

# 河北工业大学考 (A 卷)

课程名称 线 性 代 数

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
题分	15	15	32	14	14	10					100

备注： 学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设  $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ , 则  $D =$ \_\_\_\_\_。

2、设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 且  $ad - bc = 2$ , 则  $A^{-1} =$ \_\_\_\_\_。

3、已知  $\xi_1, \xi_2$  是三元齐次线性方程组  $Ax = 0$  的两个不同的解, 且  $R(A) = 2$ , 则该方程组的通解为\_\_\_\_\_。

4、已知向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_4 = (1, 3, 1)^T$ , 则  $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$ \_\_\_\_\_。

5、设三阶方阵  $A$  与对角阵  $\Lambda = \text{diag}(1, -1, 3)$  相似, 则  $|A - 2E| =$ \_\_\_\_\_。

## 二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维列向量, 且  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 1$ , 则  $|2\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| =$  ( )。

- (A) 1                                      (B) 0                                      (C) 2                                      (D)  $2^n$

2、设  $|A_1| = 2$ ,  $|A_2| = 1/2$ ,  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ , 则  $|A^{-1}| =$  ( )。

- (A) 1                                      (B) 2                                      (C)  $1/2$                                       (D) 4

3、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是向量空间  $R^3$  的一个基, 则下列仍是  $R^3$  的一个基的是 ( )。

- (A)  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$                                       (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$   
(C)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_3$                                       (D)  $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

4、二次型  $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  是正定二次型, 则  $t$  应满足 ( )。

- (A)  $-2 < t < 2$                                       (B)  $-2 < t < 0$                                       (C)  $0 < t < 1$                                       (D)  $-2 < t < 1$

5、设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 且  $R(A) = n - 2$ , 则  $A^*$  的秩为 ( )。

- (A)  $n - 1$                                       (B)  $n - 2$                                       (C) 1                                      (D) 0

### 三、计算题(每小题 8 分, 共 32 分)

1、已知  $A_{ij}$  是行列式  $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$  的元素  $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  的代数余子式, 计算  $A_{13} - 3A_{23} + A_{33}$ ;

2、设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$ , 使其满足  $X = AX + B$ ;

3、设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $|A| = 2$ , 计算  $\left| A^* + \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} \right|$ ;

4、设  $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T$ ,  $\beta = (1, 3, -3)^T$ , 求:  $a$ 、 $b$  为何值时,  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示唯一, 并求出表示式。

### 四、(14 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases},$$

(1) 求:  $a$  为何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多个解;

(2) 在方程组有无穷多个解时, 用其对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解。

### 五、(14 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ ,

(1) 写出  $f$  的矩阵  $A$ ;

(2) 求  $f$  的秩;

(3) 求正交变换  $X = PY$  (必须写出正交变换矩阵  $P$ ), 把  $f$  化为标准形。

### 六、证明题 (共 10 分)

1、(6 分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 证明:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ,  $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1$ ,  $\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2$  也是该方程组的一个基础解系;

2、(4 分) 设  $A$  为  $2n+1$  阶方阵, 且  $AA^T = E$ ,  $|A| > 0$ , 证明:  $|A - E| = 0$ 。

# 河北工业大学教务处

## 试题标准答案及评分标准用纸

课程名称:线性代数 (A 卷)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、 $-3$ ;      2、 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ;      3、 $k(\xi_1 - \xi_2), k \in \mathbb{R}$ ;      4、 $3$ ;      5、 $3$ .

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、C      2、A      3、B      4、D      5、D

三、解答题 (每小题 8 分, 共 32 分)

1

$$A_{13} - 3A_{23} + A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots$$

..... (3 分)

$$= 0 \dots\dots\dots$$

..... (8 分)

2      ,      由       $X = AX + B$       得

$$(E - A)X = B \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{因 } (E - A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

~

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

所      以

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

..... (8 分)

3 、 因

$$A^* = |A| A^{-1} = 2A^{-1}, \dots\dots\dots$$

..... (2 分)

所 以

$$\left| A^* + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & \end{pmatrix} \right| = \dots\dots\dots$$

... (4 分)

$$= \dots\dots\dots |5A^{-1}| \dots\dots\dots = \dots\dots\dots 5^n$$

$$|A^{-1}| \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$= \dots\dots\dots 5^n$$

$$|A|^{-1} = \frac{5^n}{2} \dots\dots\dots (8$$

分)

4 、 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  , 设

$$\beta = x_1 \alpha_1 + \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{解法一: } (A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}$$

~

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

故当  $a \neq 0$  且  $b \neq a$  时, 方程组有唯一解, 即  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示式唯一; ..... (6 分)

$$\text{此 时, } (A \ \beta) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/a \\ 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

解 法 二 :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{vmatrix} = a(a-b) \dots\dots\dots$$

... (2 分)

故当  $a \neq 0$  且  $b \neq a$  时, 方程组 (1) 有唯一解, 即  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示式唯一; ..... (4 分)

$$\text{此时, } (A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2 \dots\dots\dots$$

..... (8 分)

