# 数学物理方法期末知识点总结

# 一、复变函数

## 1.1 复数

### 1.1.1 复数的表示

（1）复平面表示法

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1-1}$$

（2）三角表示法

$$z = x + \mathrm{i}y = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$\begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arg z \end{cases} \tag{1-2}$$

（3）指数表示法

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1-3}$$

其中用到了欧拉公式

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \tag{1-4}$$

### 1.1.2 复数的基本运算

对于复数$z = x + iy$，

（1）复数的模

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1-5}$$

（2）复数的幅角与幅角主值，复数的幅角 Arg$z$ 具有多值性

$$\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \varphi_0 \pm 2k\pi = \arg z \pm 2k\pi \tag{1-6}$$

$$\varphi_0 = \arg z, 0 \le \varphi_0 < 2\pi \tag{1-7}$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, x > 0, y > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, x < 0, y > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, x < 0, y > 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

（3）复数的实部和虚部

$$x=\operatorname{Re}z,\ \ y=\operatorname{Im}z \tag{1-9}$$

（4）复数的共轭

$$z^{*}=x-\mathrm{i}y \tag{1-10}$$

（5）复数域内的无穷极限

在复数域内，$|\infty|=\infty$，复数$\infty$的实、虚部无意义，幅角无意义，并且有

$$\infty\pm z=\infty \tag{1-11}$$

$$\frac{z}{\infty}=0(z\neq\infty)\quad \frac{z}{0}=\infty(z\neq0) \tag{1-12}$$

**1.1.3 复数的代数运算**

（1）复数的加法运算

$$z=z_1+z_2=\left(x_1+x_2\right)+\mathrm{i}\left(y_1+y_2\right) \tag{1-13}$$

（2）复数的乘法运算

$$z=z_1z_2=\left(x_1+\mathrm{i}y_1\right)\left(x_2+\mathrm{i}y_2\right)=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+\mathrm{i}\left(x_1y_2+y_1x_2\right) \tag{1-14}$$

$$z=z_1z_2=\rho_1e^{\mathrm{i}\varphi_1}\rho_2e^{\mathrm{i}\varphi_2}=\rho_1\rho_2e^{\mathrm{i}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)} \tag{1-15}$$

$$zz^{*}=\left(x+\mathrm{i}y\right)\left(x-\mathrm{i}y\right)=x^2+y^2=|z|^2 \tag{1-16}$$

（3）复数的除法运算

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1e^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\rho_2e^{\mathrm{i}\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{\mathrm{i}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)} \tag{1-17}$$

（4）复数的整数乘方运算

$$z^n=\left(\rho e^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n=\rho^ne^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{1-18}$$

复数的分数次幂涉及开方运算，

（5）复数的整数开方运算

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ \ k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1-19}$$

$k$可以不取负值，因为与正值等价，相差$2k\pi$。

（6）棣莫弗公式

$$\left(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi \tag{1-20}$$

## 1.2 复变函数

### 1.2.1 区域

（1）去心邻域：对于任意正实数$\varepsilon$，复平面内满足以下条件的点的集合

$$0<\left|z-z_0\right|<\varepsilon \tag{1-21}$$

（2）内点：若某点的邻域中的所有点都属于点集 $D$，则称此点为点集 $D$ 的内点。

（3）开区域：开区域中的每一点都是内点，且任意两点都可以用一条由该点集 $D$ 的点构成的曲线连接。

（4）边界点：某点不属于区域 $D$，但其邻域内存在属于 $D$ 的点，则称此点为边界点。

（5）闭区域：开区域 $D$ 加上其边界 $L$ 组成的点集称为闭区域，表示为

$$\overline{D}=D+L \tag{1-22}$$

（6）连通数：区域的不相接的边界数目称为区域的连通阶数。连通阶数$n=1$的区域称为单通区域，$n\geq 2$的区域称为复通区域。

### 1.2.2 复变函数

复数的函数记作

$$w=f(z) \tag{1-23}$$

复变函数的实部与虚部

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{1-24}$$

## 1.3 复变函数的导数

复变函数的导数的定义与实变函数导数定义在形式上完全相同，因此实变函数的所有导数公式、微分公式都可以推广到复变函数中。

若复变函数的实部和虚部都连续，则复变函数是连续的；而实部和虚部都可导时，复变函数不一定可导。

### 1.3.1 柯西黎曼条件（C-R 条件）

柯西黎曼条件给出了复变函数可导的充分必要条件。函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$(x,y)$点可导的充分必要条件是

（1）$u(x,y)$与$v(x,y)$在$(x,y)$点可微；

（2）$u(x,y)$与$v(x,y)$在$(x,y)$点满足柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}，\text{即} u_x=v_y \quad u_y=-v_x \tag{1-25}$$

极坐标系中，C-R 条件表示为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho} \tag{1-26}$$

其中函数$u(\rho,\varphi),v(\rho,\varphi)$仍然是实部、虚部函数。

### 1.3.2 复变函数的导数

根据 C-R 条件，复变函数的导数 $f'(z)$ 可以表示为四种形式

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1-27}$$

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=u_x-\mathrm{i}u_y=v_y+\mathrm{i}v_x \tag{1-28}$$

## 1.4 解析函数

### 1.4.1 解析函数的定义

若函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内点点可导，则称 $f(z)$ 为 $D$ 内的解析函数；若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的邻域内点点可导，则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 点解析。

解析函数的和差积商也是解析函数；解析函数的倒数也是解析函数。

### 1.4.2 函数解析的充要条件

函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析的充要条件是

（1）函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内连续；

（2）函数 $f(z)$ 的实部、虚部函数 $u,v$ 在区域 $D$ 内满足 C-R 条件。

### 1.4.3 解析函数的性质

（1）解析函数的共轭性

解析函数的共轭性指的是解析函数的实部与虚部 $u,v$ 由 C-R 条件相联系，实部与虚部函数可以互相确定。

全微分法：由 C-R 条件得到

$$\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y = v_y\mathrm{d}x - v_x\mathrm{d}y \tag{1-29}$$

可以有四种方法求解上述全微分，从而通过已知函数构造解析函数：全微分法、曲线积分法、不定积分法、求导法。

曲线积分法：

$$u(x,y) = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y \tag{1-30}$$

不定积分法：

$$\begin{aligned} u(x,y) &= g(y) + \int u_x\mathrm{d}x \\ u(x,y) &= h(x) + \int u_y\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{1-31}$$

求导法：

$$\begin{aligned} &f'(z) = v_y + \mathrm{i}v_x \Rightarrow g(z) \\ &f(z) = \int g(z)\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{1-32}$$

解析函数的共轭性的几何意义是曲线族 $u(x,y)=C_1$ 与 $v(x,y)=C_2$ 正交，即

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0 \tag{1-33}$$

（2）解析函数的调和性

解析函数的调和性指的是函数的实部与虚部均为调和函数，即满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \tag{1-34}$$

（3）解析函数的保角性

解析函数的保角性指的是解析函数 $w=f(z)$ 在 $f'(z_0)\neq 0$ 的点处所实现的映射是保角的，从 $x$-$y$ 空间映射到 $u$-$v$ 空间前后，通过 $z_0$ 点的两曲线的切线夹角是相等的。

### 1.4.4 初等复变函数

（1）幂函数

有理幂函数是实变函数的简单推广，注意分数次幂的复变幂函数，次数分母为 $n$ 则可以得到 $n$ 个不同根。

（2）指数函数

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \tag{1-35}$$

指数函数 $e^z$ 以 $e^{2\pi\mathrm{i}}$ 为周期，

$$e^{z\pm 2\pi\mathrm{i}} = e^z \tag{1-36}$$

指数函数$e^z$在复平面的无穷远点无定义，可以趋于任何值。

注意，对于复指数函数，一般

$$\left(e^{z_1}\right)^{z_2} \neq e^{z_1 z_2} \tag{1-37}$$

仅当$z_2$为整数时，上式可取等。否则因为$z_1$可以任意加减$2\pi\mathrm{i}$，得到不同的值，不可简单取等。

（3）三角函数

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \tag{1-38}$$

（4）双曲函数

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z) \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cos(\mathrm{i}z) \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = -\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}z) \tag{1-39}$$

（5）根式函数

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z| e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\mathrm{i}\left(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \tag{1-40}$$

根式函数是多值函数，$n$次方根可以有$n$个不同的值，对于其中任一分支除原点和无穷远点外都是解析的。

（6）对数函数

$$w = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}\left(|z| e^{i\operatorname{Arg} z}\right) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1-41}$$

对数函数$\operatorname{Ln} z$是多值函数，其主值定义为

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \tag{1-42}$$

复变函数中的对数函数的基本性质与实变函数相同，

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \\ &e^{\operatorname{Ln} z} = z, \quad \operatorname{Ln} e^{z} = z + 2k\pi\mathrm{i} \\ &(\operatorname{Ln} z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z} \end{aligned} \tag{1-43}$$

# 二、复变函数的积分

## 2.1 复变函数积分的定义

复变函数积分的定义与实变函数相同，复变函数 $f(z)$ 沿复平面内曲线 $L$ 的积分定义为

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \tag{2-1}$$

### 2.1.1 复变函数积分的性质

（1）分段积分：

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{l_k} f(z)\mathrm{d}z，\ l = l_1 + l_2 + \cdots + l_n \tag{2-2}$$

（2）反向变号：

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = -\int_{l^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{2-3}$$

（3）线性组合：

$$\int_l \left[f_1(z) \pm f_2(z)\right]\mathrm{d}z = \int_l f_1(z)\mathrm{d}z \pm \int_l f_2(z)\mathrm{d}z \tag{2-4}$$

（4）常数系数：

$$\int_l af(z)\mathrm{d}z = a\int_l f(z)\mathrm{d}z \tag{2-5}$$

（5）复变积分的模不大于被积函数的模沿曲线的实变线积分：

$$\left|\int_l f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_l |f(z)||\mathrm{d}z| \tag{2-6}$$

上式中 $|\mathrm{d}z|$ 即是实变积分中的 $\mathrm{d}s$。

（6）积分值上限：

$$\left|\int_L f(z)\mathrm{d}z\right| \le Ml，\ M = \max_L |f(z)|，\ l = \int_L \mathrm{d}s \tag{2-7}$$

### 2.1.2 复变函数积分的计算

复变函数积分的计算主要参考实变曲线积分的计算，即两个坐标分别积分、化为参数积分。

（1）化为两个实变曲线积分：

$$\begin{aligned}\int_l f(z)\mathrm{d}z &= \int_l \left[u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\right](\mathrm{d}x + \mathrm{id}y) \\ &= \int_l \left[u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y\right] + \mathrm{i}\int_L \left[v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y\right]\end{aligned} \tag{2-8}$$

化为两个实变曲线积分的方法适用于平行于坐标轴的折线，以及曲线方程显式已知的情形。此外，对于圆弧上的积分，可以使用极坐标化为单变量积分：

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f\left(\rho e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta \tag{2-9}$$

（2）化为参数积分：

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_1}^{t_2} f\left(u\left[x(t),y(t)\right]+\mathrm{i}v\left[x(t),y(t)\right]\right)\mathrm{d}t \tag{2-10}$$

## 2.2 解析函数的柯西定理

### 2.2.1 柯西定理

若函数 $f(z)$ 在单通区域 $D$ 内解析，则 $f(z)$ 在 $D$ 内沿任意闭合曲线 $l$ 的正向积分等于零。

$$\oint_{\forall l\subset D} f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{2-11}$$

（1）推论 1：若函数 $f(z)$ 在闭单通区域 $\overline{D}$ 内解析，则 $f(z)$ 沿着 $\overline{D}$ 的边界 $L$ 积分等于零。

（2）推论 2：若函数 $f(z)$ 在单通区域 $D$ 内解析，则区域 $D$ 内的积分与路径无关。

### 2.2.2 原函数与定积分公式

函数 $f(z)$ 在单通区域 $D$ 内解析，则积分与路径无关，类似于多元实变函数，在区域内可以找到其原函数，

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi=F(z) \qquad \int_{z_1}^{z_2} f(\xi)\mathrm{d}\xi=F(z_1)-F(z_2) \tag{2-12}$$

### 2.2.3 复通区域的柯西定理

若函数 $f(z)$ 在闭复通区域 $\overline{D}$ 内解析，则 $f(z)$ 沿所有边界线（包括内边界线 $\sum_k L_k$ 和外边界线 $L_0$）的正向定积分之和为零。

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z=\oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z+\sum_k\oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{2-13}$$

需要注意的是，沿外边界线的正向是逆时针方向，沿内边界线的正向是顺时针方向。

（1）推论 1：在 $f(z)$ 的解析区域中，积分回路连续变形，积分值不变。

（2）推论 2：存在公式

$$\oint_l (z-a)^n\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\delta_{n,-1} \quad a\in D \tag{2-14}$$

其中$\delta_{n,m}$称为克罗尼克符号，

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}1, n=m\\0, n\neq m\end{cases} \tag{2-15}$$

## 2.3 解析函数的柯西公式

### 2.3.1 柯西公式

若函数$f(z)$在闭复通区域$\overline{D}$内解析，$a$ 为$\overline{D}$的内点，则在$\overline{D}$的所有边界线上（包括内边界线$\sum_k L_k$和外边界线$L_0$），有

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{L_0}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z+\sum_k\oint_{L_k}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right] \tag{2-16}$$

单通区域的情形是复通区域的特殊情况，可以由上式得到。柯西公式表明，一个解析函数在解析区域内的值由它在该区域边界上的值决定。

### 2.3.2 高阶导数公式

若函数$f(z)$在闭单通区域$\overline{D}$内解析，$z$ 为$\overline{D}$的内点，则$f(z)$可在$D$内求导任意多次，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \tag{2-17}$$

