概率论与数理统计作业（1）

班级__________ 姓名__________ 学号__________

一、填空题

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)$

$P(AB)=0$ $= 1-P(A)-P(B) = 0.5$

1、设 A,B 互不相容，且 $P(A)=0.2, P(B)=0.3$；则 $P(\bar{A}\bar{B})=$ 0.5

2、袋中有红、黄、白球各一个，每次任取一个，有放回的抽三次，则颜色全不同的概率为 $\frac{2}{9}$ 。 $\frac{A_3^3}{3^3}$

3、同时抛掷四颗均匀的骰子，则四颗骰子点数全不相同的概率为 $\frac{5}{18}$ 。 $\frac{A_6^4}{6^4}$

二、设 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\bar{B})$。

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \Rightarrow P(AB)=0.1$

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$

三、已知 A,B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=0.2$，求 $P(B)$。

解：$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$\Rightarrow P(A)+P(B)=1$ $\because P(A)=0.2$ $\therefore P(B)=1-P(A)=0.8$

四、袋中有编号为1到10 的10 个球，从袋中同时抓取3个球，求：3个球的最小号码为5的概率；

解：令 A：3个球中最小号码为5 ~~的概率~~

$$P(A)=\frac{C_1^1 C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

五、将4 个球放入3 个盒子中，求下列事件的概率

1. 第一个盒子中没有球；

$$I_1=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}=$$

2. 第一个盒子中恰有1个球，第二个盒子中恰有2 球。

$$I_2=\frac{C_4^1 C_3^2}{3^4}=\frac{12}{81}=\frac{4}{27}$$

六、袋内有 10 个大小相同的球，其中 6 个白球，4 个黑球. 现从中抓取 2 球，求 2 球中至少有 1 个黑球的概率.

解：令 A：2球中至少有1个黑球 $\bar{A}$：2个都是白球

$$P(\bar{A})=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}$$ 则 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$

概率论与数理统计作业（2）

班级__________ 姓名__________ 学号__________

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

一、设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{6}$，则 $P(AB)=$ $\frac{1}{18}$，$P(A\cup B)=$ $\frac{11}{18}$，$P(B|A)=$ $\frac{1}{6}$ 。

二、设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{6}$，则 $P(\bar{A}|\bar{B})=$ $\frac{7}{12}$ $P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{P(\bar{B})}$

三、设 $P(A)=0.6$，$P(A\cup B)=0.84$，$P(\bar{B}|A)=0.4$，求 $P(B)$

解：$P(\bar{B}|A)=P(A\bar{B})/P(A) \Rightarrow P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B}|A)=0.24$

$0.84=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A\bar{B})+P(B)$ 则 $P(B)=0.6$

四、将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为0.02，而 B 被误收作 A 的概率为0.01，信息 A 与信息 B 传递的频繁程度为2∶1，则接收站收到的是信息 A 的概率为多少？

解：令 $A_发$：发射A信息 $B_发$：发射B信息 C：收到为A信息

由全概率公式 $P(C)=P(C|A_发)P(A_发)+P(C|B_发)P(B_发)$

$= 0.98\times\frac{2}{3} + 0.01\times\frac{1}{3} = 0.6567$

五、设有来自三个地区的各10名，15名和25名考生的报名表，其中女生的报名表分别为3份，7份和5份. 现随机地取一个地区的报名表，从中任意抽取一份. 求抽到的一份是女生表的概率.

解：令 A_i：取到第i个地区的报名表 $(i=1,2,3)$

B：取到的一份是女生的表

由全概率公式 $P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$

$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{29}{90}=0.3222$

六、按以往概率考试结果分析，努力学习的学生有90%的可能及格，不努力学习的学生有90%可能考试不及格。据调查，学生中有80%的人是努力学习的。

1、以往概率考试的及格率是多少；

2、考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人；

解：令 A：学生努力学习 B：学生不努力学习

C：学生及格

1. 由全概率公式 $P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)$

$= 0.9\times0.8 + 0.1\times0.2 = 0.74$

2. 由贝叶斯公式 $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(C|B)P(B)}{P(C)}$

$=\frac{0.1\times0.2}{0.9\times0.8+0.1\times0.2}=\frac{1}{37}=0.027$

概率论与数理统计作业（3）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

$P(AB)=P(A)P(B)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

一、设 A,B 相互独立，$P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(B)=$ <u>0.6</u>，$P(A\bar{B})=$ <u>0.2</u>，$P(\bar{A}\cup B)=$ <u>0.8</u>.

二、将一枚硬币独立地投掷5次，则出现正面少于两次的概率为 $\sum_{k=0}^{1} C_5^k (\frac{1}{2})^5 = \frac{3}{16}$ = 0.1875

三、设甲、乙、丙三人独立地破译一种密码，他们能译出的概率分别是 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则他们能把这种密码译出的概率为 $\frac{3}{5}$.

$1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

四、设甲、乙两射手射击时每次命中率分别为0.7和0.8，两人各射击3次，求两人命中次数相等的概率。

解：$I = C_3^0 0.7^0 0.3^3 \cdot C_3^0 0.8^0 0.2^3 + C_3^1 0.7^1 0.3^2 C_3^1 0.8^1 0.2^2 + C_3^2 0.7^2 0.3^1 C_3^2 0.8^2 0.2^1$

$+ C_3^3 0.8^3 0.2^0 C_3^3 0.7^3 0.3^0 = 0.36332$ $\frac{9083}{25000}$

五、一个工人看管3台机床，在一小时内机床不需要照管的概率，第一台为0.9，第二台为0.8，第三台为0.7，设各台机床是否需要照管相互独立.

1、求在一小时内3台机床中至多有一台需要照管的概率.

解：$I_1 = 0.9\times0.8\times0.7 + 0.1\times0.8\times0.7 + 0.9\times0.2\times0.7 + 0.9\times0.8\times0.3 = 0.902$ $\frac{451}{500}$

2、设各台机床不需要工人照管的概率均为0.9，用伯努利公式求在一小时内3台机床至多有一台需照管的概率.

