中学数学思维方法丛书

主　　编　王梓坤　张乃达

编　　委　(以姓氏笔画为序)

王梓坤　过伯祥　杨世明

张乃达　蒋　声

本册作者　蒋　声

ABC乐学天府

序

早在1995年8月，大象出版社（原河南教育出版社）在扬州举办了一个座谈会，邀请十余位数学水平很高的数学教师参加，商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为，这是一个富有创见的倡议，因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书，对中学数学教学，无疑会是非常有益的；而更主要的，广大的中学生们，将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面，学到很多的东西。这对将来无论做什么工作，都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景，总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣，而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼，必须东拼西凑，多一只兔便比鸡多了两条腿，好不容易才能做出一题。而学过代数，这类问题便变得极为简单。做几何题也一样，必须具体问题具体解决，而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很困难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要靠自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来,数学模拟也主要靠计算机。再者,以往数学中极少实验,还是由于计算机的广泛使用,现在不少数学系已有了实验室,特别是统计实验室。可以期望,计算机对改变数学的面貌,对改善数学的思维方法,都会起到越来越大的作用。

在此之前,我国已经出版了几本关于数学方法的书,它们都各有特色。如就规模之大,选题之广,论述之精而言,这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中,将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

ABC乐学天府

引　　言

“发现”,是一个美妙的词.

发现引人注目.在长篇大论里忽然看见“发现”二字,读者的眼睛顿时为之一亮.电视剧的人物对话里飘过来“发现”二字,电视机前的观众立刻安静下来,电视机旁的过客也好奇地探过头来.发现了什么呢?

发现使人鼓舞.一宗迷案发现侦破线索,办案人顷刻间忘记了疲劳,忘记了饥渴.一道难题发现解法,解题者马上变愁容为笑容,乐滋滋地说:“这个题目真伤脑筋!”众里寻她千百度,“发现”原来在此处,多么开心,多么高兴!

发现令人神往.法国著名数学家彭加勒有一天夜晚违反习惯,喝了黑咖啡,久久不能入眠,各种想法纷至沓来,结果在第二天早晨发现了一类新的高等超越函数.如果我今晚喝一杯浓浓的雀巢咖啡,会不会发生奇迹呢?

在各种各样的发现里,最容易接近的是数学发现.因为数学就在我们身旁.生活中处处有图形,时时讲数量.生活离不开分析、判断、推理,生活需要插上想象的翅膀.形和数是数学的研究对象,从

感性到理性的思考是数学的特长.数学不但是各行各业必不可少的工具,数学还有林的幽静,雾的朦胧,山的崎岖,曲的和谐,舞的韵律,诗的想象.各行各业的发现,都是数学发现的邻居,可以将数学发现中的规律借来参考.浏览数学风光不需要门票,拈一支笔,铺一张纸,捧一本书,就可以凭借生活经验,登上数学之舟扬帆试航.数学是大众的数学,数学热情欢迎所有来宾观光,数学给每一位辛勤劳动者提供丰厚的报偿.

现在这本书的目的,就是探讨通往数学发现的道路.

练字从临摹开始.打开第一章,我们就开始进入角色,顺次扮演欧几里得、笛卡儿、牛顿和高斯历代数学四大名家,以今天的心境,唱那古老的歌谣,走马观花,寻访旧时的机遇,体会发现的心情.

然后我们回到自己的生活,自己的学习和工作,讨论怎样从大家熟悉的中学数学环境出发,打开发现的门户,踏上发现的道路,向发现要潜力,向发现要时间.由于寻求发现而提高素质,因为获得发现而减轻负担.排解日常的烦恼,探讨身边的问题,疏通秘诀的源泉,清扫登攀的阶梯.例题有解法又有想法,问题谈背景也谈前景,既欣赏前台演出效果,又参观后台准备过程.希望能对中学数学教师、中学生、师范院校数学系学生和业余爱好者有所帮助.

在准备本书内容的过程中,参考了很多有关书籍和文章,借此机会,谨向这些资料的作者和译者表示由衷的感谢.

本书话题,说古论今,通上贯下,意义重大,难度也很大.学海无涯,作者才疏学浅,勉力为之,不过抛砖引玉而已.书中疏漏及错误在所难免,恳切期待各方面专家和朋友们的热情指正.

蒋　声

1997年5月

目　录

一、重访数学伟大时刻

在谋求发展时,人们常说,要抓住机遇.

要想在数学上有所发现,也必须及时抓住机遇.小机遇常有,大机遇难逢.

数学史上有多次重大发现机遇,本章将考虑其中的四次.设想我们恰好生逢其时,分别充当大数学家欧几里得、笛卡儿、牛顿和高斯的角色,那么我们将会怎样作出发现,怎样理解发现,以及怎样向后人介绍发现呢?

1.如果你是欧几里得

(1)老朋友欧几里得

在数学故事和有关数学史的书籍、文章里,经常介绍古代希腊数学家欧几里得和他的名著《几何原本》.

《几何原本》大约完成于公元前300年左右,最初是手抄本,

ABC乐学天府

图 1　欧几里得

1482 年开始有印刷版本，至今已累计出版了 1000 多种不同的版本，被翻译成各种文字．除去《圣经》，世界上没有其它书籍拥有过这样多的读者．

《几何原本》里有代数也有几何，其中的几何部分被用来作为中学几何教材蓝本长达两千多年．直到现在，中学《几何》课本里仍有许多《几何原本》的痕迹．欧几里得的伟大身影跨越时空，陪伴现代中学生成长．

在大学数学课程里，欧几里得的名字常与“空间”、“几何”、“算法”等连结成数学名词，出现在老师和同学们的嘴边和笔下．写得多、说得多了，图个方便，就来个长姓短读，把欧几里得简称为欧氏，尽管他并不姓欧．

在群星灿烂的历代数学家中，欧几里得显得特别平易近人．很多人在说起欧几里得的时候，像是谈论一位老朋友那样熟悉和亲切．

(2)从羽毛球谈起

羽毛球是不是球？

有人说羽毛球当然是球，有人说羽毛球肯定不是球．

这是概念的争论，逻辑的交锋．

几何最讲究概念的严密,逻辑的清晰.如果几何大师欧几里得还在,请他来做裁判,谁是谁非,立刻就能见分晓了.

现在你来扮演欧几里得.请你判定,“羽毛球是球”和“羽毛球不是球”这两个命题,谁对谁错?

这个裁判不好当.

如果判定“不是球”,数学系的学生一致鼓掌,体育系的学生却群起攻击,说你一窍不通.

如果判定“是球”,体育系的学生把你高高举起,数学系的学生却愤怒谴责,说你满口胡言.

稳扎稳打,小心为妙.首先宣布:

结论分为两点.第一点,两个命题都是正确的!

话音未落,掌声雷动.体育系欢庆自己的胜利,因为命题“羽毛球是球”正确;数学系也欢庆自己的胜利,因为命题“羽毛球不是球”也正确.

可是,欢呼的人群中,会闪现越来越多的怀疑目光.两个互相矛盾的命题,怎么可能同时都是正确的呢?

不等掌声平息,你赶快接着大声说:

第二点,但是,双方的命题叙述都有关键性的省略.

完整地说,第一个命题应该叙述成“羽毛球运动是球类运动”.命题正确,但是把关键词“运动”省略了,简单地说成“羽毛球是球”.

第二个命题,完整的说法是:“羽毛球的形状不是球形的.”命题正确,但是省略了关键词“形状”,简单地说成“羽毛球不是球”.

总之,“羽毛球运动是球类运动”,“羽毛球的形状不是球形的”,这两个命题,都是正确命题!

全场再次响起长时间热烈的暴风雨般的掌声.疑团已经全部

解开.只因说话过分简洁,造成概念模糊,互相混淆,引起麻烦.多说几个字,澄清了概念,避免了误解,用小小的麻烦消去了大大的麻烦.

由此可见,要能保证逻辑严密,首先必须概念准确.要用一丝不苟的严格定义,把概念解释得清清楚楚,明明白白.

如果你生活在欧几里得时代,你代替欧几里得为几何学埋下基石,那么你所要做的第一件事,就是下定义,像《几何原本》那样,力求把必需的概念都解释得毫不含糊.

(3)这图不是那图

下面是一个幽默小故事.

一位家长希望儿子成为美术家,要求他的儿子每天要画三幅图.儿子欣然同意,当天一会儿就交卷了.第一张纸上用圆规画了一个圆,儿子解释说,这是乒乓球.第二张纸上也画了一个圆,儿子说它是玻璃球.第三张纸上画的还是一个圆,这次儿子的解释说是铅球.

家长启发说,三种球的质地不同,乒乓球掉在地砖上弹起老高,玻璃球掉在地砖上跌得粉碎,铅球掉在地砖上砸坏了地面.你的图上能看出这些区别吗?

儿子回答说,用什么材料做球,谁撞坏了谁,自然有人去管,我不管.我画图只要注意形状、大小和位置关系.

于是家长笑了起来,说:看来应该指望你成为数学家了!

这个小故事说明了美术的图与几何的图有什么不同.美术的图更贴近生活,力求表现实物的色彩、质感、神韵,等等.几何的图经过了抽象概括,只考虑形状、大小和相关位置这三方面的共性.因而,一幅几何图形的适用范围,比一幅美术图形的适用范围广泛

得多.

数学是研究形和数的,其中有关形的问题主要是在几何里研究.如果你像欧几里得那样生活在古代希腊的亚历山大里亚城,几何学理论将在你手里诞生,那么你就要下功夫,把图形概念琢磨透彻.

(4)点无大小线无宽

在欧几里得的《几何原本》里,最初 7 个定义是关于点、线、面的.下面是这些定义的内容.一面看定义,一面就可以设想,如果你是欧几里得,你会不会这样下定义?

定义 1　点是没有部分的那种东西.

定义 2　线是没有宽度的长度.

定义 3　一条线的两端是点.

定义 4　直线是同其中各点看齐的线.

定义 5　面是只有长度和宽度的那种东西.

定义 6　面的边缘是线.

定义 7　平面是与其上直线看齐的那种面.

这些定义虽然古老,却不很陌生.

首先是定义 6——“面的边缘是线”和定义 3——“一条线的两端是点”.这使我们想起现行初中《几何》课本里的讲法:“面与面交接的地方,形成线”,“线和线相交的地方是点”.文字稍有不同,意思大体相近.

其次是定义 1、2、5,它们意味着点没有大小,线有长度但没有宽度,面有长、宽但没有厚度.这些观点在现今的几何参考书里仍然经常可以见到.

剩下的定义 4 和 7,说法有些别扭,意思却很容易理解.上体

育课的时候,老师喊一声"向右看齐",一排排原来歪歪扭扭的队伍转眼之间都调整成为直线;瓦工在房屋砖墙上抹水泥,手拿一根比长尺宽些厚些长些的木板,在水泥表面刮来刮去,就把水泥层的表面刮得平平整整.欧几里得当时这样叙述直线定义和平面定义,或许也是从类似的生活现象中受到了启发.

欧几里得的这几个定义里,最容易使人感到费解的,是点无大小、线无宽.

如果你是欧几里得,你会不会说点没有大小呢?

在现实生活里,一听说外边下雨,立刻有人问:雨点大不大?因为这雨点的大小,对于出门的人至关重要.如果雨点微不足道,上街可以冒险不带雨具.雨点大起来了,行人要打伞,骑车要穿雨披.突然间电光闪闪,雷声隆隆,下起倾盆大雨,吓得人们一个个赶紧奔到附近宽大屋檐下面躲雨.

事实上,不但雨点有大有小,现实生活中的点都是有一定大小的.在生活中,说到"点",一般是指一块很小的地方.但是有时也会比较大.例如,"考点设在某个学校",这时的点有一个学校大."在某个地区试点",这时的点有一个地区大.在定义里规定点没有大小,使人在感情上难以接受.

另一方面,几何命题"两直线相交于一点",既可应用于窗纱的两根细塑料丝互相交织,又可应用于两条铁道干线在某个城市交会.在几何学里规定点"没有大小",正是为了使几何点的性质与大小无关,因而能够广泛应用于现实社会各种各样大大小小的点.

把科学性和可接受性结合起来,描绘点的概念,可以这样说:点表示位置,不考虑大小.

类似地,可以说:线不考虑宽度,面不考虑厚度.

把"没有"改成"不考虑",一词之差,感觉大不同.

顺便说说，上面这些关于点、线、面的叙述，都仅仅是描述，而不是严格的定义.因为在初等几何里，点、线、面都是最基本的概念，它们排在所有几何概念的最前列，没有比它们更前的定义可以用来定义它们，只能靠它们去定义后面的各种概念.

(5)长尺画长线

"长尺画长线，短尺画短线."

上面这句话的正确性毫无疑问.

"长直尺画长直线，短直尺画短直线."

话里加进了四个"直"字.如果在日常生活里这样说，交谈双方往往都觉得无可非议.但是如果在几何老师面前说出来，老师一定会说，不能这样讲，应该说，长直尺画长线段，短直尺画短线段.因为在《几何》课本里写着：

一根拉得很紧的线，给我们以直线的形象.直线是向两方无限延伸着的.

短短两行课文，经过了千锤百炼.

"一根拉得很紧的线."

人人见过，不错，有这么一回事，怎么样啊？

"给我们以直线的形象."

妙极了，不说"是"，而说"给我们以……的形象".拉紧的线不是直线，但是提供了一种形象，让你看到，直线差不多就是这个样子.于是在心理上感到满足，觉得已经基本掌握直线概念，只差一点点细节说明了.还差点儿什么呢？说说看！

"直线是向两方无限延伸着的."

哦，知道了，就这样，不必再说，不用再问，不需再想.

可是，哪里知道，这"无限延伸"厉害得很.直线既然无限延伸，

就没有长短之分.无论用多长的尺去量直线,无论往哪个方向量过去,无论继续量多少年多少代,总是量呀量呀量不完.

这是几何用语和生活用语的又一个明显不同.生活中谈起直线,不言而喻,那是直的线.线有长短,直的线当然也有长短.但是在几何学里,把"直"字和"线"字连在一起,组成专门术语,给予新的含义,规定它不但是直的线,而且理想化,认为它向两侧无限伸展.不是一般地伸展,而是无限地伸展,永无止境.

这种手法不是几何的发明,平常生活里司空见惯."冰"字和"棒"字连在一起,成为"冰棒",冰棒并不就是冰的棒;"雪"字和"糕"字连在一起,成为"雪糕",雪糕也不等于雪的糕.直线不同于直的线,完全可以理解.

在几何里,可以量长度的是线段,它是直线在其两点之间的部分.生活中所说的直线,往往相当于几何里的线段.

去问问欧几里得,为什么他把直线概念搞得这样玄乎?

但是欧几里得直摇头,他的直线概念大众化,一点儿也不玄.

事实上,欧几里得《几何原本》里的直线定义,我们在前面已经看到了.《几何原本》的定义3说,"一条线的两端是点",这就默认一条线总是有两个端点,因而欧几里得的线是有限长的.接下来在定义4里说,"直线是同其中各点看齐的线",直线既然是线的一种,在欧几里得眼里,当然也是有限长的."直线是向两方无限延伸着的"这句话,《几何原本》里根本没有,是功是过,欧几里得概不承担.

真是难以置信.这样基本的观点,欧几里得竟然没有想到?那么他怎样定义平行线呢?

一查便知.《几何原本》里的平行线定义是这样的:

定义23　平行直线是这样的一些直线,它们在同一平面内,

而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交.

在欧几里得的平行线定义里,要说直线往两个方向无限延长,还要在两个方向上都不会相交.如果直线本身是往两侧无限延伸的,就不需要再延长,平行线的定义就可以说得简短些.

作为对比,再看看我们现时所用初中《几何》课本里的平行线定义:

在同一平面内,不相交的两条直线叫做平行线.

如果你是欧几里得,由你来执笔编著《几何原本》,你定义直线的时候,会采取哪种观点?有限长,还是无限延伸?

也许多数人赞成把直线定义成向两侧无限延伸的,这样更方便些.例如,平行线的定义,包括标点在内,《几何原本》中的定义有46个字,而现在《几何》课本里的定义只有21个字,字数减少为不到一半,叙述得反而更清楚了.

欧几里得已经想到了点无大小线无宽,理想化、抽象化达到了很高的程度.怎么就不继续发挥想象力,设想直线无限伸展呢?

可能因为"无限"是一个非常难用数学方式定量描写的概念.在欧几里得时代,甚至连作为无限不循环小数的无理数都不能接受.直到今天,虽然已经有了关于无限的严格数学理论,在涉及无限时,还必须谨慎从事,一不小心就会把有限运算的性质误用到无限,导致错误.

(6)有钱难买欧氏尺

画直线要用直尺,古今中外,都是如此.直尺和圆规这两样,是欧几里得作图的全部工具.

可是,走遍百货公司、超级市场和文化用品商店,却买不到符合欧几里得标准的直尺.不是一时缺货,而是根本就没有厂家生

产.

按照欧几里得的标准,直尺应该是什么样的呢?

欧几里得的直尺,是单边无刻度直尺.就是说,这种尺没有刻度,而且只有一边是直的,可以用这一边画直线,另一边不能用.

难怪没有厂家生产.要是工厂做出这种尺来,哪一家商店愿意进货?就算有店家勉强同意进了几根,哪一位学生哪一位家长肯买?就算有学生好奇,买来一根单边无刻度直尺,怎么好意思在教室里使用这种原始文具呢?

直到20世纪中期,尺规作图理论还是平面几何的一个重要篇章.尺规作图法中的画图工具只允许使用圆规和单边无刻度直尺,还必须严格按照欧几里得的作图规则.这套规则来源于《几何原本》中的前面三条公设:

公设1　可从任一点到任一点作直线.

公设2　可将有限直线不断沿直线延长.

公设3　能以任一点为圆心和任一距离为半径作圆.

当然,欧几里得还默认了,当两直线相交,或一直线与一个圆相交,或两个圆相交时,交点可以作出.

如果你是欧几里得,你会不会这样限制作图工具和作图规则呢?

按照中国的文化传统,也许我们更倾向于"无规矩不能成方圆"."规"和"矩"是中国古代的两种画图工具.在一些汉代的图画中,画着伏羲手里拿规,女娲手里拿矩.画中的规,类似于现在的圆规,可以画圆;画中的矩,是拐形角尺,有点像大写字母L,可以画直线和直角.

而且,也许我们更倾向于使用带有刻度的角尺.因为既然可以用圆规,就能在角尺的边上刻出等距离的刻度.我们还打算把L形

角尺那一横的两边做成互相平行，一竖的两边也做成互相平行．这样做并不困难，因为有了画直角的工具以后，平行线是很容易画的．有道是“工欲善其事，必先利其器”．先由制造画图工具的师傅精心制作，提供精巧方便的圆规和角尺，使画图的人省时省力省脑筋，何乐而不为？

这样一来，就不会有伤脑筋的尺规作图法，代替它的将是更强大更有效更方便的“规矩作图法”．

如果你认为欧几里得还应该更开明一些，关于画图工具的规定最好是开放的，允许人们添加自选画图工具，那么三角板、量角器和绘图模板也都合法，因而将会受到更多实际画图者的欢迎．这样的作图理论，可望永远保持青春活力．

在现行初中《几何》课本里，画图工具是直尺、圆规、量角器和三角板．这样规定，符合目前学生的学习条件．

(7)串珠成线

几十颗大大小小的珍珠，串成一串项链，弯一个小指头就能把它轻轻提起来．如果不小心扯断了串珠的线，项链就不再是项链，而变成一堆到处乱滚的珍珠，不容易拿起，倒容易丢失．

《几何原本》把众多的正确几何命题编织成逻辑的链条，就把大大小小的几何明珠加工组成一件辉煌夺目的无价之宝．从此几何不再是一个平平常常的题库，而已上升为严密的几何学理论．以后陆续建立的其它数学理论分支，也都有了可以效法的榜样．

编织逻辑链条的办法，是先规定一些基本概念，列出一些不加论证就承认它们正确的命题，就是通常所说的公理；然后用基本概念去定义后面出现的所有概念，用公理去证明后面出现的所有定理．

《几何原本》是对欧几里得时代希腊已有数学知识的总结，所以既包含几何内容，又包含代数内容.《几何原本》的开头，在列举20多个定义以后，写下了5个公设和5个公理.欧几里得的5个公理是关于代数的，如“等量加等量，总量仍相等”，“整体大于部分”，等等.5个公设是关于几何的公理.其中的前3条公设是关于作图的，上面已经介绍过.后面两条公设如下：

公设4　所有直角彼此相等.

公设5　若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点.

实际上，欧几里得明确列出的公设太少，在他后来证明的过程中经常不自觉地利用直观，默认一些明显的事实，而这些明显事实既然作为论证的基础，当然也应该列为公理.

如果你是欧几里得，有记者向你采访，请教为什么定理的正确性不用实验证明，而是用推理证明，你怎样解释呢？

因为用推理论证有一个很大的好处：只要确信作为几何学出发点的少数公理已被人类长期实践反复检验正确无误，就能保证在这基础上通过逻辑推理得到的所有定理也都正确，可以放心大胆地应用于实践，而不必每个定理都去单独做实验检验若干遍，从而节省无数人力、物力、财力.

研究物理、化学、生物、药学等等，都需要大量经费购买实验设备和器材，合用的设备和器材常常很难买到，消耗药品要不断补充，仪器设备要经常维修，各种麻烦事情很多.研究数学相对说来要节省得多，其中一个关键，就是数学可以用理论证明代替反复实验，提供确凿无疑的结果.

推理论证的思想和范例，正是从欧几里得《几何原本》开始的.

2. 如果你是笛卡儿

(1)偶尔做个数学家

笛卡儿是第一个杰出的近代哲学家,是近代生物学的奠基人,是第一流的物理学家,但只偶然地是个数学家.

笛卡儿创立解析几何,在数学史上是一个划时代的发现.但是笛卡儿并没有专门为解析几何写书.他的解析几何工作,只是作为三个附录之一,附在他的一本哲学书后面而发表的.解析几何附录名为《几何》,另外两个附录分别是《折光》和《陨星》.这本哲学书的名字很长,通常简称为《方法论》,全名是《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》,1637 年出版.这一年被看成解析几何学诞生之年.

图 2　笛卡儿

笛卡儿 1596 年生于法国.父亲是法官,自己上大学读的是法律,毕业后当了律师.在大学时代,笛卡儿博览群书,其中包括哲学、物理学、天文学和数学方面的很多名著.1617 年投笔从戎,过了 9 年时断时续的军旅生活,其间到过很多地方,增加了丰富的知识,并且一直坚持研究.1625 年回到巴黎,

1628年移居荷兰.1649年应邀担任瑞典女王的私人教师,1650年病逝.

一通百通.对一门学科钻研透彻了,对其它学科的基本思想就比较容易了解.笛卡儿发现,数学研究的方法非常有效,能给其它学科的研究方法带来很多有益启示.所以,他在哲学书《方法论》中,把数学附录放在重要地位.这个浓缩成106页的数学附录是笛卡儿惟一公开发表的数学著作,却成为世界数学发展史中的一个重大里程碑,从此变量走进了数学.

笛卡儿还有另外一些数学思想,没有公开发表,是在和其他数学家的接触和通信中表达出来的.

(2)游客和导游

有几位久居闹市穿梭于高楼大厦车水马龙之间的朋友,假日同去一处风光秀丽的公园里小聚.波光粼粼,鸟语花香,奇石异树,曲径芳亭,赏心悦目,美不胜收.走到一处,忽见那边一群游客众星拱月,团团围着一位口若悬河的导游,听得津津有味.于是也凑一番热闹,挤过去听上几句.只听到几句也是好的.原来,在一般游客眼中,石头就是石头,假山就是假山.可是导游能告诉你,这石头的韵味是瘦、透、漏,这片假山分成了春、夏、秋、冬四景.仔细体会下来,还真的是那么一回事.于是才明白,真正是"外行看热闹,内行看门道".

学习数学,也有游客式的学法和导游式的学法.数学的游客注重结果,数学的导游着眼于方法.

方法和结果互相依存.从获得结果的过程中,可以概括总结出所用的数学思维方法;反过来,掌握了若干常用的数学思维方法,就不怕题目千变万化,能够随机应变,触景生情,拿出自己的办法

来,解决新问题,发现新结果.

笛卡儿就是一位学海导游.不但是数学导游,而且是科学导游,哲学导游.

笛卡儿通过研究数学方法,总结出一些普遍原则,可以用来在任何领域里获取正确的知识.他把这些原则写进了《思想的指导法则》书中.下面就是笛卡儿总结出来的几条原则:

不要承认任何事物是真的,除非它在思想上明白清楚到毫无疑问的程度;

要把困难分成一些小的难点;

要由简到繁,依次进行;

要列举并审查推理的步骤,要做得彻底,使毫无遗漏的可能.

如果你是笛卡儿,你有幸长生不老,精神抖擞地向今天有志于发现的人们推荐获取知识的原则,会不会仍然介绍以上四条?

这就需要以今天的眼光,重新考察笛卡儿的四原则.

第一条原则的要点是确凿无疑.只有无可挑剔不容置疑清楚到极点的事实,才能确信它是正确的.任何"大胆猜想",必须伴随着"小心求证".说到"显然"、"易知"、"不妨设"这类常用套话的时候,都要冷静地想一想,是否真的明显、真的容易、真的无妨?其实这些地方倒是最容易出差错的.

第二条原则讲的是分散难点.数学把复杂图形简单地分解成点、线、面、体的组合,把复杂课题分解成若干子课题,把复杂函数分解成一连串简单函数的复合函数,都是为了分散难点.实际问题多半是错综复杂的,通过分散难点,可以化难为易.

第三条原则的要点是循序渐进.由简到繁,由易到难,由浅到深,由近到远.遵循这样的自然顺序,去探索新知识、发现新结果,才能事半功倍.欲速则不达.好高骛远,往往一事无成.研究数学是

这样，做其它事情也是这样.

第四条原则是“严”字当头.严格，严密，严谨.因为有这三严把关，数学的产品才被公认为信得过，数学才被一切需要精密计算的场合拿来做得力工具.做其它事情，要想做好，也都需要这三严把关.

总之，确凿无疑、分散难点、循序渐进和“严”字当头，这些都是切实有效的思维原则，值得寻求数学发现的人参考，也值得所有寻求科学发现的人参考.过去这样，现在这样，将来还是这样.

很多人读过当代数学家波利亚写的书《数学发现》和《怎样解题》，从波利亚的思想里学习数学思维方法.数学家能发现普通人不能发现的重要结果，不仅因为他们工作特别勤奋，而且因为他们有好的数学思维方法.波利亚是这样，其他数学家也是这样.笛卡儿的四条原则，在今天看来，仍然像优秀导游的讲解一样，能使众多数学游客获得启示.

(3)让代数帮助欧几里得

如果你是笛卡儿，你善于将不同学科不同分支融会贯通，相互为用，你发现17世纪的代数已经是那样强大有力，想要利用代数来帮助几何.那么，你首先考虑的帮助对象是谁?

欧几里得!

因为当初欧几里得开创几何学时，代数还停留在经验阶段，自顾不暇，想帮几何的忙也帮不上.16世纪和17世纪代数大发展，有了一整套方便而有效的一般方法，鸟枪换炮，今非昔比.这时候特别想帮帮老朋友欧几里得，来一点代数法作图、代数法证明几何题，诸如此类，略表心意.

你很有眼力.笛卡儿确实首先想到了让代数帮助欧几里得.笛

卡儿的《几何》,是从用代数法解答古典的尺规作图问题开始的.这些作图题,有些来源于欧几里得的《几何原本》,有些来源于其他人的工作.

从前,由于欧几里得的尺规作图法工具简单得近于简陋,规则严格到过分死板,即使一些看上去似乎应该很容易的作图题,用几何方法解答起来,也时常需要走迂回路、过九曲桥,巧添辅助线,出奇制胜.

现在,改用代数方法,就方便得多了.只要把作图问题归结成求一个线段长,设它为 x,根据条件列出关于 x 的方程,解出 x,然后按照 x 的计算公式设计适当的作图步骤.这样一个解题模式,可以到处套用,容易掌握,又省脑筋,解题过程通常也比较简单.

或许由于笛卡儿的解析几何工作名声太响,也由于尺规作图理论在人们心目中的印象日渐淡薄,笛卡儿《几何》中关于代数法解答尺规作图问题的研究,很少成为现代人的话题.不过,对于有志发现的朋友,想要揣摩笛卡儿怎么会想到创立解析几何,了解这段前奏曲,可能有些启发.

(4)让代数帮助阿波罗尼

如果你是笛卡儿,你让代数帮过欧几里得之后,下一位帮助的对象将会是谁呢?

阿波罗尼!

古代希腊几何方面最有名的工作,除去欧几里得的 13 卷《几何原本》而外,就要算到阿波罗尼的 8 卷巨著《圆锥曲线》.帮过了欧几里得,接下来当然轮到帮助阿波罗尼了.

这次你又说对了.笛卡儿在《几何》里,用代数方法研究过平面几何作图问题以后,转而用代数方法研究圆锥曲线.

阿波罗尼大约生活在公元前 262 ~ 公元前 190 年,出生在中亚细亚,青年时期到希腊的亚历山大里亚城学习数学,后来留在那里研究数学和天文,他最主要的著作是《圆锥曲线》,也有一些其它作品.在平面几何里,他的名字由于阿波罗尼圆和阿波罗尼作图问题而被人们熟悉.但是他最重要的研究工作是圆锥曲线,并且因此而被誉为大几何学家.

在阿波罗尼以前,已经有人对圆锥曲线做过一些研究.但是阿波罗尼把这方面的研究变得系统化,而且更加深入,得到了丰富的结果.阿波罗尼用同一个圆锥,被不同位置的平面去截,分别得到椭圆、抛物线和双曲线,由此进而发现这些曲线的许多几何性质.我们现在从高中《平面解析几何》课本里学到的圆锥曲线几何性质,包括椭圆和双曲线的光学性质,大部分具有悠久的历史,因为阿波罗尼早已把它们写进了《圆锥曲线》书中.

不过,阿波罗尼研究和论述圆锥曲线,是用几何的语言,而不是坐标的语言.用坐标研究圆锥曲线,是从笛卡儿《几何》开始的.笛卡儿引进坐标系以后,发现椭圆、抛物线和双曲线的方程都是二次的.

我们现在有时说“圆锥曲线”,有时说“二次曲线”,两个名词随便用,因为它们代表着同样的一些曲线.但若从睹物思人的角度来看,这两个等价的数学名词使我们分别想起两位不同的数学家:从“圆锥曲线”联想到阿波罗尼,从“二次曲线”联想到笛卡儿.

(5)让代数与几何比翼齐飞

如果你是笛卡儿,你挥舞手中的代数法宝,帮过了欧几里得,帮过了阿波罗尼,下一步想做什么事呢?

三次曲线!

圆锥曲线是二次的,把二次曲线研究清楚了,接下来自然很想知道,什么曲线是三次的呢?

这一次你又和笛卡儿本人想到一处去了.

笛卡儿为了用代数方法研究古典的几何问题,引进了坐标系,把曲线和方程联系起来.对于平面几何中的直线和圆,方程是一次的或特殊形式下的二次的.对于圆锥曲线,方程是二次的.

笛卡儿在《几何》中的下面一步是考虑曲线按照方程次数的分类.然后再考虑一些进一步的几何作图问题,它们导致三次或更高次的方程.

这样一来,解析几何学的轮廓,就已清晰地展现在世人面前.

虽然笛卡儿研究解析几何是从研究欧几里得和阿波罗尼开始,但是解析几何并不只是简单地用代数语言复述前人的几何工作.笛卡儿把所有能用方程表示的曲线都收进了几何.点沿着曲线运动,对应着坐标在满足方程的条件下变化.笛卡儿在几何与代数之间架起一座宽阔的长桥,使原来并列的两大数学分支紧密连结,获得无限生机.