高阶导数公式表明，对于复变函数，只要其一阶导数存在，则其任意阶导数都存在，并且各阶导数连续。

## 2.4 使用柯西定理与柯西公式计算复变函数积分

### 2.4.1 使用柯西定理

（1）柯西定理给出了复变函数积分为 0 的条件，即函数在其单通解析区域内的任意闭合回路积分均为0，积分与路径无关。

（2）柯西定理指出，在函数解析区域内积分回路连续变形，积分值不变，因此可以将积分路径变换为围绕不解析点的圆，从而简化积分计算。

（3）需要注意，单通区域内的柯西定理与复通区域的有所不同，单通区域内任意闭合回路积分为零，而复通区域内仅沿边界积分和为零，区域内的积分可连续变形。

### 2.4.2 使用柯西公式

使用柯西公式计算积分，可以通过边界积分计算内点函数值，这时公式变化为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{L_0}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\sum_k\oint_{L_k}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right]=0 \tag{2-18}$$

也可以将积分转化为柯西公式的形式（分母为一次多项式），进而等价为求积分内剩余项组成的函数在分母常数项点处的函数值，

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z \overset{g(z)=f(z)(z-a)}{=} 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right] = 2\pi\mathrm{i}g(a) \tag{2-19}$$

对于复通区域内的环路积分，可以围绕不解析点（区域）构建圆，

$$\begin{aligned}
\oint_L f(z)\mathrm{d}z &= \oint_L f(z)\mathrm{d}z + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z - \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L f(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z\right) + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L \frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_k \oint_{L_k} \frac{g(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right) + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}g(a) + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{2-20}$$

其中$g(z)=f(z)(z-a)$

**2.4.3 使用高阶导数公式**

高阶导数公式适用于分母是高次的情形，将积分化为高阶导数公式的形式可简化计算。

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}\cdot\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}g^{(n)}(a) \tag{2-21}$$

使用上式要求要求化出的函数$g(z)$在$L$及其内部解析。

# 三、解析函数的级数表示

## 3.1 复变函数项级数

复变函数项级数：

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_k(z) + \cdots \tag{3-1}$$

### 3.1.1 级数收敛

（1）级数收敛的定义

级数的部分和的极限存在则称级数收敛

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)，\ S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k(z) \tag{3-2}$$

（2）级数收敛的必要条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = S(z) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} w_k(z) = 0 \tag{3-3}$$

（3）级数收敛的充要条件

任意给定$\varepsilon > 0$，都存在正整数$N(\varepsilon, z)$使得当$n > N$时，对任意自然数$p$都有

$$\left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} w_{n+k}(z)\right| < \varepsilon \tag{3-4}$$

### 3.1.2 绝对收敛

（1）绝对收敛的定义

若级数$\sum_{k=0}^{\infty}\left|w_k(z)\right|$在一点$z$收敛，则称级数在$z$点绝对收敛。

级数绝对收敛仅仅是级数收敛的充分条件，模级数发散不能认为级数发散，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\left|w_k(z)\right| \text{收敛} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \text{收敛} \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\left|w_k(z)\right| \text{发散} \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \text{发散} \end{aligned} \tag{3-5}$$

（2）绝对收敛级数的判别法

达朗贝尔判别法：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left|\frac{w_{k+1}(z_0)}{w_k(z_0)}\right| = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{在}z_0\text{点绝对收敛} \\
&\lim_{k\to\infty}\left|\frac{w_{k+1}(z_0)}{w_k(z_0)}\right| = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{在}z_0\text{点发散} \\
&\lim_{k\to\infty}\left|\frac{w_{k+1}(z_0)}{w_k(z_0)}\right| = r = 1 \quad \to \quad \text{用高斯判别法}
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

柯西判别法：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|w_k(z_0)\right|} = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{在}z_0\text{点绝对收敛} \\
&\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|w_k(z_0)\right|} = r > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{在}z_0\text{点发散}
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

高斯判别法：

$$
\begin{aligned}
&k\text{充分大时，有}\frac{w_k(z_0)}{w_{k+1}(z_0)} = 1 + \frac{\mu}{k} + o\left(\frac{1}{k^{\lambda}}\right),\ \lambda > 1 \\
&\operatorname{Re}\mu > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{在}z_0\text{点绝对收敛} \\
&\operatorname{Re}\mu \le 1 \quad \Rightarrow \quad \text{在}z_0\text{点发散}
\end{aligned}
\tag{3-8}
$$

（3）绝对收敛级数的性质

交换次序：绝对收敛级数可随意交换求和次序，所得级数仍绝对收敛，且级数和不变。

逐项相乘：两个绝对收敛级数可逐项相乘，所得级数仍是绝对收敛级数，且收敛于两收敛级数和之积。

### 3.1.3 一致收敛

一致收敛可以直观理解为函数项级数在区域内收敛，是对于级数在一点的收敛在复平面上的扩展。设函数项级数$\sum_{k}^{\infty} w_k(z)$定义在区域$D$上。

（1）一致收敛的定义

任意给定$\varepsilon > 0$，都存在与$z$无关的正整数$N(\varepsilon)$使得当$n > N$时，对$D$上的任何$z$都有

$$
\left|S(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon \tag{3-9}
$$

称级数在区域$D$上一致收敛于$S(z)$。

（2）一致收敛的判别法

判别法一：

$$\begin{cases}\text{正项级数}\sum_{k=0}^{\infty}m_k\text{在}D\text{上收敛}\\ \left|w_k\left(z\right)\right|\le m_k\end{cases}\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)\text{在}D\text{上一致收敛}\tag{3-10}$$

判别法二：

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)\text{在}D\text{上一致收敛}\\ \left|v\left(z\right)\right|\le Const\end{cases}\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}v\left(z\right)w_k\left(z\right)\text{在}D\text{上一致收敛}\tag{3-11}$$

（3）一致收敛级数的性质

逐项求极限：若级数在 $D$ 内一致收敛于 $S\left(z\right)$，且每一项在 $D$ 内连续，则

$$S\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)\text{在}D\text{内连续}\qquad \lim_{z\to z_0}\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{z\to z_0}w_k\left(z\right)\tag{3-12}$$

逐项积分：若级数在曲线 $l$ 上一致收敛，且每一项在 $l$ 上连续，则

$$\int_l\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}\int_l w_k\left(z\right)\mathrm{d}z\tag{3-13}$$

逐项求导：（魏尔斯特拉斯定理）若级数在 $\overline{D}$ 的边界 $L$ 上一致收敛于 $S\left(z\right)$，且每一项在 $\overline{D}$ 内解析，则

$$S\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)\text{在}\overline{D}\text{内解析}\qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\sum_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n w_k\left(z\right)}{\mathrm{d}z^n}\tag{3-14}$$

## 3.2 幂级数

幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-b\right)^k=a_0+a_1\left(z-b\right)+a_2\left(z-b\right)^2+\cdots+a_k\left(z-b\right)^k\tag{3-15}$$

其中 $a_k$ 称为幂级数的系数，$b$ 称为幂级数的中心。

### 3.2.1 幂级数的阿贝尔定理与收敛圆

（1）阿贝尔定理：若幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-b\right)^k$ 在某点 $z_0$ 收敛，则级数在以 $b$ 点为圆心，$\left|z_0-b\right|$ 为半径的圆区域内绝对收敛，在其闭区域内绝对收敛。

（2）推论：若幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$ 在某点 $z_1$ 发散，则级数必在圆 $|z-b| = |z_1 - b|$ 的外部发散。

阿贝尔定理及其推论表明，幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$ 在某点收敛，必在离中心更近的点收敛；在某点发散，必在离中心更远的点发散。

因此，幂级数的收敛区域与发散区域不可能交替分布，必存在一个圆域 $|z-b| \le R$，使得幂级数在圆内绝对、一致收敛，在圆外发散，此圆称为幂级数的收敛圆，半径 $R$ 称为收敛半径。收敛半径可以是有限实数、0 或 $\infty$.

$$\begin{aligned} &R = 0 \quad \text{除点} z = b \text{外，幂级数在全平面发散} \\ &R = \infty \quad \text{幂级数在全平面收敛} \end{aligned}$$

**3.2.2 幂级数在收敛圆内的性质**

（1）幂级数在收敛圆内解析，且可逐项求导任意多次（满足式(3-14)）。

（2）幂级数在可沿收敛圆内任意曲线逐项积分（满足式(3-13)）

（3）对幂级数逐项求导或逐项积分后，不改变幂级数的收敛半径。

**3.2.3 计算幂级数的收敛半径**

可以使用级数收敛的判定法计算幂级数的收敛半径。对于幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k$，

（1）比值法

由比值判别法式(3-6)可得，若

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-b)^{k+1}}{a_k(z-b)^k}\right| = |z-b|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = r \tag{3-16}$$

则

$$\begin{aligned} &\text{当} r<1\text{，即} |z-b| < \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} \text{时级数绝对收敛} \\ &\text{当} r>1\text{，即} |z-b| > \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} \text{时级数发散} \end{aligned} \tag{3-17}$$

得到幂级数的收敛半径

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \tag{3-18}$$

（2）根式法

由根式判别法式(3-7)可得，若

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\left(z-b\right)^k\right|}=\left|z-b\right|\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|}=r \tag{3-19}$$

则

$$\begin{aligned}&当r<1，即\left|z-b\right|<\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|}}时级数绝对收敛\\&当r>1，即\left|z-b\right|>\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|a_k\right|}}时级数发散\end{aligned} \tag{3-20}$$

得到幂级数的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\left|a_k\right|}} \tag{3-21}$$

（3）逐项微分或逐项积分法

若级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k\left(z\right)$的收敛半径已知为$R_0$，且

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k'\left(z\right)\qquad\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\int w_k\left(z\right)\mathrm{d}z \tag{3-22}$$

则级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k\left(z\right)$与$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k\left(z\right)$的收敛半径也是$R_0$.因为幂级数在收敛圆内一致收敛，可以使用逐项微分或积分法转化为其他幂级数求收敛半径。

（4）奇点法

由幂级数中心$b$到幂级数$S\left(z\right)$最近的奇点的距离就是幂级数的收敛半径。

以上收敛半径的公式(3-18)(3-21)仅适用于幂级数次数为无穷多个连续非负整数、无缺项的情形。若存在缺项，如幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-b\right)^{2k+1}$，则只能通过级数绝对收敛判定法参考式(3-16)(3-19)重新推导。级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-b\right)^{nk+m}$的收敛半径公式为

$$R^n=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|\quad或\quad R^n=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\left|a_k\right|}} \tag{3-23}$$

## 3.3 解析函数的泰勒展开

### 3.3.1 泰勒定理

泰勒定理：设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-b|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 可在圆内任意点 $z$ 展开为泰勒级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k \qquad \text{其中} a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!} \tag{3-24}$$

泰勒展开只能在函数的解析圆域内成立。

泰勒级数的讨论：

（1）解析函数的泰勒展开是唯一的。

（2）函数展开为泰勒级数，必须标明收敛半径，收敛半径就可以直接由奇点法得出，即函数 $f(z)$ 最靠近展开中心 $b$ 的奇点 $g$ 到 $b$ 的距离 $R=|g-b|$.

（3）泰勒级数与阿贝尔定理的关系：在收敛圆内幂级数的和函数是解析函数；在收敛圆内的解析函数可以唯一地展开为幂级数。

### 3.3.2 将解析函数展开为泰勒级数

（1）直接计算泰勒系数

根据泰勒定理(3-24)，泰勒系数可以由高阶导数得到，即

$$a_0=\frac{f(b)}{0!},a_1=\frac{f'(b)}{1!},a_2=\frac{f''(b)}{2!},a_3=\frac{f'''(b)}{3!},\cdots,a_k=\frac{f^{(k)}(b)}{k!},\cdots \tag{3-25}$$

（2）利用已知初等函数的展开

在已知常用初等函数的泰勒级数中通过换元可以得到其他函数的泰勒展开，一定要注意已知展开的收敛域，它将决定待求函数展开的收敛域。

一些常用函数的麦克劳林级数如下：

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots \qquad R=\infty \tag{3-26}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k=1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots \qquad R=1 \tag{3-27}$$

$$\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}z^k}{k}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \qquad R=1 \tag{3-28}$$

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \qquad R=\infty \tag{3-29}$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \qquad R=\infty \tag{3-30}$$

$$(1+z)^{\mu}=\sum_{k=0}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(n-1))z^k}{k!} \qquad R=1 \tag{3-31}$$

$$\arcsin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{z^{2k+1}}{2k+1}=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots \qquad R=1 \tag{3-32}$$

（3）利用两个绝对收敛幂级数的乘积或商

将两个绝对收敛幂级数的展开项分别写在表格的首行和首列，表格中填写相应行和列的乘积，按照斜线相同次数的乘积项合并为一项，最终写出幂级数的乘积（书 63 页）。

（4）在收敛圆内逐项求导或逐项积分

函数在收敛圆内一致收敛，逐项求导或积分不改变收敛性和收敛半径，因此可将原函数求导或积分转化为常用初等函数展开，展开后得到收敛域。

（5）待定系数法

待定系数法中，先假设 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$，通过求导代入等方法，根据同次项系数相等得到系数 $a_k$ 所满足的方程，进而求得系数。需要具体情况具体分析。

## 3.4 解析函数的洛朗展开

### 3.4.1 洛朗定理

洛朗定理：设函数 $f(z)$ 在环域 $R_2<|z-b|<R_1$ 内解析，则 $f(z)$ 可在环内任意点 $z$ 展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k \tag{3-33}$$

展开系数称为洛朗系数，

$$a_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{k+1}}\mathrm{d}\xi \tag{3-34}$$

其中 $C_\rho$ 为环域内环绕内圆的任一闭合曲线。

洛朗定理的讨论：

（1）洛朗展开系数公式与高阶导数公式相似，因而与泰勒展开系数公式相似，

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{k+1}} \mathrm{d}\xi \qquad f^{(k)}(b) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{k+1}} \mathrm{d}\xi \tag{3-35}$$

但洛朗展开系数不能写为高阶导数形式，因为洛朗展开式在 $f(z)$ 的解析环域 $R_2 < |z-b| < R_1$ 内成立，而高阶导数公式要求 $f(z)$ 在闭合曲线 $C_\rho$ 内部成立。

（2）洛朗级数在环域 $R_2 < |z-b| < R_1$ 内绝对收敛，并在其内部的任意闭环域内一致收敛。

（3）解析函数的洛朗展开式是唯一的。

### 3.4.2 将解析函数展开为洛朗级数

解析函数的洛朗级数展开法与泰勒级数展开完全相同，通常也使用已知初等函数展开式的变量替换，只是因为在原初等函数的收敛域内存在奇点，导致了负幂项的存在。负幂项可以没有，有限个或者无穷多个。