$I_2 = \sum_{k=0}^{1} C_3^k 0.1^k 0.9^{3-k} = 0.9^3 + 3\times0.1\times0.9^2 = 0.972$ $\frac{243}{250}$

六、甲、乙、丙3位同学同时独立参加《概率论与数理统计》考试，不及格的概率分别为0.4, 0.3, 0.5.

1、求恰有两位同学不及格的概率；

解：$I_1 = 0.4\times0.3\times0.5 + 0.4\times0.7\times0.5 + 0.6\times0.3\times0.5 = 0.29$

2、（选做题）如果已经知道这3位同学中有2位不及格，求其中一位是同学乙的概率.

全概公式 $I_2 = \frac{0.4\times0.3\times0.5 + 0.6\times0.3\times0.5}{I_1} = \frac{15}{29} = 0.5172$

概率论与数理统计作业（4）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

一、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，请判断下面说法的正误。

1、$F(3)$ 一定可以这样计算，$F(3)=P\{X<3\}$. （✗）

2、$F(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是一个单调不减的函数. （✓）

3、$F(x)$ 一定处处右连续，但不一定左连续，即 $F(x)$ 可能连续，也可能不连续. （✓）

4、若 $F(2)=0.3$，则可解释为随机变量 $X\le 2$ 的概率为0.3. （✓）

二、填空

$F(+\infty)=A+\frac{\pi}{2}B=1$ $F(-\infty)=A-\frac{\pi}{2}B=0$ $\therefore A=\frac{1}{2}$ $B=\frac{1}{\pi}$

1、设 X 的分布函数 $F(x)=A+B\arctan x,(x\in R)$，则 $A=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>，$B=$ <u>$\frac{1}{\pi}$</u>，$P(-1<X\le 1)=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>.

$e^{-\lambda}=\frac{1}{2}$ $\therefore \lambda=\ln 2$

2、设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P(X=0)=1/2$，则 $\lambda=$ <u>$\ln 2$</u>，$P(X>1)=$ <u>$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$</u>.

3、设 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$，则 $P(X\text{为偶数})=$ <u>$\frac{1}{3}$</u>.

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\dots = \frac{1}{4}\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

4、掷一颗骰子20次，令 X 表示点数小于3的次数，则 $X\sim$ <u>$B(20,\frac{1}{3})$</u>.

5、设 $X\sim B(2,p)$，$Y\sim B(3,p)$，若 $P\{X\ge1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\ge1\}=$ <u>$\frac{19}{27}$</u>.

$1-P(X\ge1)=P(X=0)=C_2^0p^0(1-p)^2=\frac{4}{9}$ $\therefore 1-p=\frac{2}{3}$ $P(Y\ge1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0p^0(1-p)^3=\frac{4}{27}$

三、从一批有10个正品和2个次品的产品中任意取3个，求取得的次品数 X 的分布列与分布函数.

解：

X	0	1	2
P	$\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}$	$\frac{C_{10}^2C_2^1}{C_{12}^3}$	$\frac{C_{10}^1C_2^2}{C_{12}^3}$

$\Rightarrow$

X	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{6}{11} & 0\le x<1\\ \frac{21}{22} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

四、设某台车床加工零件的次品率是0.1，试计算由该车床加工的10个零件中至少有一个是次品的概率是多少？

1、用二项分布公式：

$I_1 = 1-C_{10}^0 0.1^0 0.9^{10-0} = 1-0.9^{10} = 0.6513$

2、用泊松定理.

$I_2 = 1-C_{10}^0 0.1^0 0.9^{10-0} \approx 1-\frac{1^0e^{-1}}{0!} = 1-e^{-1} = 0.6321$

$np=\lambda$

概率论与数理统计作业（5）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

一、填空

1、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Ax^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ 则 $A=$ 1.

2、若函数 $f(x)=\dfrac{A}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$ 是某连续型随机变量的密度函数，则 $A=$ $\frac{2}{\pi}$.

3、已知 $X\sim N(1.5,4)$，则 $P(X<3.5)=$ 0.8413 $P(X<-4)=$ 0.003；$P(|X|>3)=$ ~~0.2358~~ 0.2388

4、设 $X\sim E(0.2)$，则 $P(X>10)=$ e^{-2}.

二、设 X 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布，则方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率为 0.8.

三、设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}C(4x-2x^2), & 0<x<2;\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 试确定常数C：

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2 C(4x-2x^2)dx=\frac{8}{3}C \Rightarrow C=\frac{3}{8}$

(2) 求P(X > 1)：

$P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^2\frac{3}{8}(4x-2x^2)dx=1/2$

四、设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，求在100次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于19.6的概率，并用泊松分布求此概率的近似值.

解：令 A: ~~至少有三次~~ 一次测量中误差绝对值大于19.6.

$P(A)=P(|X|>19.6)=P\{X>19.6\}+P\{X<-19.6\}$

$=1-P\{X\le 19.6\}+P\{X<-19.6\}$

$=1-F(19.6)+F(-19.6)$

$=1-\Phi(\frac{19.6-0}{10})+\Phi(\frac{-19.6-0}{10})$

$=1-\Phi(1.96)+1-\Phi(1.96)$

$=2-2\Phi(1.96)=0.05$

令Y表示100次中误差绝对值大于19.6的次数，则 $Y\sim B(100,0.05)$

$I=P\{Y\ge 3\}=1-P\{Y\le 2\}$

$=1-\sum_{k=0}^{2}C_{100}^{k}0.05^{k}0.95^{100-k}$

$\approx 1-\sum_{k=0}^{2}\frac{5^k e^{-5}}{k!}$

概率论与数理统计作业（6）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

一、填空

1、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=aX+b(a\ne 0)\sim$ $N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$ $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim$ $N(0,1)$.

2、设 $X\sim N(-2,9)$，则 $Y=2X+1\sim$ $N(-3,36)$；$\frac{X+2}{3}\sim$ $N(0,1)$.

二、设 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，求 $Y=e^X$ 的分布密度.

解：$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{——}\end{cases}$ $y=e^x$ 的反函数 $x=h(y)=\ln y$.