几何学接纳了所有能用方程表示的曲线,不但使几何学理论能有更多更广更重要的应用,而且为了研究这些新的曲线和各种有关曲线的一般问题,激起后人创造多种具有更大威力的数学方法,包括代数方法、几何方法、分析方法、拓扑方法,等等.峰回路转,柳暗花明,无限风光在前头!

ABC乐学天府

3.如果你是牛顿

(1)站在巨人肩上

喜欢临摹名人名言字帖练字的朋友，常有机会抄录到下面一段格言：

如果说我看得远，那是因为我站在巨人们的肩上.

字帖上在这句话的后面，印着一个如雷贯耳的名字：牛顿.

图3 牛 顿

牛顿的力学三大定律，是力学和机械运动理论的基石.

牛顿的万有引力定律，是正确计算天体轨道的依据.

牛顿和莱布尼兹发明的微积分，构成了高等数学课程的核心部分.

牛顿发现白色光是由七种颜色的光混合而成，奠定了科学的光学理论.

仅仅以上四项成就中的任何一项，都足以使一个人的名字在科学史上永放光芒.而牛顿却能将它们集于一身，并且还有许多其它重要的科学发现.人人敬佩牛顿站得很高很高，看得很远很远.而牛顿却谦虚地表示，他是站在巨人的肩上，因为巨人是那样高大，他才能从更高的视点，看到

更远的奥秘,作出更多的贡献.

牛顿1642年生于英国的一个小村庄,父亲在他出生之前就已去世.他读的小学和中学很普通,当时也看不出他有什么出众才华,只不过是对机械设计感兴趣.1661年考取剑桥大学,有机会阅读许多重要的数学、物理学和天文学书籍,并且自己动手做实验.

牛顿刚结束大学课程,就碰上伦敦地区鼠疫流行,剑桥大学被迫停办两年.牛顿回到家乡,在宁静的农村度过了1665年和1666年.这段时间里,他专心致志从事研究,发现了万有引力定律,获得了解决微积分问题的一般方法,通过实验发现了白色光的分解.只图暂避瘟神剑,岂料硕果积满仓,真是因祸得福了.

1667年,牛顿返校,取得硕士学位,并被选为剑桥大学三一学院研究员,1669年开始担任教授.1692年以后,由于神经衰弱,停止了数学的创造性工作.1695年离开大学,担任造币厂监察.1703年开始,一直担任英国皇家学会会长.1705年被授予爵士称号.1727年逝世,英国政府为他举行了隆重的国葬.

(2)快的怎会追不上慢的

速度慢的走在前面,快的走在后面,那快的终究要追上慢的.

可是却有人说,快的永远追不上慢的.古代希腊流传一个著名的奇谈怪论,叫做“阿其里”,就是这样说的.

阿其里是古代希腊传说中跑得很快的神.怪论断言,有一只爬得很慢的乌龟在阿其里前面一段距离,那么阿其里永远也追不上乌龟.因为如果起初阿其里在 A 处,乌龟在他前面的 B 处,那么阿其里为了追赶乌龟,必须先到达 B.可是当阿其里追到 B 处时,乌龟已经爬到 B 前面的一点 C.当阿其里追到 C 处时,乌龟又到达 C 前面的一点 D.如此无限继续,永无止境.所以阿其里永远也追

不上乌龟.

这个怪论是公元前5世纪住在意大利的兹诺提出的,由于古代希腊哲学家亚里斯多德在他的书《物理》中记载并且驳斥它而被流传下来.

如果你是牛顿,你发明了微积分,你是处理无限过程的专家,又是运动学的权威,你怎样解释阿其里追赶乌龟的问题呢?

关于运动的问题,总要涉及时间、速度、路程三要素.在阿其里怪论中,着重考虑一连串的位置变化,这是从路程着眼.阿其里跑得很快,乌龟爬得很慢,这里也有了速度的条件.但是完全没有谈到时间,三要素里缺少了一个.实际上是故意不谈时间,才显得振振有词的样子.

其实这是一个简单的行程问题.设阿其里的速度是 V,乌龟的速度是 v,开始追赶时两者的距离是 a,那么追上乌龟所需的时间是

$$t = \frac{a}{V - v}.$$

在追赶过程中,阿其里跑过的总路程是

$$b = Vt = \frac{aV}{V - v}.$$

兹诺把有限的长度 b 拆成无穷多个小长度的和,相应地也就把有限的时间 t 拆成无穷多个小时间段的和.但是他只说拆了长度,不说拆了时间,进而拿"拆成的时间段数无穷"冒充"时间 t 无穷",偷换概念,从而得出错误的结论.

深刻

有限长度 b 怎么能分割成无限多个小长度的和呢?那是因为分成的小线段长度越来越短,无限趋近于0.

中国古代也有无限分割的例子,说的是:

ABC乐学天府

一尺之棰,日取其半,万世不竭.

这段话是春秋战国时代的书《庄子·天下篇》里记载的.其中的"棰"字,读音和"锤"相同,意思是短木棍.一根一尺长的木棍,第一天拿走它的一半,以后每天拿走前一天剩下的一半,千秋万代,永远拿不完.初听起来似乎不可思议,仔细想想,说得一点儿也不错.从理论上说,日复一日,所剩长度越来越短,却永不为0.

当然,还要补充一句:日复一日,所剩长度无限趋近于0.

把这种"无限趋近于"的想法发展成严格的数学理论,就产生了极限论.极限论是微积分学的基础部分.在中学不开设微积分课程时,高中代数课里也讲一点点极限初步知识,完整的极限理论还是要在高等数学课程里讲授.

(3)小的哪能等于大的

0比1小.

但是有人说,0=1.妙得很呢,0元等于1元,口袋里没有带钱,会变出1元钱来.

无中生有?这是可以找到数学根据的,证明如下.

设

$$A=1+1+1+1+1+\cdots,$$

则

$$\begin{aligned}A&=1+1+1+1+1+\cdots\\&=1+(1+1+1+1+\cdots)\\&=1+A.\end{aligned}$$

等式两边同减去A,立刻得到

$$0=1.$$

如果你是牛顿,你能通过微积分深刻了解无穷过程,请你说说

看,这样从 0 到 1 的变形错在哪里?

错在把无限多项相加当成有限项相加一样对待.

算术和代数里的加法,是从两个数相加开始,可以推广到有限多个数相加.去括号、消去律等运算定律,都只适用于有限多项的运算.

可是这里的运算却是无穷多项的和,不能随便套用通常的运算律.如果认为无限和可以像普通有限和一样对待,成了习惯,就有可能得出"0=1"这类"无中生有"的错误.

任意一串无穷多个数,总可以形式上写出它们的和式,例如

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots,$$

这种形式的和式叫做一个无穷级数.

无穷多个运算是不可能实际进行的,只能通过有穷认识无穷.所以,取级数前 n 项的和,记为 X_n:

$$X_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

如果当项数 n 无限增大时,X_n 有一个有限的极限值 X,就说这个无穷级数收敛,并且它的和是 X,记为

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots.$$

如果当 n 无限增大时,X_n 没有极限,或者趋于无穷,就说这个无穷级数发散.发散的级数没有和,因而不能参加运算.

无穷多个 1,形式地相加,得到的无穷级数是发散的,不能把它当成一个数 A,不能让 A 参加运算,更不能对 A 误用通常的运算律.

即使是收敛的无穷级数,也不都能添括号、去括号,也不总是能随便调动级数中各项的位置.

关于无穷级数的理论,是微积分学中一个重要部分.把有限加

法向无限推广，例如从有限小数到无限小数，就在不知不觉中向微积分学走来.

(4)定的可以逼近变的

自从小学数学开始，就做过各种行程问题、流水问题、工程问题，题目里面的走路速度和干活速度总是一定的.如果有变化，也是顺水速与逆水速不同，上山速与下山速不同，走的速度与奔跑速度不同，等等.总而言之，那些问题，在一定时间间隔里，速度是常数，简称为匀速.

在匀速运动问题中，速度 v、运动时间 t 和走过的路程 s 三者之间有一个简单关系：

$$v=\frac{s}{t}.$$

对于变速运动，上面的关系不再成立.

如果你是牛顿，大数学家兼大物理学家，有人邀请你分析百米赛跑健将在跑道各点的速度变化，你会怎样做呢?

首先要取得数据.为此，可以先沿着跑道，每隔一定距离插一面标有距离数字的小旗，再让摄像师坐在摩托车后面，和奔跑的运动员并肩而行，不停地跟踪拍摄.

根据裁判员提供的成绩，知道了这位运动员跑完全程所用的时间.将这盘连续拍摄的录像带装进录像机，通过反复播放，可以从屏幕图像中的小旗知道运动员跑过的距离，从录像机计数器的数字变化知道所用的时间，因而可以求出运动员起跑后 t 秒所跑距离 s 与 t 之间的函数关系，记为

$$s=F(t).$$

为了确定在途中某点 A 处的速度 v，可以在 A 点附近另取一

点 B，把从 A 到 B 的路程记为 Δs，所用的时间记为 Δt. 这一小段时间里可以近似认为是匀速的. 所以，拿这一小段路程，除以相应的一小段时间，所得的商，可以作为速度 v 的一个近似值：

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

把时间间隔取得越小，近似值的误差越小. 令时间间隔无限趋近于 0，跑过的路程也相应地无限趋近于 0，两者之比的极限是一个确定的值，自然就是“在一点”的速度概念的确切含义：

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

简记为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

这样得到的 v 值也依赖于 t 值，所以 v 也是 t 的一个函数，把它记成

$$v = f(t).$$

函数 $f(t)$ 叫做 $F(t)$ 的导函数，简称导数，记为

$$f(t) = F'(t).$$

反过来，函数 $F(t)$ 叫做 $f(t)$ 的一个原函数.

如果考虑曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率，同样导出导数的一般概念.

导数和原函数是微积分学中关键性的基本概念. 从生活中常见现象出发，很自然地把我们带到微积分的研究.

以上从短跑和录像引出导数概念时的思考方法，叫做局部近似. 在一小块局部范围内，近似地用常速的代替变速的，直的代替弯的，简单的代替复杂的. 范围越小，误差越小. 让范围无限缩小而趋近于一点，配合极限论，得到精确的结果.

局部近似是微积分学的基本思想之一,它使我们能够有效地研究复杂曲线曲面和复杂函数,成为人类认识自然的强大数学工具.

(5)一般的归结成特殊的

在牛顿以前,已经有不少人对于一些特殊曲线考虑过切线问题.牛顿把微积分学变成理论,是由于他以一般形式提出问题和解决了问题.

在笛卡儿创立解析几何以后,下一个自然的步骤是研究任意曲线的切线斜率.无论从几何的考虑,还是从函数变化或运动学的考虑,都能导致导数的一般概念.但是要从普遍形式下来研究导数,首先必须找出一整套计算导数的一般法则,而不是像以前那样依赖于个别函数或个别曲线的特殊性质.

如果你是牛顿,你打算怎样拟定计划,来创造全套计算任意函数导数的一般法则呢?

可以拿出许多常见的复杂函数式来对照和分析,寻找共性.

在眼睛面前重复次数最多的,是加、减、乘、除运算符号,以及表示开方的根号.所以,在全套计算导数的法则里,首先应该考虑和、差、积、商的求导法则.

至于开方,它是乘方的逆运算.最好有专门讲乘方的导数和方根的导数求法的公式,这些是经常要查的.

其次,还有各种函数的符号也常在眼睛面前晃来晃去.经常遇到的函数符号,不外乎是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数和反双曲函数,也就是通常总称为基本初等函数的那些.

看来,应该分别求出各个基本初等函数的导数,把结果集中抄

在一张纸上,成为导数表,放在手边,随时可以查阅.

这么多基本初等函数,每一个的导数都直接按定义求极限,工作量太大.能不能想办法少做些计算?

通过观察,发现指数函数与对数函数互为反函数,三角函数与反三角函数互为反函数,双曲函数与反双曲函数互为反函数.

能不能找到一个关系式,把一个函数的导数和它的反函数的导数联系起来?如果能找到反函数求导公式,就可以事半功倍,省劲多了.

有了导数表,要计算函数 $y=\sin x$ 的导数,只要直接查公式就行.可是,函数 $y=\sin 2x$ 的导数怎样求呢?

可以试一试换元.令

$$y=\sin u, u=2x,$$

那么可以利用导数表得到 y 对 u 的导数和 u 对 x 的导数.还差一步:怎样利用这些辅助导数最后得到 y 对 x 的导数?

由此可见,还有一个重要环节,需要研究复合函数的求导法则.

现在的法则已经基本上配套了.不过,从应用的角度看,几何上,曲线的方程并不总是把 y 明显写成 x 的函数.在圆、椭圆和双曲线的方程里,y 和 x 都写在方程的同一边,要想明显解出 y,有时还比较麻烦.所以需要有一种求隐函数的导数的法则.

还有很多时候,用参数方程表示曲线特别方便.所以,当函数用参数式表示时,也要有相应的求导法则.

到此刻为止,已经拟出计划,配好一大套公式和法则.按照计划,逐个求出所需的公式和法则,就可以用来计算大多数常见函数的导数.

当然,免不了还有些怪函数,特别是函数定义中可能存在少数

非常别扭的点,一般方法不能适用,那就只好抱歉,请直接按定义计算,或者自己另想特殊办法解决了.

品尝过少许开创微积分的滋味,此地不必久留.让我们挥手告别牛顿,去拜访另一位数学大师.

4.如果你是高斯

(1)天才出于勤奋

很多人在小学时代就已知道了高斯的名字.

这是因为,从科普书刊里,常能看到大数学家高斯小时候巧妙速算的故事:在18世纪德国一所乡村小学的三年级教室里,老师让学生们计算

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

题目刚刚说完,学生高斯立刻把正确答案写到小石板上,交上来了.这个故事常被现代的老师和家长推荐给学会了四则运算的小朋友,鼓励他们从小爱科学.

高斯1777年生于德国一个普通农民的家庭.家境清贫,学习刻苦,成绩优异.由于才华出众,得到一位公爵的赏识和资助,1795年进入哥廷根大学学习.1798年毕业后,进入另一所大学继续学习,并在那里取得博士学位.

大学生活第一年,他就解决了按照尺规作图法作正十七边形的问题.这是两千年未能解决的尺规作图难题,被高斯利用复数,通过解出一个十七次的方程,曲径通幽,得到了出人意料的解答.

高斯在多年的研究中,涉及数学的很多方面,被誉为历史上最伟大的数学家之一.

图4　高　斯

初中代数课程里，当一元二次方程的判别式为0时，为什么说方程有两个相等实根，而不说只有一个根？这与高斯证明的代数基本定理有关．代数基本定理断言，在复数范围内，如果把 k 重根算成 k 个相等的根，那么每个 n 次方程恰好有 n 个根．这也意味着在复数范围内，n 次多项式总能分解成 n 个一次式的乘积．代数基本定理是这样的重要，甚至连在数学里到处露一手的集合观点见了它也要退避三舍，没有人谈论整式方程的解集．

在中学数学竞赛问题里，常遇到一些数论初步知识．数论能够从零散的结果发展成为系统的理论，是从1801年高斯的《算术研究》开始的．高斯不但整理了前人的成果，还添进自己的许多常用概念、记号和重要定理．

在根据实验数据概括经验公式时，常用的最小二乘法，也是高斯发明的．

高斯由于进行大地测量的实际需要，研究曲面的一般性质．他在1827年发表的论文《曲面性质的一般研究》，是微分几何学的独立宣言．从此，曲线和曲面的研究不再停留于微积分的简单几何应用，曲面几何成为平面几何通过弯曲化得到的自然推广．平面几何

的许多定理都能通过考虑曲率因素而推广到曲面.每一种曲面都有它自己的几何,存在无穷多种不同的曲面几何.

忽如一夜春风来,千树万树梨花开.多少年来只有一种几何,现在忽然间遍地春笋,冒出无穷多种几何,空前的兴旺,空前的繁荣.这样就把欧几里得时代的小几何、小空间概念拓广成大几何、大空间概念.这是一项意义深远的数学观念革命.发展到今天,数学成为一个整体,不同学科之间千门万户,路路相通.一篇代数论文或函数论的研究论文,可能从标题到内容都是讲的几何.反过来,一篇几何论文,常常是算式满纸,图形全无.

高斯又是一位物理学家.物理中的磁学部分,有一种常用度量单位,叫做高斯,就是为了纪念他对磁学的贡献.

高斯还是一位杰出的天文学家.他在星体轨道计算和天文学其它领域中的成就,使他名扬世界.俄国发来邀请,选他做俄国的通讯院士,聘他为俄国的大学教授,希望他到俄国的天文台工作.结果还是德国留住了高斯,从 1807 年开始,高斯担任哥廷根大学的数学和天文学教授,兼任哥廷根大学天文台的台长.俄国的彼得堡科学院推举高斯为名誉院士,其它国家的科学机构和科学院纷纷给他寄来学位证书.

高斯富有创造性,工作勤奋,著作极多,但是他要锤炼到无懈可击才公开发表,所以生前发表的只是他实际所得成果的一小部分.例如,高斯曾经独立地发现了双曲几何,其中的三角形内角之和是小于 180 度的.不过,高斯没有公开发表这方面的工作,因为恐怕会有很多习惯于欧几里得几何的人一时不能理解,因而群起攻击.

1855 年高斯逝世以后,人们怀着极大的兴趣研究这位伟大学者的遗稿.直到第二次世界大战前夕,才由母校哥廷根大学的学者

们把高斯的作品完全整理出来，出版了 11 卷《高斯全集》.

(2)皮尺的功劳

如果你是高斯，请你来主持大范围的地形测量，并且根据测量数据绘制地图，你会觉得要在理论上做些什么准备呢?

要研究曲面!

大范围的地面，通常会有高低起伏.即使是在一望无际的大草原上摆弄测量标杆，方圆百米以内，固然是风吹草低见牛羊，平平坦坦好舒畅，可是极目远眺，却只见天苍苍，野茫茫，远方的崇山峻岭全然不见踪影，都消隐在地平线的下方.倘若果真是地平如镜，为何不见群峰高耸入云?

事实上，发达的航海事业已经告诉人们，大地更近于球形，而不是平的.欧几里得的平面几何已经不能满足时代需要，应该拿曲面代替平面，研究相应的曲面几何.

平面几何中，直线是一种最基本最常见的图形.在一般的曲面上，当然不能指望存在本来意义下的直线.不过，能否找到一种类似于直线的基本而又常见的曲面图形呢?

测量用的皮尺可以帮助解决这个问题.

在平地上，要量地面两点间的直线距离，可以在两点之间拉紧一根皮尺，看看皮尺上的读数就行了.

类似地，在一个曲面 S 上，可以利用皮尺量出两点 A、B 之间沿曲面的最短距离.取得最短距离的这条曲线，叫做曲面 S 上连结点 A 和 B 的一条测地线，又叫最短线."测地线"这个数学名词说明，它所代表的数学概念是受测量地面距离的启发而产生的.

在平面几何中说，"两点之间，直线最短".而在曲面几何中，则是"两点之间，测地线最短".从这个意义上，测地线概念可看成直

线概念在曲面上的推广.

在花瓶或茶壶的凸起部分,两点之间拉紧一根橡皮筋,这橡皮筋就会稳定在曲面上的一个确定的位置,橡皮筋曲线就是曲面在这两点间的一条最短线.这个生活常识暗示,在一定条件下,曲面上两点之间有且只有一条测地线相连.在平面几何中,相应的定理是:平面内过不同两点有且只有一条直线.

由此可见,曲面几何中的测地线,地位相当于平面几何中的直线.

(3)车灯的贡献

如果你是高斯,你的曲面几何中已经有了测地线概念,那么你觉得下一步最需要的是什么概念?

角!

测地线是平面几何中直线概念的推广.直线概念推广过来了,射线、线段和线段长的概念也都跟着过来了.由于长度和角度经常在平面几何问题中结伴而行,可见下一步需要把角的概念推广到曲面几何.

平面几何中的角,是从一点引出的两条射线所成的图形.曲面上的角,是否也把它定义成从一点引出的两条测地线所成的图形呢?

这样定义,是依葫芦画瓢,机械模仿,把角的概念原封不动,照搬过来.但是曲面和平面情况不同.平面上看两个角是否相等,可以将其中一个角的一边沿平面移动到与另一个角的一边重合,并且顶点与顶点重合,然后看另外一边是否重合.可是在曲面上却不能进行这样的比较,因为一般说来,一条测地线不可能无变形地沿着曲面移动而保持时时处处与曲面接触.所以曲面上的角的概念

ABC乐学天府

不能从平面几何照搬.

其实,在微积分中已经建立了现成的工具.任意两条曲线的交角,可定义成它们在交点处的切线之间的夹角.从直观上看,当汽车夜晚沿着弯曲山道行驶时,在每一点处,汽车前灯射出的光柱,指明了弯路在这一点的方向.如果有两条弯路在一点交叉,每条路上各有一辆汽车,恰好同时开到交点,那么两车各自射出的前灯光柱在夜空画出一个明亮的角,这就是两条弯曲山路的交角.

曲线在一点处的切线方向,可以用微分法计算.因而,两条曲线交角的大小,是一个可用微分法算出的数.要看曲面上的两个角是否相等,只要看它们的大小是否相等.

(4)身在山中

如果你是高斯,在你的曲面几何中有了相当于直线、长度和角的概念,你是否还希望有进一步的概念?

当然! 至少还要有三角形概念.

其实这概念并不复杂,曲面上三个点和连结每两点的测地线弧组成的图形,叫做测地三角形.它是平面几何三角形概念的直接推广.

有了测地三角形概念,最想研究它的什么性质?

内角和!

在平面几何中,三角形的内角和总是等于180度.推广到曲面,测地三角形的内角之和,自然要随曲面的弯曲情况而变化.从直觉上容易理解,在凸曲面上,测地三角形的内角和可能大于180度;而在凹曲面上,测地三角形的内角和可能小于180度.

测地三角形的内角和与曲面的弯曲情况有什么精确的数量关系,研究起来,就不是一件容易的事情了.其结果,得到了微分几何

中著名的高斯-邦尼定理.

高斯关于曲面的一般理论,最了不起的地方,就是能从曲面内部认识曲面的一大套几何性质.人们常引用宋代文学家苏轼的诗句:“不识庐山真面目,只缘身在此山中.”但是高斯的曲面几何却告诉我们,身在此山中,能识崎岖路.曲面有一些性质确实需要从它与外部空间的联系中考察,这些叫做曲面的外在性质.但是也有另外一系列重要性质,不需要离开曲面,就能定义和计算,叫做曲面的内蕴性质.研究曲面内蕴性质的几何理论,叫做曲面的内蕴几何,也就是以上所说的曲面几何.

曲面几何的诞生,说明几何学的观念可以大大推广.几何学只要研究一些对象之间的几何规律,例如与中学平面几何、立体几何定理有某种类似之处的性质,不必限制在平面几何和立体几何原有的小圈子里面.

有人说,什么饼他都爱吃.于是朋友拿来体育室的铁饼,说,“你吃呀”,他只好双手捂嘴直笑.“饼”字的偏旁是“食”字旁,原意应该是扁扁圆圆的食品,是能吃的.后来人们把“饼”的观念扩充,凡是饼状的东西都可以叫做饼,不一定是能吃的.于是有了铁饼、泥饼、煤饼等等,说话方便,又很形象.

同样地,从高斯的曲面论开始,“空间”观念扩充了,只要能研究几何规律的,不一定要像原来意义那样看得见摸得着的.当人们像习惯铁饼一样习惯广义的空间观念,几何学就进入了全新的时代.曲面和平面一样,有长、宽两度,是二维的,用坐标系表示时,需要两个独立坐标.平面几何推广后,得到曲面几何.有无穷多种不同的曲面,因而有无穷多种不同的二维几何学.平面几何学只是二维几何中最简单最基本的一种,是元老,是先锋,是初阶,但不是全部.

ABC乐学天府

1854年,德国数学家黎曼把高斯的方法从两个坐标推广到 n 个坐标,更把二维弯曲空间的几何学推广到 n 维,叫做黎曼几何学.1915年爱因斯坦发表广义相对论,提出适应于高速时代的科学的空间、时间和引力理论,所用的数学工具就是黎曼几何.

几何学还发展起很多各种各样的分支,获得许多意想不到的应用,这里就不一一细说了.

"两岸猿声啼不住,轻舟已过万重山."带着参与意识,我们拜访了欧几里得、笛卡儿、牛顿和高斯,沿着大师们的足迹,初步体验了开创几何学、解析几何学、微积分学和微分几何学的滋味.通过重访历史伟大时刻,可以看出,许多重大数学发现的完成,虽有各种偶然因素,却也有相当大的必然性成分.尤其从基本思路看去,更是大势所趋,一旦条件成熟,自然水到渠成.

ABC乐学天府

二、各种数学发现

在本章中，我们将要介绍四种类型的数学发现，其中的每一种都能在中学数学里找到，并且大部分可作为中学数学研究文章的题材.

1.小发现小改进

大发现难逢，小发现常有.平时结合工作和学习，经常有些小发现、小改进，有了充分的知识积累、经验积累和能力积累，一旦面临重大发现机遇，才能眼明手快，当机立断，胸有成竹，马到成功.

(1)发现难题解法

一道数学题，自己动手把它解出来，这解法完全是自己独立发现的.这就是一种最基本、最实用、最常见的发现.

做数学研究总要解决问题.不管是别人提出的问题，还是自己

ABC乐学天府

提出的问题,都必须设法解答.所以,善于发现解法,是走向数学发现的第一步.

下面是一个发现难题解法的例子.

例1 求证:

$$\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}.$$

这道题的结论紧凑,数据简单,见了它就想试一试,试两下就会皱眉头.因为它很特别,没有现成的解法实例可以参考.

通过观察,发现等式右边的根号最难处理.由此想到,可试用平方法,证明等式左边的平方等于11.

证明 记

$$\text{左边}=A,\frac{\pi}{11}=\alpha,$$

那么 $A>0$,并且

$$\begin{aligned}A^2-11&=(\mathrm{tg}3\alpha+4\sin2\alpha)^2-11\\&=(\mathrm{tg}^2 3\alpha+8\mathrm{tg}3\alpha\sin2\alpha+16\sin^2 2\alpha)-11\\&=\sec^2 3\alpha+8\mathrm{tg}3\alpha\sin2\alpha+16\sin^2 2\alpha-12\\&=\frac{1}{\cos^2 3\alpha}(1+8\cos3\alpha\sin3\alpha\sin2\alpha\\&\quad+16\cos^2 3\alpha\sin^2 2\alpha-12\cos^2 3\alpha)\\&=\sec^2 3\alpha[1+4\sin6\alpha\sin2\alpha\\&\quad+4(1+\cos6\alpha)(1-\cos4\alpha)-6(1+\cos6\alpha)]\\&=\sec^2 3\alpha[1+2(\cos4\alpha-\cos8\alpha)+4(1+\cos6\alpha\\&\quad-\cos4\alpha-\cos6\alpha\cos4\alpha)-6(1+\cos6\alpha)]\\&=\sec^2 3\alpha[-1-2\cos4\alpha-2\cos6\alpha-2\cos8\alpha\\&\quad-2(\cos10\alpha+\cos2\alpha)]\\&=-\sec^2 3\alpha[1+2(\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha\end{aligned}$$

$$+\cos 8\alpha+\cos 10\alpha)\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\Big]$$

$$=-\sec^2 3\alpha\left\{1+\frac{1}{\sin\alpha}[(\sin 3\alpha-\sin\alpha)\right.$$

$$+(\sin 5\alpha-\sin 3\alpha)+(\sin 7\alpha-\sin 5\alpha)$$

$$\left.+(\sin 9\alpha-\sin 7\alpha)+(\sin 11\alpha-\sin 9\alpha)]\right\}$$

$$=-\sec^2 3\alpha\left[1+\frac{1}{\sin\alpha}(\sin 11\alpha-\sin\alpha)\right]$$

$$=-\sec^2 3\alpha\left[1+\frac{1}{\sin\alpha}(\sin\pi-\sin\alpha)\right]$$

$$=-\sec^2 3\alpha(1-1)=0.$$

$$\therefore\quad A^2=11,\therefore\quad A=\sqrt{11},$$

即

左边 = 右边.

例 1 原是一本老书《霍伯苏三角》中的一道习题,后来在一些杂志上有文章专门研究它的解法,思路巧妙曲折,证明过程很长.这里的解法,在平方的思路下,运用“线性化”的技巧,尽量往正弦和余弦的一次式转化,造成相消的机会,证明过程相对说来简洁得多.目前还不知道是否有更简单的证法.

(2)发现好的解法

一道数学题往往可以找到多种解法.如果善于发现其中好的解法,意义就更大.这里所谓“好”的解法,并不等于通常所说的“巧解”.

什么解法是“好”的呢?

先来看一道例题.

ABC乐学天府

例 2　对于任意实数 x,证明不等式

$$\frac{5}{3}\leq\frac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}\leq 3.$$

分析 1　上式的左边、中间和右边分别是 3 个实数,可以看成数轴上的 3 个点 A、P 和 B.问题归结为证明点 P 位于 A 和 B 之间(可与端点重合).把 P 看成线段 AB 的一个分点,只要证明它不是外分点.为此,可试证分比 $\lambda\geq 0$.

证法 1　设上式左边、中间和右边的数分别对应于数轴上的点 A、P 和 B,点 P 把有向线段 AB 分成的分比是 λ,那么

$$\begin{aligned}\lambda &=\frac{AP}{PB}\\ &=\frac{\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}-\dfrac{5}{3}}{3-\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}}\\ &=\frac{3(2x^2-3x+3)-5(x^2-x+1)}{3(x^2-x+1)-(2x^2-3x+3)}\\ &=\frac{x^2-4x+4}{x^2}\\ &=\frac{(x-2)^2}{x^2}\\ &\geq\ 0.\end{aligned}$$

这就证明了 P 不是线段 AB 的外分点,因而

$$\frac{5}{3}\leq\frac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}\leq 3.$$

分析 2　要比较两数的大小,可以比较它们的差.

证法 2　通过比较不等号两边的数的差,得到

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}-3=\frac{-x^2}{x^2-x+1}$$

$$=-\frac{x^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\leq\quad 0;$$

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}-\frac{5}{3}=\frac{x^2-4x+4}{3(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x-2)^2}{3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$$\geq\quad 0.$$

以上两式中,等式成立的条件分别是 $x=0$ 和 $x=2$.这样就证明了,对于任意实数 x,总有

$$\frac{5}{3}\leq\frac{2x^2-3x+3}{x^2-x+1}\leq 3,$$

当 $x=0$ 时上式右边的等式成立,$x=2$ 时左边的等式成立.

单独看证法 1,印象很好,觉得思路非常巧妙.

再看证法 2,又觉得更胜一筹.最突出的优点是结论完整,式中两个"$\leq$"里的等式能否成立,何时成立,全考虑到了.

相比之下,证法 1 的结论却不够完整,因为证明过程中用到了定比的定义式

$$\lambda=\frac{AP}{PB},$$

它的分母 PB 不能为 0,因而实际上从开始就把点 P 与 B 重合的情形推到门外,不予考虑.可是解题的人通常意识不到这一点,想不到要弥补疏漏.

其次,两种证法的篇幅差不多,证法 2 只用常规的配方法,思路简单,少费神,节省能量消耗.

如今是奔腾的时代,需要做的事情太多,能够花的时间太少;

消耗脑力的地方太多,闭目养神的机会太少;忙中有错的遗憾太多,万无一失的幸运太少.

所以,当今时代对解题好方法的要求,首先要节省时间,其次要少花脑筋,第三要不易出错.

从实惠着眼,解答例2,宁愿采用大众化的解法2,既简单,又保险,何乐不为?好钢用在刀口上,省下精力对付难题,那样更合算.