需要注意：

（1）洛朗系数与泰勒系数不同，不能使用高阶导数计算，只能按照式(3-34)计算；

（2）洛朗级数展开与奇点有关，若函数在平面内有多个奇点，则首先需要找到函数的所有奇点，再以展开中心 $b$ 为中心，以 $b$ 到各奇点的距离为半径作圆，把平面分成若干环域，从而将函数在不同环域内展开为不同的洛朗级数。

## 3.5 解析函数的零点和孤立奇点

### 3.5.1 解析函数的零点

（1）零点：若 $f(z)$ 在 $b$ 点解析，且 $f(b)=0$，则称 $b$ 点是解析函数 $f(z)$ 的零点。

（2）$m$ 阶零点：若 $b$ 点是函数 $f(z)$ 的零点，函数在 $b$ 点邻域的泰勒展开为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k \tag{3-36}$$

并且

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{m-1} = 0 \tag{3-37}$$

则称点 $b$ 为 $f(z)$ 的 $m$ 阶零点。由泰勒系数公式(3-24)可得到

$$f(b) = f^{(2)}(b) = f^{(3)}(b) = \cdots = f^{(m-1)}(b) = 0 \qquad f^{(m)}(b) \neq 0 \tag{3-38}$$

（3）零点的孤立性：若 $b$ 点是函数 $f(z)$ 的零点，且 $f(z)$ 在 $b$ 点的邻域解析且不恒为 0，

则 $f(z)$ 必在 $b$ 的某一邻域 $|z-b|<\rho$ 内，除了 $z=b$ 外不存在其他零点。

**3.5.2 解析函数的奇点**

（1）孤立奇点与非孤立奇点

若函数 $f(z)$ 在 $z=b$ 不解析或无定义，而在其去心邻域

$$0<|z-b|<R \tag{3-39}$$

内解析，则称 $z=b$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点。

若 $f(z)$ 在 $z=b$ 的任意小去心邻域内总有其他奇点，则称 $z=b$ 为函数 $f(z)$ 的非孤立奇点。

（2）孤立奇点的分类

设 $z=b$ 为函数的奇点，奇点可分为三类，从极限性质与洛朗展开式区分类型。

可去奇点：

$$\lim_{z\to b} f(z)=\text{有限值，在}b\text{点的某个去心邻域内有界}$$

$$\text{洛朗展开}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k\text{不含负幂项}$$

$m$ 阶极点：

$$\lim_{z\to b} f(z)=\infty\text{，在}b\text{点的某个去心邻域内无界}$$

$$\text{洛朗展开}f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}a_k(z-b)^k\text{含}m\text{个负幂项，}a_{-m}\neq 0$$

本性奇点：

$$\lim_{z\to b} f(z)=\text{无定值，不同点列}\{z_k\}\text{可以趋于任意值}$$

$$\text{洛朗展开}f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-b)^k\text{含无穷多个负幂项}$$

若 $z=\infty$ 为函数的孤立奇点，奇点也可分为三类，从极限性质与洛朗展开式区分类型。

可去 $\infty$ 奇点：

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\text{有限值}$$

$$\text{洛朗展开}\sum_{k=-\infty}^{0}a_k(z-b)^k\text{不含正幂项}$$

$m$ 阶 $\infty$ 极点：

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

$$\text{洛朗展开} \sum_{k=-\infty}^{m} a_k (z-b)^k \text{ 含}m\text{个正幂项}$$

本性$\infty$奇点：

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \text{无定值}$$

$$\text{洛朗展开} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-b)^k \text{ 含无穷多个正幂项}$$

注意无穷奇点的洛朗展开判别法，要求展开式当$|z|\to\infty$时仍收敛于$f(z)$.

### 3.5.3 解析函数奇点类型的判断

判断奇点类型，首先要确定奇点是孤立奇点；其次根据奇点类型的定义，使用极限法或洛朗展开法确定奇点类型。此外还有一些常用的判断方法。

（1）$m$ 阶极点的判断

若 $z=b$ 是函数 $f(z)$ 的奇点，且

$$\lim_{z\to b}(z-b)^m f(z) = \text{非零有限值} \tag{3-40}$$

则 $z=b$ 是函数 $f(z)$ 的 $m$ 阶奇点。

对于分式形式的函数，若在某个奇点 $z=b$ 处分母为零而分子不为零，则为零项$(z-b)^m$的的次数就是极点的阶数。

（2）解析函数零点与极点的关系

若 $b$ 点是函数 $f(z)$ 的 $m$ 阶极点，则 $b$ 点必为函数 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的 $m$ 阶零点，反之亦然。

（3）无穷奇点的分类判断

判断无穷孤立奇点的类型，通常使用洛朗展开法，替换变量 $t=\dfrac{1}{z}$。例如要求 $f(z)$ 在环域 $R<|z-b|<\infty$ 的洛朗展开，变量替换为 $t=\dfrac{1}{z-b}$，就可以转化为求函数 $g(t)$ 在环域 $0<t<\dfrac{1}{R}$ 内的洛朗展开，相同的方法可以也可以用于函数的泰勒展开。若根据在 $t=0$ 为中心点的环域内，洛朗展开式中关于 $t$ 的正幂项即为关于 $z$ 的负幂项，变量回代为 $z$，即可判定无穷奇点的类型。

（4）本性$\infty$奇点

函数 $\sin z, \cos z, e^z$ 的$\infty$点都是本性奇点，没有确定值。

# 四、留数定理及其应用

## 4.1 留数定理

### 4.1.1 留数与留数定理

若函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 内除有限个孤立奇点 $b_k$ 外解析，则

$$\oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} f(b_k) \qquad \operatorname{Res} f(b_k) = a_{-1}^{(k)} \tag{4-1}$$

式中 $\operatorname{Res} f(b_k)$ 称为函数 $f(z)$ 在点 $b_k$ 处的留数，它等于 $f(z)$ 在 $b_k$ 的去心邻域 $0<|z-b_k|<R$，$R\to 0$ 的洛朗展开式中的 $-1$ 次洛朗系数 $a_{-1}^{(k)}$.

### 4.1.2 计算留数的方法

（1）可去奇点（极限为有限值，洛朗展开不含负幂项）

$$\operatorname{Res} f(b_k) = 0 \tag{4-2}$$

（2）一阶极点（极限为无穷值，洛朗展开含一个负幂项）

$$\operatorname{Res} f(b_k) = \lim_{z\to b_k}(z-b_k)f(z) \tag{4-3}$$

对于分式形式函数 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，若

$$\begin{aligned}&\varphi(z)\text{与}\psi(z)\text{在}b_k\text{点解析}\\&\varphi(b_k)\neq 0,\ \ \psi'(b_k)\neq 0\end{aligned} \tag{4-4}$$

则

$$\operatorname{Res} f(b_k) = \frac{\varphi(b_k)}{\psi'(b_k)} \tag{4-5}$$

（3）$m$ 阶极点（极限为无穷值，洛朗展开含 $m$ 个负幂项）

$$\operatorname{Res} f(b_k) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b_k}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b_k)^m f(z) \tag{4-6}$$

（4）本性奇点

将函数在 $b_k$ 点的邻域 $0<|z-b_k|<R$ 洛朗展开后取 $-1$ 次项系数

$$\operatorname{Res} f(b_k) = a_{-1}^{(k)} \tag{4-7}$$

### 4.1.3 无穷远点的留数与留数定理

定义无穷远孤立奇点$\infty$处的留数为

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1}^{(\infty)} \tag{4-8}$$

留数和定理将有限远处的留数与无穷远点处的留数相联系

$$\sum_k \operatorname{Res} f(b_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0 \tag{4-9}$$

计算无穷远点处的留数，可以先计算函数在所有有限远奇点$b_k$的留数，再根据留数和定理(4-9)式计算$\infty$点的留数；也可以直接在无穷远环域$R < |z-b| < \infty$内洛朗展开得到$-1$次项系数；还可用于反向计算有限远点留数和。

## 4.2 用留数定理计算实变积分

引理 1：若在上半平面及实轴上$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0 \left(0 \le \arg z \le \pi\right)$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{4-10}$$

引理 2：若在上半平面及实轴上$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0 \left(0 \le \arg z \le \pi\right)$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z = 0 \qquad m > 0 \tag{4-11}$$

引理 3：若$b_k$是$f(z)$在实轴上的一阶极点，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = -\pi \mathrm{i} \operatorname{Res} f(b) \tag{4-12}$$

以上各式中积分回路$C_R$指的是上半平面的无穷大半圆弧，$C_\varepsilon$指的是以上极点为圆心的逆向无穷小半圆弧。

### 4.2.1 $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 型积分

积分要求被积函数是$\cos\theta$和$\sin\theta$的有理实函数，且积分区间须为$[0, 2\pi]$或可化为$[0, 2\pi]$.

首先将三角变量替换为复变量

$$\sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad \cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \tag{4-13}$$

以上变量替换是恒等变换，不改变积分上下限与积分值。

进而积分区间$\left[0,2\pi\right]$就可以视为$|z|=1$的正向圆弧，直接积分或使用留数定理可计算

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta &= \oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z \\ &= \oint_{|z|=1} g\left(z\right)\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} g\left(b_k\right)\end{aligned} \tag{4-14}$$

其中$g\left(z\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}$

### 4.2.2 $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ 型积分

积分要求$f\left(z\right)$在实轴上没有奇点，在上半平面上除有限个孤立奇点$b_k$外解析；且当 $z$ 在上半平面以及实轴方向趋于$\infty$时，有

$$\lim_{z\to\infty} zf\left(z\right)=0 \tag{4-15}$$

（使用引理 1）首先认为积分值是它的积分主值

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{4-16}$$

然后选择辅助函数 $f\left(z\right)$，使得函数满足式(4-15)。通常将变量 $x$ 替换为 $z$ 即可，有时需要使用定积分恒等变形等方法转换被积函数。

最后选择积分回路，添加上半平面无限大半圆弧与实轴构成闭合积分回路，根据引理 1 的结论(4-10)，得

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f\left(x\right)\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f\left(z\right)\mathrm{d}z\right] \\ &= \oint_{C_\infty + R_{axis}} f\left(z\right)\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} f\left(b_k\right)\end{aligned} \tag{4-17}$$

### 4.2.3 $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$ （$m>0$）型积分

积分要求$f\left(z\right)$在实轴上没有奇点，在上半平面上除有限个孤立奇点$b_k$外解析；且当 $z$ 在上半平面以及实轴方向趋于$\infty$时，有

$$\lim_{z\to\infty} f\left(z\right)=0 \tag{4-18}$$

（使用引理 2）首先认为积分值是其积分主值，然后选择辅助函数 $f(z)$ 使其满足式(4-18)（通常直接将变量 $x$ 替换为 $z$），由引理 2 的结论(4-11)得

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z\right]\\ &=\oint_{C_\infty+R_{axis}} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z\\ &=2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left[f(b_k)e^{imb_k}\right]\end{aligned}\tag{4-19}$$

若积分中的复数次幂项是三角函数，也可以依照这种方法处理，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x \tag{4-20}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x&=\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left(f(b_k)e^{imb_k}\right)\right]\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x&=\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left(f(b_k)e^{imb_k}\right)\right]\end{aligned}\tag{4-21}$$

若被积函数整体存在奇偶性，则式(4-20)中有一项直接为零，式(4-21)中的取实部、取虚部就不再需要，对于正半实轴或负半实轴的积分亦可直接取其 $\frac{1}{2}$.

#### 4.2.4 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 且在实轴上有一阶极点的积分

积分要求 $f(z)$ 在实轴上有一阶极点，在上半平面除有限个孤立奇点外解析；且当 $z$ 在上半平面以及实轴方向趋于 $\infty$ 时，有

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=0 \tag{4-22}$$

（使用引理 1 和 3）认为积分值是积分主值，选择辅助函数 $f(z)$ 使其满足式(4-22)，选择积分回路为实轴、上半平面无限大圆弧正方向，在实轴上遇到孤立奇点时使用无限小上平面半圆弧绕过，这样组成的闭合积分回路。以实轴上存在一个奇点 $p$ 为例，由引理 1(4-10)以及引理 3(4-12)，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x+0-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,f(p)&=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{p-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z+\int_{p+\varepsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right]\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,f(p)&=\oint_{R_{axis}+C_\varepsilon+C_R} f(z)\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{4-23}$$

使用留数定理，移项得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\,f(b_k)+\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,f(p) \tag{4-24}$$

同理，若实轴上存在多个一阶极点 $p_n$，上半平面存在多个奇点 $b_k$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} f(b_k) + \pi \mathrm{i}\sum_n \operatorname{Res} f(p_n) \tag{4-25}$$

### 4.2.5 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$（$m>0$）且在实轴上有一阶极点的积分

积分要求 $f(z)$ 在实轴上有一阶极点，在上半平面除有限个孤立奇点外解析；且当 $z$ 在上半平面以及实轴方向趋于 $\infty$ 时，有

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \tag{4-26}$$

（使用 2 和 3）认为积分值是积分主值，选择辅助函数 $f(z)$ 使其满足式(4-26)，选择积分回路为实轴、上半平面无限大圆弧正方向，在实轴上遇到孤立奇点时使用无限小上平面半圆弧绕过，这样组成的闭合积分回路。以实轴上存在一个奇点 $p$ 为例，由引理 2(4-11)以及引理 3(4-12)，记函数

$$F(z) = f(z)e^{\mathrm{i}mz} \tag{4-27}$$

得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x + 0 - \pi \mathrm{i}\operatorname{Res} F(p) &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{p-\varepsilon} F(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\varepsilon} F(z)\mathrm{d}z + \int_{p+\varepsilon}^{R} F(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} F(z)\mathrm{d}z\right]\\ \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x - \pi \mathrm{i}\operatorname{Res} F(p) &= \oint_{R_{axis}+C_\varepsilon+C_R} F(z)\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{4-28}$$

