

Содержание

1	Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания	2
1.1	Понятие случайного блуждания	2
1.2	Случайные блуждания	3
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	5
2	Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления	8
2.1	Модель Гальтона–Ватсона	8
2.2	Процессы восстановления	11
3	Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы	12
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	12
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	13
3.3	Элементарная теорема восстановления	14
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	16
4	Лекция от 01.03.17. Точечные процессы	19
4.1	Независимость приращений пуассоновского процесса	19
4.2	Пространственный пуассоновский процесс	20
4.3	Функционал Лапласа точечного процесса	24
4.4	Маркирование пуассоновских процессов	25
	Список литературы	27
	Предметный указатель	28

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение 1.2. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Определение 1.4. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y* , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где

$$X(t): \Omega \rightarrow S_t, \quad X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле*.

Определение 1.6. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если $P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$.

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором (Ω, \mathcal{F}, P) существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t, X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ таких, что $P_{X_t} = Q_t, t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности \forall конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть X, X_1, X_2, \dots - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . Случайным блужданием в \mathbb{R}^d называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geq 0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d — это такое случайное блуждание, что

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leq \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $P(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $P(N < \infty) = 1$.

Замечание. Далее считаем, что начальная точка случайного блуждания — ноль.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $P(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S'_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Следствие. $P(N = \infty)$ равно 0 или 1. $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $P(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. \square

Теорема 1.3. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow EN = \infty$ (соответственно, невозвратно $\Leftrightarrow EN < \infty$).

Доказательство. Если $EN < \infty$, то $P(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $P(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $P(\tau < \infty) < 1$.

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.

Доказательство. $P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

Случай $d = 1$: $P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

\Rightarrow ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай $d = 2$:

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

\Rightarrow ряд тоже разойдется \Rightarrow блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана. \square

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. \square

Следствие. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание невозвратно.

Доказательство. Запишем характеристическую функцию X в явном виде:

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{i(t, X)} = \sum_{k=1}^d \left(\frac{1}{2d} e^{it_k} + \frac{1}{2d} e^{-it_k} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности $t = 0$. Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_k))} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{t_1^2} + \dots + 1 - \frac{1}{t_d^2})} \sim \frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c \uparrow 1, \quad t \rightarrow 0.$$

Поскольку якобиан перехода к d -мерной сферической системе координат содержит множитель R в степени $d - 1$, то интеграл сойдется $\Leftrightarrow d \geq 3$. Теорема доказана. \square

Доказательство (комбинаторное). Заметим, что

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \left(\frac{n!}{n_1! \dots n_d!}\right)^2 \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \leq \\ &\leq \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \frac{n!}{((n/d)!)^d} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} = \Theta(n^{-d/2}) \end{aligned}$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при $d \geq 3$ ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). \square

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S* , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

Замечание. Подробнее см. [1], стр. 65.

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega: \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = P(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_{\xi}$ и $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= E s^{Z_n} = E \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от $\xi_{n,\bullet}$, а второй — от $\xi_{i,\bullet}$, $i = 1, \dots, n-1$, эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\ &= \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_{ξ} непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(A)),$$

то есть $\mathbb{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_{\xi}(p)$, $p \in [0, 1]$. □

Теорема 2.2. Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\psi = \psi_{\xi}$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathbb{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1, \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\} \right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $P(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n . Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1 $P(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $P(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.3. 1. Вероятность вырождения $P(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.
2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $E\xi \leq 1$ имеем $P(A) = 1$, при $E\xi > 1$ имеем $P(A) < 1$.

Доказательство. 1. Пусть $P(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. (а) Пусть $\mu = E\xi \leq 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

(б) Пусть $\mu = E\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$\begin{aligned} 1 - \psi'_\xi(0) &= 1 - P(\xi = 1) > 0, \\ 1 - \psi'_\xi(1) &= 1 - \mu < 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $P(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $P(A) < 1$, что и требовалось доказать. \square

Следствие. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда $EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$.

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

\square

Определение 2.2.

При $E\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $E\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $E\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} Z(0) &:= 0; \\ Z(t) &:= \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим *вспомогательный процесс восстановления* $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$P(Y = \alpha) = p \in (0, 1); \quad P(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor$.

Лемма 2.4.

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor, \text{ если } m \geq j; \\ 0 & \text{, если } m < j, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определение 2.5. U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если $P(U = k) = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Замечание. Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна p , а вероятность неудачи, соответственно, равна $1 - p$.