(3)发现漏误

数学讲究严密.但是,教学中如果过分拘泥严密,就会在细节渲染上用笔太多,不但乏味、累赘,而且喧宾夺主,冲淡主题.所以在数学书刊中经常采取变通办法,适当降低严格性的要求,例如几何题中借助直观,代数和三角题中不考虑定义域的变化,等等.这样一来,就有可能带来疏漏和错误.越是富有创造性的工作,产生疏漏或错误的可能性越大.漏误并不可怕,只要能发现它,改正它.弥补了缺陷之后,剩下的就都是优点了.

按照一种思路解题产生的漏误,沿原思路反复检查,不一定能够察觉.换一个角度思考,往往有助于发现毛病.

下面的例子具有一定的代表性.

例3 求证

$$\cos \operatorname{arcsec} \sin \operatorname{arctg} \cos \operatorname{arctg} \sin \arccos \operatorname{tg} \arcsin x$$
$$=\sqrt{\frac{3-4x^2}{1-x^2}}.$$

原解法 设 $\arcsin x=\alpha$,则

$$\sin\alpha=x,\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

设 $\arccos(\operatorname{tg}\arcsin x)=\beta$，则

$$\cos\beta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}.$$

设 $\operatorname{arctg}(\sin\arccos\operatorname{tg}\arcsin x)=\gamma$，则

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\sqrt{\frac{1-x^2}{2-3x^2}}.$$

设 $\operatorname{arctg}(\cos\operatorname{arctg}\sin\arccos\operatorname{tg}\arcsin x)=\delta$，则

$$\operatorname{tg}\delta=\sqrt{\frac{1-x^2}{2-3x^2}},$$

$$\sin\delta=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}=\sqrt{\frac{1-x^2}{3-4x^2}}.$$

设 $\operatorname{arcsec}(\sin\operatorname{arctg}\cos\operatorname{arctg}\sin\arccos\operatorname{tg}\arcsin x)=\phi$，则

$$\sec\phi=\sqrt{\frac{1-x^2}{3-4x^2}},\ \therefore\quad\cos\phi=\sqrt{\frac{3-4x^2}{1-x^2}}.$$

所以原等式成立.

新解法　设

$$\arcsin x=A,\operatorname{tg}A=b,$$
$$\arccos b=C,\sin C=d,$$
$$\operatorname{arctg}d=E,\cos E=f,$$
$$\operatorname{arctg}f=G,\sin G=h,$$
$$\operatorname{arcsec}h=J,\cos J=k.$$

所要证明的等式可以简写成

$$k=\sqrt{\frac{3-4x^2}{1-x^2}}.$$

由 $\operatorname{arctg} f=G$,得

$$-\frac{\pi}{2}<G<\frac{\pi}{2}.$$

再利用 $\sin G=h$,得到 $-1<h<1$,即

$$|h|<1.$$

另一方面,由 $\operatorname{arcsec} h=J$,得

$$h=\sec J=\frac{1}{\cos J},\therefore\quad |h|\geq 1.$$

不存在同时满足以上两式的实数 h,所以本题等式左边函数的定义域是空集,等式无意义.原题有误.

将原解法与新解法比较,可以看出,原解法不考虑三角式变形前后定义域的变化,每一步变形实际上都只限于在参加变形各函数的公共定义域里进行.由于只考虑变形,不问定义域如何,按照原来思路无论查多少遍,也查不出定义域是空集的毛病.新解法的基本出发点,是看到题目涉及的函数太多,它们的值域和定义域互相牵制,难以保证完全相容.所以首先考虑相容性,不料果然发现了疏漏.

由于大多数三角变形都会引起定义域的改变,如果每一步变形都细致说明定义域有无变化,势必使解题过程累赘臃肿,乱纷纷不知所云.所以,通常在三角变形过程中,概不考虑定义域的变化.这种习惯做法,在多数情况下利大于弊,不过要沿途留心沟沟坎坎,防止出差错.

其实,例3原题的构思很好,只不过在编题过程中,构作复合函数时,没有检查定义域.这种技术上的小问题,稍加修改就能解决.正由于题目的构思巧妙,才能长期广泛流传,而且今后这种题

型还有可能得到新的发展和变化.

(4)发现联系

数学研究的基本精神是寻找普遍规律.要能发现规律,首先要善于发现不同事物之间的联系.

1° 叶落归根

每年升学考试和每次数学竞赛以后,都有一些数学老师写文章讲联系,指出哪些试题或竞赛题来源于课本哪一册哪一页的哪一道例题或习题.这些研究,意义不只是发现一道或几道值得注意的题目,更重要的是有力地证明了,试题虽有千变万化,归根结底要以课本为依据.学得好,不怕考.只要平时基础打得牢,思路辨得清,技巧用得活,提高了数学素质,就不怕试题和竞赛题出花样,总能考出水平,取得好成绩.

猜考题总是被动挨打,提高素质才能培养主动精神.一个富有主动精神的人,才能适应创造性的工作,有所发现,有所发明,开拓前人没有走过的路.

2° 编题成串

发现某些常见问题之间的联系,并且把它们按适当顺序编织成串,也是一件有益的工作.

在多数情形下,所发现的是解题方法上的联系.于是在同一种方法的标题下面,收集到若干例题.然后按照运用解法时的技巧变化,细分成一些小组.再将组间和组内按适当方式排序,例如常见的在前,简单的在前,基本的在前,等等.这时还只是原料的简单堆积,需要进行加工.通过将各题进一步互相比较,可以发现,对于怎样的条件和结论,可以应用这种解题方法,在应用方式上需要有些怎样的变化.把这些发现记载下来,就对一种解题方法获得比较透

彻的了解.

其次,一题引用另一题的结论,是另一种比较常见的联系.解答乙题用到甲题的结论,解答丙题也用到甲题的结论,解答丁题又用到甲题的结论.这说明甲题是一道基本题.基本题虽然不像课本中的定理那样可以直接引用,但是可以作为一种定式,就像下棋的定式一样,记牢它的条件、结论和解法要点,一旦在解题过程中遇到某种熟悉的定式,便可轻车熟路,接应回家.

还有一种比较常见的,是命题内容之间的联系.例如,根据同样一组条件,可以推出多种不同结论.那么这组条件和其中每个结论组合成为一个正确命题,得到指定条件下的一组性质.有时需要将条件稍加变化,才能得到新的结论.还可以将结论稍加变化,寻找使新结论成立的条件.通常所说的"一题多变",以及现在越来越受到重视的探索题,多半与内容之间有联系的命题组有关.

编题成串,首先得益的是自己.

著名数学家华罗庚生前常说,读书"从薄到厚,又从厚到薄".从薄到厚是积累,从厚到薄是消化.消化了,理解了,才真正地掌握了.

参考资料里常见的中学数学题目,数以万计,令人有"题海"之叹.天苍苍,海茫茫.但是,只有散乱的题目才像茫茫大海,波涛汹涌,汪洋一片.

经过整理的数学题目,像树、像网、像图书馆书架上排列整齐的书,井井有条,纵横交叉互相联系.从一道题可以带出一串题、一片题,带出一种技巧、一种方法、一种思路,横看成岭侧成峰,因而如释重负,成竹在胸,减轻解题的压力,节省解题的时间,提高解题的效率,腾出时间和精力去做更多的事情.

能使自己受益甚多的好经验,写出文章来,对于面临类似情况

的众多朋友们,自然也会有参考价值.

3° 登高望远

有些问题,以中学数学面貌出现,其实涉及大学数学背景.特别是高等几何、微积分、初等数论、向量代数、复变函数论中的分式线性函数、高等代数中的行列式和矩阵等,与中学数学问题的联系尤其紧密.

例 4　已知 $M(x_0,y_0)$是圆 $x^2+y^2=r^2$ 内异于圆心的一点,则直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 与此圆的交点个数为________.

这道填空题的答案,学生们众说纷纭,有人答 1,有人答 2,有人答 0.正确答案究竟应该是什么呢?

老师的目光在题目上迅速扫过一遍,脱口而出,斩钉截铁,断言答案是 0.

确实应该看一眼便得 0

因为老师心里明白,这道题的面子是中学平面解析几何,里子是大学高等几何.

译成高等几何术语,例 4 问的是圆内部一点 M 关于圆的极线与圆有几个实交点?在高等几何中熟知,当 M 在圆内时交点数为 0,M 在圆外时交点数为 2,M 在圆周上时交点数为 1.如果把圆换成椭圆,结论不变.所以本题答案一望而知,并且转眼之间就能说出这道题的几种变化.

学生们很惊讶,很佩服,都说老师你真了不起,脑筋怎么这样特别特别的灵光!我们这么多人,想了老半天,讨论了老半天,还是不大清楚;你才瞄上一眼,怎么就看出正确答案了?怎么还能立刻把题目变出花样?老师你有什么秘诀,能教给我们吗?

秘诀确实有一点,无非是杀鸡用牛刀,拿大学知识来帮助解决中学难题,工具先进些.教嘛,很愿意,可是如果向中学生讲大学数学,基础不够,只会越说越遥远,越讲越糊涂.非不为也,是不能也.

ABC乐学天府

真实的诀窍只能咽在肚里,秘而不传,成为名副其实的秘诀.好在结论已经明确,赶快开动脑筋,设法利用中学知识讲解,帮助学生打开思路.

研究怎样用大学数学知识解答中学数学难题,教师是直接受益者,学生是间接受益者.随着中学数学研究的视野日渐开阔,这方面的工作会有蓬勃的发展.

2.重新发现定理

(1)重新发现有价值

“新发现!”这句话,读起来很带劲.

“重新发现!!!”这句话,虽然多加了两个惊叹号,读起来还是不大带劲儿.

对于从事现代数学研究的数学家们,“新发现”和“重新发现”有天壤之别.因为数学学术期刊通常只发表创造性的研究论文,一篇论文稿送交专家审查以后,只要审稿报告里说起文中结果已在何处见过,这篇稿件就失去了发表的机会.

但是对于从事中学数学研究的人们,情形却完全不同.

中学数学研究的文章,通常发表在中学数学报刊上.这些报刊的主要读者是中学数学教师和中学生.判断一篇稿件可否刊用,首先是看对当前中学数学教学参考价值的大小,并不要求文中所有的题目都是史无前例.一本每期64页的教学期刊,如果收到一篇需要占据10页版面的初等数学专题研究论文,只好忍痛割爱.或者,虽然篇幅不很长,但是研究的问题太偏、太专,远远偏离中学数学教学和应用的主航道,发表的可能性也非常小.

编辑们决不喜欢老面孔的稿件.不过,中学数学报刊的基本题材,却往往以三年为周期而循环重复.这是因为,初中阶段和高中阶段都是三年,中学生订阅一种数学报刊的时间一般以三年为最大值.而中学教材力求稳定,一套教材连续使用若干年,学生流动,教材不变,去年讲过的今年还要讲.如果一个题材只要有人写过就不再刊登类似文章,那么课本里所有重点、难点都早有文章研究过,都不能刊登同类稿件了.一种辅导教学和研究教学的杂志或报纸,不讲重点难点,一味求新,能对读者有多大帮助?还有谁来订阅呢?

再说,要在中学数学范围里发现一个重要定理,并且查明古今中外从来没有别人发现过它,也确实很难很难.

因为中学数学是数学大门口一块热忱欢迎天下游客观光的古老场地,日复一日,年复一年,花开花谢几千回,寻寻觅觅无数遍,其中能够引起人们兴趣的地方,几乎都已留下"某人到此一游"的痕迹.如果不许踏向新的景点,限定只能在这古老场地界内报告发现,那么恐怕绝大部分重要发现都不是有史以来头一遭.

自然,话也得说回来.前人的发现,后人如果不知道,也就无法享用.

重新发现,只要能给自己和别人带来方便,就是有价值的.带来的方便越多,价值越大.

(2)解题公式

一元二次方程的求根公式,用起来非常方便.

中学数学课本里还有一些其它类型的常见习题,如果把一种常见类型的方程找出求根公式,记在自己的笔记本上,以后解这类方程就会快得多.

例如,在初中代数课本的练习和习题里,可以见到下面几个方程:

ⅰ)$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5}{2}$;

ⅱ)$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$;

ⅲ)$x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$;

ⅳ)$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{5}{2}$.

其中的问题ⅲ)可变形成

ⅲ)′$(x-1)+\frac{1}{x-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}$.

问题ⅰ)、ⅱ)、ⅲ)′、ⅳ)的格式相同,方程ⅱ)是它们的最简单的代表.研究方程ⅱ),得到下面法则中的求根公式.

法则　方程

$$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$$

的全部根是

$$x_1=c,x_2=\frac{1}{c}.$$

证明　将原方程变形,得

$$x-c-\frac{x}{cx}+\frac{c}{cx}=0,$$

$$(x-c)\left(1-\frac{1}{cx}\right)=0,$$

$$\frac{1}{x}(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=c,x_2=\frac{1}{c}.$$

ABC乐学天府

这个法则的结论很容易记住,因为将原方程的两边互相比较,立刻可以看出 $x=c$ 和 $x=\frac{1}{c}$ 都是方程的根.以上证明过程,又确定了没有任何其它的根.

这种类型的习题,在以前版本的初中代数教材里就比较常见,每年教学这段内容时,都会引起教师和学生的注意.因而中学数学期刊几乎每年都收到好几篇研究这类方程解法的稿件,同样的求根公式就在不同杂志上一而再、再而三地反复出现.甚至在同一种期刊上,也会过几年重复刊登一次,当然作者已经更换,文章的内容也有所翻新.

以上就是一个典型的重新发现定理的例子.无论发现者是教师或学生,这样的重新发现,对自己和对别人都很有用.教师掌握了这个求根公式,备课、答疑和批改作业时,见到这类方程,随口就能说出答案,提高了工作效率.学生掌握了这个求根公式,做习题和参加考试时多了一件秘密武器:做填空题、选择题和判断题时可以直接应用公式结论写出答案;做解答题写解答过程时,不能引用课本以外的结论,但是可以把课外结论连同它的证明过程一起写进答卷.

特别有价值的重新发现,通常具备两个条件:

第一,结果经常用;第二,费时不很多.

有些时候,明知所需定理已经有了,但是记载那定理的书籍或杂志一时买不到、借不到、找不到,与其花费很多时间去跑书店、泡图书馆、翻家里的书堆,还不如坐在椅子里不动,提起笔来,在纸上重新推导,既省时间又省力气,何等爽快!

(3)关键题

目前活跃在常见参考资料里的中学数学题,数以万计.通过对

各题解法的仔细分析,可以发现,有时好多道不同的题目包含一个同样的环节,归结到同一个比较简单的关键题.如果把这道关键题列为定理,允许引用,很多有关习题、试题的解法就会简单得多.

几乎所有经常解题的人都能感到关键题的存在,都意识到关键题的重要.所以,经常有一些作者在文章里提出一个定理,然后介绍怎样应用这个定理解题.这样的文稿源源不断,投寄到各种中学数学期刊的编辑部,大部分在初审时就被否定,只有极小一部分幸运地与读者见面.

不是编辑不识宝,编辑们互相交流经验时,都说这类稿件有水平,作者付出了辛勤的劳动.

问题在于,中学数学研究必须注意自己的特点,不能照搬现代数学研究的一套.

在现代数学研究中,任何已经公开发表的结果都可以自由引用.如果论文里为了一个已在某处发表过的结果而进行计算和论证,审稿人就会认为作者没有读过有关文献,因而在审稿报告里指出这结果的出处,建议引用已知结论,使论文更简洁,更加突出创造性.

中学数学研究却不同.由于研究结果通常发表在教学期刊上,决定了中学数学研究必须首先考虑为中学数学教学服务.如果杂志上有一篇文章引用课外定理解答课内习题和试题,学生看了觉得很好,在自己学校的考试卷上也引用同样的课外定理答题,考后恐怕要连呼“上当”.因为按照惯例,考试答题只能引用课内知识.误用课外知识答题,老师认为不合要求,不能给分.

于是学生据理力争:这是从书上学来的好方法,不会错的,不能扣分!我能通过课外阅读增加知识,灵活运用,应该受到鼓励,加两分才好呢!

老师同样坚定,毫不退让:道理可以商讨,规矩不能通融.即使我现在勉强给你分数,以后升学考试,你继续用课外知识答卷,阅卷的人还是会打叉扣分.到那时,就后悔莫及了!

如果学生还要坚持,拿出杂志给老师看,说老师错了,老师就会说,这种杂志害人,不要订它!

这就是研究关键题的文章所面临的最大障碍.

其实,只要在写文章的时候,把提法稍加修改,就能让死稿变成活稿,头疼稿件变成抢手文章.

你可以根本就不把它看成定理,而是明确交代,这是一道关键题.不能当成定理在解答题中直接引用,但是当一道复杂问题归结到关键题时,可以将已经熟悉的关键题解法整块搬上去.对于只要写出结论的题目,如选择题、填空题、是非题等,不需说明理由,可以直接应用关键题的结论,节省时间.

作者也许觉得,为了发表,而将定理降格成为关键题,可能作出了太多的牺牲.

这倒不必惋惜.因为关键题十有八九是陈题.不是每道题都有很多人做过,但是题目多到成为一类,必然会有很多人接触过这一类中的某些问题,体会到同类问题的共同关键.无需查找,基本上可以相信,其中的关键题早有别人发现过.

定理和习题并无本质区别.在现代数学专著里,一道习题往往是某一篇重要论文中的著名定理.即使在中学数学课本里,也常以习题形式介绍一些定理.

定理不总是关键的,关键题一定是关键的.

重新发现一个定理,未必有多大价值;重新发现一道关键题,却能立刻得到普遍关注和应用.

(4)推广习题和试题

为了教学参考而研究某道习题或试题的推广,是一件非常受欢迎的工作.

例如,可以将原来题目里一部分数字条件换成字母条件,通过概括,得到一般结论;再回过来令字母取某些特殊值,在特殊情形下得到更好的结论.

或者将问题中的平行换成相交,圆换成椭圆、双曲线、抛物线,等等,通过类比,寻找相应的结论.

这样推广,不但有助于深刻理解和牢固掌握知识,而且有利于增强分析问题和解决问题的能力.推广得到的结果,又可用来作为新编的例题或试题.更何况眼下试题中越来越多的探索题,题目本身就带有一定的研究性.所以,无论从增强素质或提高考试成绩来看,都能明显感到这样推广的好处.

如果这道新编题从未有过,那么由于你的发现,使它从无到有.

如果这道新编题不过是大学数学课程或研究生课程里某个定理或习题的特例或简单推论,那么由于你的发现,进一步挖掘了用高等数学指导初等数学的潜力,增进了数学内部的纵横联系.

如果这道新编题其实已在某一本旧书或旧杂志里有过,不过已被人们遗忘,那么由于你的重新发现,使大家认识了这道题的现实意义.

如果这道新编题已在一本外文书或外文杂志里出现过,不过还没有译成中文,那么由于你的重新发现,使国内的读者也能利用这道好题.

总而言之,不必查问这样的新编题是否在历史上曾经有过,只

要对当前教学有参考价值,并且常见的中学数学资料中未曾见过,就已表明推广的价值,因为已经由此得到了富有新意的数学题,使教学增添了新鲜感.

(5)推广定理

将中学数学定理进行推广,通常引向后继数学课程中的相应定理.

例如,常有一些人试图把平面几何里的三角形边角关系推广到立体几何,研究三面角的面角和二面角之间的关系.推广的结果,多半得到球面三角学和球面几何学里熟知的结论.

这是因为,以三面角的顶点为球心,作半径为1的球面,那么球面被三面角的面截得三条首尾顺次相连的大圆弧,组成一个球面三角形.所得球面三角形的边和角,分别用原来三面角的面角和二面角的大小来度量.三面角的面角和二面角之间的关系,就是球面三角形的边角关系.由于天文观测、航海活动等的实际需要,人们对于球面三角学和球面几何学早有详细研究.在与大地测量、矿山、晶体研究等专业有关的工科院校里,都需要开设球面三角学课程.师范院校的初等数学研究课程,有时也讲一点球面几何学初步.走进藏书量比较丰富的图书馆,很容易找到专门介绍球面三角学的小册子.

又如,初中《几何》课本里,有几道习题介绍了一些边长为整数的直角三角形.于是经常有人试图推广,探讨表示整数边直角三角形的一般公式.

其实,在大学的《初等数论》课本里,已经详细证明了,所有边长为整数的直角三角形,其三边长度 a、b、c 可表示为

$$a=k(m^2-n^2),b=2kmn,c=k(m^2+n^2),$$

其中 k 是任意正整数，m 和 n 是正整数，$m>n$，m 和 n 互质，并且一奇一偶.

事实上，用初中知识就很容易验证，由以上公式表示的数 a、b、c 满足

$$a^2+b^2=c^2,$$

当 k、m 和 n 是正整数、$m>n$ 时，a、b 和 c 都是正整数，因而根据勾股定理的逆定理，它们是一个直角三角形的三边长.以上关于互质和奇偶的附加限制条件，只是为了剔除重复数组.

还有人试图进一步推广，确定边长和面积都是整数的任意三角形.这个问题也早已完全解决了.一般形式下的解答可在美国数学学会的学术杂志中找到，三边成连续整数的特殊情形可在许多中学数学书刊里找到答案和解法.

还可以举出很多其它类似的例子.

“欲穷千里目，更上一层楼.”上楼要走楼梯，想要登楼远眺，先把楼梯寻找.

尝试推广中学数学定理，虽然结果多半已有前人捷足先登，但是能够发现继续攀登的阶梯，同样不虚此行.可以登楼的通道，必定是重要通道.熟悉中学数学内容中的各个重要通道，有利于在教和学中突出重点，把握重点，吃透重点，以重点带动一般.

3.解决遗留问题

(1)回答征解题

无论国内或国外，都有一部分面向中学数学或兼顾中学数学的杂志，设有“问题与解答”栏，由专栏编辑负责，每期数题，过几期

问题 1　旋转对旋转，怎么会产生出正六边形来？

这是最初提出的一个实际问题，是真正需要解决的，但不是数学形式，条件也不足.

为了解决问题 1，先考虑一把旋转车刀在旋转工件上切削出来的曲线.

设工件的中心是 O，刀盘的中心是 M，刀尖是 P，两个旋转中心之间的距离是 a，刀尖到刀盘中心的距离是 r，由夹具的结构知道 $a > r > 0$. 通过分析，切削过程可归结为下面的数学问题：

问题 2　设在平面内，动点 M 绕定点 O 逆时针旋转，角速度是 ω，同时动点 P 绕 M 顺时针旋转，角速度是 2ω. 已知 $OM = a$，$MP = r$，$a > r > 0$. 求 P 的轨迹.

这是一个简单的平面解析几何轨迹问题. 利用参数式方程，知道动点 P 画出的曲线是一个椭圆，它的长半轴是 $a + r$，短半轴是 $a - r$.

不对呀，弯弯的椭圆，怎么能变成各边笔直的正六边形呢？

再回到实际情形，仔细对照，发现刀盘直径比工件直径大得多. 由此推出，长半轴 $a + r$ 比短半轴 $a - r$ 大得多. 这样的椭圆，形状很瘦很长. 因而，靠近中心的两小段面对面的椭圆弧，很扁很平，非常接近于两条平行的线段，可以近似地作为正六边形的一双对边.

刀盘圆周上等距离装着 3 把车刀，每把刀管一双对边，3 把刀切削出 3 双对边，组成了正六边形.

数学的作用，不只是解释世界，更主要的是帮助人类改造世界. 可以提出一个进一步的实际问题：

问题 3　能不能将夹具稍加改进，把 3 把刀精简成 1 把刀？能不能再改一改夹具，使它不但能加工正六边形轮廓的螺帽，还能加

工其它边数的正多边形工件?

在夹具中,刀盘转速与工件转速的比,是靠传动齿轮的齿数比保证的.只要适当调换传动齿轮,就能改变转速比,不一定是原来的 1:2,可以根据需要改成 $1:k$,其中 k 是任意两个正整数相除得到的商.因而问题3可以提炼成下面的数学形式:

问题4　设在平面内,动点 M 绕定点 O 逆时针旋转,角速度是 ω,同时动点 P 绕 M 顺时针旋转,角速度是 $k\omega$,其中 k 是任意正有理数.已知 $OM=a$, $MP=r$, $a>r>0$.求 P 的轨迹.

利用参数式方程,可知这时动点 P 的轨迹是旋轮曲线.图5从左到右顺次画出 $k=3$, $k=\frac{5}{3}$ 和 $k=6$ 时的曲线.当 r 和 a 的大小相近时,它们可分别应用于用1把车刀切削正三角形、正五边形和正六边形.

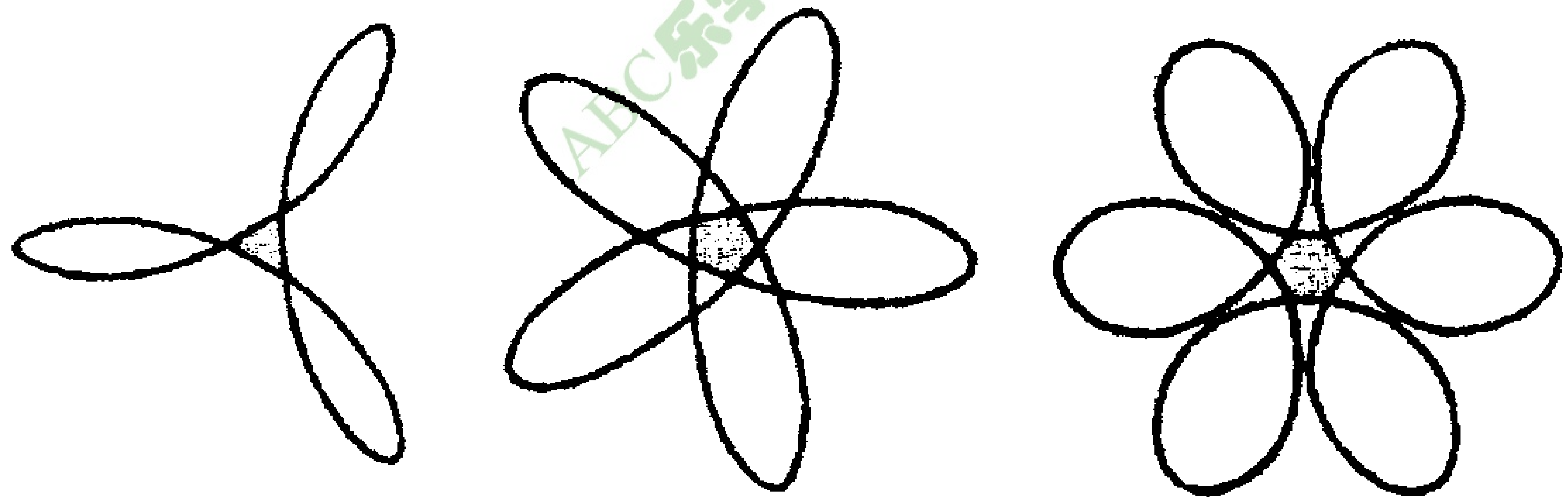

图 5

一般地,通过讨论旋轮曲线的叶数与 k 值的关系,可以得到用1把车刀车削任意边数正多边形工件的方法.

旋轮曲线是一个庞大的曲线族,其中有很多形如盛开的花朵,千姿百态,惹人喜爱.过去主要被美丽的曲线花瓣吸引,现在由于考虑应用问题,才发现曲线花瓣的中心还有一个近似于正多边形的核,可以用来制造螺丝帽等正多边形工件.

关于以上问题的详细计算和误差估计等,可以参考《数学的实践与认识》1973 年第 4 期(蒋声,《有关车多边形夹具的数学问题》).因为涉及较多的技术细节,这里就不细说了.

(4)跨分支难题

数学中有些老大难问题,从表面上看非常简单,只要具备中学数学知识就能看懂题意.通俗书刊中常能见到关于这类问题的介绍.但是想要解决它们,却不是中学数学知识能够胜任的,它们已经远远超出中学数学的边界.

例如,刚刚解决不久的费马大定理和尚未最后解决的哥德巴赫猜想,都是解析数论中非常困难的问题.它们的命题本身看上去简单明白,似乎与普通的中学数学问题并无区别.但实际上,为了攻克它们,需要飞渡重重难关,为此创造出一大套卓有成效的数学方法和工具,在一定程度上推动了数学的发展,所以费马大定理和哥德巴赫猜想才显得特别重要.

还有一些貌似中学数学的遗留问题,虽然名气不能达到家喻户晓的程度,却也坚如磐石,难动分毫.其中有很多是几何里提出的数论问题.下面是其中的一个例子.

问题 5　在欧氏平面 E^2 中是否存在一个点,使它到单位正方形每个顶点的距离都是有理数?

所谓单位正方形,就是边长为 1 的正方形.问题 5 可以解释为:设正方形 $ABCD$ 的边长为 1,那么在这正方形的平面里能否找到一点 P,使四条线段 PA、PB、PC、PD 的长都是有理数?

问题 5 是距离几何学中的一个未解决问题,提出人是 R.B.埃格尔顿、A.S.弗伦克尔和 R.K.盖伊,原题见论文集《度量空间和线性空间的几何学》第 239 页问题 12(R.K.Guy, Problems, *The Ge-*

ometry of Metric and Linear Spaces, Lecture Notes in Mathematics 490, Springer - Verlag, 1975, pp. 233 ~ 244).

一般说来,这类老大难问题虽有机会在中学数学读物里露面,但却属于某些现代数学分支,需要借助更加强大有力的数学工具,不能把它们当成中学数学问题来做.

4.新方向新课题

(1)为了现代化

1957年第一颗人造卫星飞上了天.这是科学技术的骄傲,也是数学的骄傲.

从这以后,就看见世界各国中学数学课程设置和数学教材不断发生重大变化,一变再变.已经变了许多次,眼下正在继续变,今后还要大改变.

中学数学教学内容已经多次精心修改,反复实践,千锤百炼,想来似乎应该炉火纯青,大功告成,可以高枕无忧了,怎么还要变呢?

这是为了实现数学教育现代化.

在如今这电气化、电脑化、自动化的年代,身边的一切都在高唱“飞飞飞”.科学飞跃发展,伴随着技术更新换代频繁.直接培养技术人才的大学和中等专业学校只能紧紧跟上,别无选择.大学生来自普通高中,中专生来自普通初中.普通中学怎能我行我素,按兵不动,稳坐钓鱼台?

浪来了! 波涛在后岸在前.

新的高度需要新的起点.大学和中等专业学校对生源提出了

ABC乐学天府

新的要求,这些要求集中反映在升学考试的试卷里.升学考试是根指挥棒,请跟我来.

回首望去,只见身后波涛汹涌,惊心动魄.考题走,我也走,茫茫苦海,何处是尽头?

极目远眺,辉煌彼岸隐约可见,光明在前.考题未变我先变,领先一步,轻松自如.

我先变,怎样变?瞄准远方大目标,用眼用手又用脑,不等别人发信号,自己驶上主航道.

在不断变化的时代里,中学数学必然随之变化.不断变化的中学数学,新方向、新课题层出不穷,需要不断进行新的研究.

(2)艺高人胆大

平时测验能过关,出去一考,分数就往下掉.什么原因?

这时总会有人说,不要紧张,关键是心理素质差,非智力因素作怪.胆子要大,切莫害怕.撇开得失,心境平和,考分自然能上去.

这些话,对于学生和家长产生安慰作用,言者恳切,听者点头.不过,大家心照不宣,还有些潜台词.

两强相遇,勇者胜.如果双方势均力敌,旗鼓相当,这时心理素质往往会起决定性的作用.

弱队遇到强队,赢的希望小,输的可能大.如果双方实力相差太大,弱队顽强拼搏,超水平发挥,无奈战局还是一边倒,只能评说"虽败犹荣",除非强队大失水准自己输掉.这时的心理素质可以起一定作用,但是不能扭转乾坤.