则 $f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\frac{1}{|y|}\begin{cases}1 & 0\le \ln y\le 1\\ 0 & \text{——}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{y} & 1\le y\le e\\ 0 & \text{——}\end{cases}$

三、设 X 的密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 $Y=2X-1$ 的概率密度函数.

解：$y=2x-1$ 的反函数 $x=h(y)=\frac{y+1}{2}$

$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\frac{1}{2}\begin{cases}\frac{3}{2}(\frac{y+1}{2})-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}<\frac{y+1}{2}<\frac{3}{2}\\ 0 & \text{——}\end{cases}=\begin{cases}\frac{3y}{8}+\frac{1}{8} & 0<y<3\\ 0 & \text{——}\end{cases}$

四、设 X 服从标准正态分布，求 $Y=|X|$ 的分布密度.

解：$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\forall x\in R$.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P\{-y\le X\le y\} & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ F_X(y)-F_X(-y) & y>0\end{cases}$

$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\end{cases}$

五、设电流(单位:安培) X 通过一个电阻值为3欧姆的电阻器，且 $X\sim U(5,6)$，试求该电阻器上消耗的功率 $Y=3X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 与密度函数 $f_Y(y)$.

解：$f_X(x)=\begin{cases}1 & 5\le x\le 6\\ 0 & \text{——}\end{cases}$. $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<5\\ x-5 & 5\le x\le 6\\ 1 & x>6\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{3X^2\le y\}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P\{-\sqrt{\frac{y}{3}}\le X\le\sqrt{\frac{y}{3}}\} & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ F_X(\sqrt{\frac{y}{3}})-F_X(-\sqrt{\frac{y}{3}})\end{cases}$

$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ F_X(\sqrt{\frac{y}{3}}) & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ 0 & \sqrt{\frac{y}{3}}<5\\ \sqrt{\frac{y}{3}}-5 & 5\le\sqrt{\frac{y}{3}}\le 6\\ 1 & \sqrt{\frac{y}{3}}>6\end{cases}=\begin{cases}0 & y<75\\ \sqrt{\frac{y}{3}}-5 & 75\le y\le 108\\ 1 & y>108\end{cases}$ $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3y}} & 75\le y\le 108\\ 0 & \text{——}\end{cases}$

概率论与数理统计作业（7）

班级______ 姓名______ 学号______

一、填空题

1、设(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0, y\ge 0;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

则(X,Y)的分布密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}(\ln 3)^2\, 3^{-x-y} & x\ge 0,\ y\ge 0\\ 0 & \end{cases}$

2、设D为由x轴，y轴和直线$y=2x+1$围成的三角形区域，若(X,Y)在D上服从均匀分布，则(X,Y)的分布密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4 & -\frac{1}{2}\le x\le 0,\ 0\le y\le 2x+1\\ 0 & \end{cases}$

二、设(X,Y)的分布密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{210}(2x+y), & 2<x<6, 0<y<5;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 试求：

1、(X,Y)的联合分布函数和边际分布函数；

解：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv=\begin{cases}0 & x<2\text{或}y<0\\ \int_2^x du\int_0^y \frac{1}{210}(2u+v)dv & 2\le x\le 6,\ 0\le y\le 5\\ \int_2^6 du\int_0^y \frac{1}{210}(2u+v)dv & 6<x,\ 0\le y\le 5\\ \int_2^x du\int_0^5 \frac{1}{210}(2u+v)dv & 2\le x\le 6,\ y\ge 5\\ 1 & 6<x,\ y>5\end{cases}$

即 $F(x,y)=\begin{cases}0 & x<2\text{或}y<0\\ \frac{1}{210}(x^2y+\frac{1}{2}xy^2-4y-y^2) & 2\le x\le 6,\ 0\le y\le 5\\ \frac{1}{210}(32y+2y^2) & 6<x,\ 0\le y\le 5\\ \frac{1}{210}(5x^2+\frac{25}{2}x-45) & 2\le x\le 6,\ y>5\\ 1 & x>6,\ y>5\end{cases}$

$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}0 & x<2\\ \frac{1}{210}(5x^2+\frac{25}{2}x-45) & 2\le x\le 6\\ 1 & x>6\end{cases}$

2、关于X,Y的边际分布密度函数：

$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}\frac{1}{210}(10x+\frac{25}{2}) & 2\le x\le 6\\ 0 & \end{cases}$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{210}(32y+2y^2) & 0\le y\le 5\\ 1 & y>5\end{cases}$

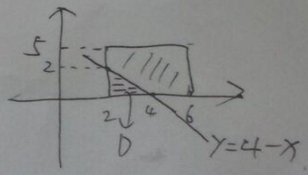
$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{210}(32+4y) & 0\le y\le 5\\ 0 & \end{cases}$

3、$P(X+Y\ge 4)$

$P\{X+Y\ge 4\}=\iint_{y\ge 4-x} f(x,y)\,dx\,dy$

$=1-\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=1-\int_2^4 dx\int_0^{4-x}\frac{1}{210}(2x+y)dy$

$=\frac{33}{35}$

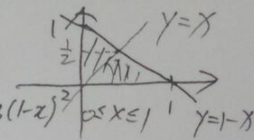


三、设(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}C(1-x-y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

1、求C

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} C(1-x-y)\,dy=\frac{C}{6}\Rightarrow C=6$

2、(X,Y)关于X和关于Y的边际分布密度函数



$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{1-x} 6(1-x-y)\,dy & 0\le x\le 1\\ 0 & x<0\text{或}x>1\end{cases}=\begin{cases}3(1-x)^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & x<0\text{或}x>1\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^{1-y} 6(1-x-y)\,dx & 0\le y\le 1\\ 0 & \end{cases}=\begin{cases}3(1-y)^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & y<0\text{或}y>1\end{cases}$

3、$P(X\ge Y)$.

$P\{X\ge Y\}=\iint_{y\le x} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_y^{1-y} 6(1-x-y)\,dx=\frac{1}{2}$

四、设二维离散型随机向量(X,Y)只取$(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$四个值，其相应概率分别为：$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$.

