.$$

Тогда процесс $N = \big\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\big\}$ называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности* μ, если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \mathrm{Poiss}\left(\mu\left(B\right)\right),\ B \in \mathscr{B};$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} &\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall\, B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B} \text{ таких, что } B_iB_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \\ &\mu(B_i) < \infty\ \forall i = 1, \ldots, n, \text{ выполнено, что } N(B_1), \ldots, N(B_n) \text{ независимы.} \end{aligned}$$

Замечание. В определении выше сознательно не отбрасывались случаи $\mu(B) = 0$ и $\mu(B) = \infty$. Положим по определению, что если $\xi \sim \mathrm{Poiss(a)}$, то

$$\begin{aligned} a = 0 \quad &\Rightarrow \quad \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty \quad &\Rightarrow \quad \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{P}(\xi = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Определение 4.3. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — σ-конечная мера на нем. Пусть $\mu(S) < \infty$. Введем независимые случайные величины $Y, X_1, X_2, \ldots$ такие, что

$$Y : \Omega \to \mathbb{Z}_+, \quad Y \sim \mathrm{Poiss}\left(\mu\left(S\right)\right),$$
$$X_i : \Omega \to S, \quad X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}, \quad \mathsf{P}\left(X_1 \in B\right) = \frac{\mu\left(B\right)}{\mu\left(S\right)}.$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N\left(B\right) = \sum_{n=1}^{Y} \mathbb{I}_B\left(X_n\right), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Более подробно,

$$N\left(B, \omega\right) = \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B\left(X_n(\omega)\right), \quad B \in \mathscr{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

Замечание. $\sum\limits_{1}^{0} := 0.$

Теорема 4.2. *В терминах определения 4.3* $\left\{N\left(B\right), B \in \mathscr{B}\right\}$ *есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности* μ.

Доказательство. Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}, \ \text{ что } \ B_i \cap B_j = \emptyset, \ \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что

$$\mu\left(B_i\right) < \mu\left(S\right) < \infty.$$

Убедимся, что $\forall m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(N\left(B_1\right) = m_1, \ldots, N\left(B_n\right) = m_n\right) &= \\ = \mathsf{P}\left(N\left(B_1\right) = m_1\right), \ldots, \mathsf{P}\left(N\left(B_n\right) = m_n\right) &= \\ = \frac{\mu\left(B_1\right)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \ldots \frac{\mu\left(B_n\right)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}.\end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left(N\left(B_1\right) = m_1, \ldots, N\left(B_n\right) = m_n)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(N\left(B_1\right) = m_1, \ldots, N\left(B_n\right) = m_n, Y = k\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}\left(X_i\right) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}\left(X_i\right) = m_n\right) \mathsf{P}\left(Y = k\right)\end{aligned}$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$m := m_1 + \ldots + m_n;$$

$$m_0 := k - m;$$
$$B_0 := S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right).$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы") X_i, $i = 1, \ldots, k$, которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках") B_j, $j = 0, \ldots, n$; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно m_j частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что Y — пуассоновская случайная величина:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n \right) \mathsf{P}(Y = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n \right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} =$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \ldots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)} \right)^{m_0} \ldots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)} \right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} =$$
$$= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}.$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества B_j попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} =$$
$$= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{\mu(B_0)} =$$
$$= \frac{\mu\left(B_1\right)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \ldots \frac{\mu\left(B_n\right)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)},$$

потому что
$$e^{-\mu(S)} e^{\mu(B_0)} = e^{-\left(\mu(B_1) + \ldots + \mu(B_n)\right)}.$$

Теорема доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_k \sim \mathrm{Poiss}(\lambda k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right),$$

где ряд может расходиться.

Доказательство. Если некоторое $\lambda_k = \infty$, то $\xi_k = \infty$, как и вся левая часть. Далее все $\lambda_k < \infty$.

1. Пусть
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$
Имеем
$$\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$
по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что ξ_k неотрицательны). Из этого следует, что
$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \xi < \infty$$
почти наверное. Заметим, что
$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\text{d}} \xi.$$
Тогда
$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k\left(e^{iu}-1\right)} =$$
$$= \exp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(e^{iu} - 1\right) \to \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(e^{iu} - 1\right),\ n \to \infty.$$
Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что
$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \mathrm{Poiss}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right).$$

2. Пусть теперь
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$
Находим последовательность r_j со свойством
$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \geqslant 1,$$
которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение
$$\eta_j := \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \xi_k;$$

Тогда $\eta_1, \eta_2, \ldots$ независимы, к тому же

$$\eta_j \sim \text{Poiss}\left(\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(\eta_j \geqslant 1\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\eta_j = 0\right) \geqslant 1 - e^{-1} > 0.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_j \geqslant 1) = \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$$

почти наверное. Лемма доказана.

□

Определение 4.4. Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, а μ — — σ-конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \ \forall q.$$

Пусть теперь $\mu(S) = \infty$. Для каждого S_q вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):

$$Y_q : \Omega \to \mathbb{Z}_+, \ \ Y_q \sim \text{Poiss}\left(\mu\left(S_q\right)\right),$$
$$X_{q_i} : \Omega \to S_q, \ \ X \in \mathscr{F}|\mathscr{B} \cap S_q, \ \ \mathsf{P}\left(X_{q_i} \in C\right) = \frac{\mu\left(C\right)}{\mu\left(S_q\right)},$$

где

$$C \in \mathscr{B} \cap S_q \in \mathscr{B}.$$

Строим процесс

$$N_q(C) := \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C\left(X_{q,n}\right).$$

Положим

$$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q\left(B \cap S_q\right), \ \ B \in \mathscr{B}.$$

Заметим, что все члены ряда независимы, а также что

$$N_q\left(B \cap S_q\right) \sim \text{Poiss}\left(\mu(B \cap S_q)\right).$$

Тогда по лемме 4.3

$$N(B) \sim \text{Poiss}\left(\sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q)\right) = \text{Poiss}\left(\mu\left(B\right)\right).$$

4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

Определение 4.5. Процесс $\{X(B),\, B \in \mathscr{B}\}$ называется *(простым) точечным процессом*, если

$$X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n),\ B \in \mathscr{B},$$

где

$$Z_n : \Omega \to S,\ Z_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}.$$

Определение 4.6. Пусть $\mu(S) = \infty$, μ — σ–конечная мера на $(S, \mathscr{B})$, а также

$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_{B \cap S_q} \left(X_{q,n}\right).$$

Пусть

$$V_0 := 0,\ \ V_k := \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

Введем $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$. Пусть для $\omega \in \Omega$

$$V_{k-1}(\omega) \leqslant n < V_k(\omega).$$

Определим

$$Z_n(\omega) := X_{k, n - V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$

Тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n).$$

Определение 4.7. Пусть $f : S \to \mathbb{R}_+,\ f \in \mathscr{B}|\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда *функционал Лапласа* $\mathscr{L}(f)$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(f) := \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$

где $e^{-\infty} := 0$.

4.4 Маркирование пуассоновских процессов

Определение 4.8. Рассмотрим $T, T_1, T_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ независима с $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. На следующей лекции будет показано, что процесс, заданный элементами

$$Z_n := (S_n, T_n)_{n \geqslant 1},$$

является пространственным пуассоновским процессом с мерой

$$\lambda \nu \otimes \mathsf{G},$$

где ν — мера Лебега на $B(\mathbb{R}_+)$, G — мера, задаваемая распределением T.

Замечание. Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть S_n — время начала работы с клиентом, T_n — время работы с клиентом, Y_t — число клиентов, обслуживание которых происходит в момент t. Такая модель называется моделью $M|G|\infty$: M указывает на то, что процесс пуассоновский, G (general) указывает на то, что распределение времени обслуживания клиента произвольно, а ∞ означает, что имеется бесконечное число приборов (в том смысле, что не создается очередей: работа с клиентом начинается в момент его прихода). Тогда

$$Y_t = \#\left\{n : S_n \leqslant t < S_n + T_n\right\} = \#\left\{n : (S_n,\, T_n) \in B_t\right\} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n,\, T_n) \sim \operatorname{Poiss}\big((\lambda\nu \otimes \mathsf{G})\,(B_t)\big)\,,$$

где

$$B_t := \left\{(x,\, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant t < x + y\right\},$$

а точка $(x,\, y)$ задается парой $(S_n,\, T_n)$. Вычислим:

$$(\lambda\nu \otimes \mathsf{G})\,(B_t) = \iint\limits_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{I}_{B_t}(x,\, y)\,\lambda\nu(dx)\mathsf{G}(dy) =$$

$$= \int\limits_0^t \mathsf{G}(dy) \int\limits_{t-y}^t \lambda\,dx + \int\limits_t^\infty \mathsf{G}(dy) \int\limits_0^t \lambda\,dx = \int\limits_0^t \lambda y\,\mathsf{G}(dy) + \int\limits_t^\infty \lambda t\,\mathsf{G}(dy) = \\ = \lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\,\mathsf{G}(dy).$$

Итак,

$$Y_t \sim \operatorname{Poiss}\left(\lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\,\mathsf{G}(dy)\right) \quad \forall t > 0.$$

Если $\mathsf{E}T < \infty$, то

$$\operatorname{Poiss}\left(\lambda \int\limits_0^\infty \min(t, y)\,\mathsf{G}(dy)\right) \ \to\ \operatorname{Poiss}(\lambda\mathsf{E}T), \quad t \to \infty.$$

5 Лекция от 15.03.17

Процессы с независимыми приращениями

5.1 Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)

Напоминание. Пусть $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S,\, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Z_n : \Omega \to S,\ Z_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$. Пусть также есть точечный процесс

$$N(B,\, \omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n(\omega)),\ B \in \mathscr{B}$$

согласно определению 4.5. Введем для него функционал Лапласа согласно определению 4.7 по следующей формуле:

$$\mathscr{L}(f) := \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} < \infty,$$

где $f : S \to \mathbb{R}_+$, $f \in \mathscr{B}|\mathcal{B}_+$, $e^{-\infty} := 0$, $\mathcal{B}_+$ — борелевская σ–алгебра на $\mathbb{R}_+$.

Теорема 5.1. $N = \{N(B),\, B \in \mathscr{B}\}$ *является пространственным пуассоновским процессом с σ–конечной мерой интенсивности μ* $\Leftrightarrow$

$$\mathscr{L}(f) = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx)\right].$$

Доказательство. Сначала докажем **необходимость** ($\Rightarrow$). Возьмем простую функцию f. Пусть $N = \{N(B),\, B \in \mathscr{B}\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой μ. Сначала положим

$$f(x) := \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k(x)}, \quad a_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

где

$$B_i \cap B_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j; \quad B_i \in \mathscr{B},\; i = 1, \ldots, m; \quad \mu(B_i) < \infty,\; i = 1, \ldots, m.$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)},$$

где перестановка знаков суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Заметим, что если $\xi \sim \mathrm{Poiss}(a)$, то

$$\mathsf{E} e^{-v\xi} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr}\, \mathsf{P}(\xi = r) = e^{a(e^{-v}-1)}.$$

Воспользуемся также независимостью в совокупности $N(B_k)$ в силу того, что множества B_i попарно не пересекаются. Тогда получим, что

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)} = \prod_{k=1}^{m} \mathsf{E} e^{-a_k N(B_k)} = \prod_{k=1}^{m} e^{\mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} =$$
$$= e^{\sum\limits_{k=1}^{m} \mu(B_k)\left(e^{-a_k}-1\right)} = e^{\int\limits_S (e^{-f(x)}-1)\,\mu(dx)}.$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 5.2. *Пусть $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство с σ–конечной мерой μ, $f : S \to \mathbb{R}_+$ — измеримая функция на нем. Тогда существует последовательность $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ простых функций вида* (4) *таких, что*

$$f_j \nearrow f \text{ на } S \text{ при } j \to \infty.$$

Доказательство. Как и на прошлой лекции, разобьем S на множества $S_q,\ \mu(S_q) < \infty$, что возможно ввиду σ–конечности меры μ. Определим

$$f_{q,\,j}(x) = \mathbb{I}_{S_q}(x)\left(\sum_{r=0}^{2^{2j}-1} r2^{-j}\,\mathbb{I}\left\{r2^{-j} \leqslant f(x) < (r+1)2^{-j}\right\} + 2^j\,\mathbb{I}\left\{f(x) \geqslant 2^j\right\}\right).$$

Тогда несложно проверить, что

$$0 \leqslant f_{q,\,j} \leqslant f_{q,\,j+1}, \quad 0 \leqslant f_j = \sum_{q=1}^{j} f_{q,\,j} \nearrow f \text{ на } S.$$

□

Замечание. Про это (с несколько другим построением простых функций) также можно почитать в [3] (страница 189).

Лемма 5.3. *Пусть* $0 \leqslant a_{n,\,j} \nearrow a_n$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad j \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$
Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists N : \forall m > N$
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n < \frac{\epsilon}{3}.$$
Из монотонной сходимости и предельного перехода в неравенстве получаем, что
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n,\,j} < \frac{\epsilon}{3} \ \ \forall j.$$
Зафиксируем N. Из сходимости следует, что
$$\forall n \ \ \exists N(n) \ : \ \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,\,m(n)} - a_n| < \frac{\epsilon}{3N}.$$
Возьмем
$$M := \max_{n=1,\ldots,N} N(n).$$
Тогда для любого $j > M$
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{n,\,j}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{n,\,j}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \left|a_n - a_{n,\,j}\right| + \frac{2\epsilon}{3} \ \leqslant \ N\frac{\epsilon}{3N} + \frac{2\epsilon}{3} \ = \ \epsilon.$$

Таким образом, показано, что $\forall \epsilon \, \exists M : \forall j > M$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \right| \leqslant \epsilon,$$

то есть показана требуемая сходимость.

2. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Тогда $\forall C > 0 \; \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=1}^{m} a_n > 2C.$$

Снова зафиксируем N. Из сходимости следует, что

$$\forall n \;\; \exists N(n) \; : \; \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,\,m(n)} - a_n| < \frac{C}{N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1,\dots,N} N(n).$$

Тогда для любого $j > M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\,j} \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_{n,\,j} \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} |a_n - a_{n,\,j}| \;\geqslant\; 2C - N\frac{C}{N} \;=\; C,$$

чем снова показана требуемая сходимость. Лемма доказана.

□

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем $0 \leqslant f_j \nearrow f$ по лемме 5.2. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n) \;\to\; \sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n), \;\; j \to \infty,$$

по лемме 5.3. Тогда

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n)} \to \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)}$$

по теореме Лебега. Итак,

$$\mathscr{L}(f) = \lim_{j\to\infty} \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f_j(x)} - 1\right) \mu(dx)\right] = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx)\right],$$

поскольку

$$\int\limits_S \left(e^{-f_j(x)} - 1\right) \mu(dx) \to \int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right) \mu(dx), \;\; j \to \infty,$$

ввиду неотрицательности подынтегрального выражения.
Перейдем к доказательству **достаточности** ($\Leftarrow$). Пусть

$$\mathscr{L}(f) = \exp\left[\int\limits_S \left(e^{-f(x)} - 1\right)\,\mu(dx)\right].$$

Возьмем

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j.$$

Тогда

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)}.$$

Если $f = \mathbb{I}_B$, то

$$\mathsf{E} e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k N(B_k)} = \mathsf{E} e^{-aN(B)} = e^{\mu(B)\left(e^{-a}-1\right)},$$

из чего следует, что $\left\{N(B),\, B \in \mathscr{B}\right\}$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ в силу непрерывного соответствия между преобразованием Лапласа и функциями распределения. Теорема доказана. $\square$

Приведем доказательство утверждения, которое было дано без доказательства в конце прошлой лекции.