Лемма 2.5. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_{j+m} с параметром $p \in (0, 1)$. Тогда $\forall t \geq \alpha$ и $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

3 Лекция от 22.02.17

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Доказательство. Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости U_i получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p(1 - p)^{k_0} \dots p(1 - p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1 - p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1 - p)^{m - j} = p^{j+1} (1 - p)^{m - j} \#M, \end{aligned}$$

где M — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел k_j , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а $\#M$ — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения $\#M$ эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов $m-j$ и числом перегородок j . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать. \square

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.1. Пусть $t > \alpha$. Тогда

$$EZ^*(t) \leq At, \quad E(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.5

$$EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)EU,$$

где

$$EU = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)EU = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p)+1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p)+1) = At,$$

поскольку $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$, а $t > \alpha$; здесь $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$. Рассмотрим теперь $E(Z^*(t))^2$.

$$E(Z^*(t))^2 = DZ^*(t) + (EZ^*(t))^2 = (j+1)DU + (EZ^*(t))^2.$$

Обозначим через $\sigma^2(p) := DU$. Используя оценку выше для $EZ^*(t)$, получаем, что

$$(j+1)DU + (EZ^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как $(j+1)^2 \geq (j+1)$. Лемма доказана. \square

Замечание. Пусть случайная величина $X \geq 0$, X отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : P(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по X вспомогательный процесс восстановления $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$: пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \quad \forall t \geq 0$. Тогда $\forall \alpha > t$

$$\mathbb{E}Z(t) \leq \mathbb{E}Z^*(t) < \infty, \quad \mathbb{E}(Z(t))^2 \leq \mathbb{E}(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

Следствие. $\mathbb{P}(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$.

Доказательство. Z является неубывающим процессом:

$$s \leq t \rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow \mathbb{P}(Z(n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство. □

Следствие. $\mathbb{E}Z(t) \leq At; \quad \mathbb{E}(Z(t))^2 < Bt^2, \quad t > \alpha$.

3.3 Элементарная теорема восстановления

Лемма 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.n.} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mu = \mathbb{E}X$.

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение следует из УЗБЧ. Пусть теперь $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n.n.} \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbb{E} X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы. \square

Теорема 3.3. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \dots, X \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Z(t)}{t} &\xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty; \\ \frac{\mathbb{E} Z(t)}{t} &\xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ($Z(t) = \infty \forall t$).

Далее $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$, если $t_n = S_n(\omega)$, то $Z(t) \rightarrow \infty$ почти наверное (Z монотонна по t). Итак, рассмотрим (t, ω) такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих (t, ω) поделим обе части неравенства (2) на $Z(t)$:

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{n.n.} \mu, \quad \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{n.n.} \mu, \quad \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{n.n.} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{n.n.} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n.n.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{n.n.} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E} \xi_t \xrightarrow{n.n.} \mathbb{E} \xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Семейство случайных величин $\{\xi_t, t > \alpha\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t \rightarrow \alpha} \mathbb{E} \left(|\xi_t| \mathbb{I} \{ |\xi_t| > c \} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

Теорема 3.4. Если $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо, то $\mathbb{E}\xi_t \rightarrow \mathbb{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

Теорема 3.5 (де ла Валле Пуссена). $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равномерно интегрируемо $\Leftrightarrow \exists$ неубывающая функция g такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E}g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем $g(t) := t^2$, $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$. Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E}(\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E}(Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать. \square

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.2. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс интенсивности λ $N = \{N(t), t \geq 0\}$ есть процесс восстановления, построенный на $\{X_i\}$.

Определение 3.3. Определим для $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k} - S_{N(t)+k-1}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Для $\forall t > 0$ величины $N(t)$, X_1^t, X_2^t, \dots независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t), \quad X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Для доказательства независимости достаточно показать, что для $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по k .
Докажем базу индукции: $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1\right) &= \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1\right), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i независимы и $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1\right) &= \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1\right) = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy \end{aligned}$$

в силу независимости S_n и X_{n+1} . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda y e^{-\lambda y} dx dy &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3) $u_1 = 0$ и получим, что

$$\mathbf{P}\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\ &= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1}, \end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}\left(\underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots}\right) = \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \geq u_1)}_{=e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \mathbb{P}(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана. \square

Замечание (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины $X_{N(t)+1}$ содержит отрезок длины X_1^t по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени S_n , то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени X_i , а мы пришли на остановку в момент времени t и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

4 Лекция от 01.03.17

Точечные процессы

4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

Определение 4.1. Процесс $\{Y(t), t \geq 0\}$ имеет *независимые приращения*, если

$$\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0), Y(t_1) - Y(t_0), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Теорема 4.1. Пуассоновский процесс интенсивности λ имеет независимые приращения.

