Содержание

1 Лекция от 08.02.17
Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Тогда $(V, \mathscr{A})$ называется *измеримым пространством.*

Определение 1.2. Пусть есть $(V, \mathscr{A})$ и $(S, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства, $f\colon V \to S$ — отображение. f называется *$\mathscr{A}|\mathscr{B}$-измеримым*, если $\forall\, B \in \mathscr{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. *Обозначение*: $f \in \mathscr{A}|\mathscr{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — отображение. Если $Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$, то Y называется *случайным элементом.*

Определение 1.4. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y*, — это функция на множествах из $\mathscr{B}$, задаваемая равенством

$$\mathsf{P}_Y(B) := \mathsf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где

$$X(t) : \Omega \to S_t,\ \ X(t) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t\ \ \forall\, t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, $(S_t,\, \mathscr{B}_t)$ — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если T $\subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле.*

Определение 1.6. Случайные элементы $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \in B_k)\ \forall\, B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n$.

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама)**.** *Пусть* $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q}_t)_{t \in T}$ *— семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *существует семейство* независимых *случайных элементов* $X_t\colon \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ *таких, что* $\mathsf{P}_{X_t} = \mathsf{Q}_t$, $t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениеми. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathsf{Q})_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности $\forall$ конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. *Случайным блужданием в* $\mathbb{R}^d$ называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n,\, n \geqslant 0\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ такой, что

$$\begin{aligned} &S_0 := x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(начальная точка)};\\ &S_n := x + X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ — это такое случайное блуждание, что

$$\mathsf{P}(X = e_k) = \mathsf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0),\ k = 1, \ldots, d.$

Определение 1.9. Введем $N := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ $(\leqslant \infty)$. Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathsf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ $(\tau := \infty$, если $S_n \neq 0$ $\forall\, n \in N)$ называется *моментом первого возвращения в 0.*

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathsf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. *Для* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}(N = n) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n+1, \tau = k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S'_m = 0\right\} = n\right) \mathsf{P}(\tau = k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N' = n)\, \mathsf{P}(\tau = k),$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независисые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \mathsf{P}(N = n)\, \mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) + \mathsf{P}(N = n+1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n+1 \geqslant 2$. Из этого следует, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n)\, \mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n},$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $\mathsf{P}(N = \infty)$ *равно 0 или 1.* $\mathsf{P}(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathsf{P}(\tau < \infty) < 1.$

Доказательство. Пусть $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$\mathsf{P}(N < \infty) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = \infty)\, \mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)} =$
$= \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{\mathsf{P}(\tau=\infty)} = 1.$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}\big((\tau = \infty) = 0\big) \Rightarrow \mathsf{P}(N = n) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{P}(N < \infty) = 0.$

Следствие доказано. $\square$

Теорема 1.3. *Простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}^d$ возвратно $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}N = \infty$ (соответственно, невозвратно $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}N < \infty$).*

Доказательство. Если $\mathsf{E}N < \infty$, то $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\mathsf{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \\ = \mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n\right)' = \left(\frac{1}{1-p}\right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathsf{P}(\tau = \infty)}{(1 - \mathsf{P}(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - \mathsf{P}(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$\mathsf{E}N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. *S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.*

Доказательство. $\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = (\frac{1}{2d})^{2n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \ldots (n_d!)^2}$.

Случай $d = 1$: $\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n}$.