Теорема 5.4. *Пусть $(S_n,\, T_n)_{n=1}^{\infty}$ — точечный процесс, причем (S_n) и (T_n) независимы, где (S_n) — пуассоновский процесс с мерой интенсивности ν, где ν — мера Лебега. Тогда $(S_n,\, T_n)$ — пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\nu \otimes \mathsf{G}$, где G — распределение T_i.*

Доказательство. Вспомним, что

$$\mathscr{L}(f) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n,\, T_n)}.$$

Из курса математической статистики известно, что

$$\mathsf{E}\left(g(\xi,\eta)\mid \xi = u\right) = \mathsf{E} g(u,\, \eta),$$

если ξ независима с η. Тогда

$$\mathsf{E}\left(e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(S_n,\, T_n)} \,\Big|\, S_1 = u_1, S_2 = u_2,\, \ldots\right) = \mathsf{E} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(u_n,\, T_n)} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{E} e^{-f(u_n,\, T_n)}$$

в силу независимости (T_i). Введем обозначение

$$g(u) \ := \ \mathsf{E} e^{-f(u,\, T_n)} \ = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-f(u,\, x)}\, \mathsf{G}(dx).$$

Заметим, что $0 < g(u) \leqslant 1$. Из курса математической статистики известно, что
$$\mathsf{E}\left(g(\xi,\,\eta)\right) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}\left(g(\xi,\,\eta)\mid\xi\right)\Big).$$
Тогда
$$\mathscr{L}(f) \;=\; \mathsf{E}\prod_{n=1}^{\infty} g\left(S_n\right) \;=\; \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\log\, g(S_n)\right)} \;=\; \mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}h(S_n)},$$
где $h := -\log\, g \geqslant 0$. Воспользуемся тем, что (S_n) — пуассоновский процесс:
$$\mathsf{E}e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}h(S_n)} \;=\; \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+}(e^{-h(x)}-1)\,\nu(dx)\right] \;=\; \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+}(g(x)-1)\,\nu(dx)\right] =$$
$$= \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+}e^{-f(x,y)}\mathsf{G}(dy)-1\right)\,\nu(dx)\right] =$$
$$= \exp\left[\iint\limits_{\mathbb{R}_+^2}\left(e^{-f(x,y)}-1\right)\,\mathsf{G}(dy)\nu(dx)\right].$$
Соответственно, в силу теоремы 5.1, процесс $(S_n,\,T_n)$ является пространственным пуассоновским процессом. Теорема доказана. $\square$

5.2 Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Пусть $(\Omega,\,\mathscr{F},\,\mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S_t,\,\mathscr{B}_t)$ — семейство измеримых пространств, T — произвольное множество. Введем случайный процесс
$$X := \{X_t,\,t\in T\}\,,\;\; X_t:\Omega\to S_t,\;\; X_t\in\mathscr{F}|\mathscr{B}_t\;\;\forall t\in T.$$
Рассмотрим упорядоченный набор
$$\tau := (t_1,\,\ldots,\,t_n),\;\; t_i\neq t_j\;\;\forall i\neq j.$$
Определим тогда
$$S_\tau := S_{t_1}\times\ldots\times S_{t_n},\quad \mathscr{B}_\tau := \mathscr{B}_{t_1}\otimes\ldots\otimes\mathscr{B}_{t_n}.$$
Введем прямоугольник
$$\left(B_{t_1}\times\ldots\times B_{t_n}\right),\;\; B_{t_i}\in\mathscr{B}_{t_i},\;\; i=1,\,\ldots,\,n.$$
Введем также случайный элемент
$$X_\tau:\Omega\to S_\tau,\;\; X_\tau\in\mathscr{F}|\mathscr{B}_\tau\;\;\left(\Leftrightarrow X_{t_k}\in\mathscr{F}|\mathscr{B}_{t_k},\; k=1,\,\ldots,\,n\right).$$
Распределение X_τ обозначим через $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}$, где набор $t_1,\,\ldots,\,t_n$ упорядочен.

Определение 5.1. Семейство мер $\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$, где

$$t_1,\, \ldots,\, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t_i \neq t_j \ \ \forall i \neq j,$$

называется *семейством конечномерных распределений* $X = \{X_t,\, t \in T\}$.

Рассмотрим прямоугольник $B = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}) = \mathsf{P}\left((X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n}) \in B\right) = \\
&\quad = \mathsf{P}(X_{t_1} \in B_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n} \in B_{t_n}) = \mathsf{P}\left(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}},\, \ldots,\, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}\right) = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \mathsf{P}_{t_{i_1} \ldots t_{i_n}}\left(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}\right)
\end{aligned}$$

для любой перестановки $(i_1,\, \ldots,\, i_n)$. Таким образом, получили свойство:

Свойство 5.1. $\forall n\ \forall$ перестановки $(i_1,\, \ldots,\, i_n)$ индексов $(1,\, \ldots,\, n)$

$$\mathsf{P}_{t_{i_1} \ldots t_{i_n}}\left(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}\right) = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}).$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_k \ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right) = \\
&\qquad\qquad = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_{k-1} t_{k+1} \ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right),
\end{aligned}$$

поскольку $\left\{X_{t_k} \in S_{t_k}\right\} = \Omega$. Таким образом, получили еще одно свойство:

Свойство 5.2.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_k \ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right) = \\
&\qquad\qquad = \mathsf{P}_{t_1 \ldots t_{k-1} t_{k+1} \ldots t_n}\left(B_{t_1} \times \ldots B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \ldots \times B_{t_n}\right).
\end{aligned}$$

Определение 5.2. Свойства 5.1 и 5.2 называются *условиями согласованности.*

Определение 5.3. Измеримые пространства $(S,\, \mathscr{B})$ и $(V,\, \mathscr{A})$ *изоморфны*, если

$$\begin{aligned}
&\exists h \quad\ : S \to V, \quad h \quad\ \in \mathscr{B}|\mathscr{A}, \\
&\exists h^{-1} : V \to S, \quad h^{-1} \in \mathscr{A}|\mathscr{B}.
\end{aligned}$$

Определение 5.4. Измеримое пространство $(S,\, \mathscr{B})$ называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подмножеству отрезка $[0,\, 1]$.

Определение 5.5. Метрическое пространство $(X,\, \rho)$ называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным.

Замечание. Любое борелевское подмножество польского пространства является борелевским пространством.

Теорема 5.5 (Колмогорова)**.** *Пусть* $(S_t,\, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ *— семейство борелевских пространств. Пусть* $\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$ *— мера на* $(S_{t_1} \times \ldots \times S_{t_n},\, \mathscr{B}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_{t_n})$*, которая удовлетворяет условиям согласованности 5.1 и 5.2. Тогда на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ *существует случайный процесс* $X = \{X_t,\, t \in T\}$ *такой, что* $X_t : \Omega \to S_t, \quad X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t \quad \forall t \in T$ *и конечномерные распределения которого — это меры* $\mathsf{P}_{t_1 \ldots t_n}$*.*

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. В отличие от теоремы Ломницкого–Улама, в этой теореме накладываются ограничения топологического характера.

Определение 5.6. Пусть Q — мера на $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$. *Характеристической функцией меры* Q называется

$$\varphi_{\mathsf{Q}}(u) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,\,x)}\,\mathsf{Q}(dx), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание. Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то

$$\varphi_\xi(u) := \varphi_{\mathsf{P}_\xi}(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,\,x)}\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\Omega} e^{i(u,\,\xi)}\,d\,\mathsf{P} = \mathsf{E}e^{i(u,\,\xi)}.$$

Теорема 5.6. *Пусть* $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ *— семейство характеристических функций мер на* $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$*. Тогда существует случайный процесс* $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in T$, *для которого* $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ *— характеристические функции конечномерных распределений, в том и только в том случае, когда*

1. $\varphi_{t_1\ldots t_n}(u_1, \ldots, u_n) = \varphi_{t_{i_1}\ldots t_{i_n}}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall (i_1, \ldots, i_n)$ — *— перестановки* $(1, \ldots, n)$*;*
2. $\varphi_{t_1\ldots t_k\ldots t_n}(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) = \varphi_{t_1\ldots\widehat{t_k}\ldots t_n}(u_1, \ldots, \widehat{0}, \ldots, u_n)$.

Доказательство. Теорема предлагается без доказательства. □

Замечание. Если $X = \{X_t,\, t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, то достаточно рассмотреть $\mathsf{P}_{t_1\ldots t_n}$, $\ t_1 < \ldots < t_n$.

Замечание. Про эти теоремы почитать подробнее можно в [1].

5.3 Процессы с независимыми приращениями

Теорема 5.7. *Для того чтобы существовал процесс* $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ *с независимыми приращениями такой, чтобы характеристическая функция случайной величины* $X(t) - X(s)$ *была равна* $\varphi(s, t, \cdot)$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v)\,\varphi(u, t, v) \quad \forall\, 0 < s < u < t\ \ \forall v \in \mathbb{R}.$$

При этом начальное распределение процесса P_0 *может быть выбрано любым.*

Замечание (от наборщика). Судя по всему, знание доказательства этой теоремы является обязательным. Доказательство см. [1], стр. 47.

5.4 Модификация процесса

Определение 5.7. Процесс $Y = \{Y_t,\, t \in T\}$ называется *модификацией* процесса $X = \{X_t,\, t \in T\}$, если

$$\mathsf{P}\,(Y_t = X_t) = 1\ \ \forall t \in T.$$

Лемма 5.8. *Из теоремы 5.6 следует, что существует процесс с независимыми приращениями $N = \{N_t,\, t \geqslant 0\}$ такой, что*

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Poiss}\big(\lambda(t-s)\big) \quad \forall\, 0 < s < t.$$

Доказательство. Вспомним, что если $\xi \sim \mathrm{Poiss}(a)$, то характеристическая функция ξ равна

$$\varphi_\xi(v) = e^{a\left(e^{iv}-1\right)}.$$

Тогда запишем

$$\varphi_{N_t - N_s}(v) = e^{\lambda(t-s)\left(e^{iv}-1\right)} = \varphi(s,\, t,\, v).$$

Но тогда

$$\varphi(s,\, t,\, v) = \varphi(s,\, u,\, v)\,\varphi(u,\, t,\, v),$$

что и требовалось показать. □

Замечание. Можно доказать, что у построенного процесса существует такая модификация, что ее траектории обладают следующими свойствами:

- они неубывают;
- они непрерывны справа;
- они имеют предел слева;
- все их скачки имеют величину 1;
- длина промежутков между скачками распределена экспоненциально;
- промежутки между скачками независимы.

Таким образом, этот процесс можно рассматривать как процесс восстановления.

Пример 5.1. Рассмотрим вероятностное пространство $\big([0,\,1],\, \mathcal{B}[0,\,1],\, \nu\big)$, где ν — мера Лебега, и измеримое пространство $\big([0,\,1],\, \mathcal{B}[0,\,1]\big)$. Введем случайные процессы $X = \{X_t,\, t \in T\}$ и $Y = \{Y_t,\, t \in T\}$ следующим образом:

$$X(t,\, \omega) \equiv 0, \quad Y(t,\, \omega) = \begin{cases} 1, & t = w \\ 0, & t \neq w \end{cases}, \quad t,\, \omega \in [0,\, 1].$$

Тогда все траектории X непрерывны, а все траектории Y разрывны, но вместе с этим

$$\mathsf{P}\left(X_t \neq Y_t\right) = \nu(\{t\}) = 0,$$

то есть Y является модификацией X. Таким образом, отношение эквивалентности, порождаемое свойством 'быть модификацией друг друга', не сохраняет непрерывности траекторий.

6 Лекция от 22.03.17

Винеровский процесс

6.1 Фильтрации. Марковские моменты

Определение 6.1. Пусть $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Семейство σ–алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ на этом вероятностном пространстве, где $T \subset \mathbb{R}$, называется *фильтрацией*, если $\forall\, s < t,\ s,\, t \in T$,

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}.$$

Определение 6.2. *Естественная фильтрация* процесса $X = (X_t,\, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, — это семейство

$$\mathscr{F}_t := \sigma\left\{X_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\right\},\; t \in T.$$

Определение 6.3. Отображение $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется *марковским моментом относительно фильтрации* $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$, если

$$\forall t \in T \;\; \big\{\omega :\, \tau(\omega) \leqslant t\big\} \in \mathscr{F}_t.$$

Марковский момент τ называется *моментом остановки*, если $\tau < \infty$ почти наверное.

Замечание. Если τ — марковский момент, то $\forall t \in T$ $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$, поскольку

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau < t\},\;\; \{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{k}\right\}.$$

Замечание. Если $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, то

$$\tau \text{ — марковский момент } \Leftrightarrow\; \forall n \in \mathbb{Z}_+ \; \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

Пример 6.1. Рассмотрим действительный процесс с дискретным временем $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Введем

$$\tau_B(\omega) := \inf_n \big\{n :\, X_n(\omega) \in B\big\},\;\; \mathscr{F}_n = \sigma\left\{X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_n\right\},\; n \in \mathbb{Z}_+$$

(если $X_n \notin B$ $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$, то $\tau = \infty$). Тогда τ_B — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$: проверим, что $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$:

- $n = 0 :$ $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \sigma\{X_0\} = \mathscr{F}_0$;
- $n \geqslant 1 :$ $\{\tau = n\} = \big\{X_0 \notin B,\, \ldots,\, X_{n-1} \notin B,\, X_n \in B\big\} \in$
  $\in \sigma\left\{X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_n\right\} = \mathscr{F}_n$.

Определение 6.4. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$. Определим σ–алгебру

$$\mathscr{F}_\tau := \big\{A \in \mathscr{F} :\, A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \;\; \forall t \in T\big\}.$$

Эта σ–алгебра называется *σ–алгеброй событий, наблюдаемых до момента* τ.

Упражнение 6.1. Доказать, что объект из определения 6.4 — σ–алгебра.

6.2 Строго марковское свойство

Определение 6.5. Процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, имеет *стационарные приращения*, если $\forall t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall h : t_0, \ldots, t_n, t_0 + h, \ldots, t_n + h \in T$

$$\begin{aligned} \operatorname{Law}\big(X_{t_1} - X_{t_0},\, \ldots,\, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\big) &= \\ &= \operatorname{Law}\big(X_{t_1+h} - X_{t_0+h},\, \ldots,\, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}\big) \end{aligned} \quad (5)$$

Замечание. Если процесс X имеет еще и независимые приращения, то

$$(5) \Leftrightarrow \mathrm{Law}\,(X_t - X_s) = \mathrm{Law}\,(X_{t+h} - X_{s+h}) \quad \forall t,\, s,\, t+h,\, s+h \in T,\, s < t.$$

Замечание. Пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ — процесс со стационарными независимыми приращениями.

Лемма 6.1. *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда $\forall$ константы $a > 0$ процесс $Z(t) := X(t+a) - X(a)$, $t \geqslant 0$, имеет независимые приращения и*

$$\{Z_t,\, t \geqslant 0\} \text{ независим с } \mathscr{F}_a = \sigma\{X_s,\, s \leqslant a\}.$$

Доказательство. Докажем независимсть приращений по определению: возьмем $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и рассмотрим

$$Z(t_0),\, Z(t_1) - Z(t_0),\, \ldots,\, Z(t_n) - Z(t_{n-1}).$$

Заметим, что по определению $Z(t)$

$$Z(t_0) = X(t_0 + a) - X(a), \;\; Z(t_k) - Z(t_{k-1}) = X(t_k + a) - X(t_{k-1} + a);$$

из этого получаем, что приращения Z независимы вследствие независимости приращений X, которая есть по условию леммы. Докажем второе утверждение леммы: заметим, что σ–алгебра $\mathscr{F}_a$ порождается системой событий

$$\{X_{s_1} \in B_1,\, \ldots,\, X_{s_m} \in B_m\}, \;\; 0 \leqslant s_1 < \ldots < s_m \leqslant a.$$

Поэтому достаточно проверить, что независимы векторы

$$\xi = (X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m}) \;\text{ и }\; \eta = (Z_{t_1},\, \ldots,\, Z_{t_n}), \;\; 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n.$$

Заметим, что

$$\xi = \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} \\ \vdots \\ X_{s_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} - X_{s_1} \\ \vdots \\ X_{s_m} - X_{s_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\zeta := \left(X_{s_1},\, X_{s_2} - X_{s_1},\, \ldots,\, X_{s_m} - X_{s_{m-1}}\right)$. Тогда ζ и η независимы, поскольку X имеет независимые приращения. Но ξ — это борелевская функция от ζ, следовательно, ξ независим с η. $\square$

Теорема 6.2 (строго марковское свойство)**.** *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что его траектории непрерывны справа. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации X. Введем*

$$Y(t,\omega) := \begin{cases} X(t + \tau(\omega), \omega) - X(\tau(\omega), \omega), & \tau(\omega) < \infty, \\ 0, & \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

По сути, $Y(t) = X(t+\tau) - X(\tau)$, $t \geqslant 0$. Тогда процесс $Y = \{Y_t,\, t \geqslant 0\}$ независим с $\mathscr{F}_\tau$ и имеет те же конечномерные распределения, что и процесс $\{X_t - X_0,\, t \geqslant 0\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что процесс Y корректно задан. Пополним исходное вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$ классом нулевых событий $\mathcal{N}$ и получим $\big(\Omega,\, \bar{\mathscr{F}},\, \bar{\mathsf{P}}\big)$, то есть

$$\forall A : \mathsf{P}\,(A) = 0 \;\; \forall C \subset A \quad C \in \mathcal{N},\, \bar{\mathsf{P}}\,(C) := 0,$$

где новая σ–алгебра определяется как

$$\bar{\mathscr{F}} = \sigma\,\{\mathscr{F},\, \mathcal{N}\}\,.$$

Известно, что

$$\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cup \mathcal{N}, \;\; \bar{\mathsf{P}}\,(A \cup C) = \mathsf{P}\,(A) \;\; \forall A \in \mathscr{F},\, C \in \mathcal{N}.$$

Поэтому можно считать, что с самого начала рассматривалось пополненное вероятностное пространство $\big(\Omega,\, \bar{\mathscr{F}},\, \bar{\mathsf{P}}\big)$, которое и будет дальше обозначаться просто $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$. Дальше считаем, что все σ–алгебры также пополнены классом нулевых событий.