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции по n . Введем процесс

$$N^t(s) := \sup \left\{ n : \sum_{k=1}^n X_k^t \leq s \right\}, \quad s \geq 0.$$

Из доказанного ранее следует, что $\{N^t(s), s \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ . Заметим, что по определению

$$N^t(s) \in \sigma \{X_1^t, X_2^t, \dots\},$$

из чего следует, что $N(t)$ независима с $N^t(s) \forall s$. Но

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t),$$

а значит, для $n = 1$ утверждение доказано: $t_0 = t, t_1 = t + s$. Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем t_0 и рассмотрим $N^{t_0}(s)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N^{t_0}(t_k - t_0) - N^{t_0}(t_{k-1} - t_0) &= \\ &= N(t_k - t_0 + t_0) - N(t_0) - (N(t_{k-1} - t_0 + t_0) - N(t_0)) = \\ &= N(t_k) - N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0}, N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0}, N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где $s_k = t_k - t_0, k = 1, \dots, n$. Но поскольку мы знаем, что N_{t_0} независима с $N^t(s) \forall s$, мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности λ $N^t(s)$. Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана. \square

4.2 Пространственный пуассоновский процесс

Определение 4.2. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, а μ — σ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Тогда процесс $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности μ* , если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \text{Pois}(\mu(B)), \quad B \in \mathcal{B};$$

во-вторых,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B} \text{ таких, что } B_i B_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \\ \mu(B_i) < \infty \quad \forall i = 1, \dots, n, \text{ выполнено, что } N(B_1), \dots, N(B_n) \text{ независимы.}$$

Замечание. В определении выше сознательно не отбрасывались случаи $\mu(B) = 0$ и $\mu(B) = \infty$. Положим по определению, что если $\xi \sim \text{Pois}(a)$, то

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty &\Rightarrow \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty &\Rightarrow P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Определение 4.3. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, а μ — σ -конечная мера на нем. Пусть $\mu(S) < \infty$. Введем независимые случайные величины Y, X_1, X_2, \dots такие, что

$$\begin{aligned} Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y &\sim \text{Pois}(\mu(S)), \\ X_i : \Omega \rightarrow S, \quad X &\in \mathcal{F}|\mathcal{B}, \quad P(X_1 \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(S)}. \end{aligned}$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^Y \mathbb{I}_B(X_n), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Более подробно,

$$N(B, \omega) = \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B(X_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

Замечание. $\sum_1^0 := 0$.

Теорема 4.2. В терминах определения 4.3 $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ .

Доказательство. Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, \text{ что } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что

$$\mu(B_i) < \mu(S) < \infty.$$

Убедимся, что $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= \mathbb{P}(N(B_1) = m_1), \dots, \mathbb{P}(N(B_n) = m_n) = \\ &= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n, Y = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k) \end{aligned}$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$m := m_1 + \dots + m_n;$$

$$m_0 := k - m;$$

$$B_0 := S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right).$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы") $X_i, i = 1, \dots, k$, которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках") $B_j, j = 0, \dots, n$; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно m_j частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что Y — пуассоновская случайная величина:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \dots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)}\right)^{m_0} \dots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)}\right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\ &= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества B_j попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} &= \\ &= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{\mu(B_0)} = \\ &= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}, \end{aligned}$$

потому что

$$e^{-\mu(S)} e^{\mu(B_0)} = e^{-(\mu(B_1) + \dots + \mu(B_n))}.$$

Теорема доказана. \square

Лемма 4.3. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_k \sim \text{Pois}(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right),$$

где ряд может расходиться.

Доказательство. Если некоторое $\lambda_k = \infty$, то $\xi_k = \infty$, как и вся левая часть. Далее все $\lambda_k < \infty$.

1. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Имеем

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$

по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что ξ_k неотрицательны). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \xi < \infty$$

почти наверное. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{d}} \xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(u) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(e^{iu} - 1)} = \\ &= \exp \sum_{k=1}^n \lambda_k (e^{iu} - 1) \rightarrow \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e^{iu} - 1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right).$$

2. Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$

Находим последовательность r_j со свойством

$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \geq 1,$$

которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение

$$\eta_j := \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \xi_k;$$

Тогда η_1, η_2, \dots независимы, к тому же

$$\eta_j \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}} \lambda_k \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{P}(\eta_j \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(\eta_j = 0) \geq 1 - e^{-1} > 0.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_j \geq 1) = \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$$

почти наверное. Лемма доказана. □

Определение 4.4. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, а μ — σ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Пусть теперь $\mu(S) = \infty$. Для каждого S_q вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):

$$Y_q : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y_q \sim \text{Pois}(\mu(S_q)),$$

$$X_{q_i} : \Omega \rightarrow S_q, \quad X \in \mathcal{F} | \mathcal{B} \cap S_q, \quad \mathbb{P}(X_{q_i} \in C) = \frac{\mu(C)}{\mu(S_q)},$$

