模拟测试题（100 分钟）

$\Phi(1.32)=0.9066$，$t_{0.975}(4)=2.7764, t_{0.95}(4)=2.1318, \chi^2_{0.975}(4)=11.143, \chi^2_{0.025}(4)=0.484$

一、填空题（15 分）

1．设 A, B 为两个事件且 $P(\overline{A})=0.3$，$P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(\overline{A}\cup B)=$ <u>0.5</u>。

2．将一枚均匀硬币独立地掷 5 次，则出现正面少于两次的概率 <u>$\frac{3}{16}$</u>。

3．设 X 的分布函数 $F(x)=A+B\arctan x(-\infty<x<+\infty)$，则 $A=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>，$B=$ <u>$\frac{1}{\pi}$</u>，

$P(-1<x\le 1)=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>。

4．设 X 与 Y 独立同分布，令 $X_1=\alpha X+\beta Y$，$X_2=\alpha X-\beta Y$ $(\alpha,\beta\neq 0)$，则

$\mathrm{cov}(X_1,X_2)=$ <u>$\alpha^2 D(X)-\beta^2 D(Y)$</u>。 $=(\alpha^2-\beta^2)D(X)$

5．总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取样本 $(X_1,X_2\cdots X_n)$，则 $\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim$ <u>$\chi^2(n)$</u>。

二、选择题（15 分）

1．事件 A 与 B 互为对立事件等价于（ C ）。

(a) A 与 B 互不相容；　　(b) A 与 B 相互独立；

(c) $A\cup B=\Omega$；$AB=\phi$　　(d) A 与 B 构成样本空间 Ω 的一个划分； 划分要求 $P(A)>0$. $P(B)>0$.

2．若 $f(x)=\frac{A}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$ 是某连续型随机变量的分布密度，则 $A=$ <u>a</u>。

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{e^x+e^{-x}}dx=1$

$(a)\ \frac{2}{\pi}$；　　$(b)\ \frac{\pi}{2}$；　　$(c)\ \frac{1}{2}$；　　$(d)\ 1$；

3．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，则下列说法正确的是 <u>d</u>。

(a) $X=Y$；　　(b) $P(X=Y)=1$；

(c) $X+Y$ 与 $2X$ 的分布相同；　　(d) $2X$ 与 $2Y$ 的分布相同；

一1. $P(\bar{A}\cup B) = 1 - P(\overline{\bar{A}\cup B}) \xlongequal{\text{对偶律}} 1 - P(\bar{\bar{A}}\cap\bar{B}) = 1 - P(A\bar{B})$

$= 1 - 0.5 = 0.5$

2. 设A：投掷硬币一次出现正面．$P(A)=\frac{1}{2}$

X：　〃　〃　五次　〃　〃　的次数．则 $X \sim B(5,\frac{1}{2})$

$P(\text{出现正面少于两次}) = P(X=0) + P(X=1)$

$= C_5^0\cdot(\frac{1}{2})^0\cdot(\frac{1}{2})^{5-0} + C_5^1\cdot(\frac{1}{2})^1\cdot(\frac{1}{2})^{5-1} = \frac{3}{16}$

3. 分布函数性质：$\begin{cases} 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}F(x) = A - \frac{\pi}{2}B \\ 1 = \lim\limits_{x\to+\infty}F(x) = A + \frac{\pi}{2}B \end{cases}$　解得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

$\therefore\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$

$P(-1 < x \le 1) = F(1) - F(-1) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}$

4. 基本知识：协方差性质：① $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

② $Cov(X,X) = D(X)$．

③ $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$

④ $Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X,Y)$

本题：$Cov(X_1,X_2) = Cov(\alpha X+\beta Y, \alpha X-\beta Y)$

$= \alpha^2 Cov(X,X) - \beta^2 Cov(Y,Y)$

$= \alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y)$

5. $\because\ X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$　$\therefore\ Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\therefore\ \sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n)$

4．设 X 与 Y 为任意的两个随机变量，下列事实中不与其他三项等价的是 $\underline{\quad b \quad}$。

(a) $\text{cov}(X,Y)=0$；　　　(b) X 与 Y 独立；$\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ X与Y不相关

(c) $E(XY)=E(X)E(Y)$；　　　(d) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$。$\Leftrightarrow$ X与Y不相关

5．设 X_n 是 n 次独立试验中 A 出现的次数，在每次试验中 A 出现的概率为 p，则对 $\forall x>0$，

重

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq x\right)=\underline{\quad b \quad}$。　伯努利大数定律．"频率的稳定性"．

$\leq \varepsilon$　　1

(a) 1；　　(b) 0；　　(c) $\int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t}{2}}dt$；　　(d) $\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t}{2}}dt$；

三、（12 分）甲盒中装有 3 个白球和 2 个黑球，乙盒中装有 4 个白球和 4 个黑球，从甲盒中任取两个球放入乙盒中，然后再从乙盒中任取一球，试求从乙盒中任取出的一只球是白球的概率？

四、（16）设连续型随机向量 (X,Y) 的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 X 与 Y 的边际分布密度；

(2) 试问 X 与 Y 是否独立？

(3) 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率？

五、（12 分）某设备有五大部件构成，设备运转时，各部件需要调整的概率分别为 0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，若各部件的工作状态相互独立，求同时需要调整的部件数 X 的期望和方差。