Если τ — марковский момент относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ и $\alpha = \tau$ почти наверное, то α — тоже марковский момент относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$. Поэтому далее можем считать, что $\tau < \infty$ на Ω.

Покажем, что $Y(t)$ — случайная величина $\forall t \geqslant 0$. Введем

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n}\, \mathbb{I}_{A_{n,\,k}},$$

где

$$\begin{aligned} &A_{n,\,1} := \left\{\omega : \tau(\omega) \leqslant 2^{-n}\right\}, \\ &A_{n,\,k} := \left\{\omega : (k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leqslant k2^{-n}\right\}, \quad k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Тогда $\tau_n \searrow \tau$ на всем Ω. Заметим, что τ_n — марковские моменты относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$:

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \left\{\tau \leqslant k2^{-n}\right\} \in \mathscr{F}_{k2^{-n}} \subset \mathscr{F}_t,$$

где $k := \sup\left\{r :\; r2^{-n} \leqslant t\right\}$.

Поскольку траектории X непрерывны справа почти наверное, то

$$X\left(t + \tau_n(\omega),\, \omega\right) \to X\left(t + \tau(\omega),\, \omega\right),\; n \to \infty \;\; \forall t \geqslant 0.$$

Заметим, что

$$\Big\{\omega :\; X\left(t + \tau_n(\omega),\, \omega\right) \leqslant z\Big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{X\left(t + k2^{-n},\, \omega\right) \leqslant z,\; \tau_n = k2^{-n}\Big\}.$$

Поскольку

$$\Big\{X\left(t + k2^{-n},\, \omega\right) \leqslant z\Big\} \in \mathscr{F},\;\; \left\{\tau_n = k2^{-n}\right\} \in \mathscr{F},$$

то $X(t+\tau_n)$ — случайная величина $\forall n$. Поскольку $X(t+\tau_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t+\tau)$, то $X(t+\tau)$ — тоже случайная величина из полноты случайного пространства.

Таким образом, показали, что $Y(t) = X(t+\tau) - X(\tau)$ — случайная величина $\forall t \geqslant 0$.
Докажем, что Y независим с $\mathscr{F}_\tau$. Для этого достаточно проверить, что

$$\mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(\xi \in C) \quad \forall A \in \mathscr{F}_\tau,\, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m),$$

где

$$\xi := \left(Y(t_1),\, \ldots,\, Y(t_m)\right), \quad 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m.$$

Воспользуемся свойством регулярности вероятностной меры:
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \;\; \exists$ открытое множество G и замкнутое множество F такие, что $F \subset C \subset G$ и $\mathsf{P}\left(G \setminus F\right) < \varepsilon$ (доказательство см., например, [4], стр. 4). Соответственно, достаточно рассматривать только замкнутые C.
Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in C\}\right) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(\xi \in C) \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\xi)$$

для любой непрерывной ограниченной $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Заметим, что импликация слева направо ($\Rightarrow$) следует из того, что если σ–алгебры, индуцированные на вероятностное пространство двумя случайными величинами, независимы, то матожидание произведения этих случайных величин распадается в произведение соответствующих матожиданий. Докажем импликацию справа налево ($\Leftarrow$). Положим

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & ,\;\; t \leqslant 0, \\ 1 - t\,, & t \in [0,\, 1], \\ 0 & ,\;\; t > 1. \end{cases}$$

Определим $\rho\,(x,\, B) := \inf\limits_{y \in B} \rho(x,\, y)$, где $\rho(x,\, y)$ — евклидово расстояние между точками. Заметим, что $\rho\,(x,\, B)$ — непрерывная функция от x. Положим

$$f_j(x) := \varphi\left(j\rho\,(x,\, B)\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f_j(x) \searrow \mathbb{I}_B,\; j \to \infty$ (здесь важно, что B — замкнутое множество!). Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f_j(\xi) \;&\to\; \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathbb{I}_{\{\xi \in B\}} \;=\; \mathsf{P}\left(A \cap \{\xi \in B\}\right), \\ \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f_j(\xi) \;&\to\; \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E}\mathbb{I}_{\{\xi \in B\}} \;=\; \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(\xi \in B). \end{aligned}$$

Таким образом, импликация справа налево доказана. Положим

$$\xi_n := \left(X(t_1 + \tau_n) - X(\tau_n),\, \ldots,\, X(t_m + \tau_n) - X(\tau_n)\right).$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, поскольку $\tau_n \searrow \tau$. Следовательно, $\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n)$.
Положим

$$\xi_{n,\,k} := \Big(X\left(t_1 + k2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right),\, \ldots,\, X\left(t_m + k2^{-n}\right) - X\left(k2^{-n}\right)\Big).$$

Заметим, что

$$A \cap \left\{\tau_n = k2^{-n}\right\} = A \cap A_{n,\,k} = A \cap \left\{(k-1)2^{-n} < \tau \leqslant k2^{-n}\right\} =$$

$$= A \cap \left\{\tau \leqslant k2^{-n}\right\} \setminus A \cap \left\{\tau \leqslant (k-1)2^{-n}\right\} \in \mathscr{F}_{k2^{-n}}.$$

По лемме 6.1 $\xi_{n,\,k}$ независим с $\mathscr{F}_{k2^{-n}}$. Тогда получаем, что

$$\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi_n) \mathbb{I}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}} f(\xi_{n,\,k}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}} \mathsf{E} f(\xi_{n,\,k}).$$

Заметим, что

$$\xi_{n,\,k} \overset{\text{law}}{=} \big(X(t_1) - X(0),\, \ldots,\, X(t_n) - X(0)\big) \;=:\; \gamma.$$

Тогда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}} \mathsf{E} f(\xi_{n,\,k}) = \mathsf{E} f(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}_{A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}} = \mathsf{E} f(\gamma) \mathsf{E}\mathbb{I}_A =$$
$$= \mathsf{E} f(\gamma)\, \mathsf{P}\,(A)\,.$$

Таким образом, получили, что $\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\gamma) \quad \forall A \in \mathscr{F}_\tau$. Осталось взять $A = \Omega$: тогда получится, что $\mathsf{E} f(\xi) = \mathsf{E} f(\gamma)$ и, как следствие,

$$\mathsf{E}\mathbb{I}_A f(\xi) = \mathsf{E}\mathbb{I}_A \mathsf{E} f(\xi) \;\; \forall A \in \mathscr{F}_\tau.$$

$\square$

6.3 Функции Хаара и Шаудера

Определение 6.6. *Функции Хаара* $H_k(x)$ задаются следующими формулами на $[0,\, 1]$:

$H_0(x) \equiv 1;$
$H_1(x) = \mathbb{I}_{[0,\,\frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{I}_{(\frac{1}{2},\,1]}(x);$
$$H_k(x) = 2^{n/2}\left(\mathbb{I}_{\left(\frac{k-2^n}{2^n},\, \frac{1/2+k-2^n}{2^n}\right]}(x) - \mathbb{I}_{\left(\frac{1/2+k-2^n}{2^n},\, \frac{1+k-2^n}{2^n}\right]}(x)\right), \;\; 2^n \leqslant k < 2^{n+1},$$
$n \in \mathbb{N}; \;\; H_{2^n}(0) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}.$

Замечание. Известно, что $\left\{H_k(x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ — полная ортонормированная система в $\mathrm{L}^2[0,\, 1]$.

Определение 6.7. *Функции Шаудера* $S_k(t)$ задаются следующими формулами на $[0,\, 1]$:

$$S_k(t) = \int\limits_{[0,\,t]} H_k(u)\,\mathrm{d}u = \left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\,t]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2}, \;\; k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $H_k(u)$ — функции Хаара.

Замечание. Известно, что $S_k(t)$ непрерывны $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 6.3. *Пусть* $a_k = \mathrm{O}\left(k^\varepsilon\right)$ *при* $k \to \infty$, *где* $0 < \varepsilon < 1/2$. *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$$

сходится равномерно на $[0,\,1]$.

Доказательство. Будем доказывать равномерную сходимость к нулю хвостов ряда. Перепишем хвост ряда:

$$\sum_{k>2^n} a_k S_k(t) \;=\; \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} a_k S_k(t).$$

Заметим, что

$$S_k(t) \;\leqslant\; 2^{-\frac{n}{2}-1},\;\; 2^n < k \leqslant 2^{n+1}.$$

Поскольку $|a_k| = O\left(k^\varepsilon\right)$, то

$$|a_k| \;\leqslant\; Ck^\varepsilon,$$

где C — некоторая фиксированная константа. Оценим:

$$\sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \;\leqslant\; C2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} S_k(t).$$

Поскольку носители $S_k(t)$ не пересекаются при $2^n < k \leqslant 2^{n+1}$, то

$$C2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} S_k(t) \;\leqslant\; C2^{(n+1)\varepsilon}\, 2^{-\frac{n}{2}-1} \;=\; C2^{\varepsilon-n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}.$$

Вернемся к исходному хвосту ряда:

$$\sum_{k>2^n} |a_k| S_k(t) \;\leqslant\; \sum_{m=n}^{\infty} C\, 2^{\varepsilon-n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} \;\to\; 0,\;\; n\to\infty,$$

так как $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Таким образом, поскольку оценка является числовым рядом, не зависящим от t, показана равномерная сходимость хвостов ряда к нулю, то есть его равномерная сходимость. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Из леммы 6.3 и теоремы Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится к непрерывной функции.

Лемма 6.4. *Пусть* $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — *случайные величины на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,\,1),\; k\in\mathbb{N}$. *Тогда* $\forall c > \sqrt{2}$ *и для почти всех* $\omega \in \Omega$ $\exists N_0(c\;\omega)$*:*

$$|\xi_k| \leqslant c\,(\ln\, k)^{\frac{1}{2}} \quad \forall k \geqslant N_0(c,\,\omega).$$

Доказательство. Поскольку $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,\,1)$, то

$$\mathsf{P}\left(\xi \geqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}\, du \;\; \forall x > 0.$$

Оценим этот интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty \frac{u}{u}e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \;\leqslant\; \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty ue^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \;=$$

$$= \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty -\,\mathrm{d}e^{\frac{-u^2}{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{\frac{-u^2}{2}}.$$

Тогда получаем, что

$$\mathsf{P}\left(|\xi| \geqslant x\right) \;\leqslant\; \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{-u^2}{2}}.$$

Воспользуемся леммой Бореля–Кантелли:

$$\sum_{k=2}^\infty \mathsf{P}\left(|\xi_k| \geqslant c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}}\right) \;\leqslant\; \sum_{k=2}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{c\,(\ln k)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-c^2\ln k}{2}} \;\leqslant\; \widetilde{c}\sum_{k=2}^\infty k^{\frac{-c^2}{2}} < \infty.$$

Поскольку ряд из вероятностей сошелся почти наверное, то событий происходит конечное число почти наверное. Из этого следует, что для каждого фиксированного ω можно выбрать k, после которого события выполняться перестают. Лемма доказана. □

6.4 Винеровские процессы

Определение 6.8. Процесс $W = \left\{W(t),\, t \geqslant 0\right\}$ называется *винеровским*, если

1. $W(0) = 0$ почти наверное;
2. W имеет независимые приращения;
3. $W(t) - W(s) \;\sim\; \mathcal{N}(0,\, t-s) \;\; \forall\, 0 \leqslant s < t$;
4. траектории W непрерывны почти наверное.

Теорема 6.5 (явная конструкция винеровского процесса)**.** *Пусть* $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,\, 1),\; k \in$ $\in \mathbb{N}$. *Введем*

$$W(t,\, \omega) \;:=\; \sum_{k=1}^\infty \xi_k(\omega)S_k(t), \;\; t \in [0,\, 1],$$

где $S_k(t)$ *— функции Шаудера. Тогда* $W = \left\{W(t),\, t \in [0,\, 1]\right\}$ *— винеровский процесс на* $[0,\, 1]$.

Доказательство. Будем доказывать свойства 1. – 4. для построенного процесса. Свойство 1. выполнено, так как $S_k(0) = 0$. Заметим, что согласно лемме 6.3

$$\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} W(t), \;\; n \to \infty.$$

Более того, согласно лемме 6.4 сходимость равномерна на $[0,\, 1]$, что дает непрерывность траекторий почти наверное. Таким образом, свойство 4.

тоже получено. Проверим независимость приращений этого процесса. Для этого нужно проверить независимость случайных величин

$$W(t_0),\, W(t_1) - W(t_0),\, \ldots,\, W(t_m) - W(t_{m-1}),\ \ 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_m.$$

Заметим, что случайные величины $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t)$ имеют предел в $\mathrm{L}^2\,(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$: поскольку

$$\mathsf{E}\xi_k\xi_l = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

то

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t) - \sum_{k=1}^{r}\xi_k S_k(t)\right|^2 = \mathsf{E}\left|\sum_{k=r+1}^{n}\xi_k S_k(t)\right|^2 = \mathsf{E}\left|\sum_{k=r+1}^{n} S_k^2(t)\right|^2 \to 0,$$
$$r, n \to \infty,$$

как часть хвоста сходящегося ряда, поскольку $S_k(t) \leqslant 2^{-\frac{n+2}{2}}$. Таким образом, показано, что последовательность частичных сумм фундаментальна в $\mathrm{L}^2\,(\Omega,\, \mathscr{F},\, \mathsf{P})$. Известно, что это пространство полно; тогда обозначим

$$V(t) := (\mathrm{L}^2)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t).$$

Из этого следует, что $V(t) = W(t)$ почти наверное, и частные суммы сходятся к $W(t)$ не только почти наверное, но и в L^2 (потому что из сходимости почти наверное, равно как и из сходимости в L^2, следует сходимость по вероятности, предел которой определен однозначно).
Рассмотрим теперь вектор из приращений частных сумм:

$$U_n := \Bigg(\sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t_0),\, \ldots,\, \sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t_j),\, \ldots$$
$$\ldots,\, \sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^{n}\xi_k S_k(t_{m-1})\Bigg).$$

Сразу отметим, что этот вектор является гауссовским, так как он является линейным преобразованием гауссовского вектора из независимых нормальных случайных величин ξ_i. Введем также предельный вектор

$$U := \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_0),\, \ldots,\, \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_j),\, \ldots$$
$$\ldots,\, \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t_{m-1})\Bigg).$$

Тогда по доказанному выше

$$U_n \xrightarrow{\text{п.н.}} U,\ \ U_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega)} U.$$

Поскольку $U_n = \left(U_n^1, \ldots, U_n^m\right)$ — гауссовский вектор, его характеристическая функция имеет известный вид:

$$\varphi_{U_n}(\lambda) = e^{i(\lambda,\, a) - \frac{1}{2}(C\lambda,\, \lambda)},$$

где a — математическое ожидание U_n, а C — матрица ковариаций U_n. Заметим, что $\mathsf{E}U_n = 0$. Разберемся с матрицей ковариаций:

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^r\right) = \mathsf{E}U_n^j U_n^r = \sum_{k=1}^{n} S_k(t_{j+1})S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{n} S_k(t_j)S_k(t_{r+1}) - \\ - \sum_{k=1}^{n} S_k(t_{j+1})S_k(t_r) + \sum_{k=1}^{n} S_k(t_j)S_k(t_r).$$

Поскольку $\mathsf{E}U_n^j U_n^r$ — это скалярное произведение в L^2, которое обладает свойством непрерывности, то

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^r\right) = \mathsf{E}U_n^j U_n^r \to \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1})S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j)S_k(t_{r+1}) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1})S_k(t_r) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j)S_k(t_r), \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим одно из слагаемых, воспользовавшись представлением функций Шаудера через функции Хаара (образующие базис в пространстве L^2), а также равенством Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)S_k(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\, t]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2} \left\langle H_k,\, \mathbb{I}_{[0,\, v]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2} = \left\langle \mathbb{I}_{[0,\, t]},\, \mathbb{I}_{[0,\, v]}\right\rangle_{\mathrm{L}^2} = \\ = \min(v,\, t).$$

Тогда в предположении $t_j < t_r$ получаем, что

$$\operatorname{cov}\left(U_n^j,\, U_n^r\right) \to \min(t_{j+1},\, t_{r+1}) - \min(t_j,\, t_{r+1}) - \min(t_{j+1},\, t_r) + \min(t_j,\, t_r) = \\ = t_{j+1} - t_j - t_{j+1} + t_j = 0.$$

Так как сходимость почти наверное влечет сходимость характеристических функций и так как из-за сходимости в L^2 есть сходимость моментов, из этого следует, что матрица ковариаций вектора U диагональна, что в свою очередь влечет независимость его компонент $U^1, \ldots, U^m$; также предельным переходом получаем явный вид характеристической функции вектора U, что доказывает гауссовость вектора. Теорема доказана. $\square$

Следствие (построение W на $[0,\, \infty)$)**.** *Для каждого $j \in \mathbb{N}$ берем $\xi_1^j, \xi_2^j, \ldots$ — независимые одинаково распределенные $\mathcal{N}(0,\, 1)$ случайные величины. Определяем*

$$W^j(t,\, \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j(\omega) S_k(t).$$

Дальше склеиваем эти процессы последовательно и непрерывно:

$$W(t) := W^j(t) + W(j-1), \;\; W(0) \equiv 0, \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Тогда W — винеровский процесс.

