

# 河北工业大学 2015 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [A] 卷

科目名称 量子力学

科目代码 811 共 1 页

适用专业、领域 物理学、生物物理学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

1. 导致量子论产生的物理现象主要有哪些？（10 分）
2. (a) 写出氢原子的直径和氢原子的电离能。(b) 请解释为什么可见光不能引起氢原子电离。（10 分）
3. (a) 写出单粒子薛定谔方程。(b) 写出单粒子定态薛定谔方程。(c) 说明在什么条件下可以得到定态薛定谔方程。（10 分）
4. (a) 写出波函数应满足的三个基本条件。(b) 设平面波具有如下一般形式：

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

其中  $A$  为常数， $\mathbf{k}$  和  $\omega$  满足  $\omega = \hbar \mathbf{k}^2 / 2m$ 。(1) 试验证平面波满足自由粒子薛定谔方程。(2) 解释为什么说平面波不能严格代表一个自由粒子。（20 分）

5. (a) 写出厄米算符的定义。(b) 解释为什么量子力学中的力学量要用厄米算符来表示。(c) 证明厄米算符的本征值是实数。（20 分）

6. 一个一维谐振子具有质量  $m$  和势能  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ 。(a) 写出该系统的定态薛定谔方程。(b) 写出其能量表达式并解释什么是零点能。(c) 已知谐振子能级跃迁的选择定则是  $\Delta n = \pm 1$ ，试推测谐振子光谱的结构。（20 分）

7. (a) 写出 3 个无相互作用的全同费米子的反对称化波函数。(b) 依据 (a) 的结果解释泡利不相容原理。（20 分）

8. (a) 简述量子力学中态的叠加原理。(b) 设波函数  $\psi_1$ 、 $\psi_2$  和  $\psi_3$  是体系的三个能量本征态，对应的能量本征值分别为  $E_1$ 、 $E_2$  和  $E_3$ ，且  $E_1 \neq E_2 \neq E_3$ 。若体系处于叠加态  $\psi = \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_1 + \frac{1}{2} \psi_2 + \frac{1}{2} \psi_3$ ，问 (1) 此时测量体系的能量会得到什么结果？(2) 此时体系是否具有确定的能量值？（20 分）

9. 一个质量为  $m$  的粒子置于宽度为  $a$  的无限深势阱中：

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{其它} \end{cases}$$

求该系统的能量本征值。（20 分）

# 河北工业大学 2016 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B] 卷

科目名称 量子力学 科目代码 811 共 1 页

适用专业、领域 物理学、生物物理学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

- 一、写出德布罗意关系，指出其中各量的含义，说明该公式的意义。 (10 分)
- 二、给出波函数的几率解释，写出波函数应满足的三个基本条件；量子系统在什么情况下具有分立的能级？试举出几个例子，说明系统具有分立能级。 (20 分)
- 三、写出全同性原理。什么是费米子，什么是玻色子，其波函数有什么特点。 (20 分)
- 四、利用基本对易关系和角动量算符的定义，证明： $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ ， $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$ ；  
如果算符  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  满足条件  $\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha} = 1$ ，证明： $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2 - \hat{\beta}^2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$ ， $\hat{\alpha}\hat{\beta}^8 - \hat{\beta}^8\hat{\alpha} = 8\hat{\beta}^7$ 。(20 分)
- 五、质量为  $m$  的粒子在无限深势阱 ( $0 < x < a$ ) 中运动，处于基态。能级和波函数为

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases}$$

计算粒子处于基态时的平均值  $\bar{x}$ ， $\overline{x^2}$ ， $\overline{p_x}$  和  $\overline{(x-x)^2}$  (20 分)

- 六、已知  $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ ， $L_{\pm}|lm\rangle = \sqrt{(l \pm m + 1)(l \mp m)}|l, m \pm 1\rangle$ 。那么在  $(L^2, L_z)$  表象中，以  $|lm\rangle$  为基矢， $l=1$  的子空间的维数为 3，求  $L_x$  在此三维空间中的矩阵表示，再利用矩阵方法求出  $L_x$  的本征值和本征态。 (20 分)

- 七、证明厄米算符的本征值是实数。并验证坐标算符  $\hat{x}$  和动量算符  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  都是厄米算符。 (20 分)

- 八、设  $H = H_0 + H'$ ，

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \text{ 为实数})$$

用微扰论求解能级修正（准到二级近似），并与严格解（把  $H$  矩阵对角化）比较。 (20 分)

# 河北工业大学 2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B] 卷

科目名称 量子力学 科目代码 811 共 1 页

适用专业、领域 物理学、生物物理学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上无效。

一、解释束缚态的概念？束缚态有何特征？束缚态是否必为定态？定态是否必为束缚态？（10 分）

二、给出玻恩对波函数的几率解释。说明量子力学描述力学状态与经典物理有什么根本不同？量子力学为什么要用算符表示力学量？表示力学量的算符为什么必须是线性厄米的？（20 分）