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \to \infty.$$

Соответственно,

$$\mathsf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается *случай* $d = 2$:

$$\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = \ldots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$ ряд тоже разойдется $\Rightarrow$ блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. $\square$

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. *Для простого случайного блуждания в* $\mathbb{Z}^d$

$$\mathsf{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} \, \mathrm{d}t,$$

где $\varphi(t)$ *— характеристическая функция* X*,* $t \in \mathbb{R}^d$*.*

Доказательство. $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} \, \mathrm{d}t_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)} \, \mathrm{d}t.$$

По теореме Фубини

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E} e^{i(S_n,t)} \, \mathrm{d}t.$$

Заметим, что

$$\mathsf{E} e^{i(S_n,t)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \left(\varphi\left(t\right)\right)^n \, \mathrm{d}t.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \,\mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n \,\mathrm{d}t, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leqslant c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} \,\mathrm{d}t$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \,\mathsf{P}(S_n = 0) \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0) = \mathsf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие. *При $d \geqslant 3$ простое случайное блуждание невозвратно.*

Доказательство. Все как в обязательной задаче 2 к этой лекции; единственное отличие заключается в том, что случайное блуждание одно $\Rightarrow$ знаменатель будет порядка $\|t\|^2$ и, следовательно, сходимость интеграла будет происходить тогда и только тогда, когда $d \geqslant 3$. □

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(S_{2n} = 0\right) &= \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \ldots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \ldots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leqslant \\
&\leqslant \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{\Big((n/d)!\Big)^d} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_d!} = \Theta\left(n^{-d/2}\right)
\end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geqslant 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). □

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в $\mathbb{R}^d$, если $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε-окрестность точки x.

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S,* — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall\, z \in P(S) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n\colon \;\; \mathsf{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). *Если $R(S) \neq \varnothing$, то $R(S) = P(S)$.*

Следствие. *Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \varnothing$.*

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathsf{P}(\xi = m) = p_m \geqslant 0, \;\; m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$\begin{aligned} Z_0(\omega) &:= 1, \\ Z_n(\omega) &:= \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega\colon \exists\, n = n(\omega),\; Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции.* Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leqslant 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathsf{P}(Y = k)$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\, \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E} s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. *Вероятность* $\mathsf{P}(A)$ *является корнем уравнения* $\psi(p) = p$, *где* $\psi = f_\xi$ *и* $p \in [0,1]$.

Доказательство.

$$f_{Z_n}(s) = \mathsf{E}s^{Z_n} = \mathsf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}\xi_{n,k}}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\}\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\}\right].$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k},\ m = 1,\ldots,r,\ k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}$, $i = 1,\ldots,n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\}\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathsf{E}\mathbb{I}\{Z_{n-1}=j\} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathsf{P}(Z_{n-1}=j) = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\mathsf{E}s^{\xi_{n,k}}\,\mathsf{P}(Z_{n-1}=j) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_\xi^j(s)\,\mathsf{P}(Z_{n-1}=j) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big)$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big), \quad s \in [0,1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(0)\big)$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}\Big(\psi_\xi\big(\psi_\xi(s)\big)\Big) = \ldots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi\ldots(\psi_\xi}_{n\text{ итераций}}(s))\ldots) =$$
$$= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathsf{P}(Z_n = 0) = \psi_\xi\big(\mathsf{P}(Z_{n-1}=0)\big).$$

Но $\mathsf{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathsf{P}(A)$ при $n \to \infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0,1]$. Переходим к пределу при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \psi_\xi(\mathsf{P}(A)),$$

то есть $\mathsf{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_\xi(p)$, $p \in [0,1]$. $\square$

Теорема 2.2. *Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть* ***наименьший*** *корень уравнения*

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0,1], \tag{1}$$

где $\psi = \psi_\xi$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geqslant 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geqslant 1$ при $\forall\, n$, то есть $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0,1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = \big[\psi_n(0),\ \psi_{n+1}(0)\big),\ n = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n. Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0,1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s\ >\ \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0)\ =\ \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0)\ =\ 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на Δ_n $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \big[0,\ \mathsf{P}(A)\big),\quad \psi_n(0) \nearrow \mathsf{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathsf{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.3. 1. *Вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.*
2. *Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $\mathsf{E}\xi \leqslant 1$ имеем $\mathsf{P}(A) = 1$, при $\mathsf{E}\xi > 1$ имеем $\mathsf{P}(A) < 1$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathsf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. (a) Пусть $\mu = \mathsf{E}\xi \leqslant 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}\, \mathsf{P}(\xi = k) \quad\Rightarrow\quad \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leqslant 1 - z,$$

где $z \in (0,1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

(b) Пусть $\mu = \mathsf{E}\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}\,\mathsf{P}(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - \mathsf{P}(\xi = 1) > 0,$$
$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -\mathsf{P}(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0,1)$. Так как вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $\mathsf{P}(A) < 1$, что и требовалось доказать.