Доказательство. Доказательство будет дано позднее. □

7 Лекция от 29.03.17

Свойства винеровского процесса

7.1 Недифференцируемость траекторий броуновского движения

Теорема 7.1 (Винера – Пэли – Зигмунда)**.** *С вероятностью 1 траектории винеровского процесса $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$ не дифференцируемы ни в одной точке $\mathbb{R}_+ = [0,\, \infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[k,\, k+1)\,, k \in \mathbb{Z}_+$. Допустим, что $W(\cdot,\, \omega)$ дифференцируем в точке $s \in [k,\, k+1)$. Тогда существует правая производная $W(\cdot,\, \omega)$ в точке s. Из этого следует, что

$$\exists\, l,\, q \in \mathbb{N}: \;\; \big|W(t,\, \omega) - W(s,\, \omega)\big| \leqslant l(t-s) \text{ при } |t-s| < \frac{1}{q},\; t > s.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}_+$ и введем событие

$$A_{l,\, n,\, i} := \left\{\omega : \left|W\left(k + \frac{j+1}{n},\, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n},\, \omega\right)\right| \leqslant \frac{7l}{n}, \;\; j = i,\, i+1,\, i+2\right\}.$$

Пусть $\frac{4}{n} < \frac{1}{q}$, то есть $n > 4q$. Тогда если ω — точка дифференцируемости W в точке s, то $\exists i = i(s,\, n)$, что

$$\begin{aligned}
&\left|W\left(k + \frac{j+1}{n},\, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n},\, \omega\right)\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left|W(s,\, \omega) - W\left(k + \frac{j}{n},\, \omega\right)\right| + \left|W\left(k + \frac{j+1}{n},\, \omega\right) - W(s,\, \omega)\right| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{4l}{n} + \frac{3l}{n} = \frac{7l}{n}, \;\; j = i,\, i+1,\, i+2,
\end{aligned}$$

поскольку в разрешенный промежуток длины $\frac{1}{q}$ точно попадет целиком хотя бы 3 отрезка длины $\frac{1}{n}$ (i выбирается таким образом, чтобы $k + \frac{i-1}{n} \leqslant i < k + \frac{i}{n}$). Таким образом, если $\omega \in D_k$, где D_k — таким ω, что $W(\cdot,\, \omega)$ дифференцируема в точка $s \in [k,\, k+1)$, то по показанному выше

$$D_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,\, n,\, i}.$$

Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n-3}A_{l,\,n,\,i}\right)=0\ \ \forall l,\,q\in\mathbb{N};$$

если мы это сделаем, то тогда автоматически получится, что $\mathsf{P}\left(D_k\right)=0$, что и доказывает утверждение теоремы. Для начала заметим, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n}B_n\right)\leqslant\liminf_{n}\mathsf{P}\left(B_n\right),$$

поскольку пересечение вложено в каждый из отдельно взятых элементов. Поэтому

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n-3}A_{l,\,n,\,i}\right)\leqslant\liminf_{n}\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{l,\,n,\,i}\right)\leqslant\liminf_{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\left(A_{l,\,n,\,i}\right).$$

Оценим общий член этой суммы. Так как приращения винеровского процесса независимы и стационарны, то

$$\mathsf{P}\left(A_{l,\,n,\,i}\right)=\left(\mathsf{P}\left(\Big|W\left(1/n\right)-W(0)\Big|\leqslant\frac{7l}{n}\right)\right)^3=\left(\mathsf{P}\left(\frac{\big|W(1/n)\big|}{\sqrt{1/n}}\leqslant\frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3.$$

Введем обозначение

$$\xi:=\frac{\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\sim\mathcal{N}(0,\,1).$$

Тогда воспользуемся тем, что

$$\mathsf{P}\left(|\xi|\leqslant z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-z}^{z}e^{\frac{-u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\leqslant\frac{2z}{\sqrt{2\pi}}=z\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

и продолжим цепочку неравенств:

$$\left(\mathsf{P}\left(\frac{\big|W(1/n)\big|}{\sqrt{1/n}}\leqslant\frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3\leqslant\left(\frac{7l}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3.$$

Тогда, возвращаясь к сумме, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n-3}A_{l,\,n,\,i}\right)\leqslant\liminf_{n}n\left(\frac{7l}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3=0.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Это доказательство (точно такое же, но с картинками) можно посмотреть в [1], стр. 76.

Замечание. Из последнего шага доказательства становится ясно, почему нужно было брать именно три отрезка, а не один или два.

7.2 Принцип отражения

Теорема 7.2 (принцип отражения)**.** *Пусть* $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ — *винеровский процесс,* τ — *момент остановки относительно естественной фильтрации процесса* W*. Введем новый (отраженный) процесс*

$$Z(t,\,\omega) = \begin{cases} W(t,\,\omega), & t \leqslant \tau(\omega), \\ 2W\big(\tau(\omega),\,\omega\big) - W(t,\,\omega), & t > \tau(\omega) \end{cases}$$

для всех $\omega \in \{\tau < \infty\}$*; для всех остальных* ω *определим* $Z(t,\,\omega) \equiv 0$*. Иными словами,*

$$Z(t,\,\omega) \;=\; W(t,\,\omega)\,\mathbb{I}\big\{t \leqslant \tau(\omega)\big\} + \big(2W(\tau(\omega),\,\omega) - W(t,\,\omega)\big)\,\mathbb{I}\big\{t > \tau(\omega)\big\}\,.$$

Тогда $Z = \{Z_t,\, t \geqslant 0\}$ — *винеровский процесс.*

Доказательство. Введем польское (то есть метрическое полное сепарабельное) пространство $\mathrm{C}_0\,(\mathbb{R}_+) = \big\{f:\; f \in \mathrm{C}\,(\mathbb{R}_+)\,,\, f(0) = 0\big\}$ с метрикой

$$\rho(f,\,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup\limits_{t\in[0,\,n]} \big|f(t) - g(t)\big|}{1 + \sup\limits_{t\in[0,\,n]} \big|f(t) - g(t)\big|}.$$

Введем два вспомогательных процесса $X = \big\{X(t),\, t \geqslant 0\big\}$ и $Y = \big\{Y(t),\, t \geqslant 0\big\}$:

$$\begin{aligned} X(t,\,\omega) \;&:=\; W\Big(\min\big(t,\,\tau(\omega)\big)\,,\,\omega\Big)\,, \\ Y(t,\,\omega) \;&:=\; W(t+\tau,\,\omega) - W(\tau). \end{aligned}$$

Смысл этих процессов таков: X — это процесс W, остановленный после момента τ; Y — это процесс W, отсеченный в момент τ. Сразу отметим, что Y — винеровский процесс по строго марковскому свойству (теорема 6.2).
Введем для всех $b \in \mathbb{R}_+$, $f,\, g \in \mathrm{C}_0\,(\mathbb{R}_+)$ отображение "склеивания" h функций f и g в точке b:

$$h\,\big(b,\, f(\cdot),\, g(\cdot)\big)\,(t) \;:=\; f(t)\mathbb{I}_{[0,\,b]}(t) + \big(f(b) + g(t-b)\big)\,\mathbb{I}_{(b,\,\infty)}(t).$$

Отметим, что

$$h:\; \big(\mathbb{R}_+ \times \mathrm{C}_0[0,\,\infty) \times \mathrm{C}_0[0,\,\infty),\, \widetilde{\rho}\big) \;\to\; \big(\mathrm{C}_0[0,\,\infty),\,\rho\big)\,,$$

где метрика $\widetilde{\rho}$ вводится следующим образом:

$$\widetilde{\rho} \;:=\; \max\{\rho_1,\, \rho_2,\, \rho_3\},$$

где ρ_1 — евклидова метрика на $\mathbb{R}_+$, а ρ_2 и ρ_3 совпадают с метрикой ρ, является непрерывным отображением. Заметим, что тогда для всех $\omega \in \{\tau < \infty\}$

$$\begin{aligned} h\,\big(\tau(\omega),\, X(\cdot,\,\omega),\;\;\; Y(\cdot,\,\omega)\big) &= W(\cdot,\,\omega), \\ h\,\big(\tau(\omega),\, X(\cdot,\,\omega),\, -Y(\cdot,\,\omega)\big) &= Z(\cdot,\,\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$h\left(\tau(\omega),\, X(\cdot,\,\omega),\quad Y(\cdot,\,\omega)\right) \overset{\text{law}}{=} h\left(\tau(\omega),\, X(\cdot,\,\omega),\, -Y(\cdot,\,\omega)\right),$$

для чего достаточно доказать, что элементы $(\tau,\, X,\, Y)$ и $(\tau,\, X,\, -Y)$ имеют одинаковое распределение, в силу непрерывности h. Перейдем к этому.
Сначала докажем, что вектор $(\tau,\, X)$ $\mathscr{F}_\tau$–измерим. Для этого достаточно доказать, что $\mathscr{F}_\tau$–измеримы его компоненты. $\mathscr{F}_\tau$–измеримость τ очевидна. Перейдем к доказательству $\mathscr{F}_\tau$–измеримости X. Для этого построим последовательность сходящихся к X $\mathscr{F}_\tau$–измеримых случайных элементов X_n. Введем величины

$$a_n(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} k2^{-n}\mathbb{I}_{\left[k2^{-n},\,(k+1)2^{-n}\right)}\left(\tau(\omega)\right) \nearrow \tau(\omega),\quad n\to\infty,\quad \forall\omega.$$

Построим по ним

$$X_n(\omega) := W\Big(\min\left(t,\, a_n(\omega)\right),\, \omega\Big).$$

Тогда X_n $\mathscr{F}_\tau$–измеримы и, как следствие, X $\mathscr{F}_\tau$–измерим. Тогда и весь вектор $(\tau,\, X)$ $\mathscr{F}_\tau$–измерим. По строго марковскому свойству Y независим с $\mathscr{F}_\tau$ и, как следствие, с вектором $(\tau,\, X)$. Вследствие этого получаем, что

$$\mathrm{Law}\left((\tau,\, X,\, Y)\right) = \mathrm{Law}\left((\tau,\, X)\right)\otimes \mathrm{Law}\,(Y) = \mathrm{Law}\left((\tau,\, X)\right)\otimes \mathrm{Law}\,(W).$$

Поскольку Y — винеровский процесс, то

$$\mathrm{Law}\left((\tau,\, X,\, -Y)\right) = \mathrm{Law}\left((\tau,\, X)\right)\otimes \mathrm{Law}\,(-Y) = \mathrm{Law}\left((\tau,\, X)\right)\otimes \mathrm{Law}\,(W).$$

Теорема доказана. □

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 85.

7.3 Теорема Башелье

Лемма 7.3. *Пусть* $W = \left\{W(t),\, t\geqslant 0\right\}$ *— винеровский процесс. Положим*

$$\tau_y := \inf\left\{t\geqslant 0:\ W(t) = y\right\}.$$

Тогда $\forall t,\, x,\, y\geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(\tau_y\leqslant t,\, W(t) < y - x\right) = \mathsf{P}\left(W(t) > y + x\right).$$

Доказательство. При $y = 0$ теорема верна, поскольку равенство в ее формулировке превращается в равенство $\mathsf{P}\left(W(t)\leqslant -x\right) = \mathsf{P}\left(W(t)\leqslant x\right)$.
Пусть теперь $y > 0$. Согласно обязательной задаче 6.2 τ_y — момент остановки относительно естественной фильтрации W. Построим отраженный процесс $Z = \left\{Z(t),\, t\geqslant 0\right\}$ так же, как в теореме 7.2, используя τ_y в качестве момента отражения τ. Введем

$$\sigma_y := \inf\left\{t\geqslant 0:\ Z(t) = y\right\}.$$

Очевидно, тогда $\tau_y \equiv \sigma_y$ для всех $\omega \in \{\tau_y < \infty\}$. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W \in B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W \in B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W \in \widetilde{B} \cap B\right)$$

$\forall B \in \mathscr{B}\left(\mathrm{C}[0,\,\infty)\right)$, $t \geqslant 0$, где

$$\widetilde{B} = \left\{ f \in \mathrm{C}[0,\,\infty) : \sup_{s\in[0,\,t]} f(s) \geqslant y \right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, Z \in B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(Z \in \widetilde{B} \cap B\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W \in \widetilde{B} \cap B\right)$$

по теореме 7.2. Таким образом, показали, что случайные элементы $(\tau_y,\, W)$ и $(\sigma_y,\, Z)$ имеют одинаковые распределения. Из этого следует, что $\forall x \in \in \mathbb{R},\, t, y \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y - x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, Z(t) < y - x\right).$$

В силу непрерывности траекторий W имеем $W\left(\tau_y(\omega),\, \omega\right) = y$, $y \geqslant 0$. Поэтому для $t \geqslant \sigma_y(\omega)$ по определению Z получаем, что

$$Z(t,\, \omega) \;=\; 2W\left(\tau_y(\omega),\, \omega\right) - W\left(t,\, \omega\right) = 2y - W(t,\, \omega).$$

Таким образом, при всех $y \geqslant 0$ получаем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y - x\right) \;&=\; \mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, Z(t) < y - x\right) \;= \\ &=\; \mathsf{P}\left(\sigma_y \leqslant t,\, W(t) > y + x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) > y + x\right).\end{aligned}$$

Тогда при $x \geqslant 0$ получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y - x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) > y + x\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W(t) > y + x\right),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 89.

Теорема 7.4 (Башелье)**.** *Пусть* $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ *— винеровский процесс. Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W_s \geqslant y\right) \;=\; 2\,\mathsf{P}\left(W_t \geqslant y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(|W_t| \geqslant y\right).$$

Доказательство. Возьмем $x = 0$ в лемме 7.3. Тогда получим, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_y \leqslant t,\, W(t) < y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W(t) < y\right) \;=\; \mathsf{P}\left(W(t) > y\right).$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W(t) < y\right) + \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,\,t]} W(s) \geqslant y,\, W(t) \geqslant y\right) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\big(W(t) > y\big) + \mathsf{P}\big(W(t) \geqslant y\big) = 2\,\mathsf{P}\big(W(t) \geqslant y\big)\,,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Доказательство взято из [1], стр. 90.

8 Лекция от 05.04.17
Мартингалы

8.1 Мартингалы. Определения. Примеры

Определение 8.1. Действительный процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, называется *мартингалом* относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если выполнены три условия:

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathsf{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathsf{E}\big(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\big) \overset{\text{п.н.}}{=} X_s \quad \forall\, s,\, t \in T,\ s \leqslant t$.