1、写出(X,Y)的联合分布列：

Y \ X	-1	1	$p_{\cdot j}$
-1	1/3	1/6	1/2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	1/4
$p_{i\cdot}$	7/12	5/12	1

2、关于X的边际分布列；关于Y的边际分布列

X	-1	1
P	7/12	5/12

Y	-1	0	1
P	1/2	1/4	1/4

3、$P(X=1)$

$P\{X=1\}=\frac{5}{12}$

概率论与数理统计作业（8）

班级________ 姓名________ 学号________

一、判定独立性：（填 独立 或者 不独立）

1、将一枚硬币掷三次，设 X 表示正面出现的总次数，Y 表示最后一次出现正面的次数，在 (X,Y) 中，X 与 Y（不独立

2、若 (X,Y) 的分布密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 X 与 Y（独立）

3、若 (X,Y) 的分布密度为 $f(x,y)=\begin{cases}cx^2y^2, & x^2+y^2\le 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 X 与 Y（不独立

二、应用独立性：

1、设 X,Y 相互独立，且

X	0	-1
P	0.2	0.8

Y	0	1
P	0.5	0.5

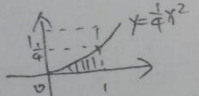
则 $P\{X=-1,Y=0\}=$ 0.4；(X,Y) 的联合分布列为

Y\X	0	-1
0	0.1	0.4
1	0.1	0.4

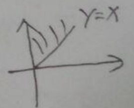
2、设 X 与 Y 独立，都在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，则 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0\end{cases}$

方程 $x^2+Xx+Y=0$ 有实根的概率为 $\frac{1}{12}$（附上计算过程）.

$p\{有实根\}=p\{X^2-4Y\ge 0\}=\iint_{y\le\frac14x^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac14x^2}1\,dy=\frac{1}{12}$



三、设 (X,Y) 的分布密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x-y}, & x>0, y>x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求 X,Y 的边际分布密度函数，并判别其独立性。



解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}2e^{-x-y}dy & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 2e^{-x-y}dx & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-y}-2e^{-2y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

$\because f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$

$\therefore X,Y$ 不独立.

概率论与数理统计作业（9）

班级________ 姓名________ 学号________

一、填空题：

1、设 X_1,X_2 独立，$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $2X_1-5X_2+1\sim N(2u_1-5u_2+1,\ 4\sigma_1^2+25\sigma_2^2)$

2、设 X_1 与 X_2 独立同分布，其分布列为

X_1	0	1
P	0.3	0.7

则 $P\{X_1=X_2\}=$ 0.58.

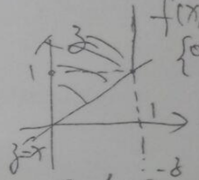
3、设 X,Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布，$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

4、设 X 与 Y 独立同分布，则下面三句话正确的是 (3).

（1）$P(X=Y)=1$；（2）$X+Y$ 与 $2X$ 的分布相同；（3）$2X$ 与 $2Y$ 的分布相同.

二、设 X 与 Y 相互独立，且 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$

试求 $Z=X+Y$ 的分布密度函数.



解: $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1,\ y>0\\ 0\end{cases}$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}dx & 0\le z\le 1\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx & z>1\\ 0 & z<0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z} & 0\le z\le 1\\ (e-1)e^{-z} & z>1\\ 0 & z<0\end{cases}$

三（选做题）设

X	-1	0	1
P	0.125	0.5	0.375

Y	-1	0	1
P	0.375	0.5	0.125

且 $P\{|X|\ne|Y|\}=1$.

1、求 X 与 Y 的联合分布列，讨论 X 与 Y 的独立性。

2、令 $U=X+Y, V=X-Y$，讨论 U 与 V 的独立性。

解: 1.

Y\X	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	0	a	0	$\frac38$
0	b	0	c	$\frac12$
1	0	d	0	$\frac18$
$p_{i\cdot}$	$\frac18$	$\frac12$	$\frac38$	1

$p\{|X|\ne|Y|\}=1\Rightarrow p\{|X|=|Y|\}=0$

$b=\frac18$　$a+d=\frac12$　$a=\frac38$　$c=\frac38$

列和　行和　$d=\frac18$

$\because p_{11}=0\ne p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1}$ $\therefore X,Y$ 不独立.

2.

V\U	-1	1	
-1	$\frac18$	$\frac18$	$\frac14$
1	$\frac38$	$\frac38$	$\frac34$
	$\frac12$	$\frac12$	

$p\{U=-1,V=-1\}=p\{X=-1,Y=0\}=\frac18$

$p\{U=1,V=-1\}=p\{X=0,Y=1\}=\frac18$

$p\{U=-1,V=1\}=p\{X=0,Y=-1\}=\frac38$

$p\{U=1,V=1\}=p\{X=1,Y=0\}=\frac38$

$\forall\ p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 则 U,V 独立

概率论与数理统计作业（10）

班级________ 姓名________ 学号________

一、填空题：

1、设 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	0.5	0.2	[illegible]

，则 $E(X)=$ -0.2 ，$E(|X|)=$ 0.8 .

2、设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $E(X)=$ $\frac{2}{3}$ ，$E\left[(1-X)^2\right]=$ $\frac{1}{6}$.

3、设 X 的分布列为 $P\left\{X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\right\}=\frac{2}{3^j}, j=1,2,\cdots$，则 $E(X)$ 是否存在？ 不存在

4、设 $X\sim B(n,p)$，且已知 $E(X)=1.6, D(X)=1.28$，则参数 $n=$ 8 ，$p=$ 0.2 .

5、设 X 服从参数为 5 的泊松分布，$Y=3X-2$，则 $E(Y)=$ 13 .

6、设 X 服从均匀分布 U(-3，4)，则数学期望 $E(2X+1)=$ 2 .

7、设 X 与 Y 独立，$X\sim N(0,2), Y\sim E(0.5)$，则 $E(2XY)=$ 0 ；$D(2X-Y+1)=$ 12 .