注意引理 3 与前两个引理有所不同，并不要求函数有特殊的极限性质，对于任何复变函数都成立，而 $f(z)$ 在实轴上的一阶极点同时也是 $F(z)$ 的一阶极点，引理 3 的结论在上式中直接在 $F(z)$ 上套用。将式(4-28)移项得

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} F(b_k) + \pi \mathrm{i}\operatorname{Res} F(p) \tag{4-29}$$

若实轴上存在多个一阶极点 $p_n$，上半平面存在多个奇点 $b_k$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i}\sum_k \operatorname{Res} F(b_k) + \pi \mathrm{i}\sum_n \operatorname{Res} F(p_n) \tag{4-30}$$

### 4.2.6 用留数定理计算实积分归纳总结

用留数定理计算实积分，可归纳为以下步骤：

（1）选择辅助函数；

（2）把定积分化为沿闭合回路的复变函数积分；

（3）按留数定理计算，减去添加的路径上的积分值。

将以上典型积分形式的公式归纳总结：

| 积分形式 | 前提条件 | 计算方法 | 积分公式 |
|---|---|---|---|
| $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ | 积分区间可化为 $[0,2\pi]$ | 三角函数复数形式代换，$\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$ | $2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, g(b_k)$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ | $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$<br>实轴无奇点<br>上半平面除有限个孤立奇点外解析 | 添加上半平面无限大圆弧构建闭合积分回路，套用引理 1 | $2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, f(b_k)$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x$，$m>0$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\mathrm{d}x$，$m>0$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\mathrm{d}x$，$m>0$ | $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$<br>实轴无奇点<br>上半平面除有限个孤立奇点外解析 | 添加上半平面无限大圆弧构建闭合积分回路，套用引理 2 | $2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, F(b_k)$<br>$\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, F(b_k)\right]$<br>$\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, F(b_k)\right]$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ | $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$<br>实轴有一阶极点<br>上半平面除有限个孤立奇点外解析 | 添加上半平面无限大圆弧与围绕实轴极点的无限小圆弧，构建闭合积分回路，套用引理 1 和引理 3 | $2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, f(b_k)+\pi\mathrm{i}\sum_n \mathrm{Res}\, f(p_n)$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{d}x$，$m>0$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\mathrm{d}x$，$m>0$<br>$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\mathrm{d}x$，$m>0$ | $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$<br>实轴有一阶极点<br>上半平面除有限个孤立奇点外解析 | 添加上半平面无限大圆弧与围绕实轴极点的无限小圆弧，构建闭合积分回路，套用引理 2 和引理 3 | $2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, F(b_k)+\pi\mathrm{i}\sum_n \mathrm{Res}\, F(p_n)$<br>$\mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, F(b_k)+\pi\mathrm{i}\sum_n \mathrm{Res}\, F(p_n)\right]$<br>$\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\, F(b_k)+\pi\mathrm{i}\sum_n \mathrm{Res}\, F(p_n)\right]$ |

# 五、解析延拓

## 5.1 解析延拓

### 5.1.1 解析延拓的概念

若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分别在区域 $D_1$ 和 $D_2$ 内解析，并且在 $D_1$ 与 $D_2$ 的重叠区域 $D_{12}$ 中有

$$f_1(z)=f_2(z) \tag{5-1}$$

则称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 $D_2$ 中的解析延拓，也称 $f_1(z)$ 为 $f_2(z)$ 在 $D_1$ 中的解析延拓。解析函数与其定义域的组合

$$\{D_1,f_1(z)\} \qquad \{D_2,f_2(z)\} \tag{5-2}$$

称为解析元素。

解析延拓的定义中，要求函数在各自的区域内解析限定了不可随便取分片连续函数作为解析延拓。

解析延拓可以将函数的定义域扩大，得到解析函数在不同区域内的有效表达式。

### 5.1.2 解析延拓的方法

主要使用泰勒级数展开对函数进行解析延拓。现给定解析元素 $\{D_1,f_1(z)\}$ 采用泰勒级数法对 $f_1(z)$ 解析延拓。

（4）在 $D_1$ 内取一点 $b_1$，将 $f_1(z)$ 在 $b_1$ 的邻域内展开为泰勒级数

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_1^{(k)}(b_1)}{k!}(z-b_1)^k \tag{5-3}$$

（5）函数 $f_1(z)$ 在 $b_1$ 点的展开可能有不同的收敛半径，级数可能在超出 $D_1$ 的范围内收敛。

（6）将这个级数的和函数记为 $f_2(z)$，其收敛域为 $D_2$。则在 $D_1$ 与 $D_2$ 的重叠区域内，必有 $f_1(z)=f_2(z)$。

（7）若 $D_2$ 存在超出 $D_1$ 的部分，那么 $f_2(z)$ 就是 $f_1(z)$ 在 $D_2$ 中的解析延拓。

（8）再在 $D_2$ 内选取一点 $b_2$，将 $f_2(z)$ 在 $b_2$ 的邻域内展开为泰勒级数

$$f_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_2^{(k)}(b_2)}{k!}(z-b_2)^k \tag{5-4}$$

（9）将级数(5-4)记为 $f_3(z)$，其收敛域 $D_3$ 可能超出 $D_1$ 和 $D_2$，那么 $f_3(z)$ 就是 $f_2(z)$ 在 $D_3$ 内的解析延拓。

（10）不断重复上述步骤，可以得到一系列解析元素，它们组成一个解析函数 $F(z)$，定义域就是所有解析元素给出的定义域的总和

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1 \\ f_2(z), & z\in D_2 \\ f_3(z), & z\in D_3 \\ \cdots \end{cases} \tag{5-5}$$

因为泰勒级数的收敛半径是到距离展开中心最近的奇点的距离，不可能一步得到全平面的解析延拓；所以对于无限密集分布的奇点组成边界的区域，从任何方向都不可延拓出去，例如函数 $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}z^{2^m}$ 。

## 5.2 Γ 函数

### 5.2.1 Γ 函数的定义

Γ 函数在复数域的定义式为

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,z=x>0 \tag{5-6}$$

递推公式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{5-7}$$

### 5.2.2 Γ 函数的解析延拓

使用 Γ 函数的递推公式(5-7)，从 Γ 函数的定义式出发，可以推得

$$\begin{aligned} &\Gamma_{-1}(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1) && \mathrm{Re}\,z>-1, z\neq 0 \\ &\Gamma_{-2}(z)=\frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2) && \mathrm{Re}\,z>-2, z\neq -1,0 \\ &\cdots && \cdots \end{aligned} \tag{5-8}$$

得到一系列解析元素

$$\begin{aligned}
&\left\{\operatorname{Re} z>-1, z \neq 0 ; \frac{\Gamma(z+1)}{z}\right\} \\
&\left\{\operatorname{Re} z>-2, z \neq 0,-1 ; \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}\right\} \\
&\left\{\operatorname{Re} z>-3, z \neq 0,-1,-2 ; \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)}\right\} \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{5-9}$$

这些解析元素可以组成完全的解析函数，0 和负整数点是奇点。

### 5.2.3 Γ 函数的常用公式

从 Γ 函数的定义直接计算，可以得到一系列公式。

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} \mathrm{d} t=1 \tag{5-10}$$

$$\Gamma(n+1)=n \Gamma(n)=n(n-1) \Gamma(n-1)=\cdots=n! \tag{5-11}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} \mathrm{d} t=2 \int_0^{\infty} e^{-t} \mathrm{d} \sqrt{t}=\sqrt{\pi} \tag{5-12}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\cdots=\frac{(2 n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \tag{5-13}$$

在整数点与负整数点 $n$，若定义 $\Gamma(n)=\lim\limits_{p \rightarrow n} \Gamma(p)$，则由递推公式(5-7)得

$$\begin{aligned}
&\Gamma(0)=\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1)}{p}=\infty \\
&\Gamma(-1)=\lim_{p \rightarrow -1} \frac{\Gamma(0)}{p}=-\infty \\
&\Gamma(-2)=\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-1)}{p}=\infty \\
&\Gamma(-3)=\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-2)}{p}=-\infty \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{5-14}$$

当负整数的绝对值为奇数时 $\Gamma(n)=-\infty$；为偶数时 $\Gamma(n)=\infty$ .以上结果可以统一为

$$\frac{1}{\Gamma(n)}=0, \quad n=0,-1,-2,-3, \cdots \tag{5-15}$$

# 六、狄拉克 $\delta$ 函数

## 6.1 一维 $\delta$ 函数

### 6.1.1 一维 $\delta$ 函数的定义

一维 $\delta$ 函数定义在 $(-\infty,\infty)$，记作 $\delta(x-x_0)$，定义式为

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0，& x\neq x_0\\ \infty，& x=x_0\end{cases} \tag{6-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1 \tag{6-2}$$

### 6.1.2 $\delta$ 函数的性质

（1）积分性质

若 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,\infty)$ 的任一连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0) \tag{6-3}$$

此式也是一维 $\delta$ 函数的定义式。换言之，满足上式的函数就是 $\delta$ 函数。特别地，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0) \tag{6-4}$$

（2）对称性

$$\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x) \tag{6-5}$$

即 $\delta$ 函数是偶函数。

（3）本征值方程

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0) \tag{6-6}$$

（4）

$$x\delta(x)=0 \tag{6-7}$$

（5）若 $\varphi(x)$ 为连续函数，且 $\varphi(x)=0$ 只有单根 $x_k$，$k=1,2,3,\cdots,N$ 那么

$$\delta(\varphi(x))=\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta(x-x_k)}{\left|\varphi'(x_k)\right|} \tag{6-8}$$

单根意味着导数 $\varphi'(x_k)\neq 0$。若 $\varphi(x)$ 有重根，则式(6-8)不成立。

### 6.1.3 一维 $\delta$ 函数的导数

（1）一阶导数

对于任意连续函数 $f(x)$，若都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x_0)\mathrm{d}x = -f'(x_0) \tag{6-9}$$

成立，则函数 $\delta'(x-x_0)$ 称为 $\delta$ 函数的导数，记作

$$\delta'(x-x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-x_0) \tag{6-10}$$

这个定义是由分部积分得到的。

（2）高阶导数

对于任意连续函数 $f(x)$，若都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \tag{6-11}$$

成立，则函数 $\delta^{(n)}(x-x_0)$ 称为 $\delta$ 函数的 $n$ 阶导数，并记作

$$\delta^{(n)}(x-x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\delta(x-x_0) \tag{6-12}$$

（3）导数的性质

$\delta'(x)$ 是奇函数：

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{6-13}$$

在积分号下，存在恒等变换

$$x\delta'(x)\mathrm{d}x = -\delta(x)\mathrm{d}x \tag{6-14}$$

特别是当积分区间内 $x \neq 0$，此时 $\delta(x)=0$，根据(6-14)式可替换 $\delta'(x)=0$

### 6.1.4 一维 $\delta$ 函数的傅里叶变换

傅里叶变换公式

$$\text{原函数}\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{6-15}$$

$$\text{像函数}\quad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{6-16}$$

代入 $\delta$ 函数及其积分性质(6-4)，得到像函数

$$\widetilde{C}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{i}kx}\delta(x)\mathrm{d}x=e^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{x=0}=1 \tag{6-17}$$

因此 $\delta$ 函数的傅里叶积分表示为

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{6-18}$$

### 6.1.5 δ 函数表示其他函数

（1）阶跃函数

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\1 & x>0\end{cases} \tag{6-19}$$

$$\delta(x)=H'(x)，H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x \tag{6-20}$$

（2）符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0\\1 & x>0\end{cases} \tag{6-21}$$

$$\operatorname{sgn}x=2H(x)-1，H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x \tag{6-22}$$

（3）矩形脉冲函数

$$g(x)=\begin{cases}0 & x<0，x>x_0\\1 & 0<x<x_0\end{cases} \tag{6-23}$$

$$g(x)=H(x)-H(x-x_0)，H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x \tag{6-24}$$

## 6.2 三维 δ 函数

三维 $\delta$ 函数定义为

$$\delta^3(\vec{x})=\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{6-25}$$

式中 $\vec{x}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$.

根据定义式以及一维 $\delta$ 函数的定义式和性质，得到

$$\delta^3(\vec{x})=\begin{cases}\infty，\vec{x}=0\\0，\vec{x}\neq 0\end{cases} \tag{6-26}$$

$$\int_{\infty}\delta^3(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\mathrm{d}z \tag{6-27}$$

一种微分表达式为

$$\delta^3(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r} \tag{6-28}$$

# 七、勒让德函数

## 7.1 勒让德方程与勒让德多项式

### 7.1.1 二阶线性齐次常微分方程的级数解

（1）二阶线性齐次常微分方程的标准形式为

$$w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0 \tag{7-1}$$

一般的问题是求方程在某点 $z_0$ 邻域内满足一定条件的解。

方程的解的形式由方程系数函数 $p(z)$ 及 $q(z)$ 在点 $z_0$ 的解析性决定。若 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 $z_0$ 的邻域解析，则称 $z_0$ 为方程的常点；若 $z_0$ 最多是 $p(z)$ 的一阶极点，最多是 $q(z)$ 的二阶极点，则称 $z_0$ 为方程的正则奇点（对应 10,01,02,11,12 五种情况）；此外其他情况，称 $z_0$ 为方程的非正则奇点。

（2）方程的幂级数解

在常点 $z_0$ 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内，方程(7-1)有唯一满足初始条件 $w(z_0)=C_0$，$w'(z_0)=C_1$ 的幂级数解

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k \tag{7-2}$$

将公式(7-2)代入原方程，可以求得系数的递推公式；从两个初始条件 $C_0,C_1$ 出发可以得到两个线性无关的解。

在正则奇点 $z_0$ 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内，方程(7-1)的解为

$$\begin{aligned}
w_1(z)&=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k\\
w_2(z)&=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k+aw_1(z)\delta_{\rho_1-\rho_2,n}\ln(z-z_0)
\end{aligned} \tag{7-3}$$

式中 $\rho_1\rho_2$ 为方程的指标，将 $w_1(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k$ 代入微分方程后由最低次幂项的系数和为 0 得到 $\rho$ 的方程，解得两个根为 $\rho_1\rho_2$；$n$ 为整数；$\delta$ 为克罗尼克符号。