三、解释玻色子和费米子的概念，说明微观粒子的全同性原理。某物理体系由两个粒子组成，粒子间相互作用微弱，可以忽略。已知单粒子“轨道”态只有 3 种： $\Psi_a(\vec{r})$ ,  $\Psi_b(\vec{r})$ ,  $\Psi_c(\vec{r})$ ，若系统为无自旋全同粒子，求体系的可能（独立）状态数目并写出各状态的波函数。（20 分）

四、证明厄米算符属于不同本征值的本征矢量彼此正交。（20 分）

五、在  $\sigma_y$  表象中，算符  $\hat{\sigma}_y$ ,  $\hat{\sigma}_z$  和  $\hat{\sigma}_x$  的矩阵形式为：

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

求在  $\sigma_y$  表象中，算符  $\hat{\sigma}_z$  和  $\hat{\sigma}_x$  的本征值和本征矢。（20 分）

六、设一个有微扰系统的哈密顿  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ ，其中

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}, \text{ 而 } \hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^* & \lambda_2^* & 0 \end{pmatrix}, (E_1 < E_2 < E_3)$$

求：微扰  $\hat{H}'$  作用下，能量的二级修正。（20 分）

七、设一个算符  $\hat{a}$  具有性质  $\hat{a}^2 = 0, \{\hat{a}, \hat{a}^+\} = 1$ 。试证明： $\hat{N} \equiv \hat{a}^+ \hat{a}$  是一个厄米算符； $\hat{N}^2 = \hat{N}$ ； $\hat{N}$  的本征值是 0 或者 1； $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ ,  $[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$ 。（20 分）

八、设粒子在一维无限深阱中运动，

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } x \leq 0, x \geq a \\ 0, & \text{当 } 0 < x < a \end{cases}$$

式中  $a$  为势阱宽度。粒子实际所处的状态由波函数

$$\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{a} x$$

描写。计算粒子在一维无限深阱中的能级和相应的能量本征态波函数，并求状态  $\psi(x)$  中，粒子能量的可能值和相应的几率。（20 分）

适用专业、领域 物理学、生物物理学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、求算符  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{pmatrix}$  的本征值  $\lambda$  和归一化的本征函数  $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ 。 (共 10 分)

二、在量子力学中，用波函数表示状态，说明其物理意义。用算符表示力学量，这是为什么？说明量子力学描述力学状态与经典物理有什么根本不同？表示力学量为什么必须用线性厄密算符？ (共 20 分)

三、解释量子力学中全同粒子的概念。经典粒子为什么是可分辨的？全同粒子为什么是不可分辨的？说明量子力学全同性原理。 (共 20 分)

四、如果算符  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  满足条件  $\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha} = 1$ ,

求证： $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2 - \hat{\beta}^2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$ ,

$\hat{\alpha}\hat{\beta}^3 - \hat{\beta}^3\hat{\alpha} = 3\hat{\beta}^2$ ,

$\hat{\alpha}\hat{\beta}^n - \hat{\beta}^n\hat{\alpha} = n\hat{\beta}^{n-1}$

(共 20 分)

五、对一个三维状态空间的问题，在取定一组正交基情况下哈密顿算符由下面的矩阵

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix}$$

给出，右边第二项为微扰项。这里  $C$  是一个常数， $C \ll 1$ 。首先求出  $\hat{H}$  的本征值，然后用微扰公式分别求各能量至二级修正，与精确解相比较差别是多少？ (共 20 分)

六、在  $\sigma_x$  表象中，算符  $\hat{\sigma}_x$ 、 $\hat{\sigma}_y$  和  $\hat{\sigma}_z$  的矩阵形式为：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

求在  $\sigma_x$  表象中，算符  $\hat{\sigma}_y$  和  $\hat{\sigma}_z$  的本征值和本征矢。 (共 20 分)

七、动量算符本征函数  $\psi_p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}\right)$ ，求动量表象中角动量  $L_x$  的矩阵元和  $L_x^2$  的矩阵元。 (共 20 分)

八、质量为  $m$  的粒子在无限深势阱 ( $0 \leq x \leq a$ ) 中运动，处于基态。能级和波函数为

$$E_1 = \pi^2 \frac{\hbar^2}{2ma^2}, \Psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases}$$

计算粒子处于基态时的平均值  $\bar{x}$ ,  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{p_x}$  和  $\overline{(x - \bar{x})^2}$ 。 (共 20 分)





## 2019 年全国硕士研究生招生考试初试招生单位自命题科目试题

招生单位代码及名称	10080 河北工业大学	
考试科目代码及名称	811 量子力学	【B】卷
适用专业	物理学、生物学	

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、简答题（共 50 分。答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。）