二、设 (X,Y) 的分布列为

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	0.1	0.2	0	
1	0.3	0	0.4	
$p_{i\cdot}$	0.4	0.2	0.4	1

求 $E(X)$，$E(2XY+X+1)$，$D(X)$，$D(2XY+1)$

解：$E(X)=1$

XY	0	1	2
P	0.6	0	0.4

$E(2XY+X+1)=2E(XY)+E(X)+1=3.6$

X^2	0	1	4
P	0.4	0.2	0.4

$E(X^2)=1.8$ $\quad D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.8$

$D(2XY+1)=4D(XY)=4\left(E(XY)^2-E^2(XY)\right)=4(1.6-0.8^2)$ 3.84

$(XY)^2$	0	1	4
P	0.6	0	0.4

$E(XY)^2=1.6$

三、设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}k, & 0<x<1, 0<y<x;\\ 0, & 其他\end{cases}$，

试确定 k，并求 $E(X)$，$E(XY)$ 和 $D(XY)$.

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x k\,dy=\frac{1}{2}k \Rightarrow k=2$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x\cdot 2dy=\frac{2}{3}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x xy\cdot 2dy=\frac{1}{4}$

$E(X^2Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x^2y^2\cdot 2dy=\frac{1}{9}$

$D(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$

四、将三个小球随机地放入 3 个杯子中，用 X 表示杯中球的最大个数，写出 X 的分布列，计算 $E(X)$，$D(X)$.

解：

X	1	2	3
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{A_3^3}{3^3}$	$\frac{C_3^2A_3^2}{3^3}$	$\frac{C_3^1}{3^3}$

$E(X)=\frac{17}{9}$

$E(X^2)=\frac{35}{9}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{35}{9}-\left(\frac{17}{9}\right)^2=\frac{26}{81}$

五、有 5 个箱子，分别装有 1 个白球和 5 个黑球，3 个白球和 3 个黑球，6 个白球和 4 个黑球，3 个白球和 6 个黑球，3 个白球和 7 个黑球，现从每个盒子中任取一个球，求取出的全部球中的白球数 X 的数学期望和方差.

解：令 X_i $(i=1,2,3,4,5)$ 表示从第 i 箱取到的白球个数.

X_1	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

X_2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_3	0	1
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$

X_4	0	1
P	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

X_5	0	1
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

则知 $X_1\cdots X_5$ 独立.

$X=X_1+X_2+\cdots+X_5$

$E(X_1)=\frac{1}{6}$ $\quad E(X_2)=\frac{1}{2}$ $\quad E(X_3)=\frac{6}{10}$ $\quad E(X_4)=\frac{3}{9}$ $\quad E(X_5)=\frac{3}{10}$

$D(X_1)=\frac{5}{36}$ $\quad D(X_2)=\frac{1}{4}$ $\quad D(X_3)=\frac{24}{100}$ $\quad D(X_4)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$ $\quad D(X_5)=\frac{21}{100}$

$E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{6}{10}+\frac{3}{9}+\frac{3}{10}=\frac{19}{10}=1.9$

$D(X)=D(X_1)+\cdots+D(X_5)=\frac{5}{36}+\frac{1}{4}+\frac{24}{100}+\frac{2}{9}+\frac{21}{100}=\frac{181}{180}$ $=1.06$

概率论与数理统计作业（11）

班级______________ 姓名______________ 学号______________

一、填空题：

1、设 $D(X)=4, D(Y)=9, \rho(X,Y)=0.5$，则 $D(X-Y)=$ __7__，$D(X+Y)=$ __19__.

2、在每次试验中，事件 A 发生的概率为0.5，试利用切比谢夫不等式估计在1000次试验中事件 A 发生的次数在400～600之间的概率 $P\geq$ __0.975__ $=\frac{39}{40}$　　$P\{|X-500|<100\}\geq 1-\frac{250}{100^2}$

3、设 X 与 Y 为任意两个随机变量，则 $Cov(X,Y)=0$，$E(XY)=E(X)E(Y)$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 这三个是等价的，并且都是 X 与 Y 独立的必要条件。这个说法是否正确？__正确__。

二、设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0, & 其他\end{cases}$，试计算

$E(X),E(Y),E(X^2),E(Y^2),E(XY)$，$D(X+Y)$，$Cov(X,Y)$，$\rho(X,Y)$，判定 X,Y 的相关性和独立性

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1x(2-x-y)dy=\frac{5}{12}$

$E(Y)=\int_0^1dx\int_0^1y(2-x-y)dy=\frac{5}{12}$

$E(X^2)=\int_0^1dx\int_0^1x^2(2-x-y)dy=\frac{36}{144}=\frac{1}{4}$　$E(Y^2)=\int_0^1dx\int_0^1y^2(2-x-y)dy=\frac{36}{144}$

$E(XY)=\int_0^1dx\int_0^1xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6}$

$\rho=\frac{Cov}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{11}$

~~$D(X+Y)=D(X)+$~~

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{11}{144}$　　$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{11}{144}$

$Cov=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{144}$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2(E(XY)-E(X)E(Y))=\frac{5}{36}$

∵ $\rho\neq0$ ∴ X,Y 相关，更不独立

三、设 (X,Y) 的联合分布列如下：

Y \ X	0	1	2
0	0.2	0	0.3
1	0.1	a	b

若 $E(XY)=0.6$，

1、求 a，b 的值　　2、$\rho(X,Y)$　　3、X，Y 是否独立？是否相关？

解：1.

XY	0	1	2
P	0.6	a	b

$\begin{cases}E(XY)=a+2b=0.6\\ 0.6+a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0.2\\ b=0.2\end{cases}$

2. $E(X)=1.2$　$E(Y)=0.5$

$E(XY)=0.6$

$Cov=E(XY)-E(X)E(Y)=0\Rightarrow\rho=0$

~~∴ X,Y不相关~~

3. ∵ $\rho=0$ ∴ X,Y 不相关

∵ $p_{11}=0.2\neq p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot1}=0.3\times0.5$ ∴ X,Y 不独立

概率论与数理统计作业（12）

班级______________ 姓名______________ 学号______________

一、设 $\{X_n\}$ 为独立的随机变量序列，且 $P\{X_n=2^n\}=P\{X_n=-2^n\}=\frac{1}{2^{2n+1}}$，

$P\{X_n=0\}=1-\frac{1}{2^{2n}}$，　$n=1,2,\cdots$.