艺高人胆大.武松不怕老虎,是因为他知道自己武艺高强,能够打败老虎.心理素质与业务素质相辅相成.没有好的业务素质,再好的心理素质也是空的.

校内考得好,校外考得差,可能有心理素质的弱点,还可能有数学素质的缺陷.数学素质好,谁出试卷都会做;数学素质差,题目一变就抓头.

中学数学研究,就是要从根本上提高中学数学素质教育的水平.有了好的数学素质,又有好的心理素质,就不怕考题千变万化.

(3)自成一家

从宏观看,中学数学研究的根本任务,是考察在当前时代的社会和科技条件下,与中学数学课程有关的各种知识、问题、观念、方法和技巧.

在这个意义上,中学数学研究可以归属于数学课程的研究.

教育学里面的课程论,也研究课程.不过两者的着眼点不同:教育学主要关心各种课程的共性,中学数学研究主要关心中学数学课程的个性.

教育学希望把自己的课程理论应用到数学,中学数学研究希望能引用教育学的一般规律,两者紧密相连.

但是两者也有很大差别.

教育学的课程理论,不但要适用于数学课,也要适用于各种其它课.因而,写课程论的文章,数学成分越少,越能体现共性,理论水平越高.课程论务虚.

而对于中学数学研究,则是以目前中学应该开设的数学课程为中心,把它们的数学方面里里外外研究得清清楚楚.中学数学研究的文章,数学讲得越透,越能突出个性,越有参考价值.中学数学研究务实.

虚实结合,各显其能,共同推动中学数学教育现代化的进程.

由此可见,中学数学研究又不能完全归属于教育学里的课程

论.因为它虽然包含了一点点课程论在数学中的应用,但却大部分是从数学到数学.

当一门学科的某一局部应用部分蓬勃发展,规模壮大到足以破坏学科各组成部分之间比例均衡的时候,这一局部就会独立出去,成为一门新的学科.许多现有学科原先不过是另一老学科的应用部分,只算是应用,不认为是理论,发展到一定阶段以后,才被承认为理论,自成一家.

中学数学研究已经在中学数学课程现代化的方面揭示了相当多的规律,初步搭起部分理论框架,中国需要它,世界需要它.如果很难把它完全纳入某一已知学科,也许就该自立门户了.

(4)任重道远

中学数学研究可做的事情很多,其中特别重要而又有一定工作基础的,有以下几件:

1° 教材现代化

许多经济发达国家都很重视中学数学教材的现代化.八仙过海,各显神通."现代化"这三个字,说说容易,做起来很难很难.因为中学生入学时只有小学的知识基础,中学阶段只有六年时间,而中学生原来的学习负担就已经不轻.怎样才能把中学数学教学内容更新换代,而又不加重中学生的负担?

要能胜利完成这个困难任务,不能光从教法着眼小打小敲一点一滴硬往里塞,而必须从数学上打开思路,寻找捷径.这可能是中学数学研究面临的最富有现实意义和历史意义的重大课题.

2° 高观点指导中学数学

发掘大学数学思维方法解决中学数学问题的潜力,既有利于将高等数学思想向中学渗透,又能使中学解题增添有力武器,节省

时间,减轻负担.

3° 寻找生长点

寻找大学数学知识在中学数学里的萌芽形态,其中每个幼芽都是一个生长点.这些生长点充满活力,富有启发性.教好学好生长点,对提高数学素质有明显帮助,而且为以后进入大学学习打下伏笔.升学考试中常有一些有高等数学背景的试题,也往往与这类生长点有关.

4° 知识网

把中学数学范围里一组互相联系的知识和问题编成一个小小的知识网络,这样可以得到很多的知识小网络.寻找一组知识网,使它们能基本覆盖初中或高中数学学习的全部内容,各网之间的重叠又不很多.这样,在教学中,就可以把原来按知识点考虑改为按知识网考虑,加强联系,减少头绪,便于训练和掌握.

还可以举出很多其它有价值的研究课题,这里就不细说了.

总之,中学数学研究非常必要,中学数学研究硕果累累,中学数学研究大有可为.

ABC乐学天府

三、英雄有用武之地

有些人觉得研究中学数学是别人的事,却没有意识到自己也正在这条征途上前进.有些人为了回答子女或朋友的问题,而被卷入了业余研究中学数学的队伍.有些人一心一意要在中学数学范围里有所创新,却不知道从何下手.还有些人由于各种原因,踏上了中学数学研究的道路.

本章将分别考虑几种不同类型的研究者:中学生;中学数学教师;师范院校数学系的学生和数学教育方向的研究生;还有各种各样的业余爱好者(包括中学生的家长).我们试图作一番探讨,看看每种类型的研究者能为中学数学研究做些什么工作,得到怎样的收获.

1.中学生

这一节主要是为中学生写的,但是中学教师和学生家长也会

ABC乐学天府

对它产生浓厚兴趣,因为中学生的研究离不开老师和家长的引导和指导.

(1)开动脑筋

中学生学习数学,主要通过听讲、解题和阅读这三种方式.学习过程中,或多或少总要动些脑筋.动脑筋就是最初步的研究.

脑筋动起来了,就会研究怎样使自己学得快、学得好、学得轻松,改进学习方法,改善学习效果,成绩稳步上升,素质逐渐提高.

研究学习数学的方法,必然大量涉及数学本身的内容,因而会有一些数学上的小发现.

如果自己的数学小发现已经在书里写上了,说明这个结果有价值.自己能独立发现有价值的小结果,说明自己的能力提高了.

如果自己的小发现没有看见什么书里有过,又觉得比较有意思,自然会成为好朋友之间的话题,也可以作为墙报稿的题材,还可进而向中学生的数学期刊投稿.

中学生的主要任务是学习.所以,中学生开展研究,主要围绕学好功课,研究的效果主要看学习效果.小论文只是副产品,有它很好,没有它也无妨;素质提高,受益无穷,将来工作时写大论文的机会多得很.

(2)寻找规律

1° 内行看门道

脑筋动起来了,就会注意到掌握规律.掌握一条规律,可以减少很多记忆的麻烦.

数学的基本目标就是研究有关形与数的各种普遍规律.掌握的规律越多,本领越大.

ABC乐学天府

常言道，外行看热闹，内行看门道．门道也就是规律．学习数学看出了门道，成了内行，就觉得有滋有味，越学越有劲．

规律在手，考试不愁．不怕你考题变来变去，总是要在大纲范围之内．我已经掌握了应学的知识和必要的规律，并且通过练习得到巩固．题目变样，规律照用．既然什么题目都是一样做，哪里还需要花费许多冤枉时间去猜考题、背解法呢！

2° 学生的定理

举个例子看看．中国的例子已经听得很多，来一个外国的例子．

在美国《数学教师》(Mathematics Teacher)杂志 1987 年第 5 期中，刊登了一篇短文，题目叫做《韦利克定理》．定理名称中的这位韦利克，不是什么数学家，而是一位普通的学生．文章的作者是他的老师，名叫赫维茨．

老师写文章，谈学生的定理，这是怎么一回事呢？

原来，在几何课上，老师提出了一个问题：

例 1 如图 6，求正六边形的两条对角线相交所成的$\angle 1$．

答案是 120°．

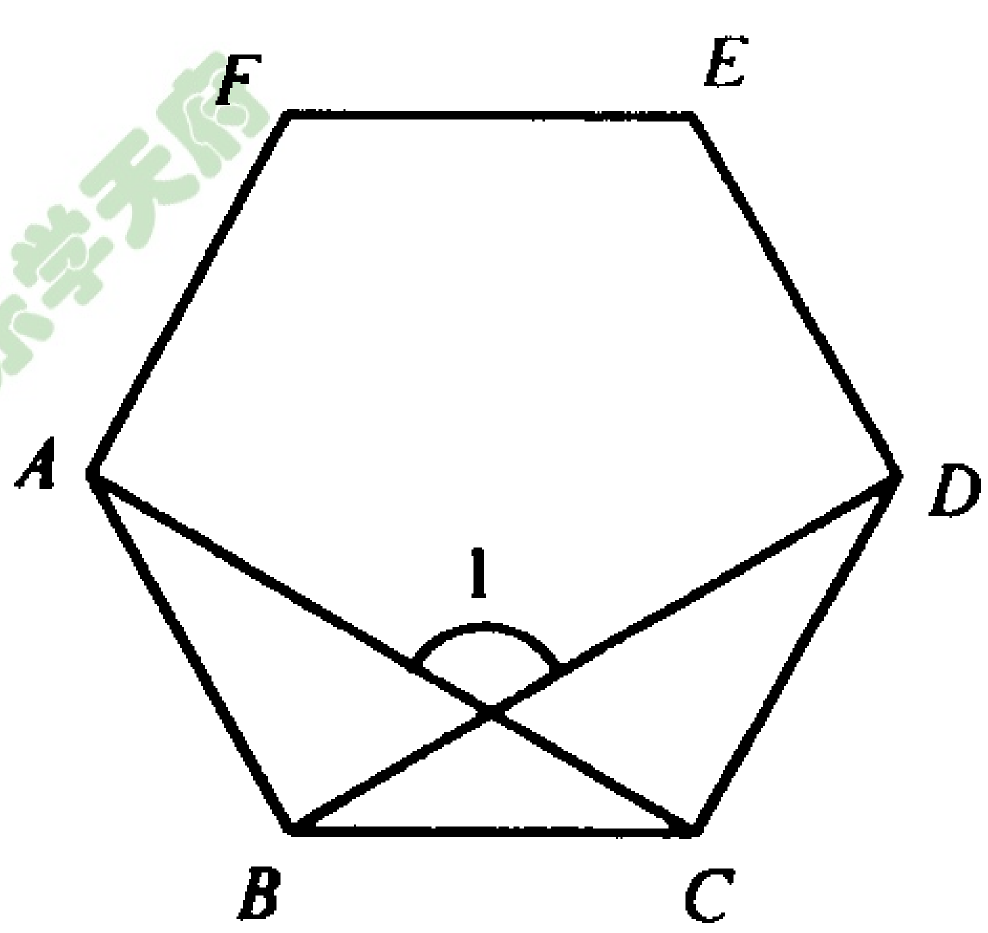

图 6

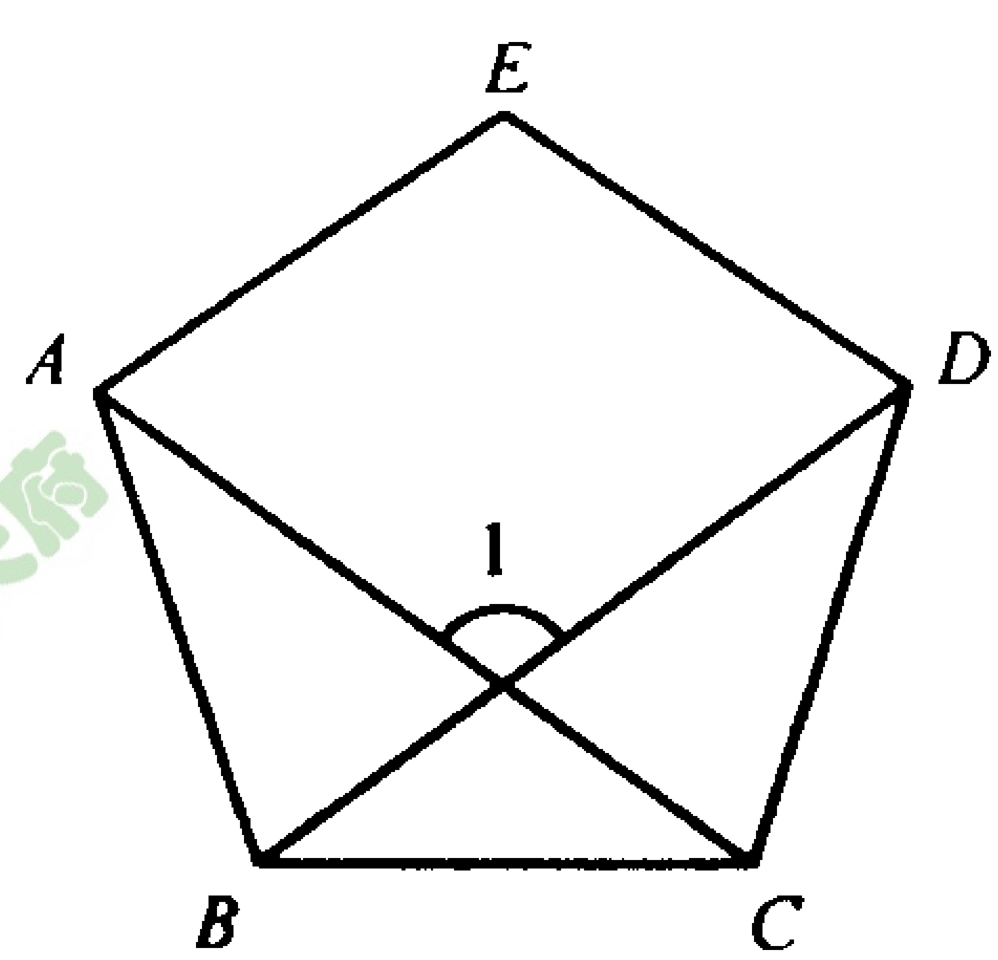

图 7

班级里有一位学生,名叫韦利克,提出一个猜想:

对于任何正多边形,$\angle 1$ 的大小总是等于正多边形的一个内角.

例如,对于正五边形,如图 7,$\angle 1$ 的大小是 $108°$,恰好等于正五边形的一个内角.

赫维茨老师在这篇文章里介绍了学生的发现,并且通过角度计算,证明了这个猜想.

学生韦利克发现了一个正确结果.一个正确的数学命题就可以叫做一个定理.赫维茨老师非常高兴,把韦利克发现的定理叫做韦利克定理,老师完成证明、写文章、投稿发表.

3° 我也猜得出

其实,只要学习时开动脑筋,每个中学生都能独立发现韦利克定理.

让我们来试试看.

解答赫维茨老师的正六边形计算题,得到$\angle 1 = 120°$.

这个度数很熟悉.在哪里见过? 正六边形的一个内角的大小,也是 $120°$.

巧得很,这两个角刚好相等.是偶然巧合,还是有必然规律呢?

换一种正多边形试试.

正方形特别简单.正方形的每个内角等于 $90°$.正方形的对角线互相垂直,所以夹角为 $90°$,恰好也等于一个内角的大小.

再换一种,看看正五边形.

对于正五边形,$\angle 1 = 108°$,还是等于它的一个内角.

边数为 4、5、6 的三种情形,都满足同一个规律.看来这个规律对所有正多边形都适用.

啊,不对,不是所有的正多边形.正三角形没有对角线,应该除

外.

这样一来,就得到下面的猜想:

猜想　如图 6,设 AC 和 BD 是正 n 边形的两条相邻对角线,$n>3$.那么$\angle 1$ 等于正 n 边形的一个内角.

你看,要说创造发明,其实人人都行.

看见一张熟悉面孔,赶快想想哪里见过.然后分析分析,这次是偶然重逢,还是必然遇上?如果无法确定,再看两个类似情形.三处一看,规律相同,就能大胆猜想,规律或许可以推广.

这种发现规律的方法,叫做归纳法.

4° 棋高一着

有人说,我的本领还要大.我不看三家,只看这一处,就能发现定理.不只是猜想,而且直接把它证明出来了.

有什么妙计?

请看我怎样解答赫维茨老师的计算题.算呀算的,就把韦利克定理算出来了.

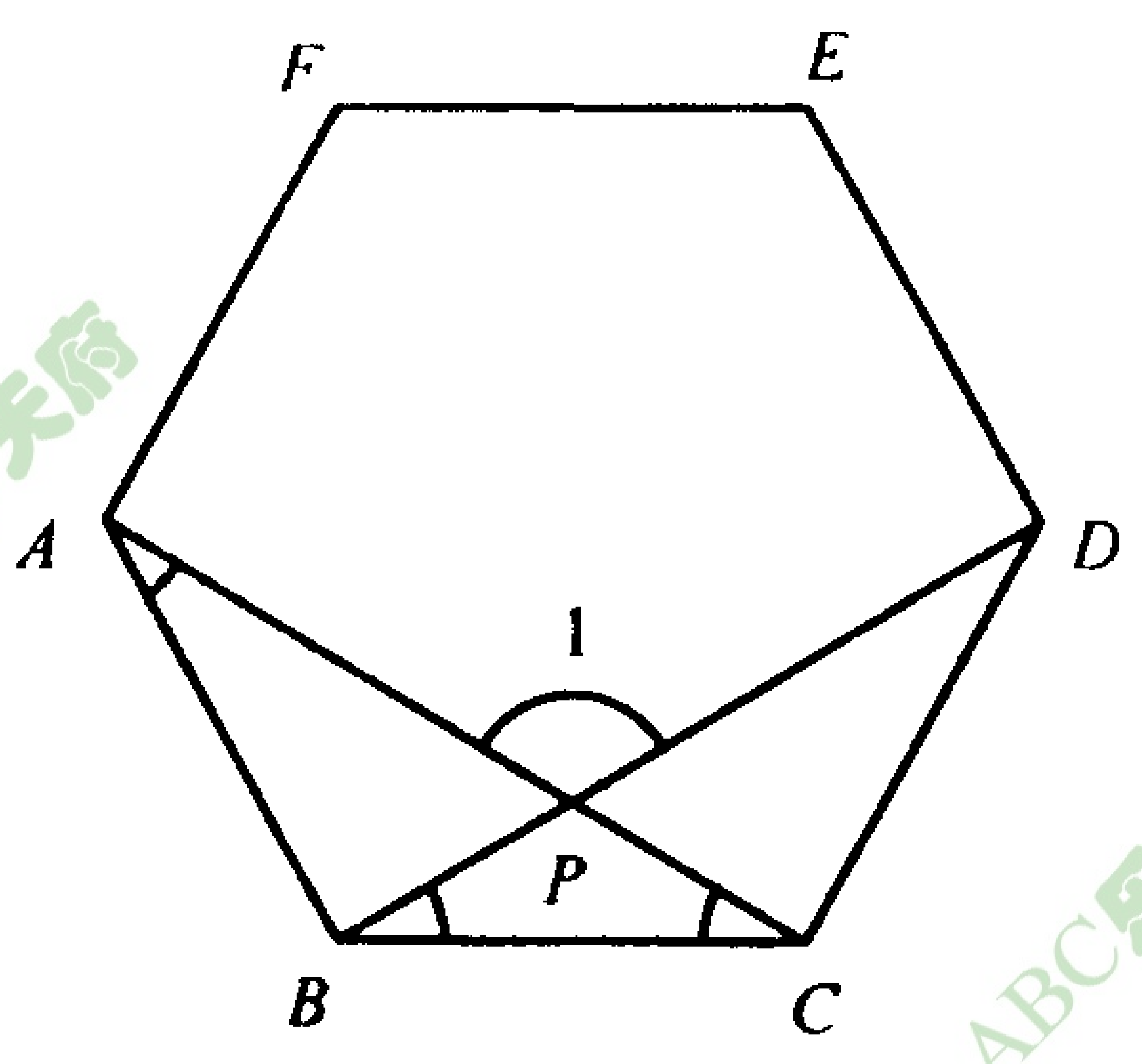

图 8

如图 8,设对角线 AC 和 BD 的交点为 P.在三角形 ABC 和 BPC 中,

$$\angle ACB=\angle PCB,$$

$$\angle BAC=\angle PBC,$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle BPC.$$

$$\therefore\quad \angle BPC=\angle ABC,$$

利用对顶角相等,得到

$$\angle 1=\angle ABC.$$

最后利用正六边形的内角大小为 120°,得到

$$\angle 1 = 120^\circ.$$

以上解答过程中，导出的等式$\angle 1 = \angle ABC$，只用到 A、B、C、D 顺次是一个正多边形的四个相邻顶点，而与正多边形的边数无关(只要边数至少是 4)．所以得到的这个结论对边数大于 3 的任何正多边形都成立．

这样，就在解答计算题的过程中，顺带发现和证明了韦利克定理．

这主意不错．妙在哪里？

妙在先一般后特殊．有钱慢慢花，有条件慢慢往外拿．

先不管它有几条边，只利用它是正多边形，看看能走多远．走到走不动了，再把边数的条件拿出来，最后解决问题．

在边数条件还没有往上用的时候，讨论的是一般的正多边形，得到的是关于正多边形的普遍结论，定理就这么出来了．

这种发现规律的方法，叫做演绎法．

5° 强中更有强中手

还有人说，你那个办法好是好，可惜要看图．

我不看图，闭上眼睛，就能发现和证明这个定理．

设正 n 边形的边数 $n > 3$．把正 n 边形绕它的中心旋转，使它的每一边落到下面一边的位置．那么边 AB 变到 BC，对角线 AC 变到 BD．因为对角线转过的角度与边转过的角度相同，所以对角线 AC 和 BD 的夹角，等于边 AB 与 BC 的夹角．所以$\angle 1$ 一定等于这个正多边形的一个内角．

闭上眼睛试试，真的能够想象出来，让正多边形绕中心旋转，边也转，对角线也转．除去中心而外，所有各点都转，在任何时候各点转过的角度都相同．只看从一边转到下一边，最短的对角线转到下一条对角线，就得到韦利克定理．如果考虑其它对角线，或者与

正多边形有关的更复杂的图形,还能得到另外的各种定理.

商店卖东西,有零售,也有批发.

发现新结果的方法,既有搞零售的,一个结论一个结论地发现,也有搞批发的,一组结论一组结论地发现.

通过旋转或者其它变换来发现新结果的方法,叫做变换法.变换法发现新定理的方式,经常是批发式的.

6° 创造从小开始

一个中学生,能通过独立思考发现定理,无论这定理是否重要,也不论前人是否已经发现过,对于学生本人来说,这已经是一大成绩.

不管是小发现小发明,还是大发现大发明,所用的基本思想方法,大致差不多.所不同的,是一个的问题小、涉及面小、投入小、场面小,另一个的问题大、涉及面大、投入大、场面大.

在小场面里尝过了发现的滋味,以后每逢发现机遇都抓紧锻炼,规模越来越大,将来遇到大场面时,就有了许多经验,可以算是老手了.

打好基础,从小培养创造精神,从小锻炼创造能力,这样在将来走上工作岗位以后,就能大显身手,大有作为.

(3)以巧求快

1° 上了快车道

上了快车道,想慢也不行.

中学生除去要在指定时间内学好各门功课以外,还要保证足够的休息和睡眠,要有适当的体育锻炼,要参加班级活动,要玩,要看些课外书籍,要有点时间留给自己的兴趣爱好,还可能要做些学校、家庭、社会需要的其它事情.哪一件都不能不做,哪一件都限时

ABC乐学天府

限刻，不能拖延.

但是一天只有 24 小时，一年只有 365 天.闰年的时间稍许长些，也只有 366 天，想多一天也多不出来.

要能在有限的时间里，同时做好很多非做不可的事情，办事就一定要快.

2° 练快并不难

要想办事快，关键是脑筋要快.脑筋快了，课上讲的一听就懂，课后作业一做就对.别人还在捧作业本、翻阅课本，你已经完成当天功课，收起书包，无忧无虑，去做其它事情，去玩，去休息.

一通百通.数学的脑筋快了，学其它课程、做其它事情，脑筋也会相应地快起来.

而要使数学的脑筋变快，一个最简单最有效的办法，就是在解题时，注意寻找快的解法，研究怎样才能解得更快.

很多同学已经习惯了一题多解.通过一题多解，可以活跃思路.

一道题的多种解法里，有巧有拙，有快有慢.这里所说的快慢，不是看最后写到纸上解答过程的长短，而是看从开始探索到解答完毕实际所用的总时间.花费总时间短的解法，是真正快的解法，很实惠.

一种解法是不是最快，这很难说，但是相对说来比较快的解法总是看得出来的.经常注意比较快的解法，总结快的经验，尽量用比较快的方法解题，这样就能使脑筋越练越快.

3° 快能带动巧

为什么不强调解法巧，而要提倡解得快呢？

因为快能带动巧.为了解得快，就要动脑筋找近路，解法自然比较巧妙.

ABC乐学天府

反过来,巧的解法不一定快.有时候,那巧妙方法写出来很短,但是寻找巧妙方法所花的时间可能很长,实际用去的总时间就长了.

所以,我们可以在一题多解的基础上前进一步,不是寻找尽可能多的解法,而是找一种比较快的解法;在巧解的基础上也前进一步,不把巧看成目的,而把巧看成手段,快作为目的,以巧求快.

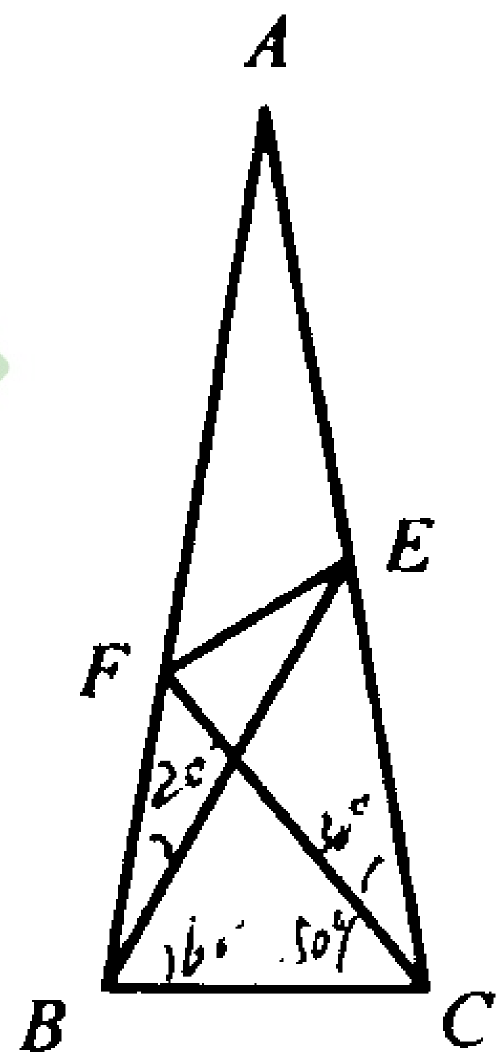

图 9

4° 一道老难题

人活到 70 多岁,被称为老先生、老太太.一道题目活到 70 多岁,可以当之无愧,称为老题目了.

下面是 1922 年一家英国杂志的问题与解答栏里提出的问题.当我在这里敲打电脑键盘写书时,这道题目已经有 75 岁高龄.

例 2 ABC 为等腰三角形,$\angle B=\angle C=80°$. CF 与 AC 成 30°角,交 AB 于 F, BE 与 AB 成 20°角,交 AC 于 E.证明:$\angle BEF=30°$.

最初提出问题的这家期刊叫做《数学杂志》(The Mathematical Gazette),供题人是几何学家兰利.

这道几何题貌似简单,实际很难,富有挑战性,在各种文字的书刊中广泛流传.由于题目精致小巧,不能称它为老大难问题,只好叫做老难题.

有人不以为然,觉得题目这么短,图形这么简单,有什么难?

可是,你把那图形里面各个角的度数算算看.图中各个角的大小,有 20°、30°、40°、50°、60°、70°和 80°,规格繁多,难得有机会聚集在一起,却只用 6 条线段就把它们全部安置得服服帖帖.那几条轻描淡写的斜线,如果不是因为出手怪异,构思精巧,哪里能有这么大的本领?

兰利的这道题,已经发表的解法,至少有十多种.下面我们介绍和分析其中的三种巧妙解法.第一种解法巧而怪,另外两种巧而快.

5° 以怪对怪

下面的证法 1 是在科普刊物里多次介绍的新奇解法.

证法 1　如图 10,以 A 为圆心,AB 为半径作圆.由

$$\angle B=\angle C=80°,$$

得到

$$\angle A=20°=360°\div 18,$$

因而 BC 是圆 A 的内接正十八边形的一边.设此正十八边形的顶点顺次为 $C,B,A_3,A_4,\cdots,A_{18}$.

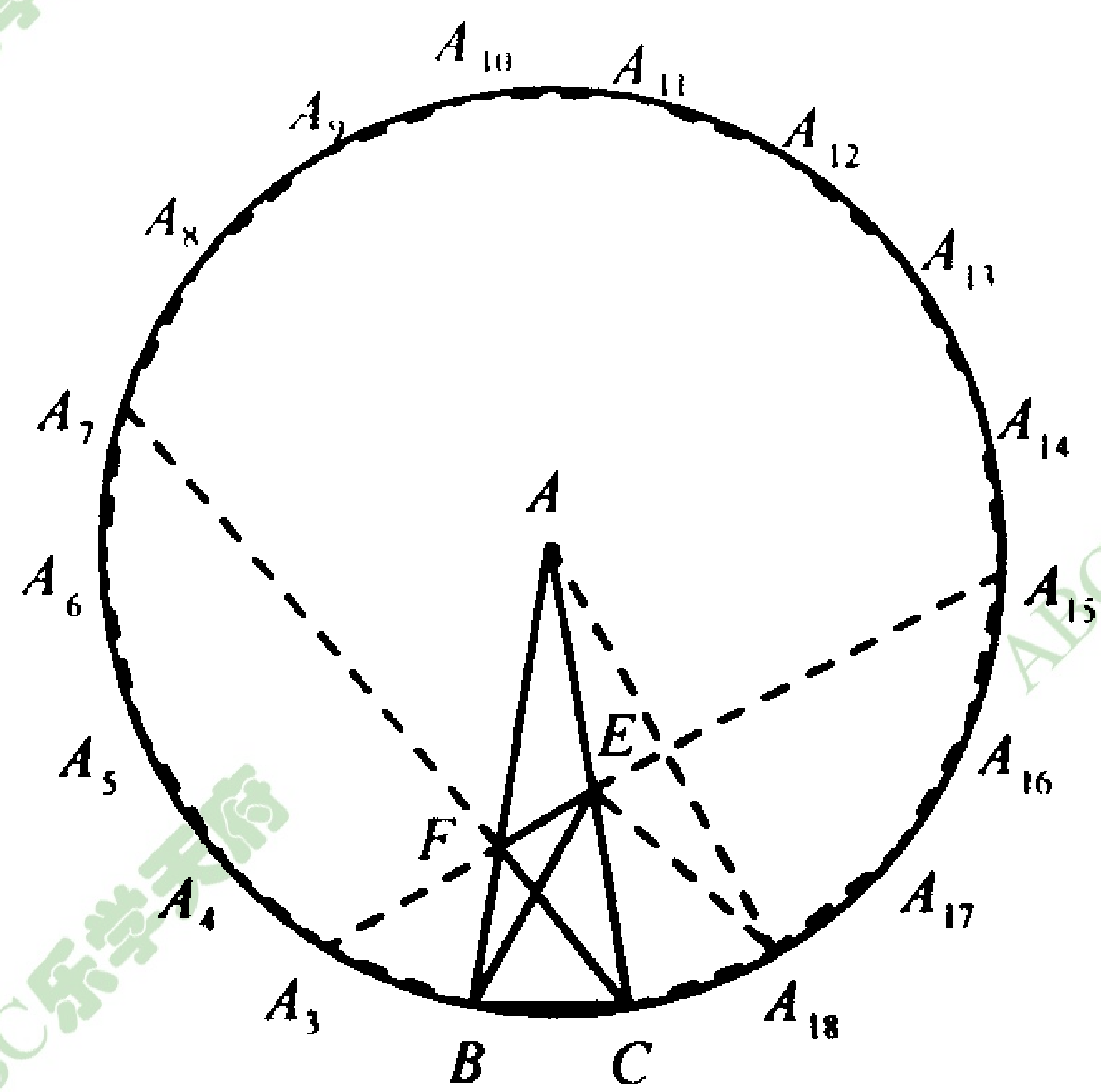

图 10

由

$$\angle BCF=80°-30°=50°=100°\div 2,$$

知道 CF 的延长线通过正十八边形的顶点 A_7.

