

Содержание

1	Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания	1
1.1	Понятие случайного блуждания	1
1.2	Случайные блуждания	2
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	5
2	Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления	7
2.1	Модель Гальтона–Ватсона	7
2.2	Процессы восстановления	10
3	Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы	11
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	11
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	12
3.3	Элементарная теорема восстановления	13
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	15
	Список литературы	19
	Предметный указатель	20

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение 1.2. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Определение 1.4. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y* , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где

$$X(t): \Omega \rightarrow S_t, \quad X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле*.

Определение 1.6. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n.$$

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, \mathbb{Q}_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t$, $X_t \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_t}$ таких, что $\mathbb{P}_{X_t} = \mathbb{Q}_t$, $t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, \mathbb{Q}_t)_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности \forall конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . Случайным блужданием в \mathbb{R}^d называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geq 0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d — это такое случайное блуждание, что

$$\mathbb{P}(X = e_k) = \mathbb{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leq \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $P(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S'_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $P(N = \infty)$ равно 0 или 1. $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $P(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. \square

Теорема 1.3. *Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow EN = \infty$ (соответственно, невозвратно $\Leftrightarrow EN < \infty$).*

Доказательство. Если $EN < \infty$, то $P(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $P(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $P(\tau < \infty) < 1$.

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. *S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.*

Доказательство. $P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

Случай $d = 1$: $P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

\Rightarrow ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай $d = 2$:

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

\Rightarrow ряд тоже разойдется \Rightarrow блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. \square

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. \square

Следствие. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание невозвратно.

Доказательство. Все как в обязательной задаче 2 к этой лекции; единственное отличие заключается в том, что случайное блуждание одно \Rightarrow знаменатель будет порядка $\|t\|^2$ и, следовательно, сходимость интеграла будет происходить тогда и только тогда, когда $d \geq 3$. \square

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \dots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leq \\ &\leq \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{\left((n/d)!\right)^d} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} = \Theta(n^{-d/2}) \end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geq 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). \square

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S* , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n: \quad P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega: \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = P(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_\xi$ и $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= \mathbb{E} s^{Z_n} = \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}, i = 1, \dots, n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) P(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} P(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi^j(s) P(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_\xi(\psi_\xi(s))) = \dots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \dots (\psi_\xi(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\ &= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$P(Z_n = 0) = \psi_\xi(P(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $P(Z_n = 0) \nearrow P(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$P(A) = \psi_\xi(P(A)),$$

то есть $P(A)$ — корень уравнения $p = \psi_\xi(p)$, $p \in [0, 1]$. \square

Теорема 2.2. Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := P(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$P(\xi \geq 1) = 1, \quad P\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $P(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n . Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1 $P(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $P(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.3. 1. Вероятность вырождения $P(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.
2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $E\xi \leq 1$ имеем $P(A) = 1$, при $E\xi > 1$ имеем $P(A) < 1$.

Доказательство. 1. Пусть $P(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. (а) Пусть $\mu = E\xi \leq 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

- (b) Пусть $\mu = E\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $P(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $P(A) < 1$, что и требовалось доказать. \square

Следствие. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда $EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$.

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

\square

Определение 2.2.

При $E\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $E\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $E\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$P(Y = \alpha) = p \in (0, 1); \quad P(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor$.

Лемма 2.4.

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor, \text{ если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если $P(U = k) = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p , а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_{j+m} с параметром $p \in (0, 1)$. Тогда $\forall t \geq \alpha$ и $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

3 Лекция от 22.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} \mathbb{P}(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\
& = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} \mathbb{P}(U_0 = k_0) \dots \mathbb{P}(U_j = k_j) = \\
& = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} p(1-p)^{k_0} \dots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} p^{j+1} (1-p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\
& = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m-j}} p^{j+1} (1-p)^{m-j} = p^{j+1} (1-p)^{m-j} \#M,
\end{aligned}$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\#M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\#M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathbb{P}(U_0 + \dots + U_j = m-j) = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. \square

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. Пусть $t > \alpha$. Тогда

$$\mathbb{E}Z^*(t) \leq At, \quad \mathbb{E}(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$\mathbb{E}Z^*(t) = \mathbb{E}(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)\mathbb{E}U,$$

где

$$\mathbb{E}U = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)\mathbb{E}U = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p) + 1) = A(t),$$

поскольку $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$, а $t > \alpha$; здесь $A(t) = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $\mathbb{E}(Z^*(t))^2$.

$$\mathbb{E}(Z^*(t))^2 = \mathbb{D}Z^*(t) + (\mathbb{E}Z^*(t))^2 = (j+1)\mathbb{D}U + (\mathbb{E}Z^*(t))^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := DU$. Используя оценку выше для $EZ^*(t)$, получаем, что

$$(j+1)DU + (EZ^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geq (j+1)$. Лемма доказана. \square

Замечание. Пусть случайная величина $X \geq 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : P(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \quad \forall t \geq 0$. Тогда $\forall \alpha > 0$

$$EZ(t) \leq EZ^*(t) < \infty, \quad E(Z(t))^2 \leq E(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

Следствие. $P(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$.

Доказательство. Z является неубывающим процессом:

$$s \leq t \rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow P(Z(n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Из непрерывности вероятностной меры получаем, что

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z(n) < \infty) = 1.$$

\square

Следствие. $EZ(t) \leq At; \quad E(Z(t))^2 < Bt^2, \quad t > \alpha$.

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.n.} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mu = EX$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ. Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbb{E}X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Теорема 3.3. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \dots, X \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Z(t)}{t} &\xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, t \rightarrow \infty; \\ \frac{\mathbb{E}Z(t)}{t} &\xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = 0 \forall t$). Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \rightarrow \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим (t, ω) такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \text{ почти наверное.}$$

Тогда для этих (t, ω) поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E} \xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E} \xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t, t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \rightarrow \alpha} \mathbb{E} \left(|\xi_t| \mathbb{I} \{|\xi_t| > c\} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. Если $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathbb{E} \xi_t \rightarrow \mathbb{E} \xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена). $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow \exists$ неубывающая функция g такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E} g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E} (\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E} (Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. \square

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k} - S_{N(t)+k-1}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Для $\forall t > 0$ величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k .

Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1) = \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1) = \\ &= \int \int_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \int \int_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy \end{aligned}$$

в силу независимости S_n и X_{n+1} . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P} \left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1 \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1 = 0$ и получим, что

$$\mathbf{P} \left(N(t) = n \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} \left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1 \right) &= \mathbf{P} \left(X_1^t \geq u_1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\ &= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1}, \end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k \right) &= \\ &= \mathbf{P} \left(\underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots} \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(N(t) = n \right) \underbrace{\mathbf{P} \left(X_1 \geq u_1 \right)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \mathbf{P} \left(N(t) = n \right) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. \square

Следствие (парадокс времени ожидания). *Из доказанного следует, что*

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению.

Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

Предметный указатель

- Измеримое
 - отображение, 1
 - пространство, 1
- Множество
 - достижимости, 7
 - возвратности, 6
- Модель Гальтона-Ватсона, 7
- Процесс восстановления, 10
- Производящая функция, 7
- Распределение
 - геометрическое, 11
 - случайного элемента, 1
- Случайный
 - элемент, 1
 - процесс, 1
- Случайное блуждание, 2
 - простое, 2
 - возвратное, 2
- Теорема
 - Чжуна-Фукса, 7
 - Ломницкого-Улама, 2
- Вырождение, 7