□

Следствие. *Пусть* $\mathsf{E}\xi < \infty$. *Тогда* $\mathsf{E}Z_n = (\mathsf{E}\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathsf{E}Z_1 = \mathsf{E}\xi$.

Индуктивный переход:

$$\mathsf{E}Z_n = \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,\mathsf{E}\xi\,\mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathsf{E}\xi\,\mathsf{E}Z_{n-1} = (\mathsf{E}\xi)^n.$$

□

Определение 2.2.

При $\mathsf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим.*

При $\mathsf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим.*

При $\mathsf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим.*

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Положим

$$Z(0) := 0;$$
$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} :\ S_n \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что $\sup\varnothing := \infty$). Таким образом,

$$Z(t,\omega) = \sup\left\{n\in\mathbb{N}:\ S_n(\omega)\leqslant t\right\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t)\geqslant n\} = \{S_n\leqslant t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления.*

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}\{S_n\leqslant t\},\ \ t>0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^\star(t),\, t\geqslant 0\}$, который строится по $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$\mathsf{P}(Y=\alpha) = p\in(0,1);\ \ \mathsf{P}(Y=0) = q = 1-p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = const$: если $C=0$, то $Z(t)=\infty\ \ \forall\, t>0$; если же $C>0$, то $Z(t) = \left[\frac{t}{c}\right]$.

Лемма 2.4.

$$\mathsf{P}(Z^\star(t)=m) = \begin{cases} C_m^j\, p^{j+1}q^{m-j},\ \textit{где}\ j=\left[\frac{t}{\alpha}\right] & ,\ \textit{если}\ m\geqslant j;\\ 0 & ,\ \textit{если}\ m<j,\end{cases}$$

где $m = 0,1,2,\ldots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p\in(0,1)$, если $\mathsf{P}(U=k) = (1-p)^k p,\ k=0,1,2,\ldots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи, соответственно, равна $1-p$.

Лемма 2.5. *Рассмотрим независимые геометрические величины* $U_0,\ldots,U_{j+m}$ *с параметром* $p\in(0,1)$*. Тогда* $\forall t\geqslant\alpha$ *и* $m\geqslant j$

$$\mathsf{P}(j+U_0+\ldots+U_j=m) = \mathsf{P}(Z^\star(t)=m).$$

3 Лекция от 22.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}(U_0+\ldots+U_j=m-j) = \sum_{\substack{k_0,\ldots,\,k_j\geqslant 0\\ k_0+\ldots+k_j=m-j}}\mathsf{P}(U_0=k_0,\ldots,U_j=k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j\geqslant 0\\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} \mathsf{P}(U_0=k_0,\ldots,U_j=k_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,\, k_j\geqslant 0\\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} \mathsf{P}(U_0=k_0)\ldots\mathsf{P}(U_j=k_j) =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j\geqslant 0\\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} p(1-p)^{k_0}\ldots p(1-p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j\geqslant 0\\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} p^{j+1}(1-p)^{k_0+\ldots+k_j} =$$

$$= \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j\geqslant 0\\ k_0+\ldots+k_j=m-j}} p^{j+1}(1-p)^{m-j} = p^{j+1}(1-p)^{m-j}\#M,$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j, удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\#M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\#M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j. Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathsf{P}(U_0+\ldots+U_j=m-j) = C_m^j\, p^{j+1}(1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. □

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. *Пусть $t>\alpha$. Тогда*

$$\mathsf{E}Z^\star(t)\leqslant At, \quad \mathsf{E}(Z^\star(t))^2\leqslant Bt^2,$$