进而,还能获得一份意外的惊喜:从图中可以发现,将 EF 向两侧延长,恰好分别通过正十八边形的顶点 A_3 和 A_{15}(这个观察结果可以通过推理得到证明).

剩下的部分就很容易了.从 $AA_{18}\perp A_{15}A_3$,得

$$\angle AEA_{15}=90°-\angle EAA_{18}=90°-20°=70°.$$

再从对顶角相等,得到

$$\angle CEF=70°.$$

ABC乐学天府

而

$$\angle CEB = \angle EAB + \angle EBA = 20° + 20° = 40°,$$

$$\therefore \quad \angle BEF = 70° - 40° = 30°.$$

证法 1 是 1951 年由美国人汤普森提出的.

兰利原来的题目固然很怪,汤普森的证法更怪,以怪对怪.原来小巧玲珑的一个等腰三角形,被扩充成阵容庞大的圆内接正十八边形.他用的证法是补形法.不过补得太多太大,把原来问题的图形挤到一个小角落里去了.

汤普森证法最大的妙处,在于它包含了新的发现:线段 BC、CF 和 EF,或者是圆 A 的内接正十八边形的一边,或者是某条对角线的一部分.

兰利的问题,加上汤普森的证法,被美国数学通俗作家洪斯伯格称为"几何四小明珠"之一,写进了他的书《数学瑰宝》第 2 卷(Mathematical Gems Ⅱ,1976),以后又进一步被多种科普期刊辗转介绍.

6° 难点转移

上面介绍汤普森的证法时,为了突出主要想法,有意跳掉了一个细节的证明,只在括号里说明了"这个观察结果可以通过推理得到证明".其中所说的观察结果是:

将 EF 向两侧延长,恰好分别通过正十八边形的顶点 A_3 和 A_{15}.

其实,这个观察结果本身的证明也有一定难度.现在我们用小字印出上述细节的证明过程.对细节不感兴趣的读者,可以跳过这段小字部分,直接阅读下面的第 7°小段,看看初中二年级同学怎样证明.

连结 A_3A_{15}.那么弦 A_3A_{15} 和 CA_7 关于 AB 对称,因而它们的交点在对称

轴 AB 上.所以 A_3A_{15} 通过 CA_7 与 AB 的交点 F.

再连结 AA_{18} 和 EA_{18}.由条件得

$$\angle ABE = \angle BAE = 20^\circ, \therefore \quad EB = EA.$$

再由对称性知 $EA_{18} = EB$,所以

$$EA_{18} = EA.$$

因而点 E 在半径 AA_{18} 的垂直平分线上.

下面证明弦 $A_{15}A_3$ 就是半径 AA_{18} 的垂直平分线.

从 $A_{15}A_{18}$ 和 $A_{18}A_3$ 都是圆内接正六边形的边,知道它们都等于圆半径,因而

$$A_{15}A_{18} = A_{15}A, A_3A_{18} = A_3A.$$

所以弦 $A_{15}A_3$ 确实是半径 AA_{18} 的垂直平分线.因而 $A_{15}A_3$ 通过点 E.

7° 以小对小

国内有好几家杂志介绍过汤普森的证法.其中有一家杂志,后来又刊登了一位初中二年级同学的来信,认为不需要添那么多辅助线,只要如图 11,在原来等腰三角形的内部简单地画两条辅助线,就可以证明了.

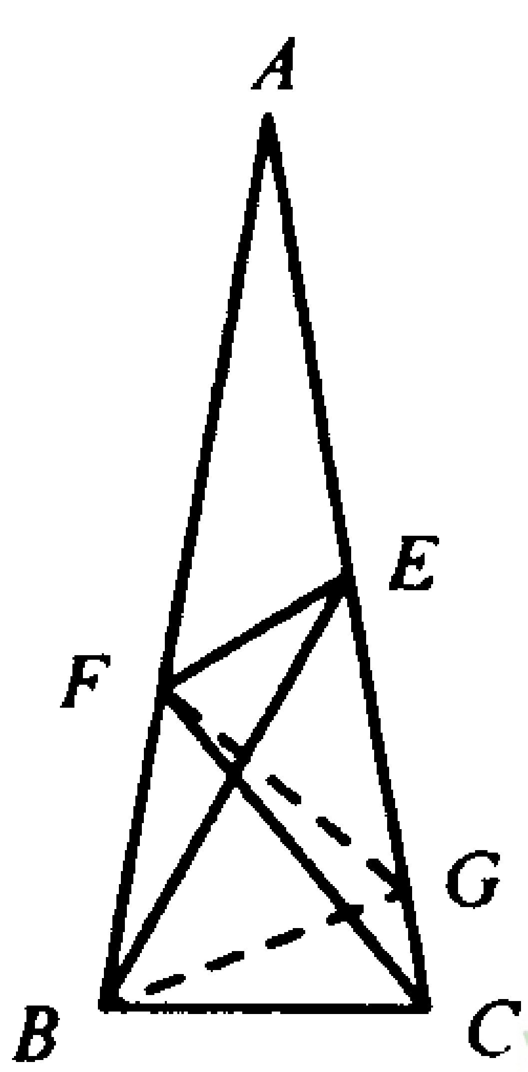

图 11

原题的图形小巧精致,现在添的两条辅助线同样小巧精致,以小对小.

证法 2 ⅰ)如图 11,作 $\angle ABG = 60^\circ$, BG 交 AC 于点 G.连结 FG,得到三角形 BFG.

ⅱ)在三角形 BCG 中,

$$\angle BCG = 80^\circ,$$

$$\angle CBG = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ,$$

$$\angle BGC = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ,$$

所以$\angle BCG=\angle BGC$.由此得到

$$BG=BC.$$

另一方面,在三角形 BCF 中,

$$\angle FBC=80°,$$

$$\angle BCF=80°-30°=50°,$$

$$\angle BFC=180°-80°-50°=50°,$$

所以$\angle BCF=\angle BFC$.由此得到

$$BF=BC. \qquad \therefore \quad BG=BF.$$

又由作图知道$\angle ABG=60°$,所以三角形 BFG 是正三角形.

$$\therefore \quad BF=FG=GB, \angle BGF=\angle BFG=60°.$$

ⅲ)在三角形 BGE 中,

$$\begin{aligned}\angle EBG &= \angle ABC-\angle ABE-\angle GBC\\ &= 80°-20°-20°=40°,\end{aligned}$$

$$\angle BEG=\angle EBA+\angle A=20°+20°=40°.$$

由此得到$\angle EBG=\angle BEG$,因而

$$GB=GE.$$

上面已经证明了 $GB=GF$,所以

$$GE=GF.$$

ⅳ)在等腰三角形 GEF 中,

$$\angle FGE=\angle BFG-\angle A=60°-20°=40°,$$

$$\therefore \quad \angle GEF=(180°-40°)\div 2=70°.$$

因而最后得到

$$\angle BEF=\angle GEF-\angle GEB=70°-40°=30°.$$

8° 乘上公共汽车

是不是每个初二学生都能画出这样小巧精致的辅助线呢?

最初向权威挑战的同学,显然有扎实的基本功、灵活的头脑和

ABC乐学天府

非凡的勇气.不过,其他同学如果平时关心解题思路分析,也能掌握这种方法.

因为无论是谁,只要认识公共汽车站,就可以在那里乘上公共汽车.

在问题原来的图形中,有 80°的角,也有 20°的角.利用这两种角,可以得到 $80° - 20° = 60°$.

有一个角是 60°的等腰三角形是正三角形,它的各边都相等,各角都相等.所以,当问题中可以找出 60°的角时,通常首先尝试添辅助线作正三角形.

想到作正三角形,自然会到图中有 80°角或 20°角的地方去试探,首选的试探位置就是图 11 中的位置.也可以把辅助正三角形作在其它位置,证明方法与证法 2 相近.

将证法 2 与证法 1 对照,证法 1 借助正十八边形,是充分利用这一道题的特性;证法 2 借助正三角形,则是利用与 60°角有关的一类问题的共性.一旦发现有共性可以利用,就像在陌生城市搭上了公共汽车,随车走,到站下,既省时间,又省脑筋.

9° 见怪不怪

但是,高中学生对证法 2 却可能还不满意.因为证法 2 需要添辅助线,而怎样根据具体问题设计适当的辅助线,还是有相当的难度.

高中一年级已经学过了三角.利用三角方法证明几何题,化形为数,往往能减少曲折,降低难度,节省时间.本题能否试一试三角法呢?

分析　原题图形中的角,有 80°的,20°的,30°的,60°的和 40°的.它们之间既有二倍角关系,又有和差关系,为利用三角公式恒等变形提供了有利条件.

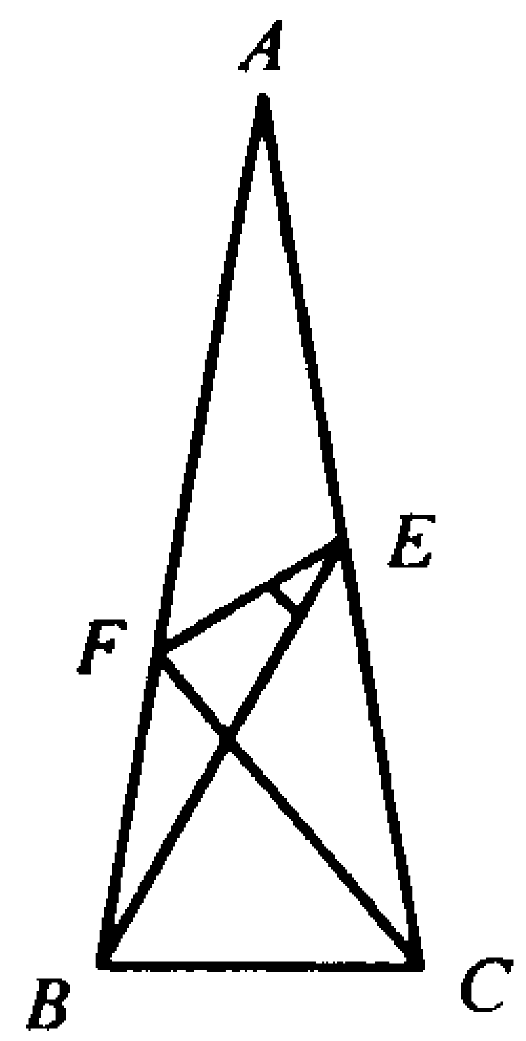

图 12

证法 3　如图 12,设

$$BC = a, \angle BEF = \theta.$$

在三角形 BCF 中,计算角的大小,得到

$$\angle BCF = \angle BFC = 50°.$$

$$\therefore \quad BF = BC = a.$$

从三角形 BEF 应用正弦定理,得到

$$\frac{BE}{\sin(\theta + 20°)} = \frac{a}{\sin\theta};$$

从三角形 BCE 应用正弦定理,得到

$$\frac{BE}{\sin 80°} = \frac{a}{\sin 40°}.$$

从以上两式得到

$$\frac{\sin(\theta + 20°)}{\sin\theta} = \frac{\sin 80°}{\sin 40°},$$

$$\frac{\sin\theta\cos 20° + \cos\theta\sin 20°}{\sin\theta} = 2\cos 40°,$$

$$\cos 20° + \operatorname{ctg}\theta\sin 20° = 2\cos(60° - 20°),$$

$$\cos 20° + \operatorname{ctg}\theta\sin 20° = \cos 20° + \sqrt{3}\sin 20°,$$

$$\therefore \quad \operatorname{ctg}\theta = \sqrt{3}, \quad \therefore \quad \theta = 30°,$$

即　$\angle BEF = 30°$.这正是所要证明的.

证法 3 的基本思想,是把原来的几何证明题当成解三角形的计算题来做,求出$\angle BEF$ 的大小,如果确实等于 30°,就证明了所需的结论.

证法 3 的妙处,在于见怪不怪,其怪自败.不管你图形有多怪,我已经学会解三角形的一般方法,我看你也就是一个普通的解三角形问题.只需用上一点普通的三角变形技巧,不多几道式子,很快解决问题.题目还是那样难,只因有了好方法,可以把困难的地

方跳过去.就像乘着索道上山,飞越重重难关,轻轻松松,顺顺当当,少花时间少费劲.

10°各有巧妙不同

证法1的创造性特别强.首先让人看到的是方法与众不同,最使人赞赏的是发现了出人意料的新结果,揭示了兰利原题中几条古怪斜线与正十八边形的关系.

证法1以怪对怪,出奇制胜,看起来非常过瘾.但是也很难学到手.为了发现证法1,需要在黑暗中进行长时间摸索.

综合以上两方面,可以看出,证法1的方法适合于有充足时间而又希望发现新结果的研究者,例如教师或业余爱好者.

证法2用到的知识很少,只涉及初二几何.基本思路说穿了其实很简单,就是分析数据,发现60°的角,找正三角形.初中学生经过思路训练,一般都能掌握.

证法3用到高中一年级知识.基本思路更加简单,只当成普通解三角形问题来做.三角变形基本技巧比较熟悉的同学,都能掌握.

证法1完全针对一道题,能充分显示题目本身的耀眼光彩,适合精雕细刻,慢慢欣赏.

证法2适用于一类题,证法3适用于一大类题,不需要为这道难题单独另开小灶.对于匆匆赶路的中学生,更适合运用如证法2和证法3这样威力强大的通用武器.

(4)灵活运用

在研究规律时,还需要经常研究各种变化,能够灵活运用规律.

灵活运用属于发散思维.想问题不是盯牢一点,而是从这一点

ABC乐学天府

出发,向四面八方发散出去,思路就开阔了,办法就多了,战果也扩大了.

有了一定的发散思维能力,以后知识越学越多,学到的每条知识都来发散一下,知识量就会翻几番,而且发散出来的结果里面还可能包含新发明.发散思维能力越强,翻的倍数越大,创造发明越多.

当然,发散要注意控制方向,不能跑到认不得家.头脑里想着目标,手里拿着规律,脚底下灵活些,事情就容易做好.

例如,考虑下面的问题.

例 3　在四边形 $BCEF$ 中,连结对角线 BE 和 CF.已知$\angle EBF=20°$,$\angle ECF=30°$,$\angle BCF=50°$,$\angle CBE=60°$.求证:$\angle BEF=30°$.

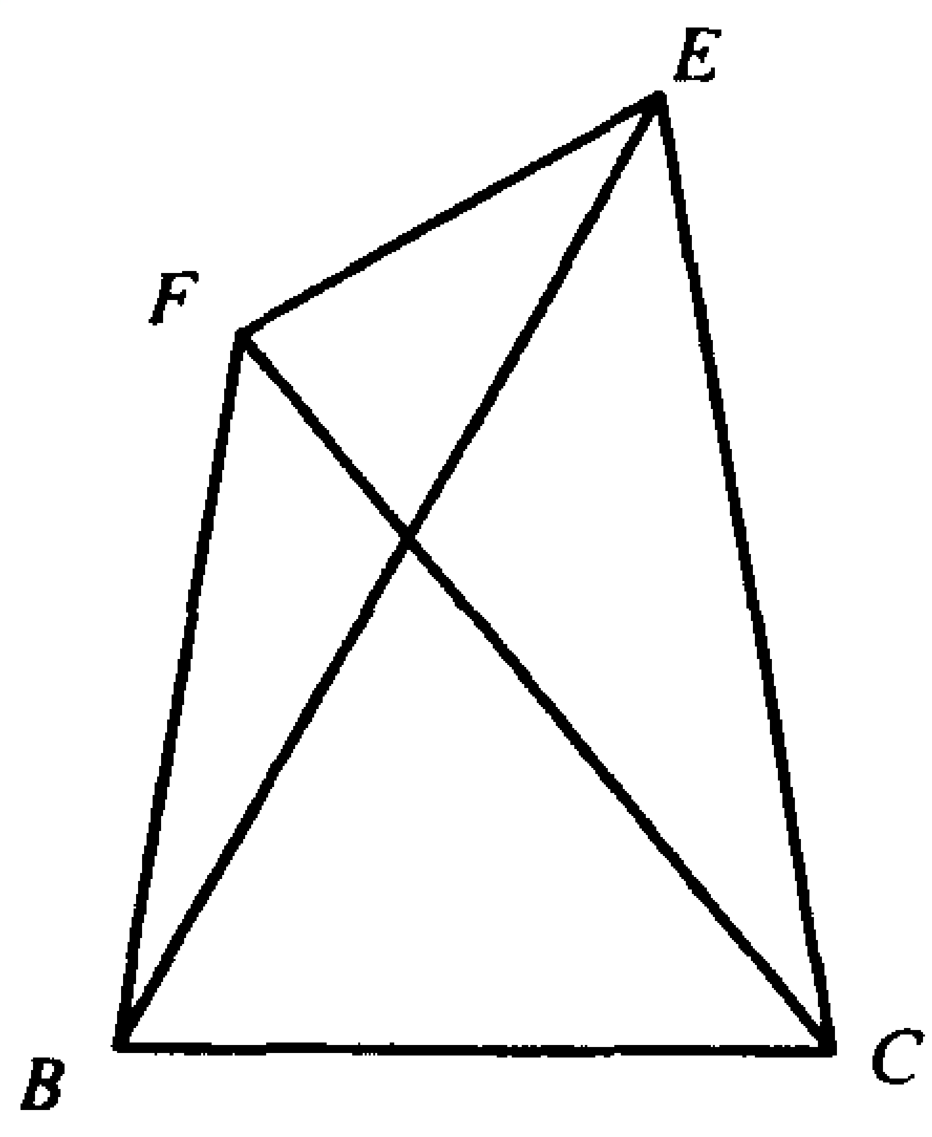

图 13

画出问题的图形,得到图 13.

这幅图怎么有些面熟呢?好像在哪里见过?

确实见过,而且就在这本书里,不过见面时的模样有些不同.如果你把它认清楚了,就立刻知道怎样解答例 3,而且接受了一次发散思维能力的挑战.

你一定会成功!

2. 中学数学教师

中学数学教师为了把工作做得更好,希望能进一步提高自己

的水平,但是常常感到时间不够,而且在大学里学过的知识到了中学里用不上.

在这一节里,我们将要讨论,怎样通过中学数学研究提高工作效率,节省备课时间,充分利用原有大学数学基础,提高水平,取得经验,写出文章.

(1)自编题

在备课时,常需根据教学要求,准备适当的例题、课堂练习题和测验题.有关参考资料虽然很多,但是不一定总是完全对路.例如,也许不能完全适合自己所教班级的情况,或者与自己的教法设想有些距离.尽管拥有大量题目,却还是不够用.这时,与其花费许多时间到处查找新的资料,不如自己动手编题.

还有些时候,辅导一些学习有困难的学生,需要针对学生的薄弱环节,临时举例.家中资料虽多,来不及回去查;头脑中的题目,未必符合需要.这时也只好临场现编数学题.

自己编数学题,需要发挥创造性,获得手头资料中未曾见过的结果,这就是一种研究.这是教师工作中最常见、最基本、最实用的一种研究.

例1　已知下面四组 x 和 y 的值中,有且只有一组使 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是整数,这组 x 和 y 的值是(　).

(A) $x=88209, y=90288$;　(B) $x=82098, y=89028$;

(C) $x=28098, y=89082$;　(D) $x=90882, y=28809$.

这是1991年江苏省初中数学竞赛试题中的一道选择题,由命题组供题,正确答案是(A).

这道题是根据回文勾股数的有趣事实编成的.88209和90288这两个正整数的各位数字恰好互相颠倒,叫做一对回文数.而且非

常凑巧,以它们为两条直角边长的直角三角形,斜边长也是整数:

$$88209^2+90288^2=126225^2.$$

如果直角三角形的三边长都是整数,就把表示它的边长的三个整数叫做一组勾股数.88209 和 90288 既是一对回文数,又是一组勾股数的成员,这样一组特殊的勾股数叫做回文勾股数.

作为竞赛题,编题者的目的是引导学生思考,所以四组数据都编成回文数,谁也不比谁特殊,猜不出谁是谁不是.

例 1 可用考虑尾数的方法解答,这是解竞赛题常用的一种方法.

完全平方数的末位数字只能是 0,1,4,5,6,9.而在(B)和(C)中,x^2+y^2 的末位数字都是 8,不可能是平方数,所以排除(B)和(C).

在(A)和(D)中,x^2+y^2 的末位数字都是 5.这样的数,如果是某个整数 z 的平方,那么 z 的末位数字是 5,因而平方的最后两位数字是 25.但是在(D)中,x^2+y^2 的最后两位数字却是 05,所以排除(D),正确答案只能是(A).

在出题目时也要考虑到,如果学生排除了三个选项以后,对剩下的一个也不放心,能不能想出办法来验证选项(A)正确?

利用数的整除性判别法,容易看出 88209 和 90288 都能被 9 整除,也都能被 11 整除.把它们各除以 99 以后,所得的商还有公约数 3.因而得到

$$88209=297\times297,90288=297\times304.$$

只需看$\sqrt{297^2+304^2}$是不是整数.这时数字已经不大,由计算得

$$\begin{aligned}297^2+304^2&=88209+92416=180625\\&=25\times25\times289=(5\times5\times17)^2,\end{aligned}$$

因而 $88209^2+90288^2$ 确实是完全平方数.

如果要把例 1 改编成常见的测试题,可以只改动一个数字,成为:

例 2　已知下面四组 x 和 y 的值中,有且只有一组使 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是整数,这组 x 和 y 的值是(　).

(A) $x=88209, y=90288$;　(B) $x=82098, y=89028$;

(C) $x=28098, y=89082$;　(D) $x=90882, y=28808$.

这样改动以后,降低了难度,只要考虑末位数字,就能排除全部三个错误选项.同时还可提醒学生不能乱猜,因为猜答案的学生容易看出只有(D)不是回文数对,猜想(D)正确,而这样恰好就猜错了.

(2)高观点

中学数学教师绝大部分都学过大学的数学课程.这些大学课程的内容,不能直接拿来讲给中学生听,所以往往感到大学知识在中学里"用不上".

放进锅里的是米,盛到碗里的是饭.虽然商店柜台上供应的是成品,但是工厂里为了制造这些产品,必须准备各种有关原料.

在大学数学知识里,包含着指导中学数学教学的许多珍贵原料.

1° 数学观念

大学课程内容复杂,有系统的理论.一套复杂理论的核心,往往是一个或几个非常简单的数学观念.所谓观念,用大白话来说,就是基本想法.

例如,整个解析几何的核心,就是形数转化的观念.给点配上坐标,曲线配上方程,形的问题就可以化成数的问题.在直角坐标系下,直线问题怎样转化成数的形式,圆的问题怎样转化,椭圆、双

曲线和抛物线的问题怎样转化，在极坐标和参数方程下怎样转化，等等，一个想法引出了一大套理论.

微积分学的核心，是局部近似的观念.在一个充分小的局部邻域内，设法用简单的近似代替复杂的，直的代替曲的，匀速的代替变速的，有限的代替无限的，控制误差，尽量使误差可以忽略不计.把这个朴素的基本想法精确化，用来考察数列与函数的变化趋势，产生了极限论；考察函数变化的快慢，产生了微分法；考察面积和体积的计算，产生了积分法；考察无穷多个数相加，产生了无穷级数论，等等.整个微积分学的理论，都是从局部近似观念演绎发展而来.

高等几何学的核心，是几何变换的观念.中学数学里遇到的对称、旋转、平移等变换，都是保持距离不变，统称为正交变换.从正交变换扩大范围，研究在仿射变换下保持不变的几何性质，形成仿射几何学.从仿射变换再扩大范围，研究在射影变换下保持不变的几何性质，形成射影几何学.按照通常的理解，高等几何学课程的内容，主要就是射影几何学.在这个意义上，可以说，整个高等几何学理论，都是几何变换观念的产物.

近世代数学的核心是运算的观念.这里所谓的运算，是在一般意义下，对集合的元素之间进行的一种操作，具备某些类似于普通算术运算律的性质.考虑带有一种运算的集合，产生了群论；群的这种运算可以形式地叫做加法或乘法.考虑带有两种运算的集合，产生了环论；环的两种运算分别叫做加法和乘法，其中叫做加法的运算具有逆运算，相当于通常所说的减法.考虑能同时进行加减乘除四种运算的集合，产生了域论，并进而发展为代数结构的一般理论，它们可看成复数系的某种推广.所以，运算观念导致了近世代数学.

由此可见，与中学课程相比，大学数学课程的内容更丰富、理论更复杂，但是每门课的基本思想却比较单纯.

中学数学是大学数学的基础，大学数学课程中的主要数学观念，很多在中学数学里露过面.不过露面时的模样太平常，又不作自我介绍，倘若没有熟人一把拉住闲聊几句，就会无声无息，擦肩而过.

人们常说，问题是数学的心脏.但是，数学问题是怎样提出来的呢?

先要有想法，然后才能把问题说清楚.这想法正是来源于数学观念.数学问题是明摆的，数学观念是隐藏的，数学问题是在数学观念影响下形成的.

中学数学期刊的“思路、方法和技巧”栏目，总是受到普遍欢迎.解题小技巧一学就会.一种解题方法有许多变通形式，要揣摩较长时间，才能够掌握.解题的思路更难捉摸，但是学会解题思路就能知其所以然，收获更大.从解题技巧，到解题方法，再到解题思路，步步登高.

现在发现还有更高的境界，“解题策略”的提法已经引起普遍注意.好的解题策略，可以产生好的解题思路，再选取一定的方法来实现思路，运用适当的技巧来实现方法，胜利完成任务.

解题策略又从何而来呢?也是来源于数学观念.

解题如打仗，但解题不是打仗.解数学题的策略，并非来自兵书，而是得益于有关的数学观念.抽象、特取、分解、变化、逼近，诸如此类，都是一些基本的数学观念，它们来自生活，朴素平凡，人人能懂.但是它们蕴含哲理，威力强大，从它们产生了各种数学概念、定理、公式、问题，以及问题的解法，包括解题的策略、思路、方法和技巧在内.

ABC乐学天府

中学数学教师学习过大学数学课程,接受过许多重要数学观念的熏陶.中学数学教师每天和中学生打成一片,对学生的一切了如指掌.中学数学教师得天独厚,有很多机会在日常教学中渗透数学观念,潜移默化,帮助学生逐步了解数学的灵魂,理解数学的本质,把数学真正学到手.

简而言之,中学数学的高观点研究,首要任务是研究怎样在中学数学教材的日常教学中适当渗透一些重要的数学观念.为了切实提高学生的数学素质,每个中学数学教师都需要这样的研究,都有条件进行这样的研究,都能在这方面取得明显的成绩.这种渗透工作已经在世界范围内受到普遍重视,做了大量工作,但是还有许许多多深入细致的研究工作有待进行.

2° 有所为有所不为

对大学数学知识保留一定印象,在给中学生讲课时,就能胸有成竹,知道什么地方需要画龙点睛,什么地方只能轻轻跳过.

在能够渗透数学观念的地方,一点通,可以讲.一道例题讲完解法,顺便补上几句,说明这是用了一种什么想法,这种想法看上去很简单,但是在数学里非常有用.这样,学生不但学会了一道数学题的解法,还拓宽了眼界,觉得很有收获.

在通往大学数学和现代数学的窗口,课本中有意轻飘飘一带而过,讲课时只能小心翼翼,若无其事,点到为止,切莫展开.例如关于几何公理,展开出来,就是一门大学课程《几何基础》,大学生学起来都愁眉苦脸,根本不必向中学生介绍.又如,由方程求函数 $f(x)$ 的解析式的问题,实际上是解函数方程,在一般形式下,它的解依赖于容许函数类的连续性和可微性,比解微分方程还要困难得多,只能举少数简单例子,见见面,意思意思而已.

在中学数学范围里,哪些地方可以渗透现代数学观念,哪些地

方是通往大学课程和现代数学的窗口,并不是显而易见的,需要深入钻研,仔细查找.

3° 探路

在解题的探索阶段,常需首先查明有关情况,以便确定前进方向.教师的事情多,时间紧,解题探路的时候,越快越好,什么知识都能用,先要自己会做,然后再想办法完全限于利用课本知识,讲给学生听.

在解题探路时,如果适当利用大学里的知识和方法,在很多情况下可以显著提高效率.例如,解代数题时利用连续函数的性质,解几何题时利用几何变换等,都是很有效的.

例 3　如图 14,已知椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线 l:$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$. P 是 l 上一点,射线 OP 交椭圆于点 R,又点 Q 在 OP 上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.当点 P 在 l 上移动时,求点 Q 的轨迹方程,并说明轨迹是什么曲线.

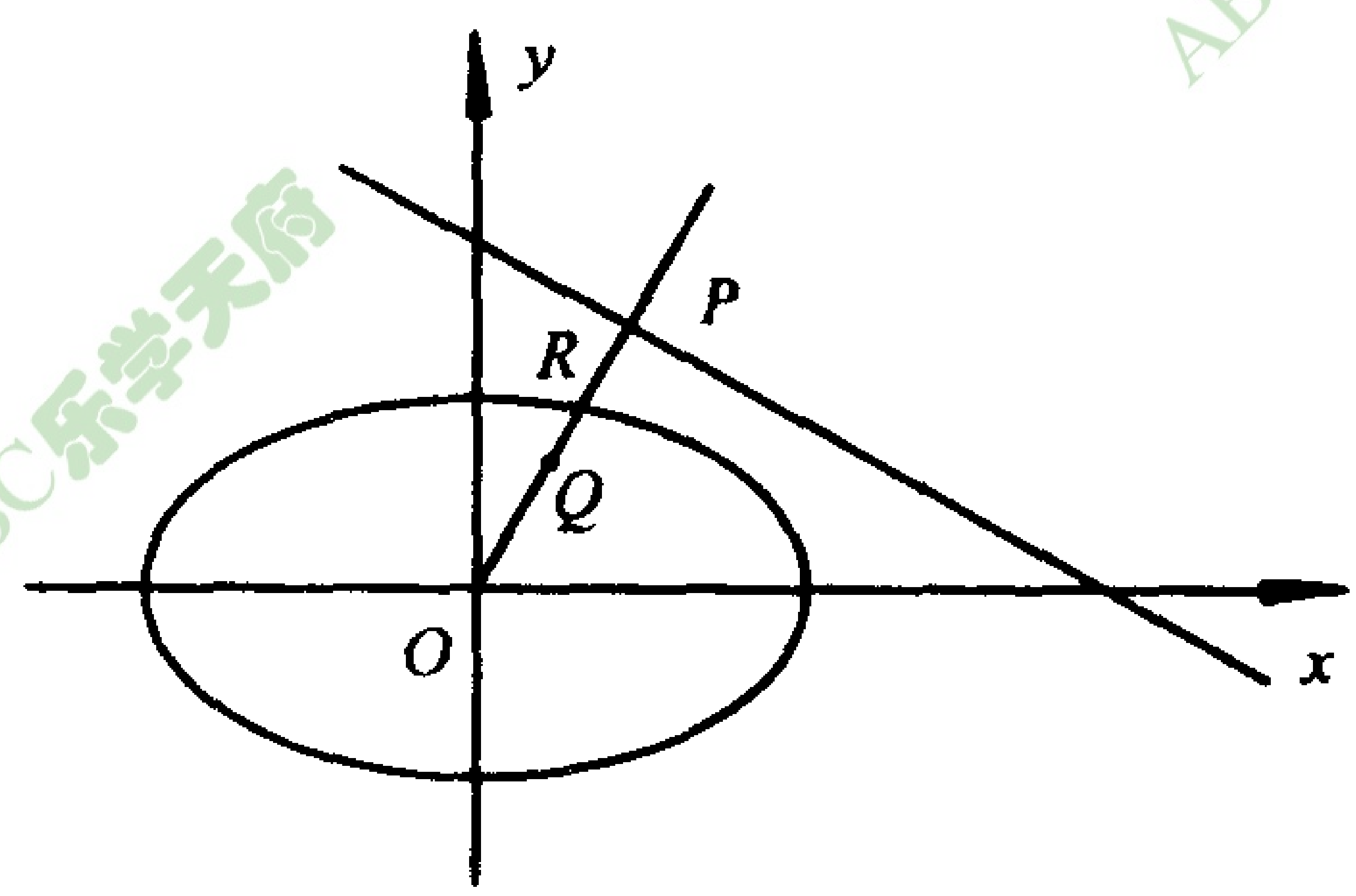

图 14

如果学生拿这道题来问老师,而老师对大学数学知识仍有印象,那么在读过题目之后,脑筋稍稍一转,就能断定,轨迹是一个椭圆(去掉一点).进而,还能说出,这椭圆通过坐标原点(但轨迹不包含原点),并且对称轴平行于坐标轴.