### 7.1.2 勒让德方程

（1）勒让德方程

勒让德方程：

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l\left(l+1\right)y=0 \tag{7-4}$$

求勒让德方程在$x=0$邻域内的有界解。

（2）勒让德方程的级数解

由系数$p\left(x\right)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$和$q\left(x\right)=\dfrac{l\left(l+1\right)}{1-x^2}$可见，$x=0$是方程的常点。将式(7-2)代入方程(7-4)化简得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(k+2\right)\left(k+1\right)C_{k+2}-\left[k\left(k+1\right)-l\left(l+1\right)\right]C_k\right\}x^k=0 \tag{7-5}$$

上式在$x=0$邻域内恒成立，则系数必为零，因此得到系数的递推公式

$$C_{k+2}=\frac{k\left(k+1\right)-l\left(l+1\right)}{\left(k+2\right)\left(k+1\right)}C_k=\frac{\left(k-l\right)\left(k+l+1\right)}{\left(k+2\right)\left(k+1\right)}C_k \tag{7-6}$$

即

$$C_k=\frac{\left(k-l-2\right)\left(k+l-1\right)}{k\left(k-1\right)}C_{k-2} \tag{7-7}$$

得到系数$C_{2n}$用$C_0$表示，$C_{2n+1}$用$C_1$表示，

$$C_{2n}=\frac{\left(2n-l-2\right)\left(2n-l-4\right)\cdots\left(2n-l-2n\right)\left(2n+l-1\right)\left(2n+l-3\right)\cdots\left(2n+l-2n\right)}{\left(2n\right)!}C_0 \tag{7-8}$$

$$C_{2n+1}=\frac{\left(2n-l-1\right)\left(2n-l-3\right)\cdots\left(2n-l-\left(2n-1\right)\right)\left(2n+l\right)\left(2n+l-2\right)\cdots\left(2n+l-\left(2n-2\right)\right)}{\left(2n\right)!}C_1 \tag{7-9}$$

勒让德方程的通解表示为

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}x^{2n+1}=C_0y_0\left(x\right)+C_1y_1\left(x\right) \tag{7-10}$$

$y_0\left(x\right)$与$y_1\left(x\right)$是勒让德方程的两个线性无关的特解。

（3）勒让德方程级数解的收敛性

由比值法易证，级数(7-10)的收敛半径$R=1$。但是在$x=\pm1$处，通常

$$\lim_{n\to\infty}C_{2n}\left(\pm1\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}C_{2n}\neq0 \tag{7-11}$$

不满足级数收敛的必要条件(3-3)，因此级数在 $x=\pm 1$ 发散。

自然边界条件：勒让德函数的解 $y(\cos\theta)$ 作为一个物理量，要求解在 $[-1,1]$ 内总是有界的，把“解在 $x=\pm 1$ 有界”称为勒让德方程的自然边界条件。

以上的级数解是在参数 $l$ 取任意值的前提下得到的。要得到满足自然边界条件的解，需要对参数 $l$ 加以限制。

**7.1.3 勒让德方程的本征值与本征函数**

从系数递推公式(7-7)可得，若 $l$ 为偶数 $l=2n$，则级数 $y_0(x)$ 中 $2n+2$ 及以上次幂项系数都等于零

$$C_{2n+2}=\frac{(2n-2n)(2n+2n+1)}{(2n+2)(2n+1)}C_{2n}=0 \tag{7-12}$$

这时取系数 $C_1=0$ 即可使得方程的解中断为多项式

$$y(x)=\sum_{n=0}^{l/2}C_{2n}x^{2n} \tag{7-13}$$

同理若 $l$ 为奇数 $l=2n+1$，则级数 $y_1(x)$ 中 $2n+3$ 及以上次幂项系数都等于零

$$C_{2n+3}=\frac{(2n+1-2n-1)(2n+1+2n+1+1)}{(2n+1+2)(2n+1+1)}C_{2n+1}=0 \tag{7-14}$$

这时取系数 $C_0=0$ 即可使得方程的解中断为多项式

$$y(x)=\sum_{n=0}^{(l-1)/2}C_{2n+1}x^{2n+1} \tag{7-15}$$

无论参数 $l$ 为奇数还是偶数，选取系数后都可以使勒让德方程的解中断为有界的 $l$ 次多项式。

勒让德方程的本征值 $\lambda=l(l+1),l=0,1,2,\cdots$，本征函数为式(7-13)或(7-15)。

**7.1.4 勒让德多项式**

为了使勒让德多项式与函数 $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开系数一致，令最高次项系数为

$$C_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \tag{7-16}$$

再利用递推公式(7-7)求出其他系数，这样得到的多项式称为勒让德多项式

$$C_{l-2s}=(-1)^s\frac{(2l-2s)!}{2^l s!(l-s)!(l-2s)!}\tag{7-17}$$

参数为 $l$ 的勒让德多项式记为 $\mathrm{P}_l(x)$。引入向下取整符号

$$n=\left[\frac{l}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{l}{2}，当l为偶数(l=2n)\\\dfrac{l-1}{2}，当l为奇数(l=2n+1)\end{cases}\tag{7-18}$$

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{s=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}C_{l-2s}x^{l-2s}=\sum_{s=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^s\frac{(2l-2s)!}{2^l s!(l-s)!(l-2s)!}x^{l-2s}\tag{7-19}$$

注意勒让德多项式(7-19)是由高次到低次写出的，$s=0$ 对应最高次项 $x^l$，$s=\left[\frac{l}{2}\right]$ 对应最低次项 $x^0$ 或 $x^1$。

常用前 3 阶勒让德多项式：

$$\mathrm{P}_0(x)=1\tag{7-20}$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x\tag{7-21}$$

$$\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\tag{7-22}$$

$$\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\tag{7-23}$$

### 7.1.5 勒让德多项式的性质

（1）奇偶性

$$\mathrm{P}_l(-x)=(-1)^l P_l(x)\tag{7-24}$$

（2）特殊值

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{2n+1}(0)=0\\&\mathrm{P}_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\end{aligned}\tag{7-25}$$

## 7.2 勒让德多项式的其他表示

### 7.2.1 罗德里格斯公式

罗德里格斯公式是勒让德多项式的微分表示，

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{7-26}$$

### 7.2.2 施列夫利公式

施列夫利公式是勒让德多项式的积分表示，

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C'}\frac{\left(u^2-1\right)^l}{2^l\left(u-x\right)^{l+1}}\mathrm{d}u \tag{7-27}$$

其中$C'$为包围$u=x$的闭合曲线。

### 7.2.3 拉普拉斯积分

拉普拉斯积分也是勒让德多项式的积分表示，

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^l\mathrm{d}\varphi \tag{7-28}$$

### 7.2.4 勒让德多项式的母函数

若参数为 $x$ 的函数 $w(t;x)$ 的泰勒级数为

$$w(t;x)=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)t^l \tag{7-29}$$

则称函数$w(x,t)$为勒让德多项式$\mathrm{P}_l(x)$的母函数。

勒让德多项式的母函数为

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\qquad -1\le x\le 1 \tag{7-30}$$

并规定单值分支$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{t=0}=1$.

函数(7-30)在$|t|<1$圆域内的 $l$ 次泰勒展开系数为$\mathrm{P}_l(x)$.

### 7.2.5 勒让德多项式的递推公式

勒让德多项式的递推公式可以用来计算积分等。

$$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x) \tag{7-31}$$

$$lP_l(x)=xP_l'(x)-P_{l-1}'(x) \tag{7-32}$$

$$(l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-xP_l'(x) \tag{7-33}$$

$$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x) \tag{7-34}$$

$$(1-x^2)P_l'(x)=lP_{l-1}(x)-lxP_l(x) \tag{7-35}$$

## 7.3 勒让德多项式的正交性与完备性

### 7.3.1 勒让德多项式的正交性

（1）正交性

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x=0 \qquad l\neq k \tag{7-36}$$

（2）勒让德多项式的模

$$N_l=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left[P_l(x)\right]^2\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{2}{2l+1}} \tag{7-37}$$

（3）正交归一关系式

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{l,k} \tag{7-38}$$

$$\int_{0}^{\pi}P_l(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{l,k} \tag{7-39}$$

### 7.3.2 勒让德多项式的完备性

（1）广义傅里叶级数

若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可展开为绝对、一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x) \tag{7-40}$$

称为广义傅里叶级数。

（2）勒让德的多项式的完备性

勒让德多项式函数系 $\{P_l(x)\}$ 可以作为广义傅里叶级数展开的基，表明 $\{P_l(x)\}$ 是完备的。

利用勒让德多项式的正交归一关系式(7-38)，可以求得式(7-40)的展开系数为

$$C_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x) f(x) \mathrm{d}x \qquad l = 0,1,2,\cdots \tag{7-41}$$

## 7.4 关联勒让德方程与关联勒让德函数

### 7.4.1 关联勒让德方程

二阶线性齐次常微分方程

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \left[l\left(l+1\right) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{7-42}$$

称为关联勒让德方程。$m=0$ 时即为勒让德方程。

### 7.4.2 关联勒让德方程的有界解

参数为 $l$ 和 $m$ 的关联勒让德方程(7-42)的有界解为

$$\mathrm{P}_l^{|m|}(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{|m|}{2}} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}x^{|m|}} \mathrm{P}_l(x) \qquad m = 0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l \tag{7-43}$$

称为关联勒让德函数。

### 7.4.3 关联勒让德函数的微分表达式

关联勒让德函数的微分表达式由勒让德多项式的罗德里格斯公式得到，

$$\mathrm{P}_l^{|m|}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{|m|}{2}}}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^{l+|m|}}{\mathrm{d}x^{l+|m|}}\left(x^2-1\right)^l \qquad \begin{array}{l} l = 0,1,2,\cdots \\ m = 0,\pm1,\cdots,\pm l \end{array} \tag{7-44}$$

计算出前几个关联勒让德函数表达式（令 $x=\cos\theta$ ）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_1^1(x) &= \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta \\
\mathrm{P}_2^1(x) &= 3x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sin 2\theta \\
\mathrm{P}_2^2(x) &= 3\left(1-x^2\right) = \frac{3}{2}\left(1-\cos 2\theta\right) \\
\mathrm{P}_3^1(x) &= \frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5x^2-1\right) = \frac{3}{8}\left(\sin\theta + 5\sin 3\theta\right) \\
\mathrm{P}_3^2(x) &= 15\left(1-x\right)^2 x = \frac{15}{4}\left(\cos\theta - \cos 3\theta\right) \\
\mathrm{P}_3^3(x) &= 15\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right)
\end{aligned} \tag{7-45}$$

对于 $m=0$ ，关联勒让德方程就是勒让德方程，因而 $\mathrm{P}_l^0(x) = \mathrm{P}_l(x)$.

### 7.4.4 关联勒让德函数的正交性与完备性

（1）正交归一关系式

关联勒让德函数的正交归一关系式反映了其正交性，

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^{|m|}(x)\mathrm{P}_k^{|m|}(x)\mathrm{d}x=\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{l,k} \tag{7-46}$$

（2）完备性

若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可展开为绝对、一致收敛的广义傅里叶级数，关联勒让德函数系可以作为展开基

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_{l,|m|}\mathrm{P}_l^{|m|}(x) \tag{7-47}$$

利用正交归一关系可以求得展开系数

$$C_{l,|m|}=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l^{|m|}(x)\mathrm{d}x \tag{7-48}$$

# 八、定解问题

## 8.1 拉普拉斯算符

### 8.1.1 直角坐标系中的拉普拉斯算符

直角坐标系中的梯度算符与拉普拉斯算符

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{8-1}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8-2}$$

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{8-3}$$

### 8.1.2 柱坐标系中的拉普拉斯算符

柱坐标系中的梯度算符与拉普拉斯算符

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{8-4}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{8-5}$$

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{8-6}$$

直角坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{8-7}$$

### 8.1.3 球坐标系中的拉普拉斯算符

球坐标系中的梯度算符与拉普拉斯算符

$$\nabla = \vec{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \vec{e}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{8-8}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{8-9}$$

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{8-10}$$

直角坐标变换

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{8-11}$$

球坐标系拉普拉斯方程(8-10)分离变量得到

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{8-12}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[\lambda(\lambda+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta = 0 \tag{8-13}$$

令 $x=\cos\theta$，记 $P(x)=\Theta(\theta)$，即可得到关联勒让德方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0 \tag{8-14}$$

## 8.2 定解问题与定解条件

### 8.2.1 三个定解条件

（1）初始条件：物理过程初始状态的数学表达式。含有对时间有 $n$ 阶偏导偏微分方程需要 $n$ 个初始条件。

（2）边界条件：物理系统或物理过程边界状况的数学表达式。

（3）衔接条件：不同介质组成的系统，在两种不同介质的交界处需要给定的条件。

### 8.2.2 三类定解问题

（1）泛定方程+初始条件→初值问题。

（2）泛定方程+边值条件→边值问题。

（3）泛定方程+初始条件+边值条件→混合问题

## 8.3 波动问题

### 8.3.1 波动问题的泛定方程

一维波动方程为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho} \tag{8-15}$$

式中$u(x,t)$为稳定状态时坐标为$x$的点在$t$时刻的位置的偏移量，$T$为张力，$\rho$为线密度，$F(x,t)$为外力。当外力$F(x,t)=0$时，为自由振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{8-16}$$

三维自由波动方程为

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0 \tag{8-17}$$

### 8.3.2 波动问题的定解条件

（1）初始条件

波动问题方程含有时间的二阶偏导，初始条件要给出各位置的初位移和速度

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{8-18}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{8-19}$$

（2）边界条件

第一类边界条件：给出函数$u$在边界上的值，如横振动弦两端固定的情况，

$$u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0 \tag{8-20}$$

第二类边界条件：给出函数$u$在边界上的法向导数值，如纵振动杆两端受外力的情况，

$$u_x(0,t) = \frac{F_1(t)}{YS}，\ u_x(l,t) = \frac{F_2(t)}{YS} \tag{8-21}$$

第三类边界条件：给出在边界上$u$及其法向导数$u_x$之间的线性关系，如纵振动杆两端受弹性系数$k_1 k_2$的弹簧的拉力，

$$u_x(0,t) + \frac{k_1}{YS} u(0,t) = 0，\ u_x(l,t) + \frac{k_2}{YS} u(l,t) = 0 \tag{8-22}$$