X называется *субмартингалом* относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathsf{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathsf{E}\big(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\big) \overset{\text{п.н.}}{\geqslant} X_s \quad \forall\, s,\, t \in T,\ s \leqslant t$.

X называется *супермартингалом* относительно $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$;
2. $\mathsf{E}|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$;
3. $\mathsf{E}\big(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\big) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} X_s \quad \forall\, s,\, t \in T,\ s \leqslant t$.

Замечание. Дальше будем также использовать для мартингала обозначение $(X_t,\, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$.

Пример 8.1. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — процесс с независимыми приращениями, $\mathscr{F}_t := \sigma\{X_s,\, s \leqslant t,\, s \in T\}$, $t \in T$, — естественная фильтрация процесса. Тогда X — мартингал относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_s$ $\forall s,\, t \in T$, то есть $\mathsf{E}X_t = \mathrm{const}$.

Доказательство. Действительно, пусть X — мартингал, $s \leqslant t$. Тогда

$$
\mathsf{E}\big(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\big) = \mathsf{E}\big(X_t - X_s + X_s \,|\, \mathscr{F}_s\big) = \mathsf{E}\big(X_t - X_s \,|\, \mathscr{F}_s\big) + \mathsf{E}\big(X_s \,|\, \mathscr{F}_s\big)\,.
$$

Известны следующие свойства условного математического ожидания: во–первых, если случайная величина ξ независима с σ–алгеброй $\mathscr{F}$, то

$$
\mathsf{E}\big(\xi \,|\, \mathscr{F}\big) = \mathsf{E}\xi;
$$

во–вторых, если случайная величина η измерима относительно σ–алгебры $\mathscr{F}$, то

$$\mathsf{E}\left(\eta \,|\, \mathscr{F}\right) \;=\; \eta.$$

Воспользуемся в силу независимости приращений этими свойствами с $\xi = X_s$ и $\eta = X_t - X_s$:

$$\mathsf{E}\left(X_t - X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right) + \mathsf{E}\left(X_s \,|\, \mathscr{F}_s\right) \;=\; \mathsf{E}X_t - \mathsf{E}X_s + X_s \;=\; X_s$$

по условию 3. Из этого и получаем, что $\forall\, t,\, s \in T$

$$\mathsf{E}X_t \;=\; \mathsf{E}X_s.$$

Для доказательства утверждения в обратную сторону достаточно провести то же рассуждение в обратном порядке. □

Следствие. *Винеровский процесс* $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ *— мартингал относительно естественной фильтрации, поскольку* $\mathsf{E}W_t \equiv 0$.
Пуассоновский процесс интенсивности λ $N = \{N_t,\, t \geqslant 0\}$ *не является мартингалом относительно естественной фильтрации, поскольку* $\mathsf{E}N_t = \lambda t \neq \mathrm{const}$. *Однако процесс* $\{N_t - \mathsf{E}N_t,\, t \geqslant 0\}$ *является мартингалом относительно естественной фильтрации.*

Замечание. Если X — мартингал относительно какой-то фильтрации, то он заведомо является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса.

Пример 8.2. Пусть $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — независимые случайные величины такие, что $\mathsf{E}|\xi_k| < \infty \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Построим по ним процесс $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $(S_n)_{n\geqslant 1}$ — мартингал относительно естественной фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ процесса S (которая совпадает с естественной фильтрацией последовательности $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$) $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}\xi_2 = \mathsf{E}\xi_3 = \ldots = 0$ (при этом $\mathsf{E}\xi_1$, вообще говоря, может быть любым). Если величины ξ_k при этом еще и одинаково распределены, то тогда и $\mathsf{E}\xi_1$ обязано равняться нулю.

Пример 8.3 (мартингал Леви)**.** Пусть $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$, — фильтрация, ξ — случайная величина, $\mathsf{E}|\xi| < \infty$. Тогда

$$X_t \;:=\; \mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right),\, t \in T, \;\text{— мартингал относительно}\; (\mathscr{F}_t)_{t\in T}\,.$$

Доказательство. Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ по определению условного матожидания;
2. $\mathsf{E}\,|X_t| < \infty$, так как

$$\mathsf{E}\left(\Big|\mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{F}_t\right)\Big|\right) \;\leqslant\; \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(|\xi| \,\big|\, \mathscr{F}_t\right)\right) = \mathsf{E}|\xi| < \infty;$$

3. $\mathsf{E}\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = X_s$ по телескопическому свойству условного матожидания

$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{A}_1\right) \,\big|\, \mathscr{A}_2\right) \;=\; \mathsf{E}\left(\xi \,|\, \mathscr{A}_2\right) \;\; \forall\, \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{F},$$

примененному к $\mathscr{A}_2 = \mathscr{F}_s$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{F}_t$.

□

Пример 8.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины, $\mathsf{E}\xi_k = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Построим по ним процесс $X_n := \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$. Тогда $(X_n)_{n \geqslant 1}$ — мартингал относительно естественной фильтрации (как и в примере 8.2, в этом случае $\mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$).

Доказательство. Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1. $X_t \in \mathscr{F}_t \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по определению $\mathscr{F}_t$;
2. $\mathsf{E}\,|X_t| = 1 < \infty$;
3. $\mathsf{E}\left(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_s \cdot \ldots \cdot \xi_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_s\, \mathsf{E}\left(\xi_{s+1} \cdot \ldots \cdot \xi_t\right) =$
   $= \xi_1 \cdot \ldots \xi_s = X_s$.

□

8.2 Разложение Дуба

Определение 8.2. Процесс $A = \{A_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *предсказуемым*, если A_n измерим относительно $\mathscr{F}_{n-1}$ $\forall n \geqslant 0$. Здесь полагаем $\mathscr{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$.

Теорема 8.1 (Дуба)**.** *Пусть $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — случайный процесс такой, что $\mathsf{E}\,|X_n| < \infty \; \forall n$, $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, причем $X_n \in \mathscr{F}_n \,|\, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \;\; \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$X = M + A,$$

то есть

$$X_n = M_n + A_n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ — мартингал относительно фильтрации } (\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+},$$
$$A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ — предсказуемый процесс такой, что } A_0 \equiv 0.$$

Это представление процесса X в виде суммы мартингала и предсказуемого процесса однозначно почти наверное.

Доказательство. Теорема утверждает существование и единственность (почти наверное) такого разложения. Сначала предположим, что существование доказано, и выведем единственность.
Положим $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$. Тогда $\Delta X_n = \Delta M_n + \Delta A_n$, то есть $\Delta A_n = \Delta X_n - \Delta M_n$. Из предсказуемости процесса A получаем, что

$$\Delta A_n = \mathsf{E}\left(\Delta A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) - \mathsf{E}\left(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right),$$

при этом

$$\mathsf{E}\left(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left(M_n - M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left(M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) - M_{n-1} = 0$$

по свойству 3. из определения мартингала. Таким образом, получаем, что

$$\Delta A_n = \mathsf{E}\left(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right),$$

из чего вытекает, что

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right),$$

то есть A_n определяется по X однозначно (почти наверное, как и вообще равенство случайных величин); тогда и $M_n = X_n - A_n$ тоже определяется однозначно по X, то есть разложение единственно.
Теперь докажем существование. Рассуждение выше подсказывает нам явный вид A_n. Положим

$$A_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right),\; n \geqslant 1;\;\; A_0 \equiv 0.$$

Тогда $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — предсказуемый процесс. Тогда

$$M_n := X_n - A_n \;\Rightarrow\; \Delta M_n \;:=\; \Delta X_n - \Delta A_n \;=\; \Delta X_n - \mathsf{E}\left(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right),$$

из чего получаем, что

$$\mathsf{E}\left(\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \;=\; 0,$$

то есть $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Теорема доказана. □

Замечание. Несмотря на то что все равенства случайных величин в теореме 8.1 считаются равенствами почти наверное, в формулировке теоремы A_0 полагается тождественно равным нулю. Это делается, чтобы обеспечить измеримость A_0 относительно антидискретной σ–алгебры $\mathscr{F}_{-1}$. Если договориться, что все σ–алгебры пополняются классом нулевых событий, то можно считать, что $A_0 = 0$ почти наверное.
При этом если $(X_t,\, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ — мартингал, то и $\left(X_t,\, \bar{\mathscr{F}}_t\right)_{t\in T}$ — мартингал, где $\bar{\mathscr{F}}_t$ — σ–алгебра $\mathscr{F}_t$, пополненная классом нулевых событий.

8.3 Формула Танаки

Лемма 8.2. *Пусть* $(X_n,\, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *— мартингал,* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— выпуклая вниз функция. Тогда*

$$\left(h\,(X_n)\,,\, \mathscr{F}_n\right)_{n\in\mathbb{Z}_+} \;-\; \textit{субмартингал.}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Йенсена для условного матожидания:

$$\mathsf{E}\Big(h\,(X_n)\;\big|\,\mathscr{F}_{n-1}\Big) \;\geqslant\; h\Big(\mathsf{E}\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\Big) \;=\; h\,(X_{n-1})\,.$$

□

Пример 8.5 (формула Танаки)**.** Пусть $\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathsf{P}\left(\varepsilon_k = -1\right) \;=\; \mathsf{P}\left(\varepsilon_k = 1\right) \;=\; 1/2$. Построим по ним процесс $S_n := \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 := 0$. Тогда из примера 8.1 следует, что $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал, а из леммы 8.2 следует, что $\left(|S_n|\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — субмартингал относительно фильтрации, состоящей из σ–алгебр вида $\mathscr{F}_n = \sigma\left\{\varepsilon_1,\, \ldots,\, \varepsilon_n\right\}$.
Найдем разложение Дуба для этого субмартингала, подходящего под условия теоремы 8.1.
Знаем из 8.1, что

$$A_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right),\;\; X_k \;=\; |S_k|,$$

то есть

$$A_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(|S_k| - |S_{k-1}| \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left(\mathsf{E}\left(|S_k| \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) - |S_{k-1}|\right).$$

Рассмотрим первое слагаемое члена суммы, зная, что S_{k-1} $\mathscr{F}_{k-1}$–измеримо, что ε_k независимо с $\mathscr{F}_{k-1}$ и что $\mathsf{E}\varepsilon_k = 0$, $|\varepsilon| = 1$ почти наверное:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(|S_k| \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;&=\; \mathsf{E}\left(|S_{k-1}+\varepsilon_k| \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;= \\
&= \mathsf{E}\Big(|S_{k-1}+\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} + |S_{k-1}+\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} + \\
&+ |S_{k-1}+\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\} \,\Big|\, \mathscr{F}_{k-1}\Big) \;=\; \mathsf{E}\left((S_{k-1}+\varepsilon_k)\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) + \\
&+\; \mathsf{E}\left(|\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;-\; \mathsf{E}\left((S_{k-1}+\varepsilon_k)\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\} \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;= \\
&= \mathbb{I}\{S_{k-1}>0\}\,\mathsf{E}\left((S_{k-1}+\varepsilon_k) \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;+\; \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} \;- \\
&-\; \mathbb{I}\{S_{k-1}<0\}\,\mathsf{E}\left((S_{k-1}+\varepsilon_k) \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \;= \\
&=\; S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} \;+\; \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} \;-\; S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\}.
\end{aligned}$$

Итак, получили, что

$$\mathsf{E}\left(|S_k| \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) = S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} \;+\; \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} \;-\; S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\}.$$

Заметим, что

$$|S_{k-1}| \;=\; S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} - S_{k-1}\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\}.$$

Из двух равенств выше получаем, что

$$\mathsf{E}\left(|S_k| \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) - |S_{k-1}| \;=\; \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\},$$

то есть

$$A_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}.$$

Рассмотрим M_n (напомним, что $S_0 \equiv 0$):

$$\begin{aligned}
M_n \;=\; X_n - A_n \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\big(|S_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}\big) \;= \\
&= \sum_{k=1}^{n}\big(|S_{k-1}+\varepsilon_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}\big) \;= \\
&= \sum_{k=1}^{n}\big(\varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} - \varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\} + |\varepsilon_k|\,\mathbb{I}\{S_{k-1}=0\} - \mathbb{I}\{S_{k-1}=0\}\big) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\big(\varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}>0\} - \varepsilon_k\,\mathbb{I}\{S_{k-1}<0\}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\,\operatorname{sign} S_{k-1},
\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили, что

$$\underbrace{|S_n|}_{X_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \operatorname{sign} S_{k-1}}_{M_n}.$$

Это разложение Дуба и называется **формулой Танаки**.

Следствие. *Обозначим через* $\mathrm{L}_n(0)$ *число нулей последовательности* $(S_k)_{0\leqslant k<n}$. *Из формулы выше явно видно, что* $\mathrm{L}_n(0) = A_n$. *Верно следующее утверждение:*

$$\mathsf{E}\mathrm{L}_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Так как $\mathsf{E}M_n = 0\ \forall n$, то $\mathsf{E}A_n = \mathsf{E}\,|S_n|$. Поскольку $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, то

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad n \to \infty$$

по центральной предельной теореме. Тогда

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} |Y|.$$

Как было показано в теореме 3.3,

$$\xi_n \xrightarrow{\text{law}} \xi \not\Rightarrow \mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi, \quad n \to \infty.$$

Согласно теоремам 3.4 и 3.5, для того чтобы показать сходимость матожиданий, достаточно найти $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_n \mathsf{E}\,|\xi_n|^{1+\delta} < \infty.$$

Возьмем $\delta = 1$. Тогда

$$\mathsf{E}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \mathsf{E}\,\frac{S_n^2}{n} = \frac{\mathsf{D}S_n}{n} = \frac{n\mathsf{D}\varepsilon_1}{n} = 1 < \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\,\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \to \mathsf{E}\,|Y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad n \to \infty,$$

то есть

$$\mathsf{E}\mathrm{L}_n(0) \to \sqrt{\frac{2}{\pi} n},$$

что и требовалось доказать. □

8.4 Теорема Дуба об остановке

Теорема 8.3. *Пусть X_n измерима относительно $\mathscr{F}_n$ $\forall n$, $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, $\mathsf{E}\,|X_n| < \infty$ $\forall n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$(X_n,\,\mathscr{F}_n)$ — мартингал;*
2. *$\forall$ марковских моментов $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant m$, где $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число,*

$$\mathsf{E}\left(X_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_\sigma\right) \;=\; X_\sigma.$$

Доказательство. Докажем 1. $\Rightarrow$ 2.
Пусть $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — мартингал. Заметим, что

$$\mathsf{E}\,|X_\tau| \;=\; \mathsf{E}\sum_{k=0}^{m} |X_\tau|\,\mathbb{I}\,\{\tau = k\} \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{m}\mathsf{E}\,|X_k| \;<\; \infty,$$

поэтому вообще целесообразно говорить о матожидании из утверждения 2. Для того чтобы доказать, что $\mathsf{E}\left(X_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_\sigma\right) = X_\sigma$, необходимо и достаточно проверить, что X_σ — $\mathscr{F}_\sigma$–измеримая случайная величина, а также что $\forall A \in \in \mathscr{F}_\sigma$

$$\mathsf{E}X_\tau\mathbb{I}\,(A) \;=\; \mathsf{E}X_\sigma\mathbb{I}\,(A)\,,$$

то есть что выполнено интегральное свойство.
Покажем $\mathscr{F}_\sigma$–**измеримость** X_σ. Для этого по определению $\mathscr{F}_\sigma$ нужно показать, что $\forall$ борелевских B и $\forall k$

$$\{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leqslant k\} \in \mathscr{F}_k.$$

Заметим, что

$$\{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leqslant k\} \;=\; \bigcup_{r=0}^{m} \{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma = r\} \cap \{\sigma \leqslant k\} \;=\; \bigcup_{r=0}^{\min(m,\,k)} \{X_r \in B\} \cap \{\sigma = r\}\,.$$

При этом $\{X_r \in B\} \in \mathscr{F}_r$ и $\{\sigma = r\} \in \mathscr{F}_r$, поскольку σ — марковский момент. Тогда, поскольку $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — фильтрация,

$$\{X_r \in B\} \cap \{\sigma = r\} \in \mathscr{F}_r \subset \mathscr{F}_{\min(m,\,k)} \subset \mathscr{F}_k.$$