原来,在高等几何里讲过,仿射变换能把椭圆变成圆.仿射变换把直线变成直线,保持关联性(点在线上),而且保持一直线上的

线段比不变.这些都是高等几何里的基本常识,很容易记住.

利用仿射变换把例3中的椭圆变成圆,那么线段 OR 成为圆半径,因而 $|OR|$ 是定长,记为 r.又因为 O、P、Q、R 在一直线上,关系式 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$ 等价于共线四点所成线段间的一个比例式,因而在仿射变换下保持不变.

暂时忽略系数的大小,变换后的问题归结为:已知圆 O 和直线 l'. P' 是 l' 上一点,射线 OP' 交圆于点 R',半径 $|OR'|=r$.又点 Q' 在 OP' 上且满足 $|OQ'|\cdot|OP'|=r^2$.当点 P' 在 l' 上移动时,求点 Q' 的轨迹.

从点 P' 到 Q' 的变换,是熟知的反演变换. l' 是不通过反演中心的直线,它变成通过反演中心 O 的圆(不含点 O),记为 c'.

再利用原来仿射变换的逆变换,变回原图,那么圆 c' 变成一个通过 O 的椭圆,它就是动点 Q 的轨迹.新椭圆和老椭圆是两个圆在同一个仿射变换下的象,因而它们的轴互相平行,并且两者的长轴与短轴之比相等.

还没有动笔,就已经知道答案的大致情形,这有两大好处.第一是心中有底,情绪安定,不慌不忙,稳步前进.第二是心中有数,不怕繁琐,边做边看,不易出错.

例3的完整答案是:点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1 \quad (x,y\text{ 不全为 }0).$$

轨迹曲线是通过原点的椭圆,但是去掉原点.轨迹椭圆的中心是点 $(1,1)$,长轴平行于 x 轴,长半轴和短半轴分别为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

答案与预期结果完全相符.

(3)攻关键

学生的数学素质与考试成绩相比,素质是关键.成绩是暂时的,素质是长久的.努力提高学生的素质,就不能总是与考题手拉手,而要围绕教学基本要求,与考题同路,各自往前走.这样,素质上去了,考分自然也会上去.怎样才能掌握分寸,抓好中学生的数学素质教育,在数学方面有很多具体问题需要研究.

为了提高学生的数学素质,首先要进一步提高教师的数学素质.教师的素质与学生的素质相比,教师的是关键.活到老,学到老,研究到老.在教学任务繁重的情况下,怎样进一步提高中学数学教师的数学素质,这也会引起数学方面许多研究工作.

教法与教材相比,教材是关键.教材变了,教法只好跟着变.从现今世界各国中学数学教材的编写情况来看,大方向是明确的,既要现代化,又要中学师生能接受.教材细节也经过了精心处理,从局部看去,既通俗易懂,又生动活泼.但是,每次新教材出来,教学第一线的中学数学老师们总能提出一大堆中肯的意见.主要是教材和习题内容的增删和调动引起连锁反应,牵一发,动全身.又要马儿好,又要马儿不吃草,这目标可望做到,但是很不容易做到.哪些内容一定要在中学数学里讲授,哪些内容必须在初中讲,哪些内容不可分割,近来参考书刊上有些什么好材料可以写进课本,如此等等,从事多年教学实践的中学数学老师们最有发言权.对这方面的问题进行研究,挖掘整理,写成文章发表,对于编写中学数学教材,是十分珍贵的参考资料.

以上几方面关键问题,都是当前时代和当今社会向中学数学提出的迫切任务,既有现实意义,又有深远影响.

(4)补空白

抓好关键,对全局顺利发展起决定性作用.与此同时,还要眼观六路,耳听八方,十个指头弹钢琴,尽可能细致全面地照顾到每个角落.

大多数中学数学书刊,是以中等以上程度的学生为主要服务对象.因为这些人在中学生里占的比例最大.但是作为教师,从责任感出发,总希望使所教班级的每一位同学都有明显的学业进步.这样就要自己动手研究,为学习上暂时有点困难的学生专门准备一些有针对性的例题和练习题.还要兼顾学有余力的一部分学生,根据他们各人的情况,推荐适当的课外读物.

关于解题,除去着重研究常用的数学观念和常用方法技巧而外,也需要分出适当精力,兼顾在中学范围里可能遇到的一些特殊问题的特殊解法.当然,在研究特殊方法时,既要阐明它们的有效性,又要注意它们的针对性和局限性.

例如,在书刊中有时介绍解一类特殊高次方程的常量代换法.让我们来对这种特殊方法做一番考察.

例 4　在实数范围内解方程

$$x^3+(1-\sqrt{3})x^2-3=0.$$

解　原方程是关于 x 的三次方程.令

$$\sqrt{3}=y,$$

方程化为

$$x^3+(1-y)x^2-y^2=0,$$

即

$$y^2+x^2y-x^2-x^3=0,$$

这是关于 y 的二次方程.它的判别式是

ABC乐学天府 ABC乐学天府 ABC乐学天府 ABC乐学天府 ABC乐学天府 ABC乐学天府 ABC乐学天府

$$\Delta=(x^2)^2-4(-x^2-x^3)=x^2(x+2)^2.$$

利用一元二次方程的求根公式,得到

$$y=\frac{1}{2}[-x^2\pm x(x+2)].$$

即

$$y=x, \quad ①$$

或

$$y=-x^2-x. \quad ②$$

以 $y=\sqrt{3}$代入①式,得到

$$x=\sqrt{3};$$

而以 $y=\sqrt{3}$代入②式,得到方程

$$x^2+x+\sqrt{3}=0,$$

所得方程无实根.

因而,原方程只有一个实数根 $x=\sqrt{3}$.

研究　学生在解三次方程或四次方程时,对一元二次方程解法已经很熟悉,而对前面学过的因式分解却相隔太久,有些生疏了.在这种特定条件下,上面的常量代换法可以应急,能起一定作用.

实际上,解特殊高次方程,通常首先考虑试用因式分解的方法.将原方程左边分解因式,得到

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(x^3-\sqrt{3}x^2)+(x^2-3)\\&=x^2(x-\sqrt{3})+(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\\&=(x-\sqrt{3})(x^2+x+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

即原方程可化为

$$(x-\sqrt{3})(x^2+x+\sqrt{3})=0.$$

由此容易得到原方程有且只有一个实数根 $x=\sqrt{3}$.

由此可见,常量代换法实际上是用来分解某些特殊的无理系数多项式的一种应急办法.

有时候,一个非常熟悉的字会突然想不出怎样写,一个非常熟悉的名字会忽然记不起来.在解题时,也可能发生临场昏.尤其是在心情过分紧张时,会有短暂时间头脑里一片糊,脑筋一时无法发动起来.这时,除去在心理上自我调节而外,数学上的应急方法也可帮助渡过难关,只要稳稳地跨出一步,心情就能慢慢平静下来.

总之,因为一个正确的数学命题就是一个定理,所以中学数学教师常有机会在工作中无意间发现一些定理.如果有意识地进行中学数学研究,就会发现,可做的重要工作实在很多.研究的结果,首先是武装了自己,改进了工作,提高了效率,节约了时间.不但自己能尝到甜头,在取得好经验以后,还可以写出文章投稿,言之有物,编辑部欢迎,读者爱看,同行专家赞赏,皆大欢喜.

3.大学生和研究生

师范院校数学系的学生,毕业后大多将要走上中学数学讲台.师范院校数学系的数学教育方向的研究生,学成以后,通常或者到中学工作,或者在师范院校工作.这两部分人都是数学教育事业未来的生力军.

本节将要简单地讨论,师范院校数学系的学生和数学教育研究生在学习期间,能为中学数学研究做些什么事情.

(1)似曾相识

学习大学数学课程,常会发现与中学数学有联系的地方.虽然进入陌生境界,却有许多场所似曾相识.

但是,大学里使用熟知的中学数学术语时,却常常变了味道.

代数不是那个代数,几何不是那个几何,点也不是那个点,空间也不是那个空间.

如果你感到曾经熟悉的数学术语变得陌生,这就表明你的感觉敏锐,已经觉察到大学里对原有术语赋予了新的含义.

以前在中学里,点是能够看得见、摸得着的,是实实在在的图形.但是,进了大学,点却变得玄乎起来.任何一个集合的元素都可以叫做点.

空间也变得不对劲了.平面几何是二维的,立体几何是三维的.但是高等代数里却大讲 n 维欧氏空间,n 可以是任意正整数.二维的长方形有两度,长和宽.三维的长方体有三度,长、宽、高.如果一个欧氏空间有四维或者更高的维数,那么这第四维往哪儿搁呢?科学幻想小说里曾经写道,第四维是隐身人藏身的地方.但是学了高等代数,却与隐身术无缘,要想伸手不见五指,惟有等候天黑熄灯.

运算的麻烦更大.两数相乘,其积惟一.但是到了向量代数里面,花样就多起来了.有一个向量与一个数相乘,有两个向量的数量积,还有两个向量的向量积.近世代数更加开放,可以谈论任意集合 M 上的乘法.M 中的两个元素相乘,结果还是得到 M 中的元素,而不管这些元素究竟是什么.

我们也能聊以自慰,搬出英文来帮助解释."乘积"这个词,译成英文,叫做 product.而 product 这个单词又有另外的含义,可以解

释为“产品”.大学数学里研究的各种乘积,其实是一些不同类型的产品,只不过获得这些产品的过程具有某些类似于普通乘法运算律的性质.把术语“乘积”和“乘法”的含义变得更广,可以利用原来乘法性质的基础,研究许多更加普遍的有用规律.

通过坐标化,平面几何变成有序2实数组的代数理论,立体几何变成有序3实数组的代数理论.对于代数来说,有了关于2实数和3实数的理论,不费多大力气,就能推广成关于 n 实数的理论,其中 n 是任意正整数.2实数和3实数的情形都叫做欧氏几何,推广到任意 n 实数,不必见外,当然还是叫做欧氏几何,区别只是维数成为 n 而已.

所以,谈起四维欧氏空间,要问第四维在哪里,答案很简单:就是有序实数组中的第四个实数.如果一组有序数据中的第四个数是时间,那么第四维就是时间;如果数据中的第四个是温度,那么第四维就是温度;如果第四个数据是单价,那么第四维就是单价.在处理观测数据时,常用欧氏距离表达式来衡量两组数据之间的接近程度,所以 n 维欧氏空间的几何学很平常,很实用,与隐身人没有关系.

把立足点从中学移到了大学,对数学的认识就产生飞跃,更加深刻地理解到,数学以抽象的形式反映现实世界的规律,形式越抽象,概括程度越高,适用范围越广,产生的价值越大.我们眼中的代数或几何,已经不再是院落里的小家庭,而是围墙外面的大世界.

电视报道体操比赛,精彩动作要播放从多种不同角度拍摄的镜头,有从正面看的,从侧面看的,从背面看的,还有从头顶上往下看的.坐在电视机前看比赛,看到的角度比现场观众看到的还要多,任何一位观众都不会爬到体育馆顶篷上面俯视表演.

学习大学数学课程之余,偶尔回头看看中学数学,就有一种俯

视的感受,居高临下,脉络尽收眼底.这脉络是由一些数学思想编织出来的,理清了中学数学里的一部分数学思想,或者叫做数学观念,通过比较,就可以看清它们在大学课程里怎样丰富和发展,产生出更复杂更高深的理论,从而又反过来促进当前大学课程的学习,实现良性循环.

(2)学以致用

学习大学课程时,如果联想中学知识,会发现正在学的东西很有用.

例如,大学一年级解析几何学过了向量代数,课本里有一些习题要求利用向量证明中学几何问题.从这些习题可以想到,向量代数可能对中学数学有帮助.

向量代数最精彩的地方,是它的数量积和向量积.而向量积要在三维空间才有意义.由此可见,用向量代数处理立体几何问题,可能会有好的效果.

立体几何中,许多重要定理都讲了逆定理,例如常用的三垂线定理,它的逆定理也很有用.但是好像并非每个重要定理都讲过逆定理.

有一个常用定理:长方体对角线长的平方,等于三度的平方和.在计算问题里经常应用这个定理,却从来没有谈过它的逆定理.

它到底有没有逆定理?它的逆命题是否正确呢?

这就引起了下面的研究问题.

例 1　已知平行六面体的一条对角线长的平方等于从对角线一端引出的三条棱长的平方和.试问:这个平行六面体是否必为长方体?

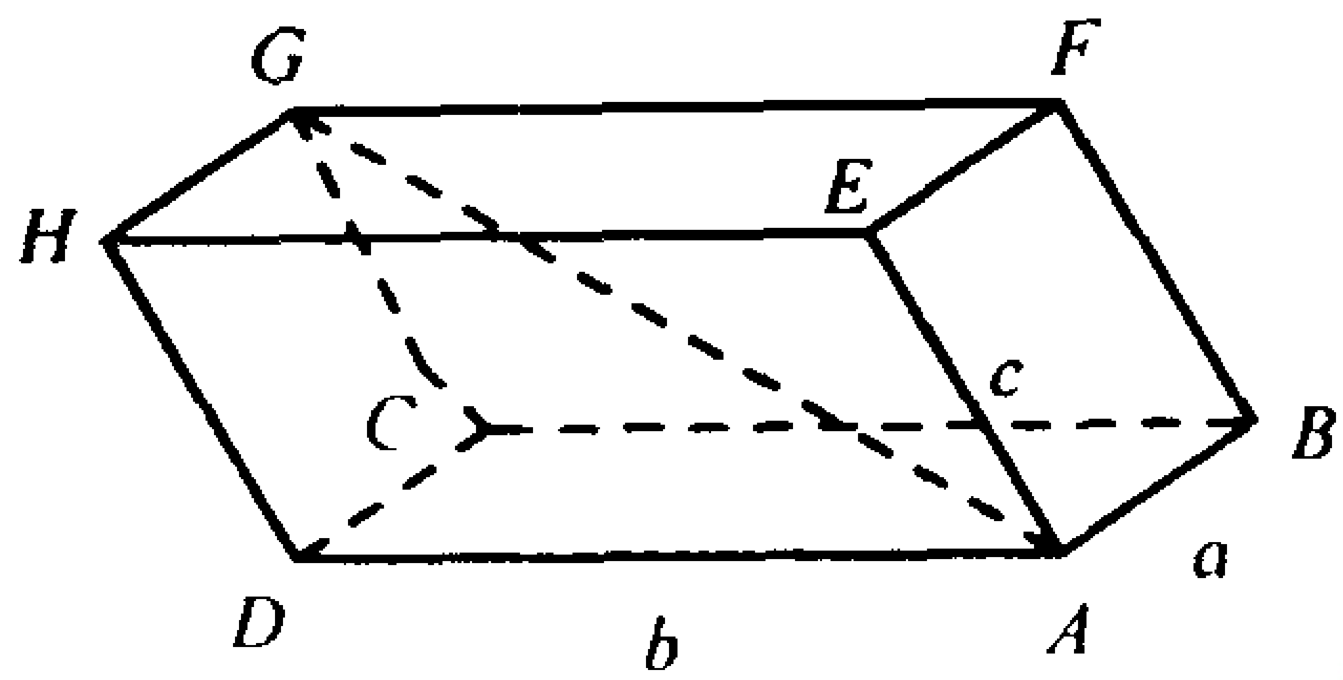

图 15

解　如图 15，设在平行六面体 $ABCD-EFGH$ 中，把各个棱看成有向线段，对应的向量为

$$\mathbf{AB}=\mathbf{a},\mathbf{AD}=\mathbf{b},\mathbf{AE}=\mathbf{c}.$$

由向量的加法，得到

$$\mathbf{AG}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

根据条件，有长度关系

$$AG^2=AB^2+AD^2+AE^2, \qquad ①$$

因而

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2. \qquad ②$$

上式中的平方表示向量与它自己的数量积.将左边展开，整理，变形为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=0. \qquad ③$$

记

$$\angle BAD=\alpha,\angle DAE=\beta,\angle EAB=\gamma,$$

③式化为

$$AB\cdot AD\cos\alpha+AD\cdot AE\cos\beta+AE\cdot AB\cos\gamma=0. \qquad ④$$

以上各步变形都是可逆的，所以①式和④式等价.为了使①式成立，必须且只须④式成立.④式已经不含向量，回到了立体几何等式的普通形式.

对于长方体，

$$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ, \qquad ⑤$$

满足④式，因而满足①式.这表明长方体对角线长的平方等于三度的平方和.

但是，④式含有 6 个量，就是平行六面体从一顶点引出的 3 条

棱长,以及每两条棱之间的夹角.所以,满足④式而不满足⑤式的平行六面体有无穷多个.一个简单例子是:

$$AB = AD = 2\sqrt{2},\ AE = 1;$$

$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = \gamma = 135^\circ.$$

这时

$$\begin{aligned}&AB\cdot AD\cos\alpha + AD\cdot AE\cos\beta + AE\cdot AB\cos\gamma\\ &= 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\times 1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\sqrt{2}\times 1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= 4-2-2=0,\end{aligned}$$

可见这时④式成立,因而①式成立.但是这样的平行六面体显然不是长方体.

所以,例 1 的答案是:存在无穷多个平行六面体,它们不是长方体,但是却有一条对角线长的平方等于从对角线一端引出的三条棱长的平方和.

例 1 的结论,如果局限在立体几何范围内考虑,是很难发现的.不过,知道这个结论以后,却不难从直观上理解它.

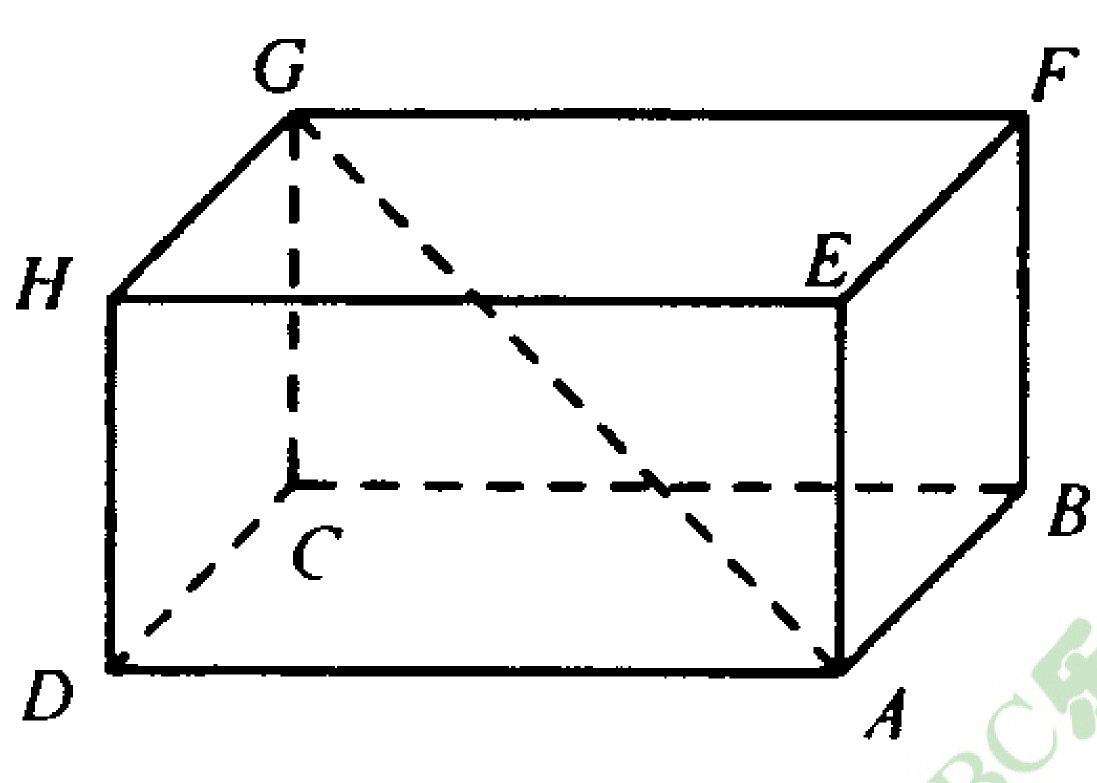

图 16

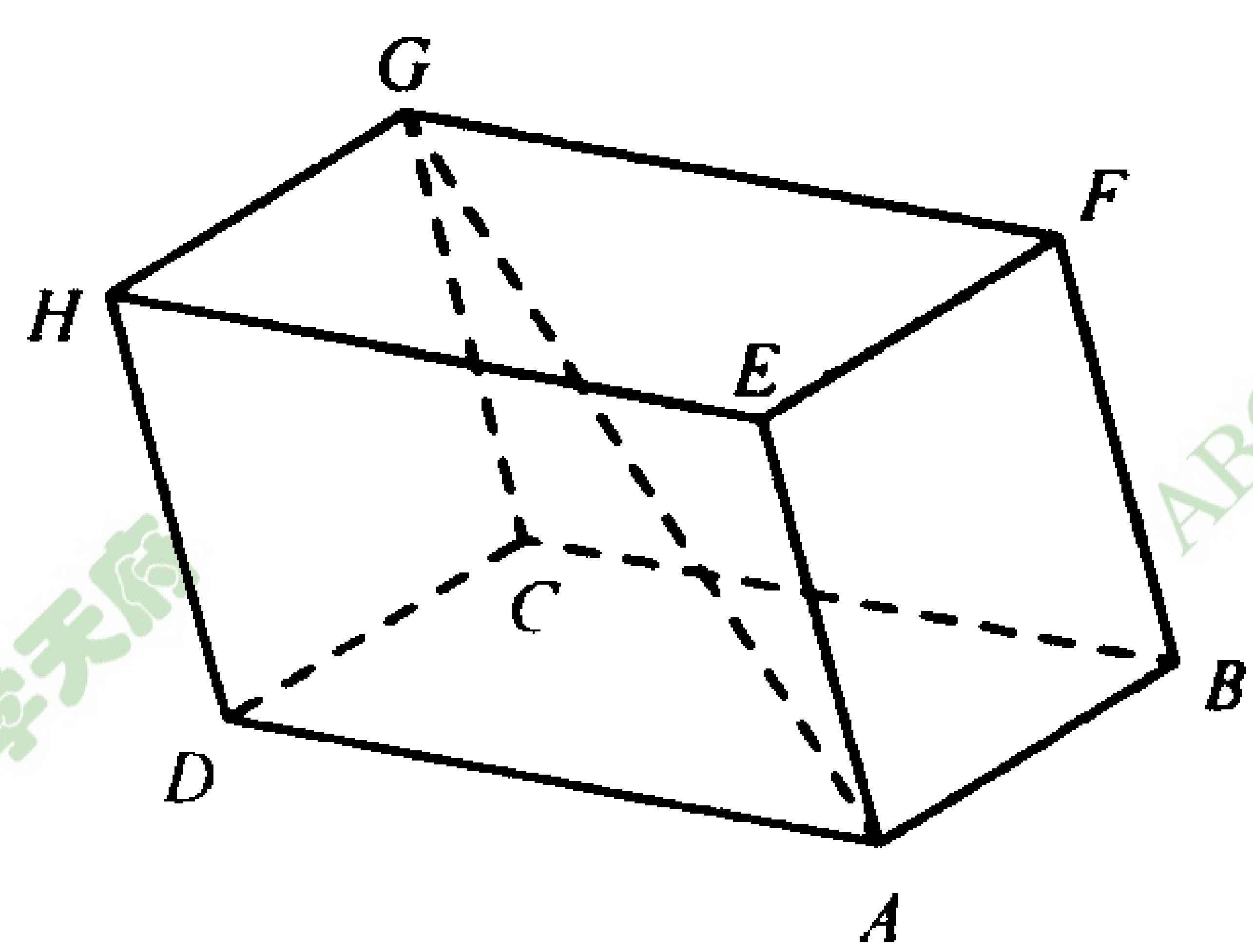

图 17

如图 16,设在长方体 $ABCD-EFGH$ 的棱土,放着一根三节棍

ABC乐学天府

$AEHG$.然后,一个人的左手拿着三节棍的 G 端,右手拿着 A 端,保持这两端不动,让另外一个人移走长方体.于是三节棍失去依托,活动起来,每相邻两节之间的夹角不再保持 90°,但是各节长度不变,被双手固定的两端点之间的距离也不变.进而,如图 17,以三节棍活动过程中的任一位置作为不共面的三条棱 AE、EH 和 HG,作平行六面体,仍记为 $ABCD-EFGH$,那么作出的平行六面体一般已经不再是长方体,但却仍然保持满足等式

$$AG^2 = AB^2 + AD^2 + AE^2.$$

(3)有备无患

大学生的课余时间有限,不允许在中学数学某一点的研究上充分展开.在这短短几年大学阶段里,不妨为今后从事中学数学教学研究做些准备工作,例如寻找大学数学与中学数学的结合点,把这些结合点记到自己的笔记本上,同时利用大学图书馆丰富的藏书,有选择地读一些有关书籍和文章,适当做些笔记.如果经济条件许可,也可选购或复印少量特别重要的参考资料.仔细考虑,选定一两个重要课题,围绕中心收集资料,准备以后长期进行深入研究.

大学的图书馆里,关于数学史和数学故事的书比较多,可以借几本来看看,既有趣味,又增长知识.其中一些与中学数学有关的人和事,如祖冲之、刘徽、欧拉、笛卡儿、牛顿、高斯、韦达、勾股定理、《几何原本》等,不妨多注意些,适当做些摘记,以后讲课、辅导课外活动和写文章时可能用得着.

图书馆里如果能找到关于《球面三角学》的小册子,最好借一本来仔细阅读.这类书很薄,很容易看懂,看了以后大开眼界.因为球面三角形的问题等价于三面角的问题,球面三角形的边和角相

当于三面角的面角和二面角.在球面三角学里讲了一大套球面三角形的边角关系,实际上也就是三面角的面角和二面角之间的关系.了解这些关系式,有三方面的作用.

第一,立体几何教学参考.虽然目前高中立体几何课本里删去了多面角,但是在有关三棱锥、二面角、直线与平面的夹角等问题中,仍然遇到三面角的面角与二面角的关系问题,包括在高考试题中也常遇到这类问题.

第二,与平面三角公式对照.高中一年级学习解斜三角形,知道了关于三角形边角关系的许多公式,如正弦定理、余弦定理等.把它们从平面情形推广到空间情形,就得到相应的球面三角学公式,例如球面正弦定理、球面余弦定理等,自己很容易把这些球面三角公式改述为关于三面角的相应公式.

第三,帮助理解平面几何.在球面几何中,球面三角形的三个内角的和总是大于180°的.这很自然,也很容易理解.而在平面几何中,三角形的内角和却永远等于180°.将球面三角形与平面内的三角形对照,就容易理解欧氏几何的局限性,掌握最简单的非欧几何实例,更深刻、更透彻地了解几何.

如果找不到《球面三角学》书籍,可以借阅朱德祥教授编著的《初等数学复习与研究(立体几何)》,其中有一章专门介绍球面几何学.这本书曾被广泛用作师范院校的初等数学研究教材,在图书馆里很容易找到.

有关用复数证明几何题的书,和利用抽屉原则解题的书,可以各找一两本来看看.这些都是中学数学竞赛必读的参考书.如果图书馆查书采用电脑检索目录,可根据作者查找常庚哲写的书.中国科学技术大学常庚哲教授对于用复数解几何题和用抽屉原则解答初等数学问题做了大量工作,他写的书篇幅不大,内容丰富,文笔

流畅，富有启发性.

图书馆里如果有通俗介绍组合数学和图论的小册子，也可借来翻翻.不要全部看懂，只要大致翻翻，初步了解是怎么一回事.在组合数学里有很多组合恒等式，有利用母函数导出恒等式的方法，有抽屉原则、幻方，等等，这些都是中学数学竞赛问题里经常遇到的.图论初步也是中学数学竞赛问题常见的背景知识.如果看到专门讲幻方的书，可以借来，学几种构作幻方的方法，很有趣，又很实用.

图书馆里有用的和有趣的数学参考书很多，可以根据自己的时间、精力和兴趣，酌量选读.

除去数学参考资料而外，最好能准备两本心理学参考书：一本是关于教育心理学的(例如《教育心理学》，潘菽主编，人民教育出版社，1995年第24次印刷)，另一本是关于认知心理学的.认知心理学书籍目前较少，不过它与数学教学的联系更为紧密，特别是其中有关演绎推理和归纳推理的章节，尤其有助于把数学教材研究和解题研究上升到理论高度.在大、中城市的书店里，留心寻找，有时能买到认知心理学书籍.在师范院校的图书馆里，一般都能借到认知心理学教材.以后有了一定教学经验，开展教学研究，需要写一些有理论深度又有丰富实例的教学研究论文，就会感到心理学参考书的重要.

以数学教育为主攻方向的研究生，专业名称的提法有过一些变化，以后也可能还会有所变动.无论采用什么名称，攻读的主要内容总是数学教育.不是单纯的数学，也不是单纯的教育，既有数学，又有教育，是数学与教育的有机结合.

数学教育方向的研究生，除去学习教育学和心理学方面的一些专门课程而外，也要学习现代分析、抽象代数等现代数学课程，

还要学习《中学数学的现代基础》或《现代数学与中学数学》之类的专业课，因而可以从更高的观点来研究中学数学．学校图书馆和系里的资料室在数学教育方面的资料，自然为招收研究生做好准备，有更多、更重要的书刊可供学习．研究生的外语水平应该能顺利地阅读外文的文献，因而能够利用原版的外文资料，视野将大为开阔．你可以发现很多中学数学与现代数学的结合点，中学数学与教育学、心理学的结合点，记下这些结合点，并且记下有关的中文和外文参考文献出处，平时不容易找到的重要资料可以复印下来．如有可能，在完成学业和做好学位论文的前提下，初步选择一两个比较适合自己的重要课题，作一些资料方面的具体准备．如果学位论文的选题属于数学方法论或认知心理学，与数学内容的联系就更加密切了．

《数学教育学报》是目前国内在数学教育方面惟一的学术期刊．研究数学教育理论，就不能满足于通常的教辅类期刊，而要更多地阅读《数学教育学报》．而《数学教育学报》不是通过邮局发行的，很多城市和学校的图书馆未必订阅，订阅的也未必各期齐全．所以，在读研究生期间，可以抓紧机会，每一期都看．觉得可能会有兴趣的，先记下作者、题目、卷、期、页码，以备查阅．读后感到特别有参考价值，将来可能经常要引用的，可以全文复印下来．

国外有一些重要的数学教育学术期刊，如果有条件看到，同样值得关心．其中，英国出版的《国际科学技术中的数学教育杂志》(International Journal of Mathematical Education in Science and Technology)，既讲教育，又谈数学，虚实并重，还刊登过一些有关中国数学教育研究的论文，可供参考．

另外还有一些比较容易见到的外文数学期刊，也与中学数学有关．例如美国的《数学教师》(Mathematics Teacher)，内容紧扣美国

ABC乐学天府

的中学数学教学,形式生动.其中有一栏目“读者反映”(Reader reflection),刊登世界各地读者的短文,包括一些中国读者的稿件,集思广益,值得一看.美国数学协会的《数学杂志》(Mathematics Magazine),有许多关于中学数学及有关的现代数学知识的文章,有初等问题及解答,参考价值也比较大.《美国数学月刊》在数学上的层次更高些,不过其中也有一些初等数学文章和初等问题及解答,可供参考.苏联的《数学教学》,各期中已有很多文章译成中文,在国内的《数学通报》等期刊上发表,在尚未翻译的文章里仍有不少有价值的参考资料.

