参考答案

一、填空题

1．6；

由定理 6.1 知，方阵A的特征值等于其所有特征值的乘积；

2．$\frac{2}{3}$；

若A的特征值为λ，则A^2的特征值为λ^2。

则$\frac{1}{6}A^2$的特征值为$\frac{1}{6}\lambda^2$。

再利用 $(\frac{1}{6}A^2)^{-1}$的特征值为 $(\frac{1}{6}\lambda^2)^{-1}$。代入参数$\lambda=3$即可。

3．4；

相似矩阵具有相同的行列式；

4．2，4，-1；$det\,B=-8$.

若A的特征值为λ，

则A^3-4A^2+7E的特征值为$\lambda^3-4\lambda^2+7$。

分别代入A的特征值-1，1，2 即可。

再利用定理 6.1 知，方阵的特征值等于其所有特征值的乘积；

二、选择题

1.（b）

若A的特征值为λ，则$2A$的特征值为2λ。

定理 6.1 知，trA为A的主对角线上元素之和，也等于A的所有特征值之和；

2.（c）

若A的特征值为λ，则A^{-1}的特征值为$\frac{1}{\lambda}$。

则$4A^{-1}-E$的特征值为$\frac{4}{\lambda}-1$。分别代入A的特征值 1，2，2 即可。

再利用定理 6.1 知，方阵的特征值等于其所有特征值的乘积；

3.（c）

又因为三阶方阵A的特征值互不相同，

则A必可对角化；且对角矩阵B为A的所有特征值组成；

若行列式$|A|=0$，由定理 6.1 知，则A必有一个特征值为 0。

又因为三阶方阵A的特征值互不相同，

则其余两个特征值必不为 0；

因此对角矩阵B的秩为 2；

从而A的秩等于对角矩阵B的秩，故A的秩为 2。

4. $(\boldsymbol{d})$

若n阶方阵A与B相似，

则$\boldsymbol{R(A)=R(B)};\ \boldsymbol{det(A)=det(B)};$

则A与B有相同的特征多项式，即$|\boldsymbol{A-\lambda}\mathrm{E}|=|\boldsymbol{B-\lambda}\mathrm{E}|$。

5.$(\boldsymbol{c})$

已知$A=\begin{bmatrix}-1&2&4\\2&x&2\\4&2&-1\end{bmatrix}$**与**$D=\begin{bmatrix}5&&\\&y&\\&&-5\end{bmatrix}$**相似，**

则由定理 6.1 知，$-1+x+(-1)=5+y+(-5);\quad \therefore x-2=y;$

又$\because |A|=|D|,\quad$**即**$\begin{vmatrix}-1&2&4\\2&x&2\\4&2&-1\end{vmatrix}=-25y;$

而$\begin{vmatrix}-1&2&4\\2&x&2\\4&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&4\\0&x+4&10\\0&10&15\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}x+4&10\\10&15\end{vmatrix}$

$$= -15(x+4) - 100$$

$$\therefore -15(x+4) - 100 = -25y;$$

再代入$x-2=y$即得，$x=1, y=-1$;

6. (a)

解：设 $T=[T_1,T_2,T_3]=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&-1&-1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$,

由$|T|=1\neq 0$，则T可逆，

且 $T^{-1}AT=D$,

于 是$A=TDT^{-1}$,

利用逆矩阵的求法，可得 $T^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&-1&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$,

从而 $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3&-3\\0&-1&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1&-6&-6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$