Измеримость доказана.
Проверим **интегральное свойство**. Напомним, что для этого нужно доказать равенство

$$\mathsf{E}X_\tau\mathbb{I}\,(A) \;=\; \mathsf{E}X_\sigma\mathbb{I}\,(A)$$

$\forall A \in \mathscr{F}_\sigma$. Сначала заметим, что, поскольку $\sigma \leqslant \tau$ почти наверное,

$$\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\} \overset{\text{п.н.}}{=} 1.$$

Тогда

$$\mathsf{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \;=\; \mathsf{E}X_\sigma\,\mathbb{I}_A\,\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\sigma\,\mathbb{I}_A\,\mathbb{I}\{\sigma = k\}\,\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\}.$$

Обозначим $\mathbb{I}_A\,\mathbb{I}\{\sigma = k\} \;=\; \mathbb{I}_{A\cap\{\sigma=k\}} \;=\; \mathbb{I}_{B_k}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\sigma\,\mathbb{I}_A\,\mathbb{I}\{\sigma = k\}\,\mathbb{I}\{\sigma \leqslant \tau\} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\big(\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\big) \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}.$$

Поскольку X — мартингал, то

$$\mathsf{E}\Big(X_{k+1}\,\big|\,\mathscr{F}_k\Big) \;=\; X_k.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\} \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big(X_{k+1}\,\big|\,\mathscr{F}_k\Big)\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\Big].$$

Поскольку $\{\tau \geqslant k+1\} \;=\; \Omega\setminus\{\tau \leqslant k\} \in \mathscr{F}_k$, так как τ — марковский момент, и $B_k \in \mathscr{F}_k$, то

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big(X_{k+1}\,\big|\,\mathscr{F}_k\Big)\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\Big] \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\tau\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\Big(X_{k+1}\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\,\big|\,\mathscr{F}_k\Big)\Big] \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\tau\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}\left(X_{k+1}\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}\right).$$

Таким образом, получили, что

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_\tau\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_{k+1}\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k+1\}.$$

Продолжая далее, расписывая $\{\tau \geqslant k+1\} \;=\; \{\tau = k+1\} + \{\tau \geqslant k+2\}$ и так далее, получаем, что

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{E}X_k\,\mathbb{I}_{B_k}\,\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_k \, \mathbb{I}_{B_k} \left(\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau = k+1\} + \ldots + \mathbb{I}\{\tau = m\} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_{B_k} \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \; = \; \sum_{k=0}^{m} \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \; =$$

$$= \; \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_A \, \mathbb{I}\{\tau \geqslant \sigma\} \; = \; \mathsf{E} X_\tau \, \mathbb{I}_A,$$

поскольку, как указывалось выше, $\mathbb{I}\{\tau \geqslant \sigma\} = 1$. Таким образом, интегральное свойство доказано, а значит, доказано 1. $\Rightarrow$ 2.
Докажем 1. $\Leftarrow$ 2.
Пусть известно, что $\forall$ моментов остановки $\sigma \leqslant \tau \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{E} \left(X_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_\sigma \right) = X_\sigma,$$

и нужно доказать, что $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Проверим свойство 3.: возьмем $i < j$, $\sigma \equiv i$, $\tau \equiv j$. Тогда $\mathscr{F}_\sigma \equiv \equiv \mathscr{F}_i$, $\mathscr{F}_\sigma \equiv \mathscr{F}_i$, а значит, $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 8.3. Тогда для любого ограниченного марковского момента $\tau \leqslant m \in \mathbb{N}$*

$$\mathsf{E} X_\tau = \mathsf{E} X_0,$$

поскольку 0 — ограниченный марковский момент, $0 \leqslant \tau$.

Следствие. *Пусть* $\left| X_{\min(\tau,\, n)} \right| \leqslant C \; \forall n \geqslant 0$. *Тогда*

$$\mathsf{E} X_\tau = \mathsf{E} X_0.$$

Доказательство. Заметим, что $\tau_n := \min(\tau,\, n)$ — это ограниченный марковский момент. Значит, для него и нуля применима теорема 8.3 и, следовательно,

$$\mathsf{E} X_{\tau_n} \; = \; \mathsf{E} X_0.$$

Заметим также, что $X_{\tau_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\tau$, поскольку для каждой реализации процесса (то есть для каждой $\omega \in \Omega$) найдется достаточно большое n такое, что $n > \tau(\omega)$ и что, следовательно, $\min\big(n,\, \tau(\omega)\big) = \tau(\omega)$. При этом по условию $\left| X_{\min(\tau,\, n)} \right| \leqslant C \; \forall n \geqslant 0$. Поэтому применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости, по которой

$$\mathsf{E} X_0 = \mathsf{E} X_{\tau_n} \; \to \; \mathsf{E} X_\tau, \; n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 8.4 (первое тождество Вальда)**.** *Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{E}\,|\xi_1| < \infty$, τ — марковский момент относительно естественной фильтрации $\mathscr{F}_n = \sigma\,\{\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n\}$, $\mathsf{E}\tau < \infty$. Тогда*

$$\mathsf{E} \left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \right) \; = \; \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{E}\tau.$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\}.$$

Заметим, что

$$\{\tau \geqslant k\} \;=\; \Omega \setminus \{\tau \leqslant k-1\} \;\in\; \mathscr{F}_{n-1}.$$

Поэтому, поскольку ξ_i — независимые случайные величины, ξ_k независима с $\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\}$. Тогда

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) \;=\; \mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k \mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k \mathsf{E}\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=\;$$
$$=\; \mathsf{E}\xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}\{\tau \geqslant k\} \;=\; \mathsf{E}\xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau \geqslant k\right).$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau \geqslant k\right) \;=\; \sum_{p=1}^{\infty} p\, \mathbb{I}\{\tau = p\},$$

то есть

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) \;=\; \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{E}\tau,$$

что и требовалось доказать. □

9 Лекция от 12.04.17

Марковские процессы

9.1 Задача о разорении игрока

Пример 9.1 (задача о разорении игрока)**.** Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{P}\left(\xi_1 = 1\right) \,=\, p$, $\mathsf{P}\left(\xi_1 = -1\right) \,=\, 1 - p \,=:\, q$. Возьмем целые числа x, a, b такие, что $a < b$, $x \in (a,\, b)$. Положим

$$\begin{aligned} S_0 &:= x, \\ S_n &:= x + \xi_1 + \ldots + \xi_n. \end{aligned}$$

Сразу отметим, что $(S_n,\, \mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал, поскольку это процесс с независимыми приращениями и постоянным матожиданием. Введем также

$$\begin{aligned} \tau_a &:= \inf\{n : S_n = a\}, \\ \tau_b &:= \inf\{n : S_n = b\}, \\ \tau &:= \inf\{n : S_n \notin (a,\, b)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что все они являются марковскими моментами относительно естественной фильтрации процесса $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где $\mathscr{F}_n := \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \geqslant 1$, а $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Также отметим, что τ — это момент остановки (это следует из обязательной задачи 1.1).
Задача состоит в том, чтобы найти $\mathsf{P}(\tau_a < \tau_b)$.
Рассмотрим сначала отдельно (являющийся особым) случай $p = q = 1/2$. Заметим, что

$$|S_{\tau_n}| := \left|S_{\min(\tau,\, n)}\right| \leqslant \max\left(|a|,\, |b|\right),$$

поскольку либо момент τ первого выхода на границу интервала $(a,\, b)$ наступил до n, и тогда неравенство верно, либо не наступил, тогда верно даже строгое неравенство (потому что все еще находимся внутри интервала). Это означает, что можно применить следствие 2 из теоремы 8.3 и сказать, что

$$\mathsf{E}S_\tau \;=\; \mathsf{E}S_0 \;=\; x.$$

При этом

$$\mathsf{E}S_\tau \;=\; a\,\mathsf{P}(S_\tau = a) + b\,\mathsf{P}(S_\tau = b)\,.$$

Поскольку τ — момент (первого) выхода на границу интервала $(a,\, b)$, то $\mathsf{P}(S_\tau = a) + \mathsf{P}(S_\tau = b) = 1$. Таким образом,

$$x \;=\; a\,\mathsf{P}(S_\tau = a) + b\left(1 - \mathsf{P}(S_\tau = a)\right),$$

то есть

$$\mathsf{P}(\tau_a < \tau_b) \;=\; \mathsf{P}(S_\tau = a) \;=\; \frac{b-x}{b-a}\,.$$

Теперь рассмотрим случай $p \neq q$.
Положим

$$X_n \;:=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n},\; n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда $(X_n,\, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Действительно, проверим три свойства из определения мартингала:

1. X_n измерим относительно $\mathscr{F}_n$;
2. $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, так как
$$\mathsf{E}|X_n| \;=\; \sum_{k=x-n}^{x+n} \left|\frac{q}{p}\right|^k \mathsf{P}(S_n = k)\,;$$
3.
$$\mathsf{E}\left(X_{n+1} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \mathsf{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1+\ldots+\xi_n+\xi_{n+1}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \mathsf{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} =$$
$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q}\right) \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \;=\; X_n.$$

Таким образом, показали, что это мартингал. При этом

$$|X_n| \leqslant \max\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a,\, \left(\frac{q}{p}\right)^b\right).$$

Тогда, как и выше, применимо следствие 2 из теоремы 8.3 и, следовательно,

$$\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Вместе с этим

$$\mathsf{E}X_\tau = \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathsf{P}(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathsf{P}(S_\tau = b)$$

и

$$\mathsf{P}(S_\tau = a) + \mathsf{P}(S_\tau = b) = 1,$$

то есть

$$\left(\frac{q}{p}\right)^a \mathsf{P}(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b (1 - \mathsf{P}(S_\tau = a)) = \left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

или

$$\mathsf{P}(\tau_a < \tau_b) = \mathsf{P}(S_\tau = a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

9.2 Марковские процессы

Определение 9.1. Введем σ–алгебру $\mathscr{F}_{\geqslant s} = \sigma\{X_u,\, u \geqslant s,\, u \in T\}$. Тогда процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$, называется *марковским процессом*, если $\forall s \in T$ и $\forall B \in \mathscr{F}_{\geqslant s}$

$$\mathsf{P}\Big(B \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big) = \mathsf{P}\Big(B \,\Big|\, X_s\Big).$$

Замечание (эквивалентное определение 1). Пусть $X_t : \Omega \to S_t$, где $(S_t,\, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ — семейство борелевских пространств. Тогда процесс $X = \{X_t,\, t \in T\}$ является марковским процессом тогда и только тогда, когда для любых $s \leqslant t$, $s,\, t \in T$ и для любой $\mathscr{B}_t$–измеримой функции $f : S_t \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}\Big(f(X_t) \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big) = \mathsf{E}\Big(f(X_t) \,\Big|\, X_s\Big).$$

Доказательство. Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 184. □

Замечание (эквивалентное определение 2). Марковость относительно своей естественной фильтрации процесса $X = \{X_t,\, t \in T\}$, принимающего при каждом $t \in T$ значения в борелевском пространстве $(S_t,\, \mathscr{B}_t)$, равносильна следующему свойству: для любого $m \geqslant 1$ и всех $s_1 < \ldots < s_m < s \leqslant t$, где s, t и все s_i лежат в T, а также для произвольной ограниченной $\mathscr{B}_t$–измеримой функции f

$$\mathsf{E}\Big(f(X_t) \,\Big|\, X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s\Big) = \mathsf{E}\Big(f(X_t) \,\Big|\, X_s\Big).$$

Последнее соотношение эквивалентно тому, что для любого множества $B \in \mathscr{B}_t$

$$\mathsf{P}\Big(X_t \in B \,\Big|\, X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s\Big) = \Big(X_t \in B \,\Big|\, X_s\Big).$$

Доказательство. Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 185. □

Теорема 9.1. *Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда X — марковский процесс относительно своей естественной фильтрации.*

Доказательство. Будем показывать, что выполнены условия замечания выше. Возьмем $\forall\, s_1, \ldots, s_m \in T < t \in T\ \forall m \in \mathbb{N}$. Положим $\zeta_1 := X_{s_1}$, $\zeta_2 := X_{s_2} - X_{s_1}, \ldots, \zeta_m := X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$, $\eta := X_t - X_{s_m}$. Тогда $\sigma\{X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\} = \sigma\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$, поскольку связь линейна и невырождена. Следовательно,

$$\mathsf{E}\Big(f(X_t) \bigm| X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\Big) = \mathsf{E}\Big(f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta) \bigm| \zeta_1, \ldots, \zeta_m\Big).$$

Обозначим

$$\zeta := (\zeta_1, \ldots, \zeta_m); \quad g(\zeta, \eta) := f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta).$$

Тогда ζ и η независимы, g — борелевская функция и

$$\mathsf{E}\Big(f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta) \bigm| \zeta_1 = x_1, \ldots, \zeta_m = x_m\Big) = \mathsf{E}\Big(g(\zeta, \eta) \bigm| \zeta = x\Big) = \\ = \mathsf{E} g(\eta, x),$$

поскольку ζ и η независимы. Обозначим

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) := \mathsf{E} f\left(\sum_{i=1}^m x_i + \eta\right).$$

Тогда для любой ограниченной измеримой функции f φ — измеримая ограниченная функция (это нуждается в дополнительном доказательстве). Таким образом,

$$\mathsf{E}\left(f(\zeta_1 + \ldots + \zeta_m + \eta) \,\middle|\, \zeta_1 = x_1, \ldots, \zeta_m = x_m\right) = \varphi(x),$$

то есть

$$\mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i\right).$$

Заметим тогда, что по телескопическому свойству условного матожидания

$$\mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, X_{s_m}\right) = \mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \zeta_i\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(f(X_t) \,\middle|\, \zeta_1, \ldots, \zeta_m\right) \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \zeta_i\right) = \mathsf{E}\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i\right) \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \zeta_i\right) =$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\right) = \mathsf{E}\left(f\left(X_t\right)\,\middle|\,X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\right),$$

то есть

$$\mathsf{E}\left(f\left(X_t\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(f\left(X_t\right)\,\middle|\,X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\right) = \mathsf{E}\left(f\left(X_t\right)\,\middle|\,X_{s_m}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие. *Случайное блуждание, пуассоновский процесс и винеровский процесс являются марковскими процессами.*

Определение 9.2. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — марковский процесс, при этом $X_t : \Omega \to S$, S конечно или счетно. Тогда X называется *марковской цепью.*

Замечание. В данном случае будем отождествлять каждый элемент S с его номером.

Замечание. Если $X_t : \Omega \to S$, где S конечно или счетно, то определение марковости можно переписать в следующей эквивалентной формулировке: $\forall m\, \forall\, s_1 < \ldots < s_m < t,\ s_i,\, t \in T,\ \forall\, i_1, \ldots, i_m,\, j \in S$

$$\mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m\right) = \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_{s_m} = i_m\right)$$

при условии, что

$$\mathsf{P}\left(X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m\right) \neq 0.$$

9.3 Свойства переходных вероятностей

Определение 9.3. Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — марковский процесс, причем $X_t : \Omega \to S$. Обозначним

$$\mathbb{S}_t := \left\{i : \mathsf{P}\left(X_t = i\right) \neq 0\right\}.$$

Введем для $s \leqslant t,\ i \in \mathbb{S}_s,\ j \in \mathbb{S}_t$

$$\mathrm{p}_{ij}(s,\, t) := \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_s = i\right).$$

Число $\mathrm{p}_{ij}(s,\, t)$ называется *переходной вероятностью* (из i в момент s в j в момент t).

Теорема 9.2 (свойства переходных вероятностей)**.** *Если X — марковская цепь, то $\mathrm{p}_{ij}(s,\, t)$ обладают следующими свойствами:*

1. $\mathrm{p}_{ij}(s,\, t) \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{j \in \mathbb{S}_t} \mathrm{p}_{ij}(s,\, t) = 1$;
3. $\mathrm{p}_{ij}(s,\, s) = \delta_{ij}$;
4. $\forall\, s < u < t\ \mathrm{p}_{ij}(s,\, t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{S}_u} \mathrm{p}_{ik}(s,\, u)\, \mathrm{p}_{kj}(u,\, t)$.

Доказательство. Проверим свойства.