三．设 A_1：从甲中取出2个白球放入乙中．

A_2：〃　〃 1白1黑球 〃　〃

A_3：〃　〃 2个黑球 〃　〃

则 $P(A_1)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$．　$P(A_2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}$

$P(A_3)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$．　$A_1.A_2.A_3$ 为一个划分

设B：从乙中取到白球．

由全概率公式：

$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)$

$=\frac{3}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}$

$=25$

四.(1) $0<x<1$时. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dy=1$

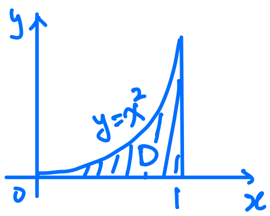
$\therefore f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$y>0$时. $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^{1}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(2) $\because f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ $\quad\therefore X$与Y独立.

(3) $P\{4X^2-4Y^2\geq 0\}=P\{Y\leq X^2\}=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ (D如右图)



$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dy$$

$$=\int_0^1\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx$$

$$=\int_0^1 dx-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\,[\Phi(1)-\Phi(0)]$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\,[\Phi(1)-0.5]$$

注: 若试卷给出$\Phi(1)=0.8413$, 则计算结果0.144

五、设 $X_i=\begin{cases}1, & 第i个部件需要调整.\\ 0, & \quad\cdots\quad 不\cdots\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,5$. 则X_i均为0-1分布 且 $X=\sum_{i=1}^{5}X_i$

由已知 $E(X_1)=0.1$. $D(X_1)=0.1\times(1-0.1)=0.09$;

$E(X_2)=0.2$. $D(X_2)=0.16$; $E(X_3)=0.3$. $D(X_3)=0.21$;

$E(X_4)=0.4$. $D(X_4)=0.24$; $E(X_5)=0.5$. $D(X_5)=0.25$

而各部件工作相互独立. 故

$E(X)=\sum_{i=1}^{5}E(X_i)=1.5$; $D(X)=\sum_{i=1}^{5}D(X_i)=0.95$

六、（10 分）设一批种子的良种率为$\frac{1}{6}$，在其中任选 600 粒，求在这 600 粒种子中良种所占的比例值与$\frac{1}{6}$之差的绝对值不超过 0.02 的概率。（用中心极限定理求解）

七、（10 分）设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2\cdots X_n)$为取自总体X容量为n的一个样本，试确定常数c，使$c\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

八（10 分）某工厂生产的一批螺栓，其长度（单位：厘米）$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$。随机抽取 5 个样品，测得其长度值为

12.6　　13.4　　12.8　　13.2　　13.0

1. 求总体均值μ的置信度为 95%的置信区间；

2. 取显著性水平$\alpha = 0.05$，是否可以认为这批螺栓的方差为 0.1？

六、设 X 表示 600 粒种子的良种数.

则 $X \sim B(600, \frac{1}{6})$.

$E(X) = 600 \times \frac{1}{6} = 100$. $D(X) = 600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{250}{3}$

由中心极限定理 $X \overset{近似}{\sim} N(100, \frac{250}{3})$

则 $P\{|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}| \le 0.02\}$

$= P\{|\frac{X-100}{600}| \le 0.02\}$

$= P\{|\frac{X-100}{\sqrt{\frac{250}{3}}}| \le \frac{12}{\sqrt{\frac{250}{3}}}\}$

$= P\{|\frac{X-100}{\sqrt{\frac{250}{3}}}| \le 1.32\}$

$\approx 2\Phi(1.32) - 1$

$= 2 \times 0.9066 - 1$

$= 0.8132$

七. 由已知 $E(X_i)=E(X)=\mu$、 $D(X_i)=D(X)=\sigma^2$. $i=1,2,\cdots,n$

$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2$

因此: $E\left[C\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1}-X_i)^2\right]$

$=C\sum_{i=1}^{n}\left[E(X_{i+1}^2)-2E(X_i)\cdot E(X_{i+1})+E(X_i^2)\right]$

$=C\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2-2\mu^2+\sigma^2+\mu^2)$

$=2nC\sigma^2$

由 $2nC\sigma^2=\sigma^2$ 知 $C=\frac{1}{2n}$

八.(1) $\overline{X}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=13$. $S^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2=0.1$.

σ^2未知. 求μ之置信区间. $\alpha=0.05$

S1. $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

S2. $P\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<T<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

S3. $P\{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

S4. 置信区间为 $(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

运算, $\overline{X}=13$. $S=\sqrt{0.1}$. $\sqrt{n}=\sqrt{5}=2.2361$. $\alpha=0.05$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(4)=2.7764$

即置信区间为 $(12.6074,\ 13.3926)$

(2) S1. 假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0.1$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

S2. $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0}{\sim}\chi^2(n-1)$

S3. $P\{\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha$

S4. 拒绝域：$\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

S4. 代入各数值：$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(4) = 0.484$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(4) = 11.143$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{4\times 0.1}{0.1} = 4$$

$\because$ $0.484 < 4 < 11.143$

$\therefore$ 接受假设 H_0. 即可认为 $\sigma^2 = 0.1$