где $A=A(p,\alpha)>0$, $B=B(p,\alpha)>0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$\mathsf{E}Z^\star(t)=\mathsf{E}(j+U_0+\ldots+U_j)=j+(j+1)\mathsf{E}U,$$

где

$$\mathsf{E}U=\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^k p = a(p)<\infty.$$

Следовательно,

$$j+(j+1)\mathsf{E}U=j+(j+1)a(p)\leqslant (j+1)\big(a(p)+1\big)\leqslant \frac{2t}{\alpha}\big(a(p)+1\big)=A(t),$$

поскольку $j=\left[\frac{t}{\alpha}\right]\leqslant\frac{t}{\alpha}$, а $t>\alpha$; здесь $A(t)=\frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2$.

$$\mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2=\mathsf{D}Z^\star(t)+\big(\mathsf{E}Z^\star(t)\big)^2=(j+1)\mathsf{D}U+\big(\mathsf{E}Z^\star(t)\big)^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := \mathsf{D}U$. Используя оценку выше для $\mathsf{E}Z^\star(t)$, получаем, что

$$(j+1)\mathsf{D}U + \left(\mathsf{E}Z^\star(t)\right)^2 \leqslant (j+1)^2 \left(\sigma^2(p) + \left(a(p)+1\right)^2\right) \leqslant Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geqslant (j+1)$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Пусть случайная величина $X \geqslant 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : \mathsf{P}(X > \alpha) = p \in (0,1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^\star = \left\{Z^\star(t),\ t \geqslant 0\right\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leqslant \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leqslant X_n \ \Rightarrow\ Z(t) \leqslant Z^\star(t)\ \ \forall t \geqslant 0$. Тогда $\forall \alpha > t$

$$\mathsf{E}Z(t) \leqslant \mathsf{E}Z^\star(t) < \infty,\ \mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2 \leqslant \mathsf{E}\left(Z^\star(t)\right)^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

Следствие. $\mathsf{P}\left(\forall t \geqslant 0\ \ Z(t) < \infty\right) = 1.$

Доказательство. Z является неубываюшим процессом:

$$s \leqslant t \to Z(s) \leqslant Z(t) \Rightarrow \mathsf{P}\left(Z(n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Следствие. $\mathsf{E}Z(t) \leqslant At;\ \ \mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2 < Bt^2,\ t > \alpha.$

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0,\infty],\ n \to \infty,$$

где $\mu = \mathsf{E}X$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ.
Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leqslant c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E} X \mathbb{I}\{X \leqslant c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ \geqslant\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V_k \ =\ \mathsf{E} X \mathbb{I}\{X \leqslant m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ \geqslant\ \mathsf{E} X \mathbb{I}\{X \leqslant m\} = \mathsf{E} X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Теорема 3.3. *Пусть $Z = \{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \ldots,\ X \geqslant 0$. Тогда*

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty;$$

$$\frac{\mathsf{E} Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu},\ t \to \infty,$$

где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = \infty \ \ \forall t$).
Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leqslant t < S_{Z(t)+1}. \qquad (2)$$

Поскольку $Z(t_n,\ \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \to \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим $(t,\ \omega)$ такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих $(t,\ \omega)$ поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \ \leqslant\ \frac{t}{Z(t)} \ \leqslant\ \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2 ,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu,\ \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,
$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \;\; t \to \infty.$$
Таким образом,
$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \;\; t \to \infty,$$
что завершает доказательство первого утверждения теоремы.
Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,
$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \;\not\Rightarrow\; \mathsf{E}\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}\xi, \;\; t \to \infty:$$
наглядным примером является последовательность
$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$
Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t, \; t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если
$$\sup_{t \to \alpha} \mathsf{E}\left(|\xi_t| \, \mathbb{I}\left\{|\xi_t| > c\right\}\right) \to 0, \;\; c \to \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. *Если $\{\xi_t, \; t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathsf{E}\xi_t \to \mathsf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.*