证明 $\{X_n\}$ 服从切比雪夫大数定律.

证：$E(X_n)=0$　$E(X_n^2)=2\cdot2^{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}=1$　$D(X_n)=E(X_n^2)-E^2(X_n)=1$

即 $X_1, X_2\cdots X_n\cdots$ 独立且 $D(X_n)\leq1$ 满足切比雪夫大数定律条件

$X_1\cdots X_n\cdots$ 服从切比雪夫大数定律

二、设 $X_i(i=1,2,\cdots,60)$ 是相互独立的随机变量，且都服从参数为 $\lambda=0.04$ 的泊松分布，记 $X=\sum_{i=1}^{60}X_i$，试求概率 $P\{X\geq3\}$.

解：由中心极限定理 $X=\sum_{i=1}^{60}X_i$ 近似 $N(2.4, 2.4)$

$I=P\{X\geq3\}=1-P\{0\leq X<3\}=1-(F(3)-F(0))$

$=1-\left(\Phi\left(\frac{3-2.4}{\sqrt{2.4}}\right)-\Phi\left(\frac{0-2.4}{\sqrt{2.4}}\right)\right)=1-(\Phi(0.3873)-\Phi(-1.5492))$

$=0.6089$

0.3483

三、设一个系统有100个相互独立起作用的部件组成，每个部件损坏的概率为0.1，必须有85个以上的部件工作才能使整个系统工作，求整个系统工作的概率.

解：令 X 表100个部件中正常工作的个数，则 $X\sim B(100,0.9)$

由中心极限定理 X 近似 $N(90,9)$

$P\{系统正常\}=P\{85\leq X\leq100\}=F(100)-F(85)=\Phi\left(\frac{100-90}{3}\right)-\Phi\left(\frac{85-90}{3}\right)$

$=1-0.0485=0.9515$

四、计算器进行加法计算时，把每个加数取整（取为最接近于它的整数）来计算．设所有的取整误差是相互独立的随机变量，都服从区间 $[-0.5,0.5]$ 上的均匀分布．若将1500个数相加，求误差总和的绝对值超过15的概率．

解：令 X_i 表示第 i 个数的取整误差. $X_i\sim U[-0.5,0.5]$　$i=1,2\cdots1500$

X 表示1500个数相加的误差总和. $X=\sum_{i=1}^{1500}X_i$

由中心极限定理 X 近似 $N(E(X),D(X))=N(0,125)$

$I=P\{|X|>15\}=P\{X<-15\}+P\{X>15\}=P\{X<-15\}+1-P\{X\leq15\}$

$=F(-15)+1-F(15)=\Phi\left(\frac{-15-0}{\sqrt{125}}\right)+1-\Phi\left(\frac{15-0}{\sqrt{125}}\right)=2-2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right)$

$=2-2\times0.9099=0.1802$

概率论与数理统计作业（13）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

一、 填空题：

1、从一批电阻中抽出8只，测得各只电阻的阻值如下（单位：千欧）：

4.3 4.6 3.7 3.8 4.4 3.2 4.0 4.8

样本均值的观察值为 4.1 ，样本方差的观察值为 0.2771 .

2、 若 $U \sim N(0,1)$，$P\{U < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \frac{\alpha}{2}$，$P\{|U| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$.

3、 若 $T \sim t(n)$，$P\{T > t_\alpha(n)\} = 1-\alpha$ ，$P\{|T| < t_{1-\alpha}(n)\} = 1-2\alpha$.

4、 若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$， $P\{\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n)\} = \alpha$ ，$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$.

5、查表：$u_{0.975} = 1.96$，$t_{0.05}(10) = -t_{1-0.05}(10) = -1.8125$，$\chi^2_{0.975}(15) = 27.488$，$F_{0.1}(10,9) = \frac{1}{F_{1-0.1}(9,10)} = \frac{1}{2.35} = 0.4255$

二、 设总体 X 的分布密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & 其他 \end{cases}$，试求样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_5)$ 的联合密度.

解：$g(x_1, x_2 \cdots x_5) = \prod_{i=1}^{5} f(x_i) = \begin{cases} 2^5 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 & 0 < \forall x_i < 1, \ i = 1 \cdots 5 \\ 0 \end{cases}$

三、 在总体 $N(80, 20^2)$ 中随机地抽取一容量为100的样本，问样本均值与总体均值的差的绝对值大于3的概率是多少?

解：$P\{|\bar{X} - 80| > 3\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - 80}{20/10}\right| > \frac{3}{2}\right\} \xrightarrow{Y = \frac{\bar{X}-80}{20/10} \sim N(0,1)} P\{|Y| > 1.5\}$

$= 2(1 - \Phi(1.5)) = 0.1336$

四、 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$ 为取自总体 $N(0, 0.3^2)$ 的一个样本，求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 1.44\right\}$.

解：$P\left\{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq 1.44\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{x_i - 0}{0.3}\right)^2 \geq \frac{1.44}{0.3^2}\right\} = P\{\chi^2(10) \geq 16\}$

查表 0.1.

概率论与数理统计作业（14）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

一、 设总体 X 的分布列为

X	-1	1	2
P	2θ	θ	$1-3\theta$

其中 $0<\theta<\frac{1}{3}$ 为未知参数，当样本观察值为1,2,−1,1,2,−1时，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解：矩法：令 $\overline{X}=E(X)=2-7\theta$. 则 $\hat{\theta}_1=\frac{2-\overline{X}}{7}$ 因 $\overline{X}=\frac{2}{3}$ 则 $\hat{\theta}_1=\cancel{\frac{4}{27}}=\frac{4}{21}$

最大…法：

$L(\theta)=P^2\{X=1\}P^2\{X=-1\}P^2\{X=2\}=(1-3\theta)^2\cdot\theta^2\cdot(2\theta)^2=36\theta^6-24\theta^5+4\theta^4$

$L'(\theta)=216\theta^5-120\theta^4+16\theta^3=0$ 有 $\hat{\theta}_2=\frac{2}{9}$.