（3）衔接条件

不同介质交界处，位移相等，应力相等，因此介质衔接条件为

$$u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t)，\ Y_1 u_x(x_0,t) = Y_2 u_x(x_0,t) \tag{8-23}$$

## 8.4 输运问题

### 8.4.1 输运问题的泛定方程

典型输运问题有热传导问题、扩散问题，都认为单位时间流过单位面积的粒子（热）流量与浓度（温度）的负梯度成正比，

$$\vec{q} = -k\nabla u \tag{8-24}$$

式中 $k$ 为扩散系数或导热系数。

基于守恒原理，其泛定方程为

$$u_t - a^2\nabla^2 u = f\left(\vec{r},t\right) \tag{8-25}$$

式中 $a^2 = k$（粒子输运）或 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$（热传导），$f\left(\vec{r},t\right)$ 为 $\vec{r}$ 位置处单位时间内粒子产生量，或 $f\left(\vec{r},t\right) = \dfrac{F\left(\vec{r},t\right)}{c\rho}$，$F\left(\vec{r},t\right)$ 为 $\vec{r}$ 位置处单位时间内产生的热量。

无热源（粒子源）时，得到齐次输运方程

$$u_t - a^2\nabla^2 u = 0 \tag{8-26}$$

### 8.4.2 热传导问题的定解条件

（1）初始条件

热传导方程含有时间的一阶偏导，只需要初始的温度分布作为初始条件

$$u\left(\vec{r},0\right) = \varphi\left(\vec{r}\right) \tag{8-27}$$

（2）边界条件

第一类边界条件：给定温度在系统边界 $S$ 上的值

$$u\left(\vec{r},t\right)\Big|_S = \varphi\left(\vec{r}\right) \tag{8-28}$$

第二类边界条件：给定温度在边界上的法向导数值

$$u_n\left(\vec{r},t\right)\Big|_S = -\frac{q\left(S,t\right)}{k} \tag{8-29}$$

第三类边界条件：给定边界温度与边界温度法向导数的线性关系

$$\left(u_n + hu\right)\Big|_S = hu_1 \tag{8-30}$$

（3）衔接条件

介质界面处温度相等，流量相等，

$$u_1\left(S_0,t\right) = u_2\left(S_0,t\right) \qquad k_1\nabla u_1\Big|_{S_0} = k_2\nabla u_2\Big|_{S_0} \tag{8-31}$$

## 8.5 稳定场问题

### 8.5.1 静电场的泊松方程与拉普拉斯方程

根据静电场的散度与旋度方程，以及静电势

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon}\qquad\nabla\times\vec{E}=0\qquad\vec{E}=-\nabla u \tag{8-32}$$

得到泊松方程

$$\nabla^2 u=\frac{\rho_f}{\varepsilon} \tag{8-33}$$

当不存在电荷分布时，泊松方程化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=0 \tag{8-34}$$

### 8.5.2 静电场的定解条件

稳定场方程与时间无关，不需要初始条件。

（1）边界条件：

第一类边界条件：（狄利克雷问题）给出边界上的函数值

$$u\big|_S=\varphi_1(\vec{x}) \tag{8-35}$$

第二类边界条件：（诺依曼问题）给出边界上的法向导数值

$$u_n\big|_S=\varphi_2(\vec{x}) \tag{8-36}$$

第三类边界条件：（罗宾问题）给出边界上函数与法向导数的线性关系

$$\left(u_n+hu\right)\big|_S=\varphi_3(\vec{x}) \tag{8-37}$$

（2）衔接条件：

由静电场高斯定理得到

$$u_1(\vec{r}_0)=u_2(\vec{r}_0) \tag{8-38}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial n_{12}}\bigg|_{S_0}-\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial n_{12}}\bigg|_{S_0}=-\sigma_f \tag{8-39}$$

式(8-39)中 $n_{12}$ 为介质界面 $S_0$ 上由介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量，$\sigma_f$ 是介质界面上自由电荷面密度。

（3）有限性条件：

静电场中坐标原点无电荷时，原点的电势有限。

（4）周期性条件：

球坐标系中

$$u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi) \tag{8-40}$$

# 九、行波法

## 9.1 达朗贝尔公式

### 9.1.1 无界弦的自由振动

无界弦的自由振动方程为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{9-1}$$

其中，$\varphi(x)$表示初始位移分布，$\psi(x)$表示初始速度分布。

### 9.1.2 达朗贝尔公式

达朗贝尔公式是方程(9-1)的解，即无界弦自由振动问题的解，可以用行波法得到。

（1）行波法变量代换

变量代换为

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \dfrac{1}{2a}(\xi - \eta) \end{cases} \tag{9-2}$$

由算符计算得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \tag{9-3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial \xi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial \eta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{9-4}$$

将(9-4)代入(9-3)得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{9-5}$$

两次积分得到

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{9-6}$$

（2）代入初始条件

至此对于泛定方程的应用结束。要得到满足初始条件的解，还需要代入初始条件，得到

$$u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \tag{9-7}$$

$$u_t(x,0)=af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x) \tag{9-8}$$

将(9-8)积分，得到

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(m)\mathrm{d}m+C \tag{9-9}$$

其中常数$C=f_1(x_0)-f_2(x_0)$. 与(9-7)联立可得

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(m)\mathrm{d}m+\dfrac{C}{2} \\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(m)\mathrm{d}m-\dfrac{C}{2} \end{cases} \tag{9-10}$$

式(9-10)就是由初始条件确定的方程。代入泛定方程通解(9-6)，并化简

$$\int_{x_0}^{x+at}\psi(m)\mathrm{d}m-\int_{x_0}^{x-at}\psi(m)\mathrm{d}m=\int_{x_0}^{x+at}\psi(m)\mathrm{d}m+\int_{x-at}^{x_0}\psi(m)\mathrm{d}m=\int_{x-at}^{x+at}\psi(m)\mathrm{d}m \tag{9-11}$$

得到达朗贝尔公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(m)\mathrm{d}m \tag{9-12}$$

达朗贝尔公式是无界弦自由振动的解，$\varphi(x)$给定初始位移，$\psi(x)$给定初始速度。

（3）达朗贝尔公式的物理意义

达朗贝尔公式中，$\varphi(x+at)$意味着经过时间$t_0$后，若观察点向 $x$ 轴负方向改变$at_0$，观察到的状态不改变，这说明$\varphi(x+at)$表示的是沿$x$轴负方向传播的波；同理，$\varphi(x-at)$表示沿$x$轴正方向传播的波，波速为$a$. 使用原函数易得，$\psi(x)$所在的积分项也同理。因此，达朗贝尔公式给出了沿$x$轴正负方向传播的两列波的叠加。

## 9.2 达朗贝尔公式的推广

对于半无界的端点固定或端点自由弦，以及有界弦，通常使用延拓的方法修改为无界弦问题，从而将达朗贝尔公式推广。

这里的延拓指的是在满足边界条件的前提下，对初始条件进行延拓，使其在定义范围内保持不变，其他范围内可积，并且始终满足边界条件。

### 9.2.1 端点固定

端点固定的半无界弦的振动微分方程为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & 0<x<\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x<\infty \\ u(0,t)=0 & t\ge 0 \end{cases} \tag{9-13}$$

现在的目标是找到延拓$\Phi(x)$代替$\varphi(x)$，$\Psi(x)$代替$\psi(x)$，使得边界条件消去。因此，将替代的延拓函数代入达朗贝尔公式(9-12)，再代入边界条件$u(0,t)=0$得

$$u(0,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(at)+\Phi(-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(m)\mathrm{d}m=0 \tag{9-14}$$

由此得到，边界条件要求$\Phi(x)$和$\Psi(x)$都是奇函数。延拓还要满足初始条件，则令

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ x\ge 0\\ -\varphi(-x),\ x<0\end{cases} \tag{9-15}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),\ x\ge 0\\ -\psi(-x),\ x<0\end{cases} \tag{9-16}$$

从而可将半无界弦振动问题转换为初始条件较为特殊的无界弦振动问题，

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & -\infty<x<\infty \\ u(0,t)=\Phi(x),\ u_t(0,t)=\Psi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases} \tag{9-17}$$

套用达朗贝尔公式解得

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(m)\mathrm{d}m \\ &=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(m)\mathrm{d}m & t\le\frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(m)\mathrm{d}m & t>\frac{x}{a}\end{cases} \end{aligned} \tag{9-18}$$

为明确其物理意义，假设初始时仅在$x=x_0>0$处存在一个向左传播的小波峰，由$\varphi(x-at)$和$\int\psi\Big|_{x=x-at}$所描述。当遇到固定端点$x=0$，此时$t=\frac{x}{a}$，波的描述转变为$-\varphi(at-x)$和$\int\psi\Big|_{x=at-x}$，这表示位移突变相反，且传播方向反向，意味着波在端点固定处发生反射，反射波与入射波相位相反、方向相反，即半波损失。

**9.2.2** 端点自由

端点自由的半无界弦的振动微分方程为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \le x < \infty \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{9-19}$$

其中，边界条件表示端点 $x = 0$ 处应力始终为零，即端点自由。

仿照端点固定弦振动问题的解法，将 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 代入达朗贝尔公式和边界条件后得到

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi'(at) + \Phi'(-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\Psi(at) - \Psi(-at)\right] = 0 \tag{9-20}$$

可知边界条件要求 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 都是偶函数。那么令

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x),\ x \ge 0 \\ \varphi(-x),\ x < 0 \end{cases} \tag{9-21}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x),\ x \ge 0 \\ -\psi(-x),\ x < 0 \end{cases} \tag{9-22}$$

即可同时满足初始条件和边界条件，转化为无界弦自由振动问题。套用达朗贝尔公式得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(m)\,\mathrm{d}m \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}m & t \le \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)\right] + \dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_0^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] & t > \dfrac{x}{a} \end{cases} \end{aligned} \tag{9-23}$$

分析可得，入射波在自由端点 $x = 0$ 处同样发生反射，但是 $\varphi(x-at)$ 并未变号，仅仅是波的传播方向反向变为 $\varphi(at-x)$，反射波不存在半波损失，自由端点的振幅是波振幅的两倍。

**9.2.3** 达朗贝尔解的存在性

$\varphi(x)$ 有直到二阶的导数，$\psi(x)$ 有直到一阶的导数，则无界弦自由的振动达朗贝尔解存在

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(m)\,\mathrm{d}m \tag{9-24}$$

# 十、分离变量法

## 10.1 常系数微分方程的通解

### 10.1.1 一阶常微分方程

微分方程

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{10-1}$$

的通解为

$$y = e^{-\int_0^x p(\xi)\mathrm{d}\xi}\left[\int_0^x q(\xi)e^{\int_0^\xi p(\eta)\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\xi + C\right] \tag{10-2}$$

### 10.1.2 二阶常系数微分方程

齐次微分方程

$$y'' + py' + q = 0 \tag{10-3}$$

的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{10-4}$$

特征根为$r_1, r_2$.

（1）当$r_1 \neq r_2$且均为实数时，通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{10-5}$$

（2）当$r_1 = r_2 = r$且均为实数时，通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx} \tag{10-6}$$

（3）当$r_1 = a + b\mathrm{i}$，$r_2 = a - b\mathrm{i}$时，通解为

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \tag{10-7}$$

非齐次微分方程

$$y'' + py' + q = f(x) \tag{10-8}$$

它对应的齐次方程的两个线性无关的特解记为$y_1(x), y_2(x)$，通解为

$$y = -y_1\int_0^x \frac{y_2 f(\xi)}{\Delta(y_1, y_2)}\mathrm{d}\xi + y_2\int_0^x \frac{y_1 f(\xi)}{\Delta(y_1, y_2)}\mathrm{d}\xi + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{10-9}$$

其中$\Delta\left(y_1,y_2\right)$表示朗斯基行列式

$$\Delta\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_2'y_1-y_1'y_2 \tag{10-10}$$

## 10.2 齐次方程齐次边界条件

两端固定的弦自由振动方程是齐次方程齐次边界条件定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & 0<x<l，\ t>0 & \text{(a)} \\ u\left(0,t\right)=0，\ u\left(l,t\right)=0 & & \text{(b)} \\ u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)，\ u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right) & & \text{(c)} \end{cases} \tag{10-11}$$

### 10.2.1 分离变量

（1）令

$$u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right) \tag{10-12}$$

代入泛定方程（a）得到

$$X\left(x\right)T''\left(t\right)-a^2X''\left(x\right)T\left(t\right)=0 \tag{10-13}$$

$$\frac{X''\left(x\right)}{X\left(x\right)}=\frac{T''\left(t\right)}{a^2T\left(t\right)} \tag{10-14}$$

由于两个变量$x,t$相互独立，所以式(10-14)两端必等于常数，设为$-\lambda$，化简得

$$X''\left(x\right)+\lambda X\left(x\right)=0 \tag{10-15}$$

$$T''\left(t\right)+\lambda a^2T\left(t\right)=0 \tag{10-16}$$

（2）再将(10-12)代入边界条件（b）得到

$$X\left(0\right)T\left(t\right)=0 \qquad X\left(l\right)T\left(t\right)=0 \tag{10-17}$$

式(10-17)对于任何$t$都成立，而若$T\left(t\right)\equiv 0$会使得$u\left(x,t\right)\equiv 0$，是平庸解，应舍去。那么一定有

$$X\left(0\right)=0 \qquad X\left(l\right)=0 \tag{10-18}$$

### 10.2.2 求解本征值问题

分离变量将方程化为了常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} X''\left(x\right)+\lambda X\left(x\right)=0 \\ X\left(0\right)=0，\ X\left(l\right)=0 \end{cases} \tag{10-19}$$