1. Следует из определения: вероятности неотрицательны.
2. Следует из формулы полной вероятности.
3. Следует из определения.
4. По определению

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) \;&=\; \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_s = i\right) \;=\; \frac{\mathsf{P}\left(X_t = j,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;= \\
&= \sum_{k \in S} \frac{\mathsf{P}\left(X_t = j,\, X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;= \\
&= \sum_{k\colon \mathsf{P}(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k,\, X_s = i\right) \frac{\mathsf{P}\left(X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)}
\end{aligned}$$

Поскольку X — марковская цепь, то

$$\mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k,\, X_s = i\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k\right).$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\colon \mathsf{P}(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k,\, X_s = i\right) \frac{\mathsf{P}\left(X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;= \\
&= \sum_{k\colon \mathsf{P}(X_u = k,\, X_s = i) \neq 0} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k\right) \frac{\mathsf{P}\left(X_u = k,\, X_s = i\right)}{\mathsf{P}\left(X_s = i\right)} \;= \\
&= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} \mathsf{P}\left(X_t = j \,\middle|\, X_u = k\right) \mathsf{P}\left(X_u = k \,\middle|\, X_s = i\right) \;= \\
&= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} \mathrm{p}_{ik}(s,\,u)\, \mathrm{p}_{kj}(u,\,t).
\end{aligned}$$

□

Замечание (доопределение переходных вероятностей). В определении 9.3 переходные вероятности $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t)$ вводились не для всех возможных состояний $i,\,j \in S$, а только для $i \in \mathbb{S}_s$, $j \in \mathbb{S}_t$. Доопределим для всех $i,\,j \in S$, $s < t \in T$ следующим образом:

1. если $i \in \mathbb{S}_s$, $j \notin \mathbb{S}_t$, то $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) := 0$;
2. если $i \notin \mathbb{S}_s$, то выбираем и фиксируем произвольное $i_0 = i_0(s) \in \mathbb{S}_s$ и определяем $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) := \mathrm{p}_{i_0 j}(s,\,t)$.

В случае $s = t$ по определению полагаем $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t) := \delta_{ij}$.
Тогда для так определенных переходных вероятностей выполнены свойства 1.–4. из теоремы 9.2.

Теорема 9.3. *Конечномерные распределения цепи Маркова* $X = \{X_t,\, t \in T\}$, *где* $0 \in T \subset [0,\,\infty)$, *однозначно определяются начальным распределением* $\mathsf{P}\left(X_0 = i\right)$ *и переходными вероятностями* $\mathrm{p}_{ij}(s,\,t)$.

Доказательство. Действительно, возьмем $\forall\, t_1 < \ldots < t_n$ и $i_1,\,\ldots,\,i_n \in S$. Тогда запишем

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1,\,\ldots,\,X_{t_n}=i_n\right) = \\
&= \mathsf{P}\Big(X_{t_n}=i_n\,\big|\,X_{t_1}=i_1,\,\ldots,\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\Big)\,\mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1,\,\ldots,\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\Big(X_{t_n}=i_n\,\big|\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\Big)\,\mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1,\,\ldots,\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right),
\end{aligned}
$$

поскольку X — марковская цепь. Продолжаем таким же образом далее и получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1,\,\ldots,\,X_{t_n}\right) = \\
&= \mathsf{P}\Big(X_{t_n}=i_n\,\big|\,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\Big)\ldots\mathsf{P}\Big(X_{t_2}=i_2\,\big|\,X_{t_1}=i_1\Big)\,\mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1\right) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1\right)\,\mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_1,\,t_2)\,\ldots\,\mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1},\,t_n).
\end{aligned}
$$

Вместе с этим

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(X_{t_1}=i_1\right) &= \sum_{k\in S}\mathsf{P}\Big(X_{t_1}=i_1\,\big|\,X_0=k\Big)\,\mathsf{P}\left(X_0=k\right) = \\
&= \sum_{k\in S}\mathrm{p}_{k i_1}(0,\,t_1)\,\mathsf{P}\left(X_0=k\right),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. □

10 Лекция от 19.04.17

Свойства марковских процессов

10.1 Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний

Определение 10.1. Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$. Введем

$$
\mathrm{p}_{ij}^{(n)} := \mathsf{P}\Big(X_{n+1}=j\,\big|\,X_n=i\Big).
$$

Замечание. Тогда $\mathrm{p}_{ij}^{(n)}\geqslant 0$, $\sum\limits_{j\in S}\mathrm{p}_{ij}^{(n)}=1$. Аналогично рассуждению в теореме 9.3 получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(X_n=i_n,\,X_{n-1}=i_{n-1},\,\ldots,\,X_0=i_0\right) = \\
&\quad = \mathsf{P}\left(X_0=i_0\right)\mathrm{p}_{i_0 i_1}(0,\,1)\,\ldots\,\mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(n-1,\,n) = \mathrm{p}_{i_0}(0)\,\mathrm{p}_{i_0 i_1}^{(0)}\,\ldots\,\mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}^{(n-1)},
\end{aligned}
$$

то есть вероятность цепочки состояний определяется начальным распределением и переходными вероятностями за единицу времени.

Лемма 10.1. *Пусть $X_0,\,U_0,\,U_1\,\ldots$ — независимые случайные величины, $X_0:\Omega\to S$, U_i равномерно распределены на $[0,\,1]$, $i\in\mathbb{Z}_+$. Введем*

$$
X_{n+1} := h_n\left(X_n,\,U_{n+1}\right),\; n\in\mathbb{Z}_+,
$$

где h_n — измеримая функция. Тогда $X_0,\,X_1,\,\ldots$ — цепь Маркова.

Доказательство. Проверим, что

$$\mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_1,\, \ldots,\, X_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_n\Big)$$

для любой ограниченной измеримой функции f. Заметим, что по определению X_{n+1}

$$\mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_1,\, \ldots,\, X_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\left(h_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right)\right) \,\big|\, X_1,\, \ldots,\, X_n\Big).$$

Поскольку для любых независимых случайных величин ξ и η и любой измеримой функции g

$$\mathsf{E}\Big(g\left(\xi,\, \eta\right) \,\big|\, \xi = x\Big) \;=\; \mathsf{E}g\left(x,\, \eta\right)$$

и поскольку по построению $X_n = H_n\left(X_0,\, U_0,\, \ldots,\, U_n\right)$ независим с U_{n+1}, где H_k — измеримая функция, то

$$\mathsf{E}\Big(f\left(h_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right)\right) \,\big|\, X_1 = x_1,\, \ldots,\, X_n = x_n\Big) \;=\; \mathsf{E}f\left(h_n\left(x_n,\, U_{n+1}\right)\right).$$

По той же самой причине

$$\mathsf{E}\Big(f\left(h_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right)\right) \,\big|\, X_n = x_n\Big) \;=\; \mathsf{E}f\left(h_n\left(x_n,\, U_{n+1}\right)\right).$$

Таким образом, доказали, что

$$\mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_1 = x_1,\, \ldots,\, X_n = x_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_n = x_n\Big),$$

что эквивалентно тому, что

$$\mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_1,\, \ldots,\, X_n\Big) \;=\; \mathsf{E}\Big(f\left(X_{n+1}\right) \,\big|\, X_n\Big).$$

Лемма доказана. □

Пример 10.1 (модель марковской цепи)**.** Как выбрать h_n так, чтобы построенная марковская цепь имела заданное начальное распределение $\mathrm{p}_i(0)$ и заданные переходные вероятности $\mathrm{p}_{ij}^{(n)}$?
Для начального распределения $\mathrm{p}_i(0)$, $i \in S$, $\#S = N$, рассмотрим следующее разбиение отрезка $[0,\, 1]$:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \;&:=\; \big[0,\, \mathrm{p}_1(0)\big),\\
\Delta_2 \;&:=\; \big[\mathrm{p}_1(0),\, \mathrm{p}_1(0) + \mathrm{p}_2(0)\big),\\
&\;\;\vdots\\
\Delta_N \;&:=\; \big[\mathrm{p}_1(0) + \ldots + p_{N-1}(0),\, 1\big].
\end{aligned}$$

Определим для $x \in [0,\, 1]$ $f(x) := k$, если $x \in \Delta_k$. Положим

$$X_0 \;:=\; f\left(U_0\right).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left(X_0 = i\right) \;=\; \mathsf{P}\big(f\left(U_0\right) = i\big) \;=\; \mathsf{P}\left(U_0 \in \Delta_i\right) \;=\; |\Delta_i| \;=\; \mathrm{p}_i(0).$$

Для переходных вероятностей $\mathrm{p}_{ij}^{(n)}$ рассмотрим аналогичное разбиение отрезка $[0,\,1]$:

$$\begin{aligned}\Delta_{i1}^{(n)} &:= \left[0,\, \mathrm{p}_{i1}^{(n)}\right),\\ \Delta_{i2}^{(n)} &:= \left[\mathrm{p}_{i1}^{(n)},\, \mathrm{p}_{i1}^{(n)} + \mathrm{p}_{i2}^{(n)}\right),\\ &\vdots\\ \Delta_{iN}^{(n)} &:= \left[\mathrm{p}_{i1}^{(n)} + \ldots + \mathrm{p}_{i(N-1)}^{(n)},\, 1\right].\end{aligned}$$

Снова определим для $x \in [0,\,1]$ $g_n(i,\,x) := j$, если $x \in \Delta_{ij}^{(n)}$. Положим

$$X_{n+1} := g_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда по лемме 10.1 $X_0,\, X_1,\, \ldots$ — марковская цепь с пространством состояний S, причем $\mathsf{P}\left(X_0 = i\right) = \mathrm{p}_i(0)$, $i \in S$, то есть начальное распределение получилось именно таким, каким мы его хотели. То же самое верно и для переходных вероятностей: поскольку по построению X_n независим с U_{n+1}, то

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(X_{n+1} = j \,\middle|\, X_n = i\right) &= \mathsf{P}\left(g_n\left(X_n,\, U_{n+1}\right) = j \,\middle|\, X_n = i\right) =\\ &= \mathsf{P}\left(g_n\left(i,\, U_{n+1}\right)\right) = \mathsf{P}\left(U_{n+1} \in g_n^{-1}\left(i,\, \{j\}\right)\right) = \left|\Delta_{ij}^{(n)}\right| = \mathrm{p}_{ij}^{(n)}\end{aligned}$$

по построению. Таким образом, для любых наперед заданных переходных вероятностей и начального распределения смогли в явном виде предъявить цепь Маркова, соответствующую им.

Замечание. Фактически это означает, что все цепи Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний устроены именно так.

Замечание. Для компьютерного моделирования с помощью этого метода подходят только цепи Маркова с относительно малым числом N.

10.2 Предельное поведение переходных вероятностей

Определение 10.2. Марковская цепь $X = \{X_t,\, t \in T\}$ называется *однородной* (во времени), если

$$\mathrm{p}_{ij}(s,\, t) = \mathrm{p}_{ij}(s + h,\, t + h)$$

$\forall s < t,\ s,\, t,\, s + h,\, t + h \in T,\ \ \forall\, i,\, j \in S.$

Замечание. Это определение означает именно то, что переходные времени зависят только от длины промежутка времени, за который происходит переход, а не от его начала или конца. Поэтому вместо $\mathrm{p}_{ij}(s,\, t)$ для однородных цепей будем писать $\mathrm{p}_{ij}(t - s)$, $t > s$.
Так что дальше будем рассматривать $\mathrm{p}_{ij}(t),\ i,\, j \in S,\ t \in T$.

Замечание (переформулировка свойств марковской цепи). Для однородной цепи переформулируем свойства марковской цепи из теоремы 9.2:

1. $\mathrm{p}_{ij}(t) \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{j \in S} \mathrm{p}_{ij}(t) = 1$;
3. $\mathrm{p}_{ij}(0) = \delta_{ij}$;
4. $\mathrm{p}_{ij}(s+t) = \sum\limits_{k \in S} \mathrm{p}_{ik}(s)\,\mathrm{p}_{kj}(t)$.

Определение 10.3. Введем для однородной марковской цепи матрицы

$$P(t) := \Big(\mathrm{p}_{ij}(t)\Big)_{i,\,j \in S}, \quad i,\,j \in S.$$

Замечание. Переформулируем для этих матриц свойства однородной марковской цепи:

1. элементы $P(t)$ неотрицательны;
2. $\sum\limits_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$;
3. $P(0) = I$;
4. $P(s+t) = P(s)P(t)$.

Определение 10.4. Введем вектор–строку $p := \big(\mathrm{p}_1(0),\, \mathrm{p}_2(0),\, \ldots\big)$. Тогда, соответственно,

$$\mathsf{P}\,(X_t = j) = p\,P(t) = \sum_{i \in S} \mathrm{p}_i(0)\,\mathrm{p}_{ij}(t).$$

Распределение вероятностей, задаваемое вектором p, называется *стационарным*, если

$$p\,P(t) = p \;\; \forall t \in T.$$

Теорема 10.2 (эргодичности)**.** *Пусть $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ — однородная марковская цепь такая, что для некоторого $j_0 \in S$ и некоторых $h > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$*

$$\mathrm{p}_{ij_0}(h) \geqslant \varepsilon \;\; \forall i \in S.$$

Тогда для любого вектора μ, задающего начальное распределение цепи, существует и единственнен вектор π, задающий стационарное распределение вероятностей, такой, что для любого начального распределения μ

$$\big\|\, \mu P(t) - \pi \,\big\|_{l_1} \leqslant 2\,(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сформулируем и докажем лемму.

Лемма 10.3. *Пусть выполнены условия теоремы и $\sum\limits_i \rho_i = 0$. Тогда*

$$\big\|\rho P(t)\big\|_{l_1} = \|\rho\|_{l_1}\,(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]}.$$

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции.
База индукции: пусть $t \in [0,\, h)$. Тогда $\big[t/h\big] = 0$. Вместе с этим

$$\left\|\rho P(t)\right\|_{l_1} \;=\; \sum_j \left|\big(\rho P(t)\big)_j\right| \;=\; \sum_j \left|\sum_i \rho_i \mathrm{p}_{ij}(t)\right| \;\leqslant\; \sum_j \sum_i |\rho_i|\left|\mathrm{p}_{ij}(t)\right| \;=$$

$$= \sum_i \sum_j |\rho_i|\, \mathrm{p}_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| \sum_j \mathrm{p}_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| = \|\rho\|_{l_1} = \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

где перемена порядка суммирования возможна в силу абсолютной сходимости ряда. Таким образом, для $t \in [0,\, h)$ лемма справедлива.