二、设总体 X 的密度 $f(x)=\begin{cases}\theta C^\theta x^{-(\theta+1)}, & x>C\\ 0, & x\le C\end{cases}$ $(\theta>1)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为样本观察值，

求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解：矩法 令 $\overline{X}=E(X)=\int_C^{+\infty}x\cdot\theta C^\theta x^{-(\theta+1)}dx=\frac{\theta C}{\theta-1}$

有 $\hat{\theta}_1=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-C}$

最大…法：$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\theta^n C^{n\theta}\prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln C-(\theta+1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$

$(\ln L(\theta))'=\frac{n}{\theta}+n\ln C-\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$ 有 $\hat{\theta}_2=\frac{n}{\sum\ln x_i-n\ln C}$

三、 设灯泡的寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，灯泡厂从某日生产的灯泡中抽5个进行寿命试验，得到灯泡寿命（小时）

数据如下： 1050,1100,1080,1120,1200。 1110 2560

1、求 μ 和 σ^2 的矩估计量和最大似然估计量（**要写具体过程，参见教材**）；

2、求该日生产的灯泡的平均寿命的最大似然估计值.

解：1. ①矩估计法：令 $\begin{cases}\overline{X}=E(X)\\ B_2=D(X)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{X}=\mu\\ B_2=\sigma^2\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}\\ \hat{\sigma}^2=B_2\end{cases}$

最大似然估计法：

$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\ln L=-n\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)-\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\begin{cases}\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=0\\ \frac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)}{\sigma^2}=0\\ -\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{\sigma^3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum X_i=\overline{X}\\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2=B_2\end{cases}$

2、$\hat{\mu}=\overline{X}=1110.$

四、填空题：

1、设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数，则 θ 的最大似然估计量

$\hat{\theta}=$ __$\overline{X}$__. $\hat{\theta}$ __是__（是/不是）θ 的无偏估计量. $E(\hat{\theta})=\theta$

2、设总体 $X\sim N(\mu,2)$，(X_1,X_2) 是取自总体的样本，则下面三个估计量

$\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$， $\hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$， $\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$，

$E(X_2)=\mu$, $D(X_2)=\sigma^2=2$

$E(\hat{\mu}_1)=\frac{2}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)=\mu$

$D(\hat{\mu}_1)=\frac{4}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)=\frac{10}{9}$

都__是__（是/不是）μ 的无偏估计，且 $D(\hat{\mu}_1)=$ __$\frac{10}{9}$__，$D(\hat{\mu}_2)=$ __$\frac{5}{4}$__，$D(\hat{\mu}_3)=$ __1__.

那么__$\hat{\mu}_3$__是这三个中最有效的。

3、设总体 $X\sim P(\lambda)$，$\lambda>0$，若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一组样本，令 $M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(X_i-1)$，

则期望 $E(M)=$ __λ^2__，那么 M __是__（是/不是）参数 λ^2 的无偏估计量.

概率论与数理统计作业（15）

班级________ 姓名________ 学号________

一、填空

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体的样本。

（1）当 σ^2 已知时，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar X \pm \frac{\sigma}{\sqrt n}U_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

（2）当 σ^2 未知时，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar X \pm \frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

（3）当 σ^2 已知时，μ 的置信区间长度 $L=\frac{2\sigma}{\sqrt n}U_{1-\frac{\alpha}{2}}$，当置信度 $1-\alpha$ 缩小时，置信区间长度 L 缩短（缩短/不变/增长）

二、某厂生产的一批螺钉，其长度（单位：厘米）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取10个样品，测得其长度为

12.6、12.8、13.4、12.5、13.1、13.5、12.8、12.9、12.6、13.3.

试求总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 的置信度为95%的置信区间。

$\bar X=12.95$
$S=0.3567$
$S^2=0.1272$

解：① $T=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$

② $P\{|T|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

③ $P\{\bar X-\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\bar X+\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

④ $\left(\bar X\pm\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

⑤ 代数 $(12.695, 13.205)$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.2621$

① $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

② $P\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

③ $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\}=1-\alpha$

④ $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

⑤ 代数 $(0.06, 0.424)$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=19.02$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.7$

三、有两批导线，从第一批中随机地抽取4根，第二批中随机地抽取5根，测得电阻（欧姆）为：

第一批导线：0.143，0.142，0.143，0.137； $\bar X=0.14125$ $S_1^2=8.25\times10^{-6}$

第二批导线：0.140，0.142，0.136，0.138，0.140． $\bar Y=0.1392$ $S_2^2=5.2\times10^{-6}$

设两批导线的电阻是相互独立的随机变量，并且分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 及 $N(\mu_2,\sigma^2)$，求两批导线电阻的均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为95%的置信区间。

解：① $T=\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=2.3646$

② $P\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)<T<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha$

③ $P\{\bar X-\bar Y-\sqrt{\ }\sqrt{\ }\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}<\mu_1-\mu_2<\bar X-\bar Y+\sqrt{\ }\sqrt{\ }\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha$

④ 区间：$\left(\bar X-\bar Y\pm\sqrt{\ }\sqrt{\ }\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$

⑤ 代数 $(-0.00199, 0.00609)$

四、设从正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中独立地各抽取容量为10的样本，其样本方差的观察值为 $s_1^2=0.5419$，$s_2^2=0.6065$，求方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间（置信度为0.9）。

解：① $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

② $P\{F_{\frac{\alpha}{2}}(\ ,\ )<F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\ ,\ )\}=1-\alpha$

③ $P\left\{\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\sigma_1^2/\sigma_2^2<\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$

④ 区间：$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

⑤ 代数 $(0.28, 2.84)$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{1-0.05}(9,9)=3.18$