- 1、（8 分）叙述 19 世纪末经典物理面临的困难，说明相应的量子解释。
- 2、（共 12 分）（1）（6 分）什么是束缚态？什么是基态？在什么条件下一个量子系统具有离散的能级？  
（2）（6 分）波函数必须满足的基本条件是什么？
- 3、（10 分）什么是角量子数、磁量子数？写出相应的本征值表达式及其数值关系。
- 4、（共 12 分）（1）（3 分）什么是幺正变换？  
（2）（6 分）写出幺正变换的两个重要性质；  
（3）（3 分）说明为什么量子力学中的表象变换矩阵是幺正矩阵。
- 5、（8 分）指出下列算符哪个是厄米算符，说明其理由。

$$\frac{d}{dx}, \quad i\frac{d}{dx}, \quad 4\frac{d^2}{dx^2}$$

二、（20 分）一粒子在一维势场：

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x > a \end{cases}$$

中运动，求粒子的能级和对应的波函数。

三、（20 分）设  $t=0$  时，粒子的状态为

$$\psi(x) = A[\sin^2 kx + \frac{1}{2}\cos kx],$$

求此时粒子的平均动量和平均动能。

四、（10 分）一维线性谐振子第一激发态波函数为：

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}} \cdot 2\alpha x e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

其中  $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ，求一维谐振子处在该激发态时几率最大的位置。

五、(10 分) 已知  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  为轨道角动量  $\hat{L}$  的直角坐标分量, 求对易关系:  $[\hat{L}_x, \hat{x}], [\hat{L}_y, \hat{x}], [\hat{L}_z, \hat{x}]$ 。

六、(20 分) 求  $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  及  $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  的本征值和所属的本征函数。

七、(10 分) 设一体系未受微扰作用时有两个能级:  $E_{01}$  及  $E_{02}$ , 现在受到微扰  $\hat{H}'$  的作用, 微扰矩阵元为

$H'_{12} = H'_{21} = a$ ,  $H'_{11} = H'_{22} = b$ ;  $a$ 、 $b$  都是实数。用微扰公式求能量至二级修正值。

八、(10 分) 1、(5 分) 写出  $N$  个无相互作用的全同费米子的反对称化波函数。

2、(5 分) 依据 1 的结果解释泡利不相容原理。

## 2020 年全国硕士研究生招生考试初试招生单位自命题科目试题

招生单位代码及名称	10080 河北工业大学	
考试科目代码及名称	811 量子力学	【A】卷
适用专业	物理学、生物学	

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

### 一、简答题（共 40 分）

1、（共 18 分，每个 3 分）叙述量子力学原理的六个基本假定。

2、（共 12 分，每小题 3 分）解释：（1）为什么说轨道概念是被量子力学摒弃的纯经典的概念？  
（2）隧道效应中势垒内部粒子的动能为负值；（3）线性谐振子的零点能；（4）这些现象体现了微观粒子的什么性质。

3、（共 10 分）怎么判断微观粒子为费米子还是玻色子？（从自旋、波函数、统计和粒子所处状态几方面叙述）

二、（共 10 分）怎么确定两个算符有共同的本征态，并加以证明。

三、（共 10 分）设算符  $A, B$  与它们的对易式  $[A, B]$  都对易。证明： $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ 。

四、（共 10 分）证明厄米算符的属于不同本征值的两个本征函数相互正交。

五、（共 20 分）一粒子在硬壁球形空腔中运动，势能为

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \geq a; \\ 0, & r < a \end{cases}$$

求粒子的能级和定态波函数。

六、（共 20 分）设氢的状态是  $\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{11}(\theta, \varphi) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$

1、（10 分）求轨道角动量  $z$  分量  $\hat{L}_z$  和自旋角动量  $z$  分量  $\hat{S}_z$  的平均值；

2、（10 分）求总磁矩  $\hat{M} = -\frac{e}{2\mu} \hat{L} - \frac{e}{\mu} \hat{S}$  的  $z$  分量的平均值。

七、(共 20 分) 矩阵  $AB$  满足  $A^2 = 0$ ,  $AA^+ + A^+A = 1$ ,  $B = A^+A$

1、(5 分) 证明  $B^2 = B$

2、(15 分) 在  $B$  表象中求出  $A$  的矩阵。

八、(共 20 分) 设一体系未受微扰作用时有两个能级:  $E_{01}$  及  $E_{02}$ , 现在受到微扰  $\hat{H}'$  的作用, 微扰矩阵元为  $H'_{12} = H'_{21} = a$ ,  $H'_{11} = H'_{22} = b$ ;  $a$ 、 $b$  都是实数。用微扰公式求能量至二级修正值, 并将严格求解与微扰论计算值比较。