题型 1：数字型行列式的计算

1． 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$。

解　此行列式的特点是每一行（或列）中均有 2 个零元，所以可按第 1 行展开；对于每一个新的 3 阶行列式，分别按最后一行展开；

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^2$$

2.　计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{行}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{行}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{行}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

利用定理 2.4，从最后一行开始，用相邻上一行的(-1)倍加到下一行，逐步将此行列式化为上三角行列式；

3. 计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$,

解　此行列式的特点是每一行（或列）的元素之和相等，故可以把第 2 列、第 3列，…，第n 列均加到第 1 列；然后再提出公因子；接着，利用定理 2.4，把第 1 行的(-1)倍加到其余各行，将此行列式化为上三角行列式；

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{列}{=} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{行}{=} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

4 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，$a_1 \cdots a_n \neq 0$。

解　此行列式为箭形行列式（或爪形行列式）；采用的方法是利用定理 2.4，将箭形行列式化为上三角行列式；

注意到每一列都有公因子；因此第 1 列提出公因子a_1，第 2 列提出公因子a_2，…第 n 列提出公因子a_n.

然后再将第 2 列，第 3 列…第 n 列均加到第 1 列，可将此箭形行列式化为上三角行列式；

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \overset{列}{=} a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{列}{=} a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1`}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n (1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i})$$

5. 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix}; a \neq 0.$

解 $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} \overset{行}{=} \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2a & a & 0 & 0 \\ -3a & 0 & a & 0 \\ -4a & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{列}{=} \begin{vmatrix} 1+a+2+3+4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \left[a+\frac{4(4+1)}{2}\right] a^3 \quad 。$$

利用定理 2.4，将第一行的(-2)倍加到第二行，第一行的(-3)倍加到第三行，第一行的(-4)倍加到第四行，逐步将此行列式化为箭形行列式；

6. 试用范德蒙行列式计算 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

解 将第一行加到第三行，提出公因子即可得到范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

7．设4阶行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{vmatrix}$，求$3A_{41}+7A_{42}+4A_{43}+8A_{44}$。

解 观察所求式子可知，这实际上是计算原行列式将第四行的元素换成$3,7,4,8$的行列式的值；

由于第三行的元素恰好是$3,7,4,8$，

$$3A_{41}+7A_{42}+4A_{43}+8A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

故 $3A_{41}+7A_{42}+4A_{43}+8A_{44}=0$

题型 2：含参数的数字型行列式的计算

8. 计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$

解 将第二行加到第一行，提出公因子$(\lambda-a-1)$；然后再将第

1 行加到其余各行；最后按第 1 列展开；

$$\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & \lambda-a-1 & 0 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a+1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a+1 & 1 \\ 2 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a+1 & 1 \\ 2 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$$

9. 计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

解　将第三行加到第二行，提出公因子$(2-\lambda)$；然后再按第 1 列展开；

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] = -(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$