参考答案

一、填空题

1. $R(A)=3$。

因为$\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3$线性无关, 且$A=[\alpha^1 \quad \alpha^2 \quad \alpha^3]$。

2. $Ax=0$的基础解系中含有解向量的个数为$n-R(A)$。

设A为6×7的矩阵，则未知量的个数为 7 个；

故$Ax=0$的基础解系中含有 5 个解向量。

3. 线性无关；

$$\left(\alpha^1,\ \alpha^1+\alpha^2,\ \alpha^1+\alpha^2+\alpha^3\right)=\left(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3\right)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};$$

记$B=AK$;

因为α^1, α^2, α^3线性无关，则$R(A)=3$;

两个向量组之间的过渡矩阵K为可逆矩阵；

从而$R(B)=R(AK)=R(A)=3$;

则向量组β^1,β^2,β^3线性无关；

4. $a=-1$.

$Ax=0$有非零解，则$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=0$；

而 $\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a+1&-2\\a&1&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a+1&-2\\0&a+1&1-3a\\1&-1&3\end{vmatrix}$

$=3(1-\alpha^2)$,

已知$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{0}$， 则$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{1}$。

一、 选择题

$\boldsymbol{1}.(\boldsymbol{d})$

$\boldsymbol{2}.(\boldsymbol{b})$

由定理 4.6，因为$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{3}}$线性相关，

则$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{3}},\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{4}}$必线性相关；

3. $(\boldsymbol{c})$.

由线性相关的定义可知，若存在一组不全为零的数，使得

$\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}} + \cdots + \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{o}$成立；

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}},\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{m}}$线性相关。

4. $(\boldsymbol{d})$.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & -\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{1} \neq \boldsymbol{0},$$

则$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{3}}$线性无关；

从而$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{3}}$为自身的一个最大无关组；

5. $(\boldsymbol{a})$

将向量组按列排构成矩阵$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{4}}]$，再实施行初等变换，

$$A=[a^1,a^2,a^3,a^4]=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

向量组α^1，α^2，α^3，α^4的秩为 2；

从而向量组α^1，α^2，α^3，α^4的最大无关组为α^1，α^2;

其余的向量用最大无关组表示为

$$a^3=-a^1+2a^2; \; ,a^4=-2a^1+3a^2;$$

6. （a）

$Ax=O$的系数矩阵为三阶方阵；考察A的行列式

$$det\,A=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&\lambda+1&0\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)^2;$$

当$det\,A=0$时，即 $\lambda=-1$时，$Ax=O$有非零解；

此时，$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

取基础解系$x^1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$x^2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$;

通解为$x=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix};(k_1,k_2\in R)$。

7. (a)

$Ax=b$的系数矩阵为三阶方阵；考察A的行列式

$$det\,A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$$
$$=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

当$det\,A\neq 0$时，即$a\neq -2$且$a\neq 1$时，$Ax=b$有唯一解；

当 $a=-2$时，

$$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&3&-3&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

此时，$R(A)<R(A\ \ b)$，$Ax=b$无解；

当 $a=1$时，

$$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时，$R(A)=R(A\ \ b)=1<3$，　$Ax=b$有无穷多组解；

非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \ (k_1,k_2\in R)。$$