参考答案

一、 填空题

1. 由定理 3.4 知，

$$det(A^T\mathrm{B}^{-1}) = det(A^T)det(\mathrm{B}^{-1}) = det(\mathrm{A})\frac{1}{det(B)} = 1 \;;$$

2. $\because |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$，

$\therefore B$**为3阶可逆矩阵；**

由定理3.11的推论，任何矩阵乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩。

$\therefore R(AB) = 2.$

二、选择题

1. (C)

2. (C)

因为$A\mathrm{B} = \mathrm{O}$**，两边同时取行列式，则得**$|AB| = 0$;

再由定理 3.4 知，$|AB| = |A||B|$**；**

所以$|A| = 0$**或**$|B| = 0$;

设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$**,则**$A\mathrm{B} = \mathrm{O}$**，**

未必推出$A = \mathrm{O}$**或**$B = \mathrm{O}$ **；**

从而$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$；$BA \neq \mathrm{O}$；

设$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$**,则**$A\mathrm{B} = \mathrm{O}$**，但是**$|A| + |B| = 0$;

3. (A)

$\left|-2A^{-1}\right| = (-2)^5\left|A^{-1}\right| = (-2)^5\left|A^{-1}\right| = 1$ 。

4. (D)

$$|A^*| = |A|^{n-1} \;;$$

事实上，当A为不可逆矩阵时$(n \geq 2)$，此结论依然成立。

5. (B)

因为$A_{m\times n}$，$B_{n\times m}(m \neq n)$，则AB为m阶方阵。其余选项均为n阶方阵。

6.(A);

对于 2 阶方阵，利用$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$;

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$;

7. (A)

因为$(A \quad I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

故$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

8. (A)

已知$AB = A + B$，**则**$(A - I)B = A$，**而**$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$**可逆；**

所以$B = (A - I)^{-1}A$；

$$(A - I \quad A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

则$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$