Индуктивный переход: пусть лемма верна для для $t \in [0,\, mh)$, $m \in \mathbb{N}$; покажем, что она верна для $t \in \big[mh,\, (m+1)h\big)$. При таких t

$$\rho P(t) \;=\; \rho P(t-h) P(h).$$

Поскольку

$$\sum_j \big(\rho P(t-h)\big)_j \;=\; \sum_j \sum_i \rho_i \mathrm{p}_{ij}(t-h) \;=\; \sum_i \rho_i \sum_j \mathrm{p}_{ij}(t-h) \;=\; \sum_i \rho_i \;=\; 0,$$

то

$$\big(\rho P(t-h)P(h)\big)_j \;=\; \sum_i \big(\rho P(t-h)\big)_i \,\mathrm{p}_{ij}(h) \;=$$

$$= \sum_i \big(\rho P(t-h)\big)_i \left(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}\right)$$

(j_0 здесь берется из формулировки теоремы!). Тогда

$$\left\|\rho P(t)\right\|_{l_1} \;=\; \sum_j \left|\big(\rho P(t-h)P(h)\big)_j\right| \;=$$

$$= \sum_j \left|\sum_i \big(\rho P(t-h)\big)_i \left(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\right)\right| \;\leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \sum_i \left|\big(\rho P(t-h)\big)_i\right| \left|\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\right|.$$

Заметим, что $\left(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\right) \geqslant 0$, поскольку $\mathrm{p}_{ij_0}(h) \geqslant \varepsilon$ по условию теоремы, так что модуль можно снять. Тогда

$$\sum_j \sum_i \left|\big(\rho P(t-h)\big)_i\right| \left|\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\right| \;=$$

$$= \sum_i \left|\big(\rho P(t-h)\big)_i\right| \sum_j \left(\mathrm{p}_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}\right) \;=\; \sum_i \left|\big(\rho P(t-h)\big)_i\right| (1-\varepsilon).$$

При этом, поскольку $(t-h) < mh$, применимо предположение индукции, и поэтому

$$\sum_i \left|\big(\rho P(t-h)\big)_i\right| (1-\varepsilon) \;\leqslant\; \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t-h}{h}\right]}(1-\varepsilon) \;=\; \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

то есть

$$\left\|\rho P(t)\right\|_{l_1} \;\leqslant\; \|\rho\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

что и требовалось доказать. □

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольный вектор μ, задающий начальное распределение цепи. Тогда $\mu_i \geqslant 0$ и $\sum_i \mu_i = 1$. Покажем, что последовательность $\mu P(n)$ фундаментальна по норме l_1: поскольку

$$\sum_i \Big(\big(\mu P(u)\big)_i - \mu_i \Big) \; = \; 0,$$

то можно применить лемму 10.3 с $\rho = \big(\mu P(u) - \mu\big)$:

$$\left\| \mu P(t+u) - \mu P(t) \right\|_{l_1} = \left\| \mu P(u) P(t) - \mu P(t) \right\|_{l_1} = \left\| \big(\mu P(u) - \mu\big)\, P(t) \right\|_{l_1} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \mu P(u) - P(t) \right\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \; \leqslant \; 2(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

поскольку оба вектора $\mu P(u)$ и μ задают вероятностное распределение. Фундаментальность последовательности показали. В силу полноты пространства l_1 существует вектор π такой, что

$$\left\| \mu P(t) - \pi \right\|_{l_1} \to 0, \;\; t \to \infty.$$

Тогда $\pi_i \geqslant 0 \; \forall i$ (иначе бы l_1–норма разности была всегда больше модуля отрицательного π_i и, следовательно, не сходилась бы к нулю) и $\|\pi\|_{l_1} = 1$, поскольку $\left\|\mu P(t)\right\|_{l_1} = 1$ то есть π задает вероятностное распределение.
Докажем, что вектор π задает стационарное распределение. Для этого нужно показать, что $\forall t \in T \;\; \pi P(t) = \pi$. По лемме 10.3 $\forall t \in T$

$$\left\| \mu P(u+t) - \pi P(t) \right\|_{l_1} = \left\| \mu P(u) P(t) - \pi P(t) \right\|_{l_1} = \left\| \big(\mu P(u) - \pi\big)\, P(t) \right\|_{l_1} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \mu P(u) - \pi \right\|_{l_1} (1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \to 0, \;\; u \to \infty;$$

вместе с этим

$$\left\| \mu P(u+t) - \pi \right\|_{l_1} \to 0, \;\; u \to \infty.$$

Тогда получаем, что

$$\left\| \pi - \pi P(t) \right\|_{l_1} \; = \; \left\| \pi - \mu P(u+t) + \mu P(u+t) - \pi P(t) \right\|_{l_1} \; \leqslant$$
$$\leqslant \; \left\| \mu P(u+t) - \pi \right\|_{l_1} + \left\| \mu P(u+t) - \pi P(t) \right\|_{l_1} \to 0, \; u \to \infty,$$

что и означает, что $\forall t \in T \;\; \pi P(t) = \pi$. Теперь покажем единственность такого вектора π. От противного: пусть существует еще один задающий вероятностное распределение вектор ν такой, что $\nu P(t) = \nu$. Тогда по лемме 10.3

$$\|\pi - \nu\|_{l_1} \; = \; \left\| \pi P(t) - \nu P(t) \right\|_{l_1} \; = \; \left\| (\pi - \nu)\, P(t) \right\|_{l_1} \; \leqslant \; 2(1-\varepsilon)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \to 0, \; t \to \infty,$$

то есть $\nu = \pi$. Теорема доказана.

$\square$

Следствие. *Возьмем* $\mu = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{0}_{i}, 0, \ldots \right)$. *Тогда* $\forall i$ *существует* $\lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{p}_{ij}(t) = \pi_j$ *(который не зависит от* i*). Таким образом, система за большое время как бы "забывает" состояние, из которого она стартовала.*

Замечание. В теореме 10.2 показано, что π не зависит от μ, хотя изначально он от μ зависел по построению. О других следствиях этой теоремы можно почитать в [1], стр. 198.

10.3 Генератор марковской цепи с непрерывным временем

Определение 10.5. Однородная марковская цепь называется *стандартной*, если

$$P(t) \to P(0) = I, \ t \to 0+,$$

то есть

$$\mathrm{p}_{ij}(t) \to \delta_{ij}, \ t \to 0+ .$$

Теорема 10.4. *Пусть однородная марковская цепь стандартна. Тогда* $\forall i \neq j$

1. *существует конечный*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ij}(t) - \mathrm{p}_{ij}(0)}{t - 0} =: q_{ij};$$

2. *существует*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ii}(t) - 1}{t} =: q_{ii} \in [-\infty, 0].$$

Определение 10.6. Однородная марковская цепь называется *консервативной*, если матрица $Q := \left(q_{ij}\right)_{i,\,j\in S}$ (называемая *генератором* или *инфинитезимальной матрицей*) содержит только конечные элементы и

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = 0.$$

Замечание. Если однородная марковская стандартная цепь имеет конечное число состояний, то она консервативна: в силу свойства 2 переходных вероятностей

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_{ij}(t) = 1,$$

то есть $\forall t > 0$

$$\frac{1 - \mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = \frac{\sum\limits_{i\neq j} \mathrm{p}_{ij}}{t}.$$

По теореме 10.4 для $i \neq j$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = q_{ij},$$

то есть существует (поскольку сумма конечна) конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sum\limits_{i\neq j} \mathrm{p}_{ij}(t)}{t} = \sum_{i\neq j} q_{ij},$$

а значит, существует и конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1 - \mathrm{p}_{ii}(t)}{t} \;=\; -q_{ii} \;=\; \sum_{i\neq j} q_{ij},$$

то есть

$$\sum_{j\in S} q_{ij} \;=\; 0,$$

что и доказывает, что цепь консервативна.

10.4 Инфинитезимальная матрица конечной марковской цепи

Теорема 10.5. *Пусть дана матрица* $Q = \Big(q_{ij}\Big)_{i,\,j\in S}$ *такая, что* $Q \in$ $\in \mathrm{Mat}(N\times N)$, $\forall\, i \neq j$ $q_{ij} \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij} = 0$. *Тогда существует однородная марковская цепь с генератором* Q *и пространством состояний мощности* N.

Доказательство. Напомним определение матричной экспоненты:

$$e^{B} \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!},$$

при этом $B^0 := I$. Следовательно,

$$e^{tB} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!}.$$

Известно следующее свойство матричной экспоненты: если $BC = CB$, то

$$e^{B+C} \;=\; e^{B} e^{C}.$$

Положим по определению

$$P(t) \;:=\; e^{tQ},\; t \geqslant 0.$$

Докажем, что $P(t)$ обладает свойствами 1.–4., которыми должна обладать матрица переходных вероятностей однородной марковской цепи.

1. Проверим, что $\mathrm{p}_{ij}(t) \geqslant 0\;\; \forall\, i,\, j \in S\;\; \forall t \geqslant 0$. Обозначим

   $$\gamma \;=\; \min_{i=1\ldots N} q_{ii}.$$

   Введем также обозначение

   $$\widetilde{Q} \;=\; \Big(\widetilde{q}_{ij}\Big) \;:=\; Q - \gamma I_N.$$

   Тогда $\widetilde{q}_{ij} \geqslant 0\;\; \forall i,\, j$. Пусть

   $$\widetilde{P}(t) \;:=\; e^{t\widetilde{Q}}.$$

Тогда $\widetilde{P}(t)$ имеет неотрицательные элементы по определению. Заметим, что

$$e^{t\widetilde{Q}} = e^{tQ - t\gamma I_N} = e^{tQ}\, e^{-t\gamma I_N} = P(t)e^{-t\gamma I_N},$$

то есть

$$P(t) = \widetilde{P}(t)e^{t\gamma I_N}.$$

Вместе с этим у обеих матриц справа элементы неотрицательны. Значит, и у матрицы $P(t)$ элементы также неотрицательны.

2. Проверим, что $\forall i = 1, \ldots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_{ij}(t) = 1.$$

Обозначим через α единичный вектор–столбец. Тогда по определению $Q\alpha = 0$. Тогда

$$P(t)\alpha = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}\right)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n \alpha}{n!} = I_N\alpha = \alpha,$$

что и означает, что $\forall i = 1, \ldots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_{ij}(t) = 1.$$

3. $P(0) = e^{0\cdot Q} = I_N$ по определению.
4. $P(s+t) = e^{s+t}\,Q = e^{sQ}\,e^{tQ} = P(s)P(t)$.

Таким образом, выполнены свойства 1.–4., а значит (см. [1], стр.190–191), существует (однородная) марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q. $\square$

Замечание. Заметим, что условия, наложенные на матрицу Q в формулировке теоремы, являются не только достаточными, но и необходимыми, что видно из замечания после определения консервативной марковской цепи.

11 Лекция от 26.04.17

Применения марковских цепей

11.1 Формулировка теоремы Дуба о консервативных цепях. Стационарные марковские цепи

Замечание. Известно (см. обязательную задачу 9.2), что пуассоновский процесс интенсивности λ является марковской цепью, причем между скачками проходит время, распространенное экспоненциально. Оказывается, это верно для всех однородных консервативных марковских цепей.

Теорема 11.1 (Дуба о консервативных цепях)**.** *Пусть $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — однородная консервативная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q. Тогда*

$$\mathsf{P}\Big(X(u) = i,\, s \leqslant u \leqslant s+t \,\big|\, X(s) = i\Big) \;=\; e^{q_{ii}t},$$

то есть время ожидания между переходами из состояния в состояние распределено экспоненциально.

Доказательство. Доказательства на лекции не было, знать на экзамене его не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 217. □

Определение 11.1. $X = \{X_t,\, t \in T\}$ — *строго стационарный процесс*, если $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall\, t_1 < \ldots < t_n,\ t_1 + h < \ldots < t_n + h \in T$

$$(X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n}) \overset{\text{law}}{=} (X_{t_1+h},\, \ldots,\, X_{t_n+h})\,.$$

Теорема 11.2. *Пусть однородная марковская цепь $X = \{X_t,\, t \in T\}$ имеет начальное распределение π, которое также является стационарным распределением для нее. Тогда X — строго стационарный процесс.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}\,(X_{t_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_n} = i_n) \;=\; \mathsf{P}\,(X_{t_1} = i_1)\, \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1});$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\,(X_{t_1+h} = i_1,\, \ldots,\, X_{t_n+h} = i_n) \;= \\ &\quad=\; \mathsf{P}\,(X_{t_1+h} = i_1)\, \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_2 + h - t_1 - h) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_n + h - t_{n-1} - h) \;= \\ &\qquad\qquad=\; \mathsf{P}\,(X_{t_1+h} = i_1)\, \mathrm{p}_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Вместе с этим в силу стационарности начального распределения π

$$\mathsf{P}\,(X_t = i_1) \;=\; \big(\pi P(t)\big)_{i_1} \;=\; \big(\pi P(t+h)\big)_{i_1} \;=\; \mathsf{P}\,(X_{t+h} = i_1)\,,$$

что и завершает доказательство леммы. □

11.2 Обратимые цепи

Определение 11.2. Пусть $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — однородная марковская цепь с переходными вероятностями за единицу времени p_{ij}. Тогда вектор π, задающий распределение вероятностей, называется *обратимым*, если $\forall i,\, j \in S$

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Марковская цепь называется *обратимой*, если у нее есть обратимый вектор.

Пример 11.1 (случайные блуждания на графах)**.** Рассмотрим граф $(\mathbb{V},\, \mathbb{E})$, где $\mathbb{V}$ — множество вершин графа, а $\mathbb{E}$ — множество его ребер. Две вершины v_i и v_j из $\mathbb{V}$ будем называть соседними, если их соединяет ребро из $\mathbb{E}$. Пусть

d_i — кратность вершины v_i, то есть число инцидентных ей ребер. Введем переходные вероятности (из i в j):

$$\mathrm{p}_{ij} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем также вектор π, задающий вероятностное распределение:

$$\pi_i \;=\; \frac{d_i}{\sum\limits_{i\in S} d_i}.$$

Тогда π — обратимый вектор:

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji} \;=\; \frac{1}{d}\,\mathbb{I}\left\{v_i \text{ и } v_j \text{ — соседи}\right\}.$$

Заметим, что если цепь обратима и π — ее обратимый вектор, то π задает стационарное распределение:

$$\left(\pi P(t)\right)_j \;=\; \sum_{i\in S} \pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \sum_{i\in S} \pi_j \mathrm{p}_{ji} \;=\; \pi_j.$$

11.3 Метод Монте-Карло, использующий цепи Маркова

Замечание (от наборщика). Этот раздел будет до- и переписан после ближайшей консультации.

Пример 11.2 (алгоритм Метрополиса–Хастингса)**.** Возьмем связный граф с вершинами из S такой, что $d_i < \infty\ \forall i$ и введем на нем цепь:

$$\mathrm{p}_{ij} \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j},\, 1\right\}, & v_i \text{ и } v_j \text{ соседние ;} \\ 0, & v_i \text{ и } v_j \text{ не соседние ;} \\ 1 - \sum\limits_i \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j},\, 1\right\}, & i = j. \end{cases}$$

Такая цепь обратима, причем ее обратимое распределение есть π. Действительно, проверим, что $\forall\, i,\, j$

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Пусть сначала $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \geqslant 1$. Тогда $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \leqslant 1$ и

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_i \frac{1}{d_i} \;=\; \pi_j \frac{1}{d_j} \frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Пусть теперь $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \leqslant 1$. Тогда $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \geqslant 1$ и

$$\pi_i \mathrm{p}_{ij} \;=\; \pi_i \frac{1}{d_i} \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \;=\; \pi_j \frac{1}{d_j} \;=\; \pi_j \mathrm{p}_{ji}.$$

Определение 11.3. Пусть $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ — граф с конечным числом вершин. Пусть также $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{V}\}$ — случайное поле, $X_t : \Omega \to S$, где S конечно. Поле X называется *марковским*, если $\forall t \in \mathbb{V}$ таких, что

$$\mathsf{P}\left(X_s = x_s,\, s \neq t\right) \neq 0$$

выполнено

$$\mathsf{P}\Big(X_t = x_t \,\Big|\, X_s = x_s,\, s \neq t\Big) = \mathsf{P}\Big(X_t = x_t \,\Big|\, X_s = x_s,\, s \in \delta\{t\}\Big),$$

где $\delta\{t\}$ — множество соседних с t вершин.

Определение 11.4. *Энергией* называется любая функция $E : S^{\mathbb{V}} \to \mathbb{R}$, где $S^{\mathbb{V}}$ — множество функций из $\mathbb{V}$ в S.

Определение 11.5. Распределение вероятностей на $S^{\mathbb{V}}$

$$\mathsf{P}\left(B\right) := \begin{cases} \sum\limits_{\omega \in B} \frac{e^{-E(\omega)}}{\sum\limits_{\omega \in S^{\mathbb{V}}} e^{-E(\omega)}}, & B \neq \emptyset; \\ 0, & B = \emptyset, \end{cases}$$

называется *гиббсовским полем.*

Определение 11.6. *Потенциалом* называется любая действительная функция $V_A(\omega) : \mathbb{V} \times S^{\mathbb{V}} \to \mathbb{R}$ такая, что $V_A(\omega) = 0\ \ \forall \omega \in S^{\mathbb{V}}$, если $A = \emptyset$.

Замечание. Известно, что любая энергия представляется с помощью потенциала:

$$E(\omega) = \sum_{A \subset \mathbb{V}} V_A(\omega).$$

Определение 11.7. Потенциал $V_A(\omega)$ называется *потенциалом ближайших соседей*, если

$$V_A(\omega) = 0\ \ \forall \omega \in S^{\mathbb{V}},$$

когда A не является кликой, то есть множеством вершин таким, что любые две вершины в нем соединены ребром.

Теорема 11.3 (Аверинцева–Клиффорда–Хэммерсли)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *мера* P *на* $\big(S^{\mathbb{V}},\, A\big)$ *является распределением марковского поля относительно графа* $(\mathbb{V},\, E)$ *и* $\mathsf{P}\left(B\right) > 0,\ B \neq \emptyset$*;*
2. *мера* P *на* $\big(S^{\mathbb{V}},\, A\big)$ *является мерой Гиббса с потенциалом ближайших соседей.*

Список литературы

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

[3] Ширяев А. Н. Вероятность.

[4] Шашкин А. П. Слабая сходимость вероятностных мер. МГУ, 2013