参考答案

一、单项选择题

1. (a)

解：$A=\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$是正定的，由定理 7.4 知，

$$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}>0,\qquad \begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}>0;$$

而 $\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0$,则$-2<t<2$;

而$\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & t & -1\\ 0 & 4 & -2t\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & t & -1\\ 0 & 4 & -2t\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2t^2+4>0;$

则$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$;

所以当$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$时，二次型为正定的。

2. (c)

选项(c)表示：此二次型为半正定二次型，从而A是半正定矩阵；

3. (a)

二次型的矩阵必为对称矩阵。

其主对角线上的元素为相应平方项的系数；

主对角线以外对称位置的元素为相应交叉乘积项系数的一半；

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-1\\0&-1&3\end{bmatrix};$$

二次型的矩阵表示为$f=x^{T}Ax$；

即$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

4. (a)

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，

则$R(A)=2,$ 从而$|A|=0.$

即$|A|=\begin{vmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2[(1-a)^2-(1+a)^2]=0$

$$\therefore a=0。$$

$\because A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$=-\lambda(2-\lambda)^2$

令$|A-\lambda I|=0$，

则A得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$。

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，解方程$(A-2I)x=0$;

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

对应特征向量分别为： $x^1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $x^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

当$\lambda_3=0$**时，解方程**$Ax=0$;

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

对应特征向量分别为： $x^3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\because x^1, x^2, x^3$**两两正交，则只需要将它们单位化；**

规范化得$q^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $q^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $q^3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

令

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

则通过正交变换$x=Qy$**将二次型化为标准形，**

$$f=2{y_1}^2+2y_2^2$$