1 Обязательные задачи к лекциям

1.1 Задачи к лекции от 08.02.17

Задача 1. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ — простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}$, имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.*

Решение. Разобьем линию времени на промежутки длины $|a-b|$. Тогда для того чтобы случайное блуждание не вышло из полосы, необходимо, чтобы ни на одном из этих промежутков оно не принимало ни только значение 1, ни только значение -1 (иначе точно выскочит). Вероятность того, что на одном промежутке будут встречаться оба значения, равна

$$P := 1 - p^{|a-b|} - q^{|a-b|} < 1.$$

Соответственно, для N промежутков получаем вероятность P^N; по непрерывности вероятностной меры заключаем, что вероятность события, что на всех промежутках будут встречаться как значение 1, так и значение -1, равна

$$\lim_{N\to\infty} P^N = 0.$$

Задача 2. *Пусть $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ и $S' = \{S'_n,\, n \geqslant 0\}$ — независимые простые случайные блуждания в $\mathbb{Z}^d$, имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n\geqslant 1}$ и $\left(X'_n\right)_{n\geqslant 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что*

$$\mathsf{P}\left(X_1 = e_k\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X_1 = -e_k\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X'_1 = e_k\right) \;=\; \mathsf{P}\left(X'_1 = -e_k\right) \;=\; \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k — вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого k-я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \ldots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\},$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A. Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathsf{E}N < \infty$.

Решение. Сначала заметим, что

$$N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n = S'_m\right\} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\}.$$

Увидим, что индикатор можно переписать в виде

$$\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\left\{S_n^k - S_m^{k\prime} = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{i\left(S_n^k - S_m^{k\prime}\right)t_k}}{2\pi}\, dt_k =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\, dt,$$

поскольку

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi}\,dx \;=\; \mathbb{I}\left\{n=0\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\mathbb{I}\left\{S_n - S'_m = 0\right\} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i\left(S_n - S'_m,\, t\right)}\,dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^n(t)\varphi^m(-t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\,dt,\end{aligned}$$

где

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{i(X_1,t)}.$$

Получаем, что

$$\mathsf{E}N = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \varphi^{n+m}(t)\,dt \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{\big(1-\varphi(t)\big)^2}\,dt.$$

Видно, что этот интеграл является несобственным из-за особенности в нуле. Поймем, как ведет себя подынтегральное выражение в окрестности нуля.

$$1 - \varphi(t) = 1 - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos t_k \sim \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d} t_k^2$$

по формуле Тейлора. Таким образом, получаем, что в окрестности нуля

$$\frac{1}{\big(1-\varphi(t)\big)^2} = \Theta\left(\frac{1}{\|t\|^4}\right).$$

Поскольку якобиан при переходе к сферической системе координат содержит множитель R в степени $d-1$, то интеграл сходится $\Leftrightarrow d \geqslant 5$.