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена)**.** *$\{\xi_t, \; t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow$ $\exists$ неубывающая функция g такая, что*
$$\frac{g(t)}{t} \to \infty, \;\; t \to \infty \quad \textit{и} \quad \sup_t \mathsf{E}g\left(|\xi_t|\right) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1
$$\mathsf{E}\left(\xi_t\right)^2 = \frac{\mathsf{E}\left(Z(t)\right)^2}{t^2} \leqslant \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$
что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. $\square$

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть
$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0 \quad\;\;, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда *пуассоновский процесс* $N = \big\{N(t),\ t \geqslant 0\big\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$X_1^t := S_{N(t)+1} - t,$$
$$X_k^t := S_{N(t)+k} - S_{N(t)+k-1},\ k \geqslant 2.$$

Лемма 3.6. *Для* $\forall t > 0$ *величины* $N(t),\ X_1^t,\ X_2^t, \ldots$ *независимы, причем*

$$N(t) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t),\ X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall u_1, \ldots, u_k \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\left(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u, \ldots,\ X_k^t \geqslant u_k\right) = \\ = \mathsf{P}\left(N(t) = n\right) \mathsf{P}(X_1^t \geqslant u_1) \ldots \mathsf{P}(X_k^t \geqslant u_k).$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k.
Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\mathsf{P}\Big(N(t) = n,\ X_1^t \geqslant u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t,\ S_{N(t)+1} - t \geqslant u_1\Big) = \\ = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big),$$

поскольку

$$\{S_n \leqslant t,\ S_{n+1} > t\} = \big\{N(t) = n\big\}\,.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & ,\ x \geqslant 0 \\ 0 & ,\ x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_{n+1} \geqslant t + u_1\Big) = \mathsf{P}\Big(S_n \leqslant t,\ S_n + X_{n+1} \geqslant t + u_1\Big) = \\ = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ x+y \geqslant t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_n+1}(y)\, dx\, dy = \\ = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ x+y \geqslant t+u_1 \\ y \geqslant 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y}\, dx\, dy$$

в силу независимости S_n и X_{n+1}. Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ x+y\geqslant t+u_1\\ y\geqslant 0}} \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\lambda y e^{-\lambda y}\,dx\,dy = \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\,dx \int\limits_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}e^{-\lambda(t+u_1-x)}\,dx = e^{-\lambda(t+u_1)}\int\limits_0^t \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx =$$

$$= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda u_1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t\geqslant u_1\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda u_1}. \tag{3}$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1=0$ и получим, что

$$\mathsf{P}\left(N(t)=n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t)\sim \mathrm{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n\in\mathbb{Z}_+$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t\geqslant u_1\right) = \mathsf{P}\left(X_1^t\geqslant u_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda u_1} =$$

$$= e^{-\lambda u_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1},$$

то есть

$$X_1^t\sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k\geqslant 2$:

$$\mathsf{P}\left(N(t)=n,\ X_1^t\geqslant u,\ldots,\ X_k^t\geqslant u_k\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\underbrace{S_n\leqslant t,\ S_{n+1}>t,\ S_{n+1}-t\geqslant u_1}_{\text{зависят от } X_1,\ldots,X_{n+1}},\ \underbrace{X_{n+2}\geqslant u_2,\ldots,\ X_{n+k}\geqslant u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2},\ldots}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(N(t)=n\right)\underbrace{\mathsf{P}\left(X_1\geqslant u_1\right)}_{=e^{-\lambda u_1}}e^{-\lambda u_2}\ldots e^{-\lambda u_k} = \mathsf{P}\left(N(t)=n\right)e^{-\lambda u_1}\ldots e^{-\lambda u_k}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t\sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. □

Замечание (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени S_n, то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени X_i, а мы пришли на остановку в момент времени t и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

Список литературы

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

Предметный указатель