外文的中学数学期刊很多,以上只介绍了其中最容易见到的几种.如果条件许可,多翻几种外文杂志,有助于开阔思路.资料未必当时都能用上,留在身边,天长日久,偶然发现有用,可以信手拈来,全不费力.

总之,大学生和研究生阶段,可以从数学观念、数学知识和资料积累等方面,为日后进行中学数学研究做一些试探和准备工作.也有人在学生时代就发表文章,不过学习机会难得,文章此时不宜多写,趁着有老师指导、有丰富资料,蓄势待发,比较主动.

4. 业余爱好者

在中学数学的专业队伍之外,有很多各种各样的业余爱好者.

学生家长是被动的业余爱好者,为了子女学习的需要,不得不临时对数学发生兴趣.一部分不讲数学教学法课程的大学教师,或多或少地参与一些中学数学研究,这是一群顺路的业余爱好者.还有一些人,不教中学数学,没有子女上中学,也没有人邀请参与中

学数学研究活动,自觉自愿喜欢中学数学,研究中学数学,是自发的业余爱好者.

业余爱好者们可以为中学数学研究做些什么事呢?

(1)被动的爱好者

家家户户的小孩子都要经历中学时代.数学课外作业遇到困难,老师不在身边,只能问家长.家里有人做中学数学教师的,毕竟是少数;其余家庭的父母只好临时当业余数学顾问了.

业余数学顾问的任务不轻.小孩儿有一道题不会做,拿来请教,总希望答案立等可取.不会做的题目,包含着某种麻烦.拳不离手,曲不离口.多年不打拳不唱曲的人,忽然要舞拳弄棒,引吭高歌,难免感觉心有余而力不足.可是,看着孩子那期待的目光,什么都不要说了,硬着头皮,接过题目来,研究研究.

不熟悉中学数学的家长,能指导熟悉中学数学的子女吗?

能指导,而且能指导得很好.只要注意研究,就会发现其中有窍门.

题目不会做,可能遇到的第一个难关是看不清题目的意思.

所以,家长不妨先问一句:"题目里要你做什么事啊?"

这样就促使学生仔细看题目,明确任务.任务是根本.大路千万条,该走哪一条,要看是否通向目的地.目标看不真,脚底下乱奔.

任务清楚了,还是不会做.

于是家长再问:"题目给你什么条件呢?"

知己知彼,百战百胜.

学生又研究一遍题目,明确条件,看清条件和任务之间的差距.还是不会做,孩子的眼睛又望着你了.

有些题目难做,是因为带有隐含条件,初看起来条件太少,不够用,要通过细查深挖,发现隐含条件,才使问题迎刃而解.

所以家长不能松劲,要追问一句:“有没有什么条件咽在肚里不说,让你猜?”

孩子把题目再查一遍,摇摇头.困难与隐含条件无关.审题完毕,第一道检查程序结束,转入第二道检查.

解题可能遇到的第二个困难,是岔路太多,迷失方向.

家长可以提出建议:“你先到任务那边,往回看,向条件靠拢;再从条件这边往任务方向接应,看看能不能胜利会师.”

这是一条最有效的基本解题策略,叫做两面夹攻.

孩子还是摇头.看样子攻不下来,再想办法.

解题可能遇到的第三个困难,是条件和任务隔山隔水,不能直通,需要逢山开路,遇水架桥,或者绕道而行,奇兵天降.

于是家长可以再问:“是不是条件和任务之间有个大水塘,一步跨不过?能不能在水塘里垫几块砖头,露出水面,脚踩砖头走过去?能不能从水塘旁边绕过去?能不能往后退几步,来个小助跑,利用冲劲,猛地一下跳过去?”

这里一口气提供了三种常用解题策略:插,绕,退.

如果这些好主意还不对路,那就可能遇到了解题路上的第四个困难,即条件分散,不能集中使用.

这时家长又问:“是不是三个和尚没水吃,条件和任务捏不拢,各管各?能不能把它们搬搬家,变变样,捏成拳头好做事?”

这里又提供了一个威力强大的解题策略:变.

对于中等以上程度的学生,在提示这么多常用解题策略的过程当中,常会触发灵感,恍然大悟,说声“知道了”,拔腿就跑.

诸葛亮不会舞刀弄枪,全凭谋略高强,调兵遣将,决胜千里.战

斗任务分派完毕，诸葛亮摇他自己的鹅毛扇，前方冲锋陷阵自有关、张、赵、马、黄.

一般说来，中学生精于记忆，善于模仿.通过模仿老师的解法，可以解决许多问题，因而相对地放松了理解的环节.小技巧学得用心，基本方法可以放心，思路分析缺乏耐心，解题策略很少关心.许多时候，数学题不会做，是由于不习惯从策略的高度去探索方向，脚步飞快，找不到路，也是枉然.

家长的理解力强，工作经验和生活经验丰富，做事能从大处着想，小处着眼.家长辅导子女，需要扬长避短，着重提醒常用解题策略，指点迷津，不必包打天下.数学方面的细节留给学生自己考虑，那是孩子们的强项.家长扮诸葛亮，孩子演赵子龙.

由此可见，中学生的家长需要研究数学解题策略，并且有条件研究解题策略.研究成果不求发表，但求见效.

(2)顺路的爱好者

专门讲授数学教学法的大学教师，自然非常关心中学数学.

还有一些大学教师，讲数学课，但是不讲数学教学法，由于各种原因，有时也分出一部分精力研究一点中学数学.

大学教师里面的中学数学业余爱好者们，一般有下面几个有利条件：

第一，能接触外文通俗书刊，能阅读外文数学资料；

第二，熟悉大学数学课程；

第三，对现代数学的某些方面有比较深入的了解；

第四，有不同程度的研究能力和研究经验；

第五，对电子计算机有所了解，并有一定使用经验.

所以，大学教师业余研究中学数学，宜于发挥自己的长处，带

来新颖信息和新鲜气息.

例 1　近似值数列的通项.

圆周率 π 的不足近似值排成一个数列:

$$3,3.1,3.14,3.141,3.1415,3.14159\cdots$$

能否写出这个数列的一个通项公式?

以往在高中代数课里,讲数列的通项公式时,说到并非所有数列都能写出通项公式,有时就拿例 1 这样的近似值数列做例子,认为不能写出它的通项公式.

随着中学数学竞赛活动的持续进行,大学《初等数论》中的高斯函数 $[x]$ 在中学里逐渐被熟悉,它表示实数 x 的整数部分,即:不超过 x 的最大整数.例如

$$[2.4]=2,[2]=2,[-2.4]=-3,$$

等等.在电子计算机中,也经常应用取整运算 $[x]$.

利用高斯函数,容易作出例 1 数列的通项公式如下.

解　用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,那么圆周率 π 的不足近似值数列可以写成

$$[\pi],\frac{[10\pi]}{10},\frac{[10^2\pi]}{10^2},\frac{[10^3\pi]}{10^3}\cdots$$

因而这数列的一个通项公式是

$$a_n=\frac{[10^{n-1}\pi]}{10^{n-1}}\quad(n=1,2,3\cdots).$$

(3)自发的爱好者

还有一些人,在工作之余爱好中学数学.这些爱好者大致属于两种不同类型:一种是以数学为乐趣的,业余爱好数学是为了使生活更加丰富多彩;另一种是以数学为需要的,业余爱好数学是为了

ABC乐学天府

发明创造.

1° 为了乐趣

享受成功的喜悦,是一种最大的乐趣.所以,在寻求乐趣中,也包含着寻求发现.

数学是对智力的一种挑战.在工作岗位上整天忙碌,回到家中,忙里偷闲,玩一会儿数学,可以转移兴奋点,哈哈一笑,忘却烦恼,疲劳全消.

数学是锻炼头脑的体操.生命在于运动.退休以后,既要运动身体,又要运动头脑.经常玩玩数学,锻炼思维的条理性和逻辑性,有益健康,老当益壮.

数学也是有助于调节心理的一剂良药.曾经有一位日本老人,因病卧床多年,研究幻方,借以自我调节,忘记病痛,后来还出版了一本内容丰富的幻方专著.

希望在业余时间从数学中获得乐趣,可以收集一些有趣的数和图的问题,例如填数游戏、拼图游戏等.做这些游戏,固然要试试凑凑,还要算算想想.

做过一定数量的数学游戏以后,自己也能编出新的类似题目来.如果希望让别人分享快乐,可以把自己新编的趣题写成稿件,每题一页稿纸,投寄给通俗期刊或教辅期刊,这些期刊一般都讲究思想性、科学性和趣味性,很欢迎短小新颖的趣题.

在趣题的形式下,常常隐藏着一些有重大理论价值的数学问题.这要感谢通俗作家们,能以生动有趣的简单形式,把数学上一些重要问题通俗表现出来.特别是幻方、正交拉丁方等,在趣题中出现的机会更多.

例如,图 18 所画的蝴蝶图案,隐含着一对正交的 3 阶拉丁方.

这幅图所提供的游戏,是猜规律.将图中 9 个蝴蝶里遮起 3 个

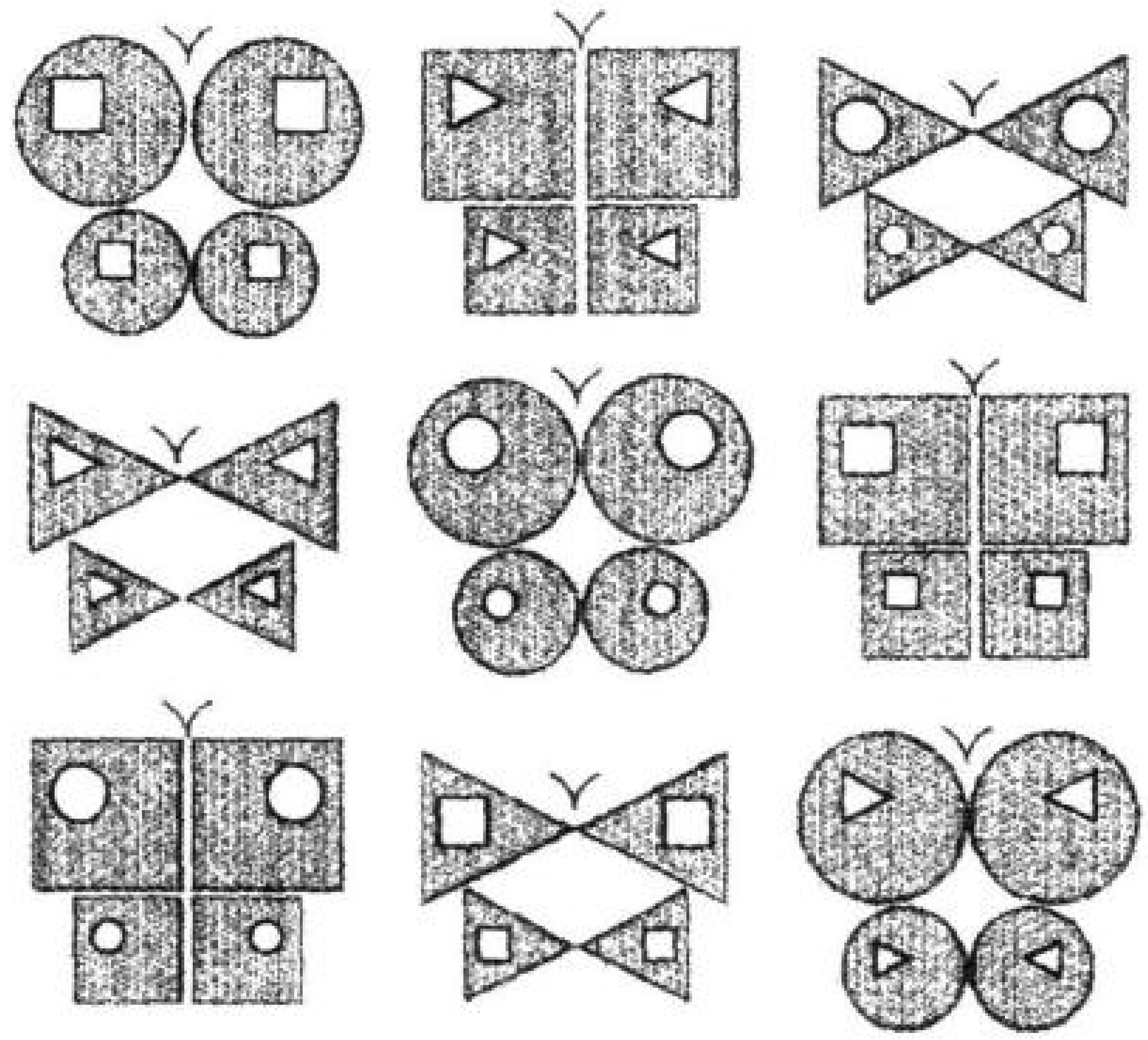

图 18

来,使遮盖的 3 只蝴蝶在不同横排和不同竖排上,让你的朋友来猜,看看遮去的每只蝴蝶各是什么形状.

这个简单游戏里,隐含着深刻的数学道理.

图中的 9 只蝴蝶,排成方阵,横看每行 3 只,竖看每列 3 只.这叫做一个 3 阶方阵.

先看蝴蝶每个翅膀的外形.有三角形的、正方形的和圆的,共 3 种不同形状.图中每一行 3 只蝴蝶的翅膀形状不同,每一列 3 只蝴蝶的翅膀形状也不同.

如果一个 n 行 n 列的方阵由 n 种不同元素排列而成,使得每一行的元素各不相同,每一列的元素也各不相同,就把这个方阵叫做 n 阶拉丁方.

在图 18 中,蝴蝶翅膀的形状排成一个 3 阶拉丁方.为了说话方便,.姑且把它叫做翅膀拉丁方.

其次看图中蝴蝶翅膀上的斑点.斑点的形状,有三角形的、正方形的和圆的,也是3种不同形状.图中每一行3只蝴蝶的斑点形状不同,每一列3只蝴蝶的斑点形状也不同.所以,蝴蝶斑点的形状也排成一个3阶拉丁方,把它叫做斑点拉丁方.

现在看图中蝴蝶翅膀形状和斑点形状的搭配.找找看,有没有两只蝴蝶的形状完全相同?

没有!9只蝴蝶,翅膀形状和斑点形状的搭配,完全没有重复!

对于这种互相配合全无重复的翅膀拉丁方和斑点拉丁方,称它们为一对正交的拉丁方,由于图中的蝴蝶图案是利用正交拉丁方设计的,就显得富于变化,结构严谨,暗藏规律,美观大方,耐人回味.

正交拉丁方的理论,属于组合数学的研究范围.由于正交拉丁方体现了元素之间搭配的高度均匀性,所以在试验设计中得到实际应用.

由此可见,数学游戏是一块藏龙卧虎的宝地.可以每次只花几分钟,琢磨一道小小趣题;也可以长驱直入,走向数学理论及其应用的专门研究.

2° 为了发明

有些人在业余时间起劲地研究中学数学,不是为了娱乐和消遣,而是寻求发明和创造.

近几年来,业余研究中学数学最勤奋、成效最显著的,是美术工作者.

过去的美术图案,讲究手绘,线段生动自然.美术课上画图案,学生画边框想用直尺,只能偷偷摸摸,不让老师看见.若是不小心被美术老师发觉,定然批评一顿.

现在的美术图案,流行一种新的方向,叫做平面构成和空间构成.直尺和圆规成了标准工具.平面构成表现平面图形,空间构成表现空间图形,全部几何化,线条基本上是形形色色的线段、圆周和圆弧.艺术家的天赋,把简单平凡的直线和圆变得琳琅满目,美妙非凡.

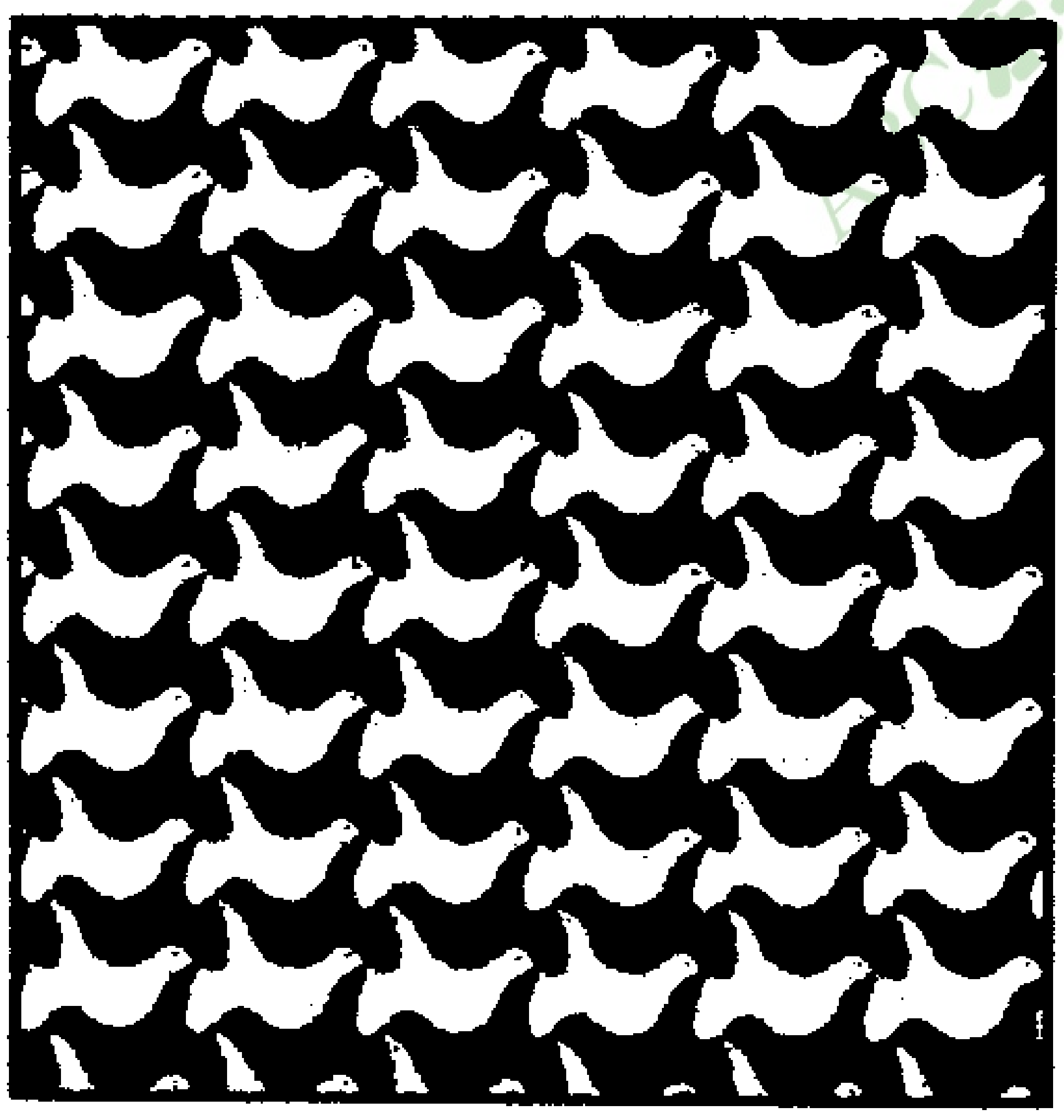

图 19

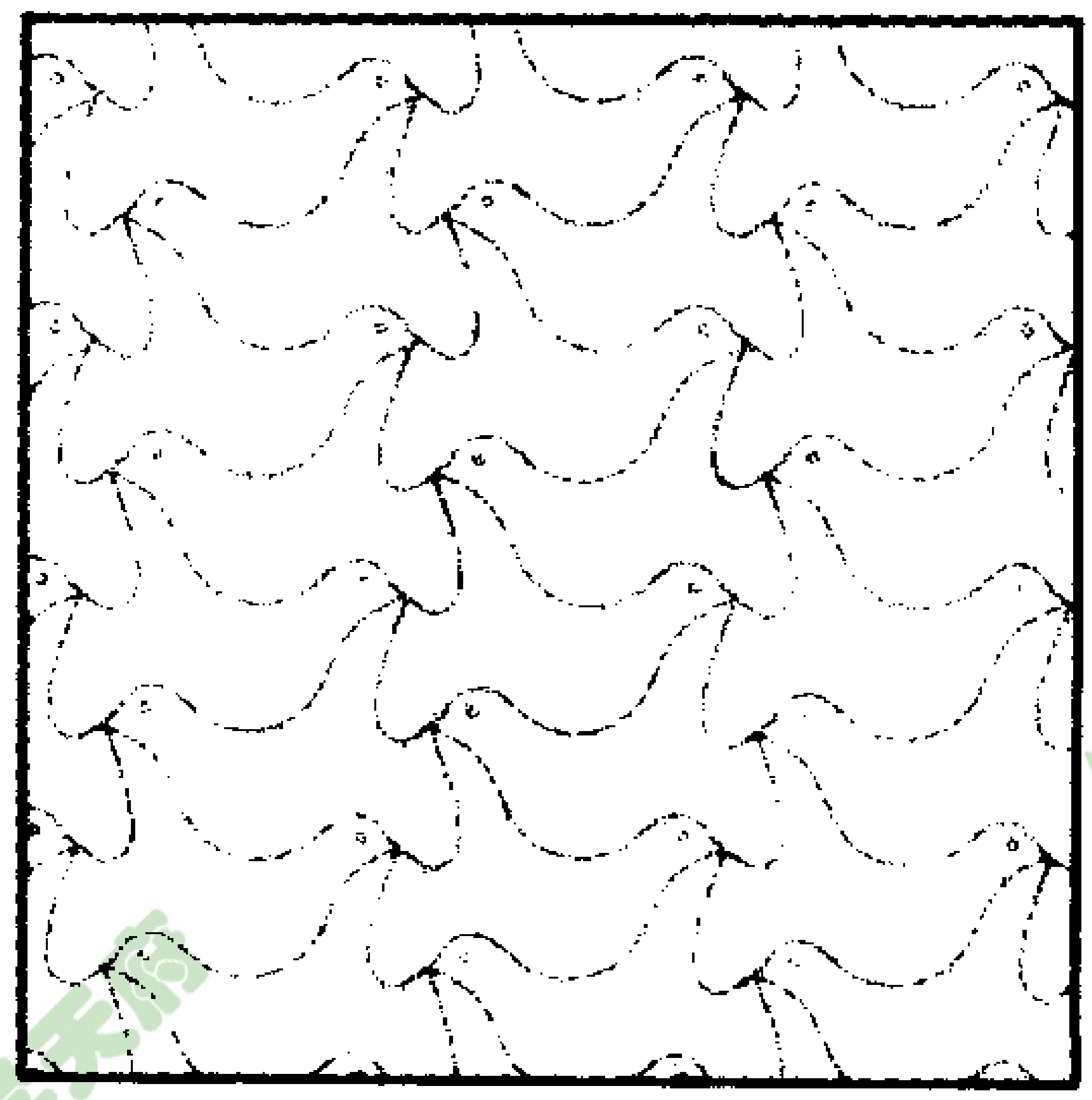

图 20

图 19 是一种飞鸽连续构成图案,图 20 是它的局部放大图形.这种图案越看越有趣味.

不妨试一试.先向图 19 大致瞄一眼,看到的是大群白鸽子向右飞.然后把头转向旁边,再转回来,又瞄一眼,这次看到的是大群黑鸽子向左飞.奇怪呀,这是怎么回事?两眼盯住图仔细观察,这才发现,原来在白鸽子中间的黑影恰好是黑鸽子,黑鸽子中间的空白恰好是白鸽子,黑、白鸽子正好把画面填满,既无重叠,又无间隙.

再仔细研究图 20 中的局部放大图形,发现鸽子的轮廓线是由圆弧和线段巧妙组合形成的,几何图形的组合,使得白鸽子的轮廓正好与黑鸽子的互补.由于几何图形都有各自的尺寸和相关位置,

可以精确控制,设计成功一个小的单元,就有把握扩展到整个平面.用几何线条的数学美,来代替动物写生的自然美,源于生活,高于生活,给人以更高层次的美感享受.

随着电脑走进千家万户,几何图形在美术图案中的应用将会迅速取得大发展和大普及.

在任何一台电脑的WINDOWS菜单中,用鼠标双击"附件"图标,屏幕上出现"附件"的菜单,然后在新菜单中用鼠标双击"画笔"图标,就打开"画笔"工具,可以作画了.移动鼠标,就能在屏幕上方便地用彩色画出直线、正方形、长方形、圆和椭圆,还可以擦去不要的线,可以移动和复制,因而能画出各种美丽和有趣的几何图案,又快又好.如果电脑里安装了专业的绘图软件,更可以用电脑画出大幅精美的彩色几何图形.

业余爱好者如果要与专业队伍比发明创造,一定要发挥自己的长处.一般说来,在资料、时间、专业研究经验和手算的速度上,业余的比不上专业的.但是如果业余爱好者能用电脑进行计算,就会反过来在速度上占便宜.

现在电脑的操作系统一般装到DOS 6.22版以上,在这样高版本的DOS里都附有BASIC编程语言,至少是QBASIC.而用BASIC语言编制程序的方法很容易学,各地的书店里都能买到讲解BASIC用法的书.看看书,在电脑上实践实践,很快就能学会编程序.

所谓程序,粗略地说,就是一大套命令,吩咐电脑首先做什么事,接下去做什么事,如果这样怎么对付,如果那样又怎么办,什么事情不厌其烦一遍又一遍重复去做,直到何时停止,等等;当然还要规定,遇到什么情况收工.

经过电脑检查,你编的程序符合规范,电脑能够完全看懂,就

可以运行程序，让电脑飞快地计算，你到旁边去喝茶、嗑瓜子，悠哉悠哉，静候佳音.

有了电脑帮助计算，可以尝试解答一些有关整数的问题，特别是几何中提出的整数问题.电脑可以帮助找到一些实例，通过对实例的分析，可能得到启发，有助于发现一般规律.

以上谈到电脑，都是考虑目前最普及的电脑，利用几乎每台电脑都要装的基本软件.目的是希望尽可能多的读者能很快就用起来.其实，有一些非常好的专业画图软件，还有些功能特别强大的专业数学软件，如果能用那些更好的软件，效率提高的幅度将会更大.

例 2 目前还不知道是否存在这样的长方体，使它的棱长、面上的对角线长和体的对角线长都是整数.但是知道存在棱长和面对角线长都是整数的长方体.例如，具有下列 10 组棱长的长方体，它们各个面的对角线长都是整数：

(44, 117, 240), (85, 132, 720),
(140, 480, 693), (160, 231, 792),
(187, 1020, 1584), (195, 748, 6336),
(240, 252, 275), (429, 880, 2340),
(495, 4888, 8160), (528, 5796, 6325).

能否利用电脑找出新的例子，使棱长之比(不计顺序)与以上 10 组数据都不同？如果找到了新的例子，它们的体对角线长是不是整数？

这个问题留给喜欢玩电脑的朋友们.题目的意思，已经说明白了，不过因为做起来要花费一定时间，为了防止误解，需要解释得更清楚些.

设长方体的棱长为 x, y, z，面的对角线长为 m, n, p，体的对

角线长为 t，那么

$$m=\sqrt{x^2+y^2},\ n=\sqrt{x^2+z^2},\ p=\sqrt{y^2+z^2};$$

$$t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

对于问题中举出的第一个长方体，有

$$x=44,\ y=117,\ z=240.$$

这时，由计算知道，面上的对角线长是

$$m=\sqrt{44^2+117^2}=125,$$

$$n=\sqrt{44^2+240^2}=244,$$

$$p=\sqrt{117^2+240^2}=267,$$

它们也都是整数．但是，长方体的对角线长是

$$t=\sqrt{44^2+117^2+240^2}=270.60118,$$

这就不是整数了．

把这个长方体的各棱长度都乘以同一个正整数，例如同乘以 2，得到 88，234，480，那么面对角线长也都乘以 2，变成 250，488，534，所得新长方体的棱长和对角线长也都是整数．但是这不算新的例子，因为只要约去三条棱长的最大公约数，就回到原来数据中的第一个长方体了．我们需要的是棱长之比，因而在最后答案里，每一组中 3 个数的最大公约数都应该是 1．

如果简单地把原来数据中的棱长顺序调换，例如取

$$x=240,\ y=44,\ z=117,$$

那么各个面的对角线长自然还是整数，这也不能算是新的．棱长的排列顺序并不重要，先说谁、后说谁，都是一样．

所以，在编程序的时候，可以规定

$$x\le y\le z,$$

这样会节省很多电脑搜索时间．

ABC乐学天府

四、千里之行始于足下

在这最后一章里，我们打算简单讨论通往发现的道路上可能遇到的一些具体问题.

1.磨砺智慧之剑

有志者事竟成.通向成功的行程，应该怎样起步呢？

不妨尝试从“四勤”做起.

哪四勤？手勤，眼勤，腿勤，脑勤.

(1)手勤

勤写笔记是好习惯.在和数学打交道时，有什么情况，有什么想法，有什么经验，有什么教训，尽量随时记录下来.

有时候怕写笔记，或者因为忙，或者是嫌烦.有一记一，有二记二，费什么时间，有什么麻烦呢？记它两三回，就有切身体会，事情

ABC乐学天府

虽然简单,写写挺费时间.因为要动脑筋,什么事值得记,什么事不记也罢,什么事应该详细写,什么事只需提一提.一面往下写,头脑里就好像录像镜头重播,时而兴奋,时而烦恼,时而捏紧笔杆,时而噗哧一笑.精彩场面在头脑中过一遍,自然要费些时间.但是也有好处,加深了印象,而且还有文字记录,以后查起来方便.

看到书里有好题目、好解法、好讲解,如果是自己的书,就随手用彩笔标上记号,在那一页夹张纸条.夹书签更正规,不过夹很多书签花钱太多,将就些,用夹纸条代替,效果相同.如果是借来的书,就要酌情而定,或者做些摘记,或者只简要记一笔在什么书的第几页有什么好材料.

读一段书,上面有大步跳跃前进的,书中说是“可得”、“显然”、“易知”,却不写出怎样得到.如果这一段内容是关键性的,而且时间允许,不妨动手推导一番,一步一个脚印,心里踏实.其实,有时书中略去的地方还是需要一点小技巧,不过写出来占篇幅,冲淡主题,所以把它精简掉了.况且,有时在跳大步的地方还容易造成误解,甚至疏漏.

以上几个方面,概括起来,大致就是勤做笔记,勤做记号,勤做摘记,勤做注记.

(2)眼勤

眼勤就是要多看、多读.看见有什么与自己的研究兴趣有关的事物,赶快留点神;知道有什么有关的书籍、报刊、资料,尽量找来读一读.

因为我们自己是要做研究,要解决前人没有解决的问题,不能指望有哪一位前辈把进行中学数学研究所需要的一切全都准备好了,集中写在一本书里,让我们能靠一本秘籍闯天下.精读必不可

少,博览也很重要.宽撒网,慢拉绳,才能捕到大鱼.

要看的书很多很多,不可能每本书都逐字逐句仔细吟味.事实上,大多数的参考书里,只有极少一部分可能与我们的研究兴趣有关.所以,为了做到博览,必须习惯浏览.通过很快地翻阅,发现可能有用的材料,然后仔细读、精读.

英语教学的阅读训练分为精读、快读和泛读.一个有志研究的人,也要把自己阅读资料的方式区分出泛读、快读和精读,而不管所读的资料是外文的还是中文的.

(3)腿勤

为了做研究,两条腿也要多辛苦些.