只有当$\lambda$取一些特定值时才有非零解，这样的方程称为本征值问题，需要求解本征值$\lambda$和本征函数$X(x)$。

（1）若$\lambda<0$，方程(10-19)的通解为

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{10-20}$$

代入方程(10-19)的两个边界条件$X(0)=X(l)=0$得到

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases} \tag{10-21}$$

线性方程组(10-21)的系数行列式不为零，因此只有零解$A=B=0$，得到$X(x)=0$是平庸解，应舍去。

（2）若$\lambda=0$，方程(10-19)的通解为

$$X(x)=Ax+B \tag{10-22}$$

代入方程(10-19)的两个边界条件$X(0)=X(l)=0$得到$A=B=0$，$X(x)=0$是平庸解，应舍去。

（3）若$\lambda>0$，方程(10-19)的通解为

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{10-23}$$

代入方程(10-19)的两个边界条件$X(0)=X(l)=0$得到

$$\begin{cases} A=0 \\ B\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases} \tag{10-24}$$

非平庸解要求$B\neq 0$，因此

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,3,\cdots \tag{10-25}$$

因此本征值与本征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{10-26}$$

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{10-27}$$

### 10.2.3 求解函数 *T*(*t*)

本征值(10-26)式$\lambda_n$代入方程(10-16)得到

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T(t)=0 \tag{10-28}$$

通解为

$$T_n(t)=C_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \tag{10-29}$$

### 10.2.4 叠加所有特解

对于每个本征值，都是偏微分方程的一个特解，需要将所有的特解做线性叠加，通过调整系数可以使得级数收敛，从而得到满足初始条件（c）的解。

偏微分方程的特解为

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{10-30}$$

其中常数 $B_n$ 折合进常数 $C_n$ 和 $D_n$. 所有特解线性叠加得到级数解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10-31}$$

接下来由初始条件（c）确定常数 $C_n$ 和 $D_n$ 的表达式。

### 10.2.5 由初始条件确定系数

将式(10-31)代入初始条件（c）得到

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10-32}$$

$$u_t(0,t)=\psi(x)=\frac{n\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10-33}$$

利用三角函数系的正交归一关系

$$\begin{cases}\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x=0\\ \int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x=l\delta_{m,n}\\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x=l\delta_{m,n}\end{cases} \tag{10-34}$$

可以求得系数

$$\begin{cases}C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x & n=1,2,3,\cdots\\ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x & n=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{10-35}$$

代入式(10-31)写出最终解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (10\text{-}36)$$

## 10.3 本征函数展开法

事实上对于二阶偏微分方程的定解问题，在不同的边界条件下 $X(x)$ 具有不同的本征函数系，但对于每种边界条件，本征函数系是固定形式的，如下表所示。

| 类型 | 定解问题边界条件 | 分离变量边界条件 | 本征函数系 |
|---|---|---|---|
| （1） | $\begin{cases}u(0,t)=0\\u(l,t)=0\end{cases}$ | $\begin{cases}X(0)=0\\X(l)=0\end{cases}$ | $\sin\frac{n\pi x}{l}$，$n=1,2,3,\cdots$ |
| （2） | $\begin{cases}u(0,t)=0\\u_x(l,t)=0\end{cases}$ | $\begin{cases}X(0)=0\\X'(l)=0\end{cases}$ | $\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$，$n=0,1,2,\cdots$ |
| （3） | $\begin{cases}u_x(0,t)=0\\u(l,t)=0\end{cases}$ | $\begin{cases}X'(0)=0\\X(l)=0\end{cases}$ | $\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$，$n=0,1,2,\cdots$ |
| （4） | $\begin{cases}u_x(0,t)=0\\u_x(l,t)=0\end{cases}$ | $\begin{cases}X'(0)=0\\X'(l)=0\end{cases}$ | $\cos\frac{n\pi x}{l}$，$n=0,1,2,\cdots$ |

将未知函数和非齐次项使用本征函数系展开，可以自动满足边界条件。

## 10.4 非齐次方程齐次边界条件

两端固定弦的受迫振动方程是非齐次方程非齐次边界条件定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & 0<x<l,\ t>0 \quad \text{(a)}\\ u(x,t)=0,\ u(l,t)=0 & \text{(b)}\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) & \text{(c)}\end{cases} \quad (10\text{-}37)$$

### 10.4.1 本征函数展开

令

$$u(x,t)=X(x)T(t) \quad (10\text{-}38)$$

根据边界条件（b）使用本征函数系类型（1）展开 $f(x,t)$，得到

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}T_n(t) \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{10-39}$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}f_n(t) \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{10-40}$$

**10.4.2 求展开系数函数**

由三角函数的正交归一关系式得

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{10-41}$$

将式(10-39)和(10-40)代入泛定方程（a）得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10-42}$$

利用三角函数的正交归一关系式得到

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t) \tag{10-43}$$

再将式(10-39)代入初始条件（c）得

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad\Rightarrow\quad T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\varphi_n \tag{10-44}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad\Rightarrow\quad T_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\psi_n \tag{10-45}$$

式(10-44)和(10-45)就是方程(10-43)的初始条件。由二阶常系数非齐次微分方程的通解(10-9)得

$$y_1=\cos\frac{n\pi at}{l} \qquad y_2=\sin\frac{n\pi at}{l} \tag{10-46}$$

$$\Delta(y_1,y_2)=y_2'y_1-y_1'y_2=\frac{n\pi a}{l}\cos^2\frac{n\pi at}{l}+\frac{n\pi a}{l}\sin^2\frac{n\pi at}{l}=\frac{n\pi a}{l} \tag{10-47}$$

$$\begin{aligned}T_n(t)&=\frac{l}{n\pi a}\left[-\cos\frac{n\pi at}{l}\int_0^t\sin\frac{n\pi a\xi}{l}f_n(\xi)\mathrm{d}\xi+\sin\frac{n\pi at}{l}\int_0^t\cos\frac{n\pi a\xi}{l}f_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right]+C_{1,n}\cos\frac{n\pi at}{l}+C_{2,n}\sin\frac{n\pi at}{l}\\&=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\xi)\sin\frac{n\pi a(t-\xi)}{l}\mathrm{d}\xi+C_{1,n}\cos\frac{n\pi at}{l}+C_{2.n}\sin\frac{n\pi at}{l}\end{aligned} \tag{10-48}$$

代入初始条件(10-44)和(10-45)得

$$C_{1,n}=T_n(0)=\varphi_n \qquad C_{2,n}=\frac{l}{n\pi a}T_n'(0)=\frac{l}{n\pi a}\psi_n \tag{10-49}$$

代入式(10-39)最终求得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\xi)\sin\frac{n\pi a(t-\xi)}{l}\mathrm{d}\xi+\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\tag{10-50}$$

式中

$$\begin{cases}f_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\ \varphi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\ \psi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\end{cases}\tag{10-51}$$

## 10.5 非齐次边界条件齐次化

对于非齐次边界条件的方程组，需要将非齐次边界条件转化为等价的齐次边界条件的定解问题，再用本征函数展开法求解。

例如对于非齐次边界条件定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & 0<x<l,\ t>0\\ u(0,t)=u_1(t),\ u(l,t)=u_2(t)\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}\tag{10-52}$$

（1）设解为$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，其中$v(x,t)$满足齐次边界条件，$w(x,t)$满足非齐次边界条件，即

$$w(0,t)=u_1(t)\qquad w(l,t)=u_2(t)\tag{10-53}$$

（2）选取辅助函数$w(x,t)$的形式，使其满足式(10-53)，选取

$$w(x,t)=A(t)x+B(t)\tag{10-54}$$

代入(10-53)得到

$$w(x,t)=\frac{x}{l}\left[u_2(t)-u_1(t)\right]+u_1(t)\tag{10-55}$$

（3）求解$v(x,t)$的定解问题。将选取的$w(x,t)$代入$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，再代入泛定方程，得到关于$v(x,t)$的非齐次方程齐次边界条件的定解问题，可以使用本征函数展开法求解

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,t)-\left(w_{tt}-a^2w_{xx}\right) & 0<x<l,\ t>0 \\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=0 \\ v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0),\ v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0) \end{cases} \tag{10-56}$$

在齐次化变换过程中，辅助函数 $w(x,t)$ 的选取具有任意性，使其满足非齐次边界条件即可，但是其形式也会影响到 $v(x,t)$ 的计算难以程度，一般选取多项式即可。对于一些种类的边界条件，有 $w(x,t)$ 的推荐形式，如下表所示。

| 非齐次边界条件 | 推荐 $w(x,t)$ 的形式 | $w(x,t)$ 的表达式 |
|---|---|---|
| $u(0,t)=u_1(t)$，$u(l,t)=u_2(t)$ | $w(x,t)=A(t)x+B(t)$ | $w(x,t)=\left[u_2(t)-u_1(t)\right]\dfrac{x}{l}+u_1(t)$ |
| $u(0,t)=u_1(t)$，$u_x(l,t)=u_2(t)$ | $w(x,t)=A(t)x+B(t)$ | $w(x,t)=u_2(t)x+u_1(t)$ |
| $u_x(0,t)=u_1(t)$，$u(l,t)=u_2(t)$ | $w(x,t)=A(t)x+B(t)$ | $w(x,t)=u_1(t)(x-l)+u_2(t)$ |
| $u_x(0,t)=u_1(t)$，$u_x(l,t)=u_2(t)$ | $w(x,t)=A(t)x^2+B(t)x$ | $w(x,t)=\left[u_2(t)-u_1(t)\right]\dfrac{x^2}{l}+u_1(t)x$ |

# 十一、傅里叶变换

## 11.1 傅里叶级数

### 11.1.1 三角函数基本函数族

三角函数基本函数族

$$\begin{aligned}&1\quad \cos\frac{\pi x}{l}\quad \cos\frac{2\pi x}{l}\quad \cdots\quad \cos\frac{n\pi x}{l}\quad \cdots\qquad (n=0,1,2,\cdots)\\&0\quad \sin\frac{\pi x}{l}\quad \sin\frac{2\pi x}{l}\quad \cdots\quad \sin\frac{n\pi x}{l}\quad \cdots\qquad (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{11-1}$$

存在正交归一关系

$$\int_{-l}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=2l\delta_{n,0}\tag{11-2}$$

$$\int_{-l}^{l}1\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0\tag{11-3}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0\tag{11-4}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=l\delta_{m,n}\qquad n\neq 0\tag{11-5}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=l\delta_{m,n}\qquad n\neq 0\tag{11-6}$$

正交归一关系式中被积函数都是偶函数，因此也有

$$\int_{0}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\delta_{m,n}\tag{11-7}$$

$$\int_{0}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\delta_{m,n}\tag{11-8}$$

### 11.1.2 傅里叶展开定理

一个以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$，若在有限区间 $[-l,l]$ 上满足狄利克雷条件（连续或有有限个第一类间断点，并只有有限个极大值和极小值），则在 $[-l,l]$ 上可展开为傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\tag{11-9}$$

系数利用三角函数的正交关系可以确定

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\qquad n=0,1,2,\cdots\tag{11-10}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\qquad n=1,2,3,\cdots\tag{11-11}$$

### 11.1.3 周期函数的傅里叶展开

给定的周期函数的傅里叶展开以式(11-10)和式(11-11)计算即可，但要注意把函数一个周期的中点平移到 $x=0$ 的位置。

展开得到的傅里叶级数(11-9)是收敛的，在函数的连续点 $x$ 收敛于 $f\left(x\right)$，在间断点收敛于左右极限的平均值，即

$$\text{级数和}=\begin{cases} f\left(x\right) & \text{在连续点}x \\ \dfrac{1}{2}\left[f\left(x-0\right)+f\left(x+0\right)\right] & \text{在间断点}x \end{cases} \tag{11-12}$$

对于奇函数 $f\left(x\right)$，根据积分区间对称性得 $a_n=0$，因此展开式仅含有正弦项，

$$\text{奇函数}\qquad f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{11-13}$$

$$b_n=\frac{1}{2l}\int_0^l f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{11-14}$$

由此得到周期奇函数的必要条件

$$f\left(0\right)=f\left(l\right)=0 \tag{11-15}$$

对于偶函数 $f\left(x\right)$，同样根据积分区间对称性得 $b_n=0$，展开式仅含有余弦项，

$$\text{偶函数}\qquad f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{11-16}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{11-17}$$

由此得到周期偶函数的必要条件

$$f'\left(0\right)=f'\left(l\right)=0 \tag{11-18}$$

### 11.1.4 有限区间函数的傅里叶展开

对于定义在有限区间上的函数 $f\left(x\right)$，首先将函数平移使区间端点与 $x=0$ 重合，函数定义在区间 $\left[0,l\right]$ 上，以下讨论均基于此类情况。

使用延拓法将有限区间函数 $f\left(x\right)$ 延拓为 $g\left(x\right)$，使得在 $\left[0,l\right]$ 上 $f\left(x\right)\equiv g\left(x\right)$。当没有事先给定边界条件时，可以将函数根据周期奇函数或周期偶函数的必要条件

$$f(0)=f(l)=0 \qquad f(x)\text{为周期奇函数} \tag{11-19}$$

$$f'(x)=f'(l)=0 \qquad f(x)\text{为周期偶函数} \tag{11-20}$$

结合收敛的必要条件(11-12)，将函数延拓为奇函数或偶函数，再按照函数规律展开。

通常使用函数绘图法找到一种延拓。根据(11-12)(11-19)(11-20)，奇延拓时函数在边界处向外延拓需要取相反数，才能保证两侧极限平均值为零，满足式(11-19)；偶延拓时函数在边界处连续，一阶导数需要取相反数，才能保证两侧一阶导数极限的平均值为零，满足式(11-20)。

若事先给定了边界上的的函数值或导数值，则需要视情况延拓，同样需要使得延拓结果的每一阶导数在边界处的两侧极限平均值满足给定条件。

### 11.1.5 复数形式的傅里叶级数

将欧拉公式代入傅里叶级数(11-9)，记 $k_n=\dfrac{n\pi}{l}$，得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos k_n x+b_n\sin k_n x\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{\mathrm{i}k_n x}+e^{-\mathrm{i}k_n x}}{2}+b_n\frac{e^{\mathrm{i}k_n x}-e^{-\mathrm{i}k_n x}}{2\mathrm{i}}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{i}k_n x} \end{aligned} \tag{11-21}$$