四 (14 分)、

系数矩阵为  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 增广矩阵为  $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}$ ,

( 1 ) 解 法 一  $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a-3 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 3a-3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

当  $a \neq 1$  且  $a \neq -2$  时,  $R(B) = R(A) = 3$ , 方程组有唯一解;

当  $a = -2$  时,  $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ ,  $R(B) = 3, R(A) = 2$ , 方程组无解;

当  $a = 1$  时,  $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $R(B) = R(A) = 1 < 3$ , 方程组有无穷多个

解。..... (7 分)

解

法

二

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2, \quad \dots \dots \dots$$

..... (4 分)

当  $a \neq 1$  且  $a \neq -2$  时,  $|A| \neq 0, R(A) = 3 = R(B)$ , 方程组有唯一解;

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, R(B) = 3, R(A) = 2,$$

方程组无解;

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(B) = R(A) = 1 < 3, \text{ 方程}$$

组 有 无 穷 多 个 解。.....

..... (7 分)

(2) 在方程组有无穷多个解时, 得同解方程组  $x_1 = -x_2 - x_3 - 2$ , 取  $x_2 = x_3 = 0$ , 得原

方 程 组 一 特 解

$$\eta^* = (-2, 0, 0)^T; \quad \dots \dots \dots$$

..... (9 分)

在  $x_1 = -x_2 - x_3$  中取  $(x_2, x_3)^T = (1, 0)^T, (0, 1)^T$ , 得原方程组对应齐次线性方

程 组 的 基 础 解 系 为  $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$ ,

$$\xi_2 = (-1, 0, 1)^T; \quad \dots \dots \dots$$

(12 分)

所以原方程组的通解为  $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \eta^*$ ,  $c_1, c_2$  为任意常

数。 ..... (14 分)

注：此题基础解系有很多种表示形式，改卷时需注意。

五 ( 14 分 ) 、 ( 1 )  $f$  的 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) (2)$$

因  $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 \neq 0$  ,  $R(A) = 2$  , 所以  $f$  的 秩 为 2; ..... (3 分)

$$(3) \text{ 由 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6), \text{ 得 } A \text{ 的特征值为 } \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = 6. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

当  $\lambda_1 = 1$  时, 解方程  $(A - E)x = 0$  , 由  $A - E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  , 得基础解系

$$\xi_1 = (-1, 2)^T;$$

当  $\lambda_2 = 6$  时, 解方程  $(A - 6E)x = 0$  , 由  $A - 6E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  , 得基础解系

$$\xi_2 = (2, 1)^T ;$$

把  $\xi_1, \xi_2$  单 位 化 , 得  $p_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ,

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

则有正交阵  $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$  和正交变换  $x = Py$  , 把  $f$  化为标准形

$$f = y_1^2 + 6y_2^2. \quad \dots\dots\dots$$

..... (14 分)

注：此题基础解系有很多种表示形式，故正交阵  $P$  有多种形式，改卷时需注意。

## 六、证明题

1、( 6 分 ) 证法一：由其次线性方程组解的性质知  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha$  ,

$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$  ,  $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1$  ,  $\beta_4 = \alpha_3 + \alpha_4$  都是  $Ax=0$  的解; ..... (2 分)

则有  $B = AK$  ,  $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  ,  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  ,

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{因 } |K| = -1 \neq 0, \text{ 所以 } K \text{ 可逆},$$

$$\text{或 } K \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R(K) = 4, \text{ 所以 } K \text{ 可逆, 从而 } R(B) = R(A) .$$

又因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是  $Ax=0$  的一个基础解系, 故它们线性无关,  $R(A) = 4$  , 于是  $R(B) = 4$  , 解向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  线性无关, 故是该方程组的一个基础解系。 ..... (6 分)

证法二: 由其次线性方程组解的性质知  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  ,  $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$  ,

$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1$  ,  $\beta_4 = \alpha_3 + \alpha_4$  都是  $Ax=0$  的解; ..... (2 分)

设  $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 0$  , 则有

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\alpha_3 + (k_2 + k_3 + k_4)\alpha_4 = 0 ,$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是  $Ax=0$  的一个基础解系, 它们线性无关, 故有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{其系数行列式为 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \text{ 方程组有唯一零解 } k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0, \text{ 所以}$$

解向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  , 线性无关, 故是该方程组的一个基础解



系。..... (6 分)

2 、 证 法 一 : 因 为  $A^T A = E, |A| > 0$  , 所 以  
 $|A| = 1$ , ..... (1 分)

则有  $|A - E| = |A| |E - A^T| = |E - A| = (-1)^{2n+1} |A - E| = -|A - E|$ ,

故 ..... 有

$|A - E| = 0$ 。 .....  
..... (4 分)

证法二:  $|A - E| = |A| |E - A^T| = |A| |E - A| = (-1)^{2n+1} |A| |A - E| = |A| |A - E|$ , 因此

$(1 + |A|) |A - E| = 0$ 。 .....  
..... (3 分)

又 因 为  $|A| > 0$  , 所 以 有

$|A - E| = 0$ 。 ..... (4 分)