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(9,9)=\frac{1}{3.18}=0.314$

五、（选做题，单侧置信）制造某种产品的单件平均工时服从正态分布，现从中抽取5件，记录它们的制造工时（单位：小时）如下：

6.3，6.6，6.9，7.1，6.2

设给定的置信度为0.95，则单件平均工时的单侧置信上限。

$\bar X=6.62$
$S=3.83$

解：① $T=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$

② $P\{T>-t_{1-\alpha}(n-1)\}=1-\alpha$

③ $P\{\mu<\bar X+\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\alpha}(n-1)\}=1-\alpha$

④ 区间 $\left(-\infty, \bar X+\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\alpha}(n-1)\right)$

⑤ 代数 $(-\infty, 10.27)$

$t_{1-\alpha}(n-1)=2.1318$

概率论与数理统计作业（16）

班级__________ 姓名 __________ 学号__________

一、判断题：

1、假设检验中，显著性水平 α 的意义是 原假设 H_0 成立，经检验 H_0 被拒绝的概率（√）。

2、假设检验中，用 α 和 β 分别表示犯第一类错误和第二类错误的概率，则当样本容量一定时，α 与 β 不能同时减小，减小其中一个，另一个往往就会增大（√）。

二、设某批零件尺寸 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，方差 $\sigma^2 = 1.21$，检查6件，得尺寸数据（单位：毫米）

32.56， 29.66， 31.64， 30.00， 31.87， 31.03

$\boxed{\bar{x} = 31.13}$

当显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，问平均尺寸 μ 能否认为是32.50毫米？

解：① $H_0: u = u_0 = 32.5 \quad H_1: u \neq u_0$

② $U = \frac{\bar{X}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

③ $P\{|U| \geq U_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$

④ 拒绝域 $(-\infty, -U_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [U_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$

⑤ $U = \frac{\bar{x}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -3.05$

$U_{1-\frac{\alpha}{2}} = U_{0.975} = 1.96$

$\because U = -3.05 < -1.96$

$\therefore$ 拒 H_0，接受 H_1，不认为 u 是32.5

三、设一批木材的大头直径 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取5根，测得大头直径（单位：厘米）如下

12.3， 12.8， 12.4， 12.1， 12.7

$\bar{x} = 12.46$

$s^2 = 0.083$

1、这批木材的平均直径能否认为是12.3？（取显著性水平 $\alpha = 0.05$）

2、这批木材的直径方差否认为是0.55？（取显著性水平 $\alpha = 0.05$）

解：1. ① $H_0: u = u_0 = 12.3 \quad H_1: u \neq u_0$

② $T = \frac{\bar{X}-u_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

③ $P\{|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha$

④ 拒绝域 $(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$

⑤ $T = \frac{\bar{x}-u_0}{s/\sqrt{n}} = 1.24$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.7764$

$\because -2.7764 < T = 1.24 < 2.7764$

$\therefore$ 接 H_0，可认为 u 为 12.3.

2. ① $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.55 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

② $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

③ $P\{0 < \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha$

④ 拒绝域：$(0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$

⑤ $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 0.604$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 0.484 \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 11.143$

$\because 0.484 < \chi^2 = 0.604 < 11.143$

$\therefore$ 接 H_0，拒 H_1，可认为 σ^2 为 0.55.

四、有甲、乙两台机床加工同样产品，从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件，测得产品直径（单位：毫米）为

8 甲：2.05，1.98，1.97，2.04，2.01，2.00，1.90，1.99

7 乙：1.97，2.08，2.05，1.98，1.94，2.06，1.92.

$\bar{X} = 1.9925 \quad S_1^2 = 0.047$

$\bar{Y} = 2 \quad S_2^2 = 0.063$

假定两台机床加工产品的直径都服从正态分布，且总体方差相等，试比较甲、乙两台机床加工产品的平均直径有无显著差异（$\alpha = 5\%$）

解：① $H_0: u_1 = u_2 \quad H_1: u_1 \neq u_2$

② $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

③ $P\{|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\} = \alpha$

④ 拒绝域 $(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), +\infty)$

⑤ $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\ldots} = -0.0625$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) = t_{0.975}(13) = 2.1604$

$\because -2.1604 < T < 2.1604$

$\therefore$ 接受 H_0，u_1 与 u_2 无显著差异

五、为了研究一种新化肥对小麦的效力，选用13块条件相同面积相等的土地进行试验，各块地产量如下：

施化肥的：	34，	35，	30，	33，	34，	32	
未施肥的：	29，	27，	32，	28，	32，	31，	31.

$S_1^2 = 3.2$

$S_2^2 = 4$

用 X、Y 分别表示在一块土地上施肥与不施肥两种情况下小麦的产量，设 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，试检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$．（$\alpha = 5\%$）

解：① $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

② $F = S_1^2/S_2^2 \sim F(n_1-1, n_2-1)$

③ $P\{0 < F \leq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1) \cup F \geq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\} = \alpha$

④ 拒绝域 $(0, F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)] \cup [F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1), +\infty)$

⑤ $F = S_1^2/S_2^2 = 0.8$

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1) = \frac{1}{5.7} \quad F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1) = 5.12$

$\because \frac{1}{5.7} < F = 0.8 < 5.12$

$\therefore$ 接受 H_0，可认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

六、（选做题，单侧检验）从某工厂生产的一批电子元件中抽取6个，测得电阻为（单位：欧姆）

14.0， 13.8， 14.3， 14.2， 14.4， 13.7

$\boxed{S^2 = 0.079}$ $\alpha = 0.05$

设这批元件的电阻服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，问根据上述数据，是否可以认为这批元件的电阻的方差不高于0.04．

解：① $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 0.04 \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

② $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

③ $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\} = \alpha$

④ 拒绝域 $[\chi^2_{1-\alpha}(n-1), +\infty)$

⑤ $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 9.833$

$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{1-0.05}(5) = 11.071$

$\because \chi^2 = 9.833 < 11.071$

$\therefore$ 接受 H_0，认为 σ^2 不高于0.04