傅里叶级数的复数形式为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} \tag{11-22}$$

利用复指数函数系的正交归一关系

$$\int_{-l}^{l}e^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{m\pi x}{l}}\right)^{*}\mathrm{d}x=\int_{-l}^{l}e^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}e^{-\mathrm{i}\frac{m\pi x}{l}}\mathrm{d}x=2l\delta_{m,n} \tag{11-23}$$

求得系数

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x \tag{11-24}$$

其中 $n$ 取全体整数。

## 11.2 傅里叶积分

### 11.2.1 傅里叶积分定理

傅里叶积分是将定义在$(-\infty,\infty)$的函数的周期视为$2l\to\infty$，从而将满足一定条件的非周期函数展开为傅里叶级数。

如果定义在$(-\infty,\infty)$的函数$f(x)$在任一有限区间上满足狄利克雷条件（连续或有有限个第一类间断点，并且只有有限个极大值或极小值），且绝对可积（$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$有界），则在$f(x)$的连续点处，傅里叶积分存在

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{11-25}$$

### 11.2.2 傅里叶积分的三角形式

傅里叶积分的三角形式为

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(k)\cos(kx)+B(k)\sin(kx)\right]\mathrm{d}k \tag{11-26}$$

其中系数函数

$$A(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos kx\mathrm{d}x \tag{11-27}$$

$$B(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin kx\mathrm{d}x \tag{11-28}$$

式(11-26)还可以继续变形为

$$f(x)=\int_0^{\infty}C(k)\cos\left(kx+\varphi(k)\right)\mathrm{d}k \tag{11-29}$$

其中$C(k)$称为振幅谱，自变量为频率 $k$，

$$C(k)=\sqrt{A^2(k)+B^2(k)} \tag{11-30}$$

$\varphi(k)$称为相位谱，

$$\varphi(k)=\arctan\frac{B(k)}{A(k)} \tag{11-31}$$

## 11.3 傅里叶变换

### 11.3.1 傅里叶变换

在傅里叶积分的指数形式(11-25)中，令

$$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i} k x} \mathrm{d} x \tag{11-32}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{\mathrm{i} k x} \mathrm{d} k \tag{11-33}$$

称 $\tilde{f}(k)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换，记作

$$F[f(x)]=\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i} k x} \mathrm{d} x \tag{11-34}$$

称 $f(x)$ 是 $\tilde{f}(k)$ 的傅里叶逆变换，记作

$$F^{-1}[\tilde{f}(k)]=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{\mathrm{i} k x} \mathrm{d} k \tag{11-35}$$

通常还将 $\tilde{f}(k)$ 称为 $f(x)$ 的像函数，将 $f(x)$ 称为 $\tilde{f}(k)$ 的像原函数。

根据傅里叶积分变换与逆变换的关系，可得

$$F^{-1}\{F[f(x)]\}=F^{-1}[\tilde{f}(k)]=f(x) \tag{11-36}$$

即，函数经过傅里叶变换和逆变换后等于其自身。

傅里叶积分变换(11-32)和(11-33)积分外的常数系数，根据定积分的性质可任意取，但必须保证乘积为 $\frac{1}{2\pi}$.

**11.3.2 奇偶函数的傅里叶变换**

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，根据对称性可得，其傅里叶变换与逆变换中指数函数的余弦项积分为零，或由其三角形式可得

$$\text{奇函数} f(x) \quad \begin{aligned} & F[f(x)]=\tilde{f}(k)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x) \sin k x \mathrm{d} x \\ & F^{-1}[\tilde{f}(k)]=f(x)=\int_{0}^{\infty} \tilde{f}(k) \sin k x \mathrm{d} k \end{aligned} \tag{11-37}$$

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，根据对称性可得，其傅里叶变换与逆变换中指数函数的正弦项积分为零，或由其三角形式可得

$$\text{偶函数} f(x) \quad \begin{aligned} & F[f(x)]=\tilde{f}(k)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x) \cos k x \mathrm{d} x \\ & F^{-1}[\tilde{f}(k)]=f(x)=\int_{0}^{\infty} \tilde{f}(k) \cos k x \mathrm{d} k \end{aligned} \tag{11-38}$$

**11.3.3 傅里叶变换的性质**

（1）线性性质

$$F\left[a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)\right]=a_1 F\left[f_1(x)\right]+a_2 F\left[f_2(x)\right] \tag{11-39}$$

$$F^{-1}\left[a_1 \widetilde{f}_1(k)+a_2 f_2(k)\right]=a_1 F^{-1}\left[\widetilde{f}_1(k)\right]+a_2 F^{-1}\left[\widetilde{f}_2(k)\right] \tag{11-40}$$

（2）延迟定理

$$F\left[f\left(x \pm x_0\right)\right]=e^{\pm \mathrm{i} k x_0} F[f(x)] \tag{11-41}$$

$$F^{-1}\left[e^{\pm \mathrm{i} k x_0} \widetilde{f}(k)\right]=f\left(x \pm x_0\right) \tag{11-42}$$

（3）位移定理

$$F\left[e^{\mathrm{i} k_0 x} f(x)\right]=\widetilde{f}\left(k-k_0\right) \tag{11-43}$$

（4）相似定理

$$F[f(a x)]=\frac{1}{|a|} \widetilde{f}\left(\frac{k}{a}\right) \tag{11-44}$$

（5）微分定理

若 $\lim\limits_{|x| \rightarrow \infty} f^{(m)}(x)=0$，$m=0,1, \cdots, n-1$，则

$$F\left[f^{(n)}(x)\right]=(\mathrm{i} k)^n F[f(x)] \tag{11-45}$$

（6）积分定理

若 $\lim\limits_{|x| \rightarrow \infty} f^{(m)}(x)=0$，$m=0,1, \cdots, n-1$，则

$$F\left[\int_{-\infty}^x f(\xi) \mathrm{d} \xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i} k} F[f(x)] \tag{11-46}$$

（7）卷积定理

函数 $f_1(x)$ 和 $f_1(x)$ 的卷积定义为

$$f_1(x) * f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) \mathrm{d} \xi \tag{11-47}$$

函数 $f_1(x)$ 和 $f_1(x)$ 的卷积的傅里叶变换满足

$$F\left[f_1(x) * f_2(x)\right]=F\left[f_1(x)\right] F\left[f_2(x)\right]=\widetilde{f_1}(k) \widetilde{f_2}(k) \tag{11-48}$$

$$F^{-1}\left[\widetilde{f_1}(k) \widetilde{f_2}(k)\right]=f_1(x) * f_2(x)=F^{-1}\left[\widetilde{f_1}(k)\right] * F^{-1}\left[\widetilde{f_2}(k)\right] \tag{11-49}$$

傅里叶变换的卷积定理可以将函数的卷积运算简化为乘积运算。

（8）像函数的卷积定理

$$F\left[f_1(x)f_2(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\widetilde{f_1}(k)*\widetilde{f_2}(k) \tag{11-50}$$

## 11.4 傅里叶变换法

### 11.4.1 解题步骤

傅里叶变换法可以用于求解无界区域的定解问题。对于存在边界条件的有限区域定解问题，需要先将边界条件齐次化变换（见 10.5 节），再参照边界条件将初始条件奇延拓（第一类）或偶延拓（第二类），奇延拓还是偶延拓是由傅里叶变换在间断点取值(11-12)决定的。

傅里叶变换法的解题步骤为：

（1）非齐次边界条件齐次化处理；

（2）依据边界条件延拓初始条件，化为无界问题；

（3）对方程及初始条件作傅里叶变换；

（4）求像函数的常微分方程；

（5）对像函数作傅里叶逆变换得到解。

在傅里叶逆变换步骤中，常常需要用到傅里叶变换的性质定理，如延迟定理、积分定理、卷积定理。

### 11.4.2 齐次方程无界问题

无界弦振动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & -\infty<x<\infty，\ t>0 \quad \text{（a）} \\ u(x,0)=\varphi(x)，\ u_t(x,0)=\psi(x) & \text{（b）} \end{cases} \tag{11-51}$$

（1）对方程（a）和初始条件（b）对变量 $x$ 傅里叶变换

$$F\left[u_{tt}(x,t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{u}(k,t) \tag{11-52}$$

$$F\left[a^2u_{xx}(x,t)\right]=a^2F\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right]=a^2(\mathrm{i}k)^2\tilde{u}(k,t) \tag{11-53}$$

转化为了常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{u}(k,t)-(\mathrm{i}ka)^2\tilde{u}(k,t)=0 \\ \tilde{u}(k,0)=\tilde{\varphi}(k),\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{u}(k,t)=\tilde{\psi}(k) \end{cases} \tag{11-54}$$

（2）求解像函数

常微分方程的通解为

$$\tilde{u}(k,t)=C_1e^{\mathrm{i}kat}+C_2e^{-\mathrm{i}kat} \tag{11-55}$$

代入初始条件得到

$$\tilde{\varphi}(k)=C_1+C_2 \tag{11-56}$$

$$\tilde{\psi}(k)=\mathrm{i}ka(C_1-C_2) \tag{11-57}$$

解得常数并代入通解(11-55)得到像函数

$$\tilde{u}(k,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(k)+\frac{1}{\mathrm{i}ka}\tilde{\psi}(k)\right]e^{\mathrm{i}kat}+\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(k)-\frac{1}{\mathrm{i}ka}\tilde{\psi}(k)\right]e^{-\mathrm{i}kat} \tag{11-58}$$

（3）对像函数做傅里叶逆变换

对式(11-58)作傅里叶逆变换得

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=F^{-1}\left[\tilde{u}(k,t)\right]\\
&=\frac{1}{2}F^{-1}\left[e^{\mathrm{i}kat}\tilde{\varphi}(k)\right]+\frac{1}{2a}F^{-1}\left[e^{\mathrm{i}kat}\frac{1}{\mathrm{i}k}\tilde{\psi}(k)\right]+\frac{1}{2}F^{-1}\left[e^{-\mathrm{i}kat}\tilde{\varphi}(k)\right]-\frac{1}{2a}F^{-1}\left[e^{-\mathrm{i}kat}\frac{1}{\mathrm{i}k}\tilde{\psi}(k)\right]\\
&=\frac{1}{2}F^{-1}\left\{F\left[\varphi(x+at)\right]\right\}+\frac{1}{2}F^{-1}\left\{F\left[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right\}+\frac{1}{2}F^{-1}\left\{F\left[\varphi(x-at)\right]\right\}-\frac{1}{2}F^{-1}\left\{F\left[\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{11-59}$$

其中用到了傅里叶变换的延迟定理(11-42)和积分定理(11-46)，得到的结果与行波法相同。

**11.4.3 非齐次方程无界问题**

无界杆的热传导问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) & -\infty<x<\infty，\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases} \tag{11-60}$$

（1）对方程和初始条件对变量 $x$ 作傅里叶变换

$$F\left[u_t(x,t)\right]=F\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{u}(k,t) \tag{11-61}$$

$$F\left[u_{xx}(x,t)\right]=F\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right]=(\mathrm{i}k)^2\tilde{u}(k,t) \tag{11-62}$$

$$F\left[f(x,t)\right]=\tilde{f}(k,t) \tag{11-63}$$

得到关于像函数$\tilde{u}(k,t)$的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{u}(k,t)+(ka)^2\tilde{u}(k,t)=\tilde{f}(k,t)\\ \tilde{u}(k,0)=\tilde{\varphi}(k)\end{cases} \tag{11-64}$$

（2）求解像函数

常微分方程(11-64)的通解为

$$\tilde{u}(k,t)=e^{-k^2a^2t}\left[\int_0^t \tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2\xi}\mathrm{d}\xi+C\right] \tag{11-65}$$

代入初始条件得

$$\tilde{u}(k,t)=e^{-k^2a^2t}\tilde{\varphi}(k)+e^{-k^2a^2t}\int_0^t \tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2\xi}\mathrm{d}\xi \tag{11-66}$$

（3）对像函数做傅里叶逆变换

$$\begin{aligned}u(x,t)&=F^{-1}\left[\tilde{u}(k,t)\right]\\&=F^{-1}\left[e^{-k^2a^2t}\varphi(k)\right]+F^{-1}\left[\int_0^t \tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\right]\end{aligned} \tag{11-67}$$

利用卷积定理(11-49)，得

$$\begin{aligned}F^{-1}\left[e^{-k^2a^2t}\tilde{\varphi}(k)\right]&=F^{-1}\left(e^{-k^2a^2t}\right)*F^{-1}\left[\tilde{\varphi}(k)\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2t}e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k*\varphi(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2t}\left[\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx)\right]\mathrm{d}k*\varphi(x)\end{aligned} \tag{11-68}$$

第二项视为二重定积分，交换积分次序得

$$\begin{aligned}F^{-1}\left[\int_0^t \tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\right]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2(\xi-t)}e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}k\\&=\int_0^t\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2(\xi-t)}e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^t F^{-1}\left[\tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2(\xi-t)}\right]\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^t f(x,\xi)*F^{-1}\left[e^{k^2a^2(\xi-t)}\right]\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{11-69}$$

利用定积分公式

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{4a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\qquad a>0 \tag{11-70}$$

式(11-68)中积分区间对称，积分正弦项等于零，然后代入式(11-70)得

$$\begin{aligned}F^{-1}\left(e^{-k^2a^2t}\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2t}\cos(kx)\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{4a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\end{aligned} \tag{11-71}$$

$$F^{-1}\left[e^{k^2a^2(\xi-t)}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2(t-\xi)}\cos(kx)\mathrm{d}k$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{4a^2(t-\xi)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}} \tag{11-72}$$
$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\xi)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}$$

式(11-71)和(11-72)代入式(11-68)和式(11-69)，再代入式(11-67)得到最终解

$$u(x,t)=F^{-1}\left[e^{-k^2a^2t}\tilde{\varphi}(k)\right]+F^{-1}\left[\int_0^t\tilde{f}(k,\xi)e^{k^2a^2(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\right]$$
$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}*\varphi(x)+\int_0^t f(x,\xi)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\xi)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi \tag{11-73}$$
$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\eta+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\eta,\xi)}{\sqrt{t-\xi}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\eta$$

式中卷积积分变量使用$\eta$，$\xi$为沿用像函数的常微分方程(11-64)解得的积分项中积分变量。