где

$$C \in \mathcal{B} \cap S_q \in \mathcal{B}.$$

Строим процесс

$$N_q(C) := \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C(X_{q,n}).$$

Положим

$$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q(B \cap S_q), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что все члены ряда независимы, а также что

$$N_q(B \cap S_q) \sim \text{Pois}(\mu(B \cap S_q)).$$

Тогда по лемме 4.3

$$N(B) \sim \text{Pois}\left(\sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q)\right) = \text{Pois}(\mu(B)).$$

4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

Определение 4.5. Процесс $\{X(B), B \in \mathcal{B}\}$ называется (*простым*) *точечным процессом*, если

$$X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n), \quad B \in \mathcal{B},$$

где

$$Z_n : \Omega \rightarrow S, \quad Z_n \in \mathcal{F} | \mathcal{B}.$$

Определение 4.6. Пусть $\mu(S) = \infty$, μ — σ -конечная мера на (S, \mathcal{B}) , а также

$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_{q_k}} \mathbb{I}_{B \cap S_q}(X_{q,n}).$$

Пусть

$$V_0 := 0, \quad V_1 := Y_1, \quad V_k := \sum_{j=1}^k Y_j.$$

Введем Z_n , $n \in \mathbb{N}$. Пусть для $\omega \in \Omega$

$$V_{k-1}(\omega) \leq n < V_k(\omega).$$

Определим

$$Z_n(\omega) := X_{k,n-V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$

Тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n).$$

Определение 4.7. Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда функционал Лапласа $\mathcal{L}(f)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}(f) := \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$

где $e^{-\infty} := 0$.

Теорема 4.4. $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ является пространственным пуассоновским процессом с σ -конечной мерой интенсивности $\mu \Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[\int_S \left(e^{-f(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right].$$

4.4 Маркирование пуассоновских процессов

Замечание. На момент набора этой части лекции я до конца не осознаю (совсем не осознаю), что было сказано на лекции и что на лекции подразумевалось лектором. Написанное здесь будет подвержено пересмотру (пишите мне, если знаете, как написать лучше!).

Определение 4.8. Рассмотрим T, T_1, T_2, \dots — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть T независима с S_n . Процесс, заданный элементами

$$Z_n := (S_n, T_n)_{n \geq 1},$$

является пространственным пуассоновским процессом с мерой

$$\lambda \nu \otimes \mathbb{Q},$$

где ν — мера на $B(\mathbb{R}_+)$, \mathbb{Q} — мера, задаваемая распределением T .

Замечание. Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть S_n — время начала работы с клиентом, T_n — время работы с клиентом, Y_t — число клиентов в момент t . Тогда

$$\begin{aligned} Y_t &= \# \{n : S_n \leq t < S_n + T_n\} = \# \{n : (S_n, T_n) \in B_t\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n, T_n) \sim \text{Pois}((\lambda \nu \otimes \mathbb{Q})(B_t)), \end{aligned}$$

где подмножество плоскости B_t задается неравенствами

$$\begin{aligned} x &\leq t; \\ x + y &> t, \end{aligned}$$

а точка (x, y) задается парой (S_n, T_n) . Вычислим:

$$(\lambda\nu \otimes \mathbf{Q})(B_t) = \int_0^t \lambda y \mathbf{Q}(dy) + \int_t^\infty \lambda t \mathbf{Q}(dy) = \lambda \int_0^\infty \min(t, y) \mathbf{Q}(dy).$$

Итак,

$$Y_t \sim \text{Pois} \left(\lambda \int_0^\infty \min(t, y) \mathbf{Q}(dy) \right) \quad \forall t > 0.$$

Если $ET < \infty$, то

$$\text{Pois} \left(\lambda \int_0^\infty \min(t, y) \mathbf{Q}(dy) \right) \rightarrow \text{Pois}(\lambda ET), \quad t \rightarrow \infty.$$

Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

Предметный указатель

- Измеримое
 - отображение, 2
 - пространство, 2
- Множество
 - достижимости, 7
 - возвратности, 7
- Модель Гальтона-Ватсона, 8
- Процесс восстановления, 11
- Производящая функция, 8
- Распределение
 - геометрическое, 12
 - случайного элемента, 2
- Случайный
 - элемент, 2
 - процесс, 2
- Случайное блуждание, 3
 - простое, 3
 - возвратное, 3
- Теорема
 - Чжуна-Фукса, 7
 - Ломницкого-Улама, 2
- Вырождение, 8