要把各本书上的材料融会贯通,就要互相参照.刚坐定下来捧起一本书细看,又要起身去找另外一本书来参考.

因为自己需要的材料比较专门,家中的书可能很多,却感到不够用,需要跑图书馆,看看最近有没有新到的书,老书里面有没有可取之处.

借来的书,要限期归还,又不能在书上做记号.如果书中需要经常参考的部分很多,抄写太费时间,复印页数多了不上算,不如买它一本.所以还要跑书店.

想买的书,店里不一定有.店里卖的书,有一本看上去不错,可惜价钱太贵,从书架上拿下来,放上去,再拿下来,再放上去,还是没有舍得掏钱,只好依依惜别.回到家里,将书的使用价值与购书支出相比,细想之下觉得还能接受,过两天再跑书店,不料书已不见,别人抢先买去了.从此之后,往书店跑得更勤.

跑来跑去,时间跑掉了不少.但是好资料坐等不来.如果跑了九趟空腿,第十次进书店买到一本非常有价值的参考书,就把九次

跑空的损失全补回来了.巧媳妇难做无米之炊.足不出户,双手不离纸笔,时间是充足了,但是原料不够,哪里会有好的成品呢?

(4)脑勤

手勤、眼勤、腿勤,都离不开脑勤.头脑勤快才是关键.

为了进行数学研究,需要注意锻炼自己的头脑.不但要练持久力,还要锻炼爆发力.

锻炼头脑的持久力,是要做到能连续进行较长时间的计算和推理,而能保持清醒,不出差错,头不晕、不疼.其中的道理人人都能明白.

头脑也要有爆发力吗?什么是头脑的爆发力?

常言道,情急智生.给他充分时间,不紧不慢,想不出好主意来.害得人家等不及了,对他不再抱有希望,转身要走,突然间他兴奋地高呼"不要走不要走,主意来了!"这就是头脑的爆发力起了作用.

为什么要熬到最后关头才急出办法来?前面有那么多时间,没有人等,没有人催,定定心心,为什么不抓紧呢?

其实,前面的时间是抓紧的,也有了不少进展,大约七八成数,但是深不下去,还有一处关键困难克服不了,处于僵持阶段.忽然一急,血往上冲,一刹那异乎寻常地高度兴奋,冲破了障碍,终于形成一套完整的办法.就像温火烧水,烧到摄氏90多度,怎么也烧不开;这时只要开大煤气阀门,来一把旺火,马上就有浓浓的水蒸气冲出水壶嘴,顶开水壶盖.

一般说来,重复做熟悉的事情,主要靠头脑的持久力.做不熟悉的事情,关键时刻,需要迸发创造性的智慧火花,这短暂瞬间要靠头脑的爆发力.

慢走能持久，冲刺很累人．锻炼头脑的爆发力，要注意劳逸结合，有张有弛．要拿得起，放得下，钻得进，跳得出．要舍得休息，适当做一些快节奏的娱乐活动．歇足了，工作的时候，遇到难关，灵感就比较容易上来．

业精于勤．勤劳的人，有时候看上去显得很傻，因为忙来忙去，大部分做的是无用功．但是，胜利不会从天降．中国人说，不会从天上掉下个林妹妹．外国人说，天上不会掉下馅儿饼．与其守株待兔，不如下河捕鱼．吃一粒小小的花生，还要剥掉壳子捻掉皮，才能把花生米送进嘴．更何况要做研究工作，有所发现，有所发明，这样的大事，想要成功，怎么会在乎付出相应的代价呢！

2. 博览参考文献

从事中学数学研究，需要广泛阅读各种有关参考资料．这有三方面的作用：求助，防重，负责．

(1)求助

研究不同于讲课．讲课是“年年岁岁花相似”，研究是“岁岁年年人不同”．

做研究是探索新事物，寻求新发现．如果没有参考资料，什么情况都不知道，头脑里面空空如也，从零开始难以收效．

研究数学从阅读文献开始，先读再思考，边读边思考．参考资料越丰富，研究进程越快，成效越大．

数学定理不申请专利，欢迎引用．数学方法是人类的共同财富，一经发表，全球共享．

书中有资料库.有一些书和一些综合报告,就某一个专题,查阅大量书刊,包括一部分通常很难见到的书刊,从中摘出有关内容,进行分类整理,夹叙夹议,是进行这项专题研究的必读文献.

例如,几何不等式是很多人感兴趣的研究题材.1989 年,荷兰出版了一本 700 多页厚的提要式英文专著《几何不等式新进展》(Recent Advances in Geometric Inequalities),由南斯拉夫作者米特里诺维奇等三人合编,北京大学出版社 1994 年出版了它的中文译本,由宁波大学陈计先生等人翻译.书中从世界各国初等数学杂志和一部分学术期刊中收集了大量有关三角形、四面体等的几何不等式及其推广,大部分不等式只介绍结论和出处,内容极为丰富.

书中有工具箱.有些书不但介绍重要结果,还特别注意介绍有关的数学思想和数学方法,把散乱资料变得井井有条,提供锐利工具,帮助攻克难关.

仍以几何不等式为例.1996 年江苏教育出版社出版了单墫教授主编的论文集《几何不等式在中国》,其中的第一部分是 43 篇新发表的论文或论文摘要,第二部分是 18 篇过去分散发表在各种学术期刊上的高维推广基本论文,最后附有文献索引.如果希望在三角形不等式和四面体不等式研究的基础上,向高维欧氏空间发展,可以从第二部分的基本论文中找到基本思想、基本方法和基本结果,这些是进一步研究必需的工具.

书中有联络图.有些参考资料中指明不同问题之间的联系,甚至不同学科之间的联系,话虽不多,却是作者广泛阅读和深入钻研以后的体会,来之不易.根据资料中提供的线索,有的放矢,顺藤摸瓜,重点阅读,有利于扩大战果,取得更多的新发现.

(2)防重

研究中学数学,所得结果说来简单,既耗精力又费时间.如果一个结果已有别人发现,就不必重复去做,留下时间和精力,准备攀登新的高度.

下面看一个熟知定理的例子.

例 1(蝴蝶定理) 过一个圆的弦 AB 的中点 M 引任意两弦 CD 和 EF,连结 CF 和 ED 交弦 AB 于 P、Q.求证:$PM = MQ$.

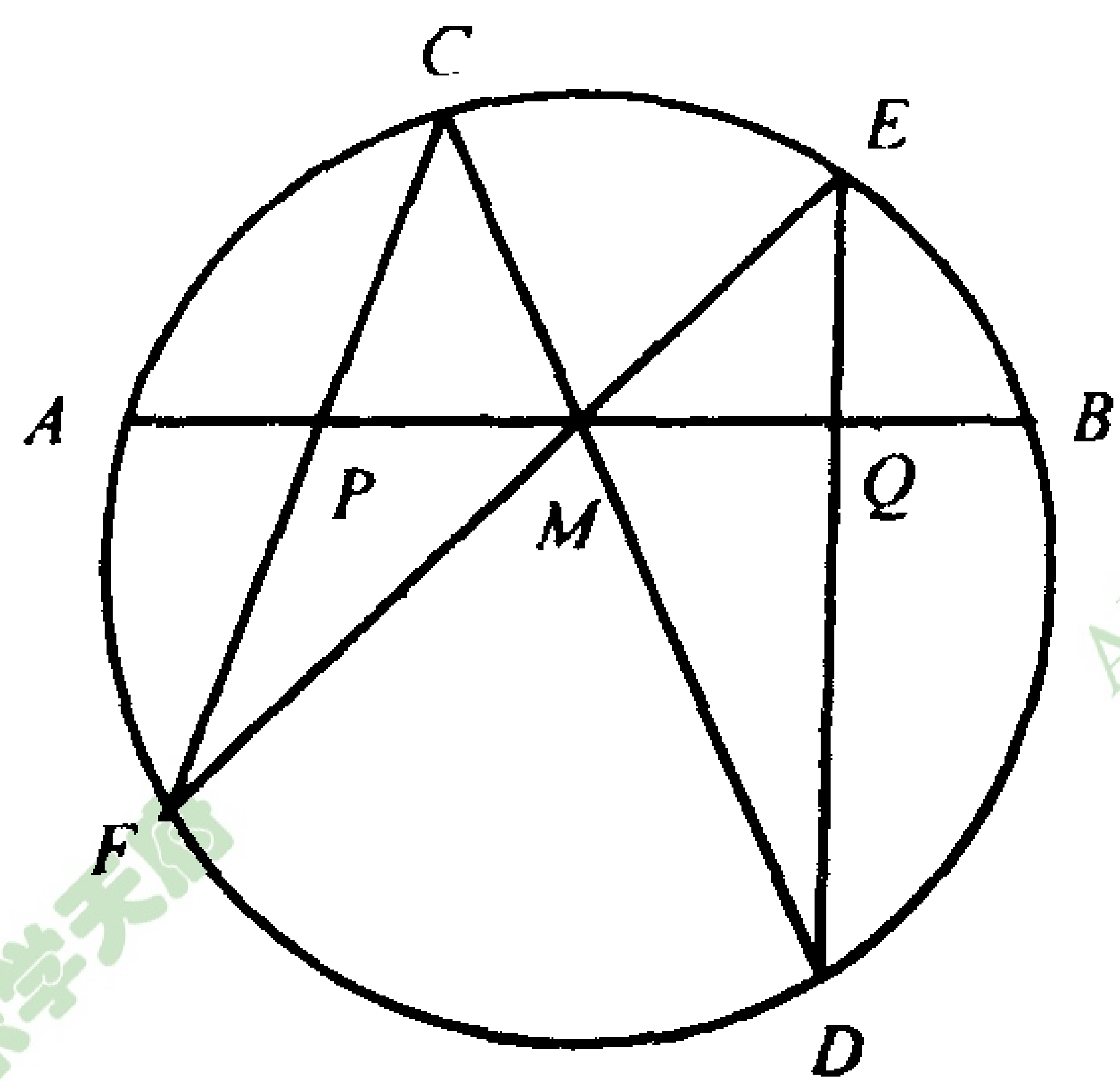

图 21

例 1 被叫做蝴蝶定理,是因为问题的图形像一只蝴蝶展翅飞翔(图 21).1985 年 1 月,岳三立先生主编的《数学教师》杂志问世,在创刊号上发表了杜锡录教授的文章《平面几何中的名题及其妙解》,文中介绍例 1 及其面积证法时,顺便将英文资料中的美丽名称"蝴蝶定理"带进了中文.

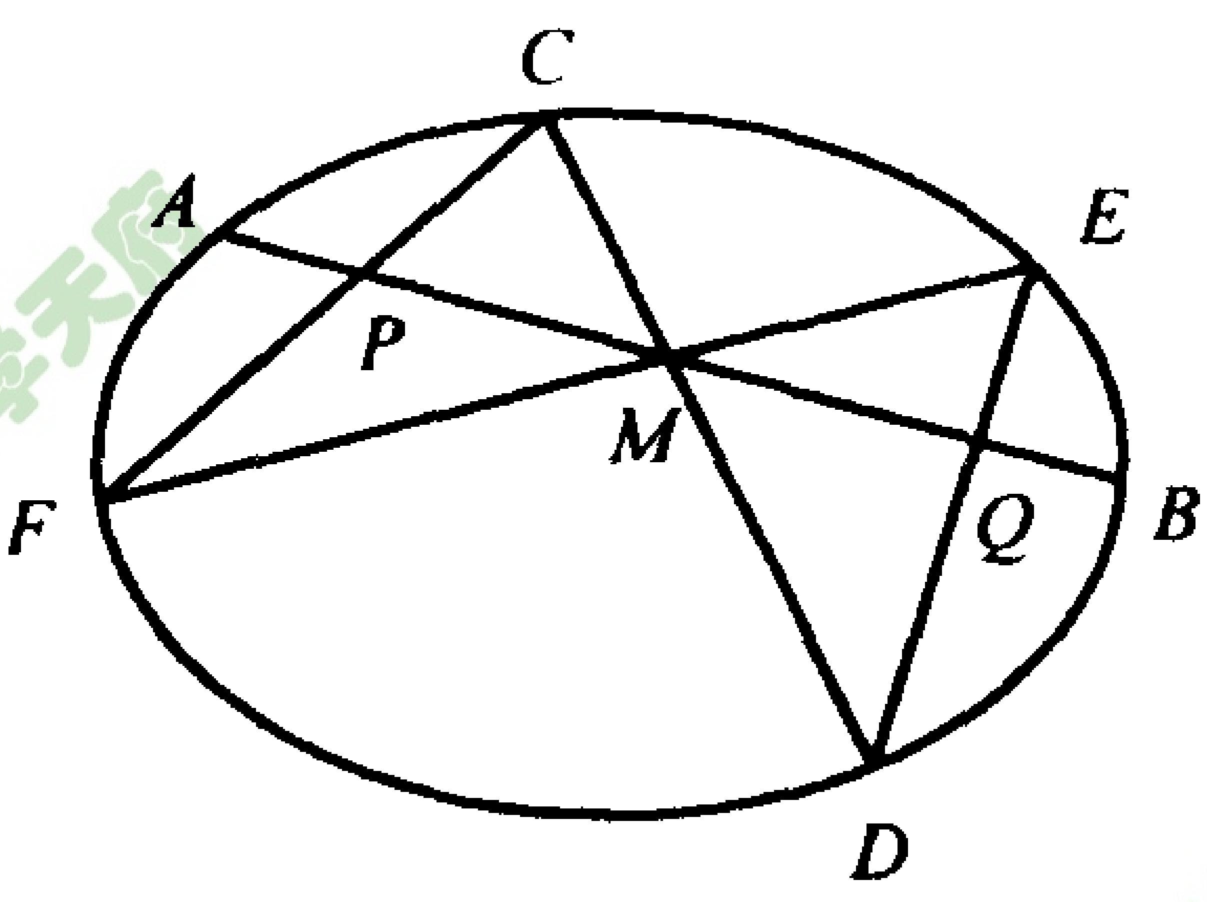

图 22

很自然地想到尝试将这道名题进行推广.有人发现,把蝴蝶定理中的圆换成椭圆,或者双曲线,或者抛物线,其它条件不变,结论仍然成立(图 22).

蝴蝶定理名称是在 1985 年以后才听说的,可算是非常新颖的

了.把它从圆推广到椭圆、双曲线和抛物线,得到的结果,应该是新发现吧?

答案是在"新发现"三个字的前面再加一个字:重新发现.

国外的资料不说,国内的资料现成就有.1983 年上海辞书出版社出版的《数学解题词典(平面解析几何)》,第 676 页第 1113 题,就是蝴蝶定理在二次曲线情形下的推广.原题如下.

例 2 过任意二次曲线的弦 PQ 的中点 O,作两弦 AB、CD;如过 A、B、C、D 的二次曲线(包括退化二次曲线)与直线 PQ 交于 R、S 两点,求证:$|OR|=|OS|$.

原辞典利用二次曲线系证明,最后附有说明,指出例 1 平面几何问题是本题的特例.区别只是字母标注有所不同,也没有出现"蝴蝶定理"这个名词.

奇怪呀,奇怪!早在蝴蝶定理开始扬名华夏之前两年,它的推广形式竟已悄悄出现在神州大地!怎么会出现这种怪事呢?

其实,如果不管这道几何题叫什么名字,就题目本身来看,很多人早已做过.这是因为,在相当长的时间内,国内很多师范院校普遍以北京师范大学梁绍鸿先生编写的《初等数学复习及研究(平面几何)》为教材,书中第三章证题术习题十第 24 题基本上就是这里的例 1.梁先生的书是 1958 年人民教育出版社出版的第 1 版,直到 70 年代还很流行.所以,还是关于圆的特殊情形先传入中国,推广到一般二次曲线的情形后传进来.早先人们只关心题目的数学内容,埋头解题;后来才注意到,这样好的题目,还有着好的解法、好的名称.妙题、巧解、美名,好马配好鞍,名气忽然大起来,兴趣忽然浓起来,对原先不挂蝴蝶牌的问题形式反而印象淡薄了.

连蝴蝶定理这样的最新流行定理,稍稍推广,还会出现重复劳动,其它问题的情形更加可想而知了.所以,为了减少重复,节省时

间和精力,多看参考资料有好处.即使是非常熟悉的书,也不妨再翻翻.

(3)负责

世上有这么多国家,每个国家有这么多有关中学数学的书刊,有谁能通晓各国文字,查遍全球书刊呢?如果不是查遍全球无觅处,怎能断定一个结果是名副其实的新发现呢?

如果有那么一天,全世界所有的中学数学书刊都输进了电脑网络,而且网上文字翻译的软件很管用,那就只要坐在家里,打开电脑,进入 Internet,告诉电脑,你有一道什么题目,请它查查是否在书刊中出现过.于是你很快就能得到满意的答复.

这样的美妙日子暂时还没有到来.

所以,现在我们能做的事,就是自己尽可能多查些有关资料,越多越好.查遍所有能够找到的资料,上面都没有与自己所发现结果相类似的结论,那么可以相信,自己的发现很可能是新的.自己先查有无已知类似结论,是一种负责的表现.从事科学研究当然要有高度责任感.

如果所需要的资料在当地的图书馆和书店找不到,有两处可以试一试.一处是北京海淀图书城九章书店,那里专门卖各种数学书,可以写信去索取图书目录,根据需要,汇款邮购.另一处是各家出版社的读者服务部,有时会有自己社里出过的书供应.

3. 认定大致方向

有了平时的磨炼,又阅读了一定数量的参考资料,就比较容易

确定,自己近期大致在中学数学的哪一块土地上耕耘.

为了使工作更有成效,可以先分析当前社会需要,再分析条件的可能,然后基本定位.

(1)需要

当前社会对中学数学研究的最大需要是什么?

从宏观上看,集中到一点,就是希望能使中学数学教学更好地为现代化建设服务.

"数学"是科学概念,"中学"是教育概念."中学数学"的概念既含教育,又含科学,教育在前,科学在后.评价一项中学数学研究成果的重要性,很自然地首先看它的教育意义,其次再看科学价值.

初中代数与霍普夫代数不可同日而语,平面几何与芬斯拉几何难以相提并论.要论科学价值和问题的困难程度,中学数学研究与现代数学研究有天壤之别,无法拿现代数学研究论文的高标准、大尺度来衡量中学数学研究.所以,数学家们容易倾向于认为,中学数学研究不属于数学,而属于教育.当然,人们也都同意,数学课要由数学老师来上,而不是由教育学或心理学老师讲授.所以数学教育也必须研究数学.中学数学教育里的数学课题,有力地推动了中学数学研究的发展.

中学数学教育,讲的是数学,练的是数学,考的还是数学.但是所干的事业是教育.要把课本上印的、黑板上写的和老师讲的许多数学知识成功地转移到学生的头脑里,就需要运用教育规律,研究教育规律,把教育的规律和数学的内容融为一体.所以,中学数学研究不能埋头只解数学题,而要考虑怎样运用教育学和心理学的规律,把现有中学数学教育涉及的数学内容适当改进,使教学效果更好.

由于鼓励教师开展教学研究，提升高级职称要求有发表的论文.教育论文不同于教学经验总结.这也增加了一种压力，推动中学数学教师努力用心理学原理和数学思想来分析具体数学材料，进入更深层次的研究.

(2)可能

中学数学研究的主力军，是浩浩荡荡的中学数学教师队伍.

熟悉中学数学教学大纲和教学要求，熟悉中学数学教材、例题、习题和考题，熟悉中学生，有实际教学经验，这些都是中学数学教师的突出优势.

需要教给中学生的，不仅是数学的概念、定理、公式、例题和习题，这些都是有形的.还要把数学思想和数学方法教给学生，提高学生分析问题和解决问题的能力.数学思想、数学方法和数学能力是无形的.

最难捉摸的是数学思想.到哪里去找参考资料呢？大学课本里多的是.

过去所学的大学数学知识，虽然定理证明和习题解法已经还给大学老师，但是拿起旧课本来，翻翻定义，看看定理的条件和结论，重新揣摩其中的数学思想，困难并不很大.而这样温习的结果，能促使自己发掘用高等数学思想解决中学问题的能力，节省解题时间，形成良性循环.

带着中学问题看大学课本，还有一个附带收获：可以发现一些中学数学题的高等数学背景，特别是一些高考试题的高等数学背景.大学希望录取的考生有学习高等数学的潜力，中学希望自己的学生进了大学有后劲，目标一致.中学数学教师主动地用一些有背景的数学题训练学生，有利于提高学生的数学素质，也有助于提高

学生的高考成绩,一举两得.

提高能力的问题,自然直接与心理学有关.讲解数学方法,分析思路,就要讨论头脑里怎么想,这样也就需要心理学伸出援助的手了.至于数学思想,更是涉及创造发明的心态分析.所以,在腾出时间以后,中学数学教师最好再看一点心理学,特别是教育心理学和认知心理学,各找一本教材来,带着数学的想法,去体会教育心理学和认知心理学的原理,会觉得很亲切.

国内和国外的数学学术期刊,基本上不发表中学数学的研究文章.但是有很多中学数学期刊,着重教学辅导,正好与中学数学研究同路,提供了发表文章的机会.还有一些教育杂志,也发表数学教育的文章.

(3)定位

各人可以根据自己的具体情况,确定一个近期研究的大致方向.

一般说来,刚开始做研究,可以选一些短平快的小题目.例如一道好题,一种巧解,一个小技巧,等等.不要满足于抄下来题目,写出了解法.还要再想一想,你觉得它好,好在哪里?把好处找出来.然后在语言上锤炼,尝试只用一两句话,最多三四句话,突出说明主要精彩的地方,细节就不谈了.短平快小题目的取材可以灵活,见缝插针,不必带有系列性.

每做一个小的研究题目,就有了一个立足点.等到能够站脚的地方多了,就可以看看,哪片地方的点相对多一些,因而尝试在这一片先发展根据地,用适当的数学思想来观察问题,指导解题方法,把一点一点的研究扩展成一条线一条线的研究.

在第二层次的研究取得一定经验以后,就可以考虑向第三层

次过渡,请心理学加盟.不只是心理学的名词,最要紧的是心理学的原理.数学思想是抽象概括出来的,心理学原理也是抽象概括出来的,抽象对抽象,道理相通.更何况在潘菽先生主编的《教育心理学》书中,第九章就是专门研究数学教学的心理学问题.

在第三层次上,心理学的线和数学思想的线交织成面,研究是一个面一个面地铺开.全面开花,火力交叉.一手是数学,一手是心理学,左右开弓,要什么都有.既瞄准教材,又瞄准教法,双管齐下,谁碍事打谁.

以上三个层次,主要是针对中学数学教师的长期研究来划分阶段的.如果发现有中学生对研究有兴趣,指导教师宜于引导学生只考虑短平快的小题目.

4. 小心探索前进

在本书的最后一节里,我们将要通过两个不同类型的例子,介绍研究它们的全过程,显示各个幕后环节,以及各环节如何配合.

(1)编题实例

下面是编制两道工具题的过程实例.

1° 轻松的秘诀

不看书,不看备课笔记,也不看任何纸头,拿起粉笔,随手在黑板左边写一个无理方程,黑板右边写另外一个无理方程.请两位学生上来板演,其余学生在各自的座位上选做其中的一道.教师两手空空,悠然巡视,有学生问答案,随口就能说出.课堂气氛非常轻松.

要能做到这样，按照通常办法，教师在前一天晚上一定要下功夫，把两道无理方程背得滚瓜烂熟，每道题的答案也背得正确无误.

但是这次不同，因为有了一个秘诀，无理方程可以随手写出来，答案可以随口说出来，不费吹灰之力.不要说两道题，再写20道，也是易如反掌.

什么秘诀？看看下面的例1，自然知道.

例1　对于任意正数 m、n、a、d 和任意实数 b，下面的无理方程有且仅有两个实数根0和 $-\frac{b}{a}$：

$$m(ax^2+bx)+n\sqrt{ax^2+bx+d^2}=nd.$$

根据例1，教师在辅导答疑时，可以随手写出一个无理方程，让学生练习，并且无需思考，就知道学生解得对不对.

例如，取 $m=1$，可以写出下列方程：

$$x^2-5x+3\sqrt{x^2-5x+1}=3\quad（答案：x=0,5）;$$

$$x^2+4x+2\sqrt{x^2+4x+9}=6\quad（答案：x=0,-4）;$$

$$x^2-888x+\sqrt{x^2-888x+4}=2\quad（答案：x=0,888）$$

等等.要写多少有多少，万无一失.

有这样的好事？例1的结论对不对呀？证证看.

证明　因为当 $x=0$ 或 $x=-\frac{b}{a}$ 时，

$$ax^2+bx=0,$$

代入方程，两边显然相等，所以 $x=0$ 和 $x=-\frac{b}{a}$ 是原方程的两个根.

下面证明原方程没有任何其它实数根.为此，令

$$y=\sqrt{ax^2+bx+d^2}, \qquad ①$$

那么

$$ax^2+bx=y^2-d^2,$$

因而原方程化为

$$my^2+ny-(md^2+nd)=0.$$

这是关于 y 的一元二次方程，它一定有实数根(因为已经验证了原方程关于 x 有实数根).它的两根之积是

$$y_1y_2=-(md^2+nd)<0.$$

所以 y_1 和 y_2 中，一个是正数，另一个是负数.

以 y 的负根代入①式，所得关于 x 的方程无实数根.

以 y 的正根代入①式，所得关于 x 的方程最多有两个实数根.

因为已经验明有了两个实数根 $x=0$ 和 $x=-\dfrac{b}{a}$，所以原方程有且只有这两个实数根.

2° 后面留了一手

按照例 1 自编无理方程，特别简单，几乎不动脑筋，只管往下写.不过也有一个缺陷，必有一根为 0.

这样写多了，就会露出马脚.学生会问，老师，你的方程怎么总有一个根是 0 呢?

下面的例 2 可以解决这个毛病.

例 2　对于任意正数 m、n、d 和任意两个不相等的实数 p、q，下面的无理方程有且仅有两个实数根 p 和 q:

$$m[x^2-(p+q)x]+n\sqrt{x^2-(p+q)x+pq+d^2}=nd-mpq.$$

证法与例 1 相类似，略去.

例如，取 $m=1,d=2,p=3,q=4,n=5$，利用心算，从例 2 中

的一般法则得到无理方程

$$x^2-7x+5\sqrt{x^2-7x+16}=-2 \quad (答案:x=3,4)$$

类似地,可以随时随地写出许多不同的其它无理方程,并且立刻说出它们的解.

上面两个小小的工具题,可以节省时间,少费脑筋,保证正确,带来方便.

3° 馅饼不会从天降

这样合用的工具题,当然不会从天上掉下来,要靠自己动手研究,根据需要,定制出来.

事实上,以上例1和例2中的编题公式,是我为了准备这一节的例题,专门编制出来的.

虽然过去很多人都在改编或自编数学题,我自己写书时也常编题,但是只有题目流传下来,编题的过程却大多不说、不记、不问,逐渐被遗忘了.现在要研究怎样编题,编题的过程上升为主要的,编出的题目倒是次要的.只好自己重新实践,把现在这一次的编题结果和编题过程全部记录下来,以供参考.

整个过程大致可以分成四步,顺次介绍如下.

4° 调查社会需要

编题研究的第一步,是进行调查,看看根据当前教学要求,迫切需要怎样的题型.

例如,关于初中代数解无理方程,在近期的中考试题里,查到了下列问题.

问题1　解方程　$x^2-\sqrt{x^2+2}=4$.(1996年,天津.答:$\pm\sqrt{7}$.)

问题2　解方程　$x^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$.(1995年,南京.

答:4, -1.)

问题 3　用换元法解方程　$x^2-5x-2\sqrt{x^2-5x+2}=6$. (1996 年,北京.答:7, -2.)

问题 4　解方程　$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$. (1995 年,天津.答:0, -5.)

问题 5　解方程　$2x^2+x-\sqrt{2x^2+x-1}-7=0$. (1995 年,广州会考.答:2, $-\frac{5}{2}$.)

问题 6　解方程　$2x^2-3x+2\sqrt{2x^2-3x+5}=3$. (1995 年,福建五地市.答:1, $\frac{1}{2}$.)

问题 7　解方程　$2x^2-3x+6\sqrt{2x^2-3x+2}=14$. (1996 年,河南.答:2, $\frac{1}{2}$.)

问题 8　解方程　$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}=-3$. (1996 年,吉林.答:3, $-\frac{9}{2}$.)

问题 9　解方程　$x^2-2\sqrt{x^2-5x+3}=5x-4$. (1996 年,西安.答: $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.)

问题 10　解方程　$2x^2-5\sqrt{x^2-3x-1}=6x+5$. (1996 年,辽宁.答:5, -2.)

学习不是为了考试,但是为了检查学习效果,必须要有考试.考题体现了教学的基本要求.短短两年间,在各省市的中考试题里面,同一题型的解答题就出现 10 次以上,还不包括它在填空题和选择题中的变化形式,可见这种题型非常重要,必须掌握.年年考,

各省市都考,英雄所见略同.

5° 分析调查资料

编题研究的第二步,是对收集到的素材进行分析.

观察这些问题中的方程,发现它们有以下共同特点.

第一,方程都具有下面的形式:

$$m(ax^2+bx)+n\sqrt{ax^2+bx+c}=k,$$

其中 m、n、k、a、b 和 c 都是整数,m、n、a 不为 0.

第二,解法要点,都是利用换元法,令

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

化为关于 y 的一元二次方程,解出 y;然后对于每个 y 值,得到一个关于 x 的一元二次方程,解出 x,最后验根.

第三,解 y 时,最多可得两个实数根;然后对于每个 y 解相应的 x,最多也可各得两个实数根.所以,一般说来,最多可得 4 个 x 值.但是以上 10 道题解出 x 以后,都只有两个实数根.这就是考题的妙处,在基本题型中包含微小变化,以便减少重复,多检查一些知识点.

在以上 10 题中,问题 9 是因为关于 y 的方程有相等实根,导致关于 x 只有两个实根.其它 9 道题都是由于关于 y 的方程有一个正根和一个负根.当 y 取负值时,联系算术根概念,知道没有相应的 x 值.当 y 取正值时,从问题中的方程可以得到两个 x 值.

6° 确定对口产品

编题研究的第三步,是根据调查分析结果,针对当前需要,确定编题目标.

因为上述基本类型的无理方程在教学中非常重要,中学数学教师在讲课、辅导答疑、出考卷时,经常要用到.最好能有一种编题

的简便公式,能够脱离书本和笔记,随手写出任意多个这样类型的方程,并且无需动手解答,就能事先知道方程的全部实数根.

对于写书、写文章为中学数学教师和中学生服务的人,这类工具题也同样要紧,因为必须不断提供新题目,才能满足读者的需求.

7° 水到渠成

编题研究的第四步,是具体动手编题.

由于有前面三步做好充分准备,这时困难已经不大,只要用字母代替数字,上升为一般形式,然后又从使用方便着想,回过头来适当限制,变得稍稍特殊一些,反复调整几次,最后得到所需的结果.

(2)推广实例

下面考虑另外一种类型的实例:发现一道数学题的价值,并且把它推广.

1° 得来全不费功夫

在翻阅竞赛题资料时,无意中看见下面一道很特别的问题.

例3 设三角形 ABC 中 $\angle A<\angle C<90^\circ<\angle B$. $\angle A$, $\angle B$ 的外角平分线(从角顶到对边延长线)之长都等于 AB. 试求出 $\angle A$ 的度数.

这是 1965 年美国第 26 届普特南数学竞赛试题的 A 组第 1 题. 普特南数学竞赛是美国的一种大学生数学竞赛,由美国数学协会主办,普特南促进学术奖金基金会赞助. 试题分为 A、B 两组,上午做 A 组题,下午做 B 组题.

粗粗看去,这是一道普通计算题,条件比较别扭,显得有点乏味.

但是题目中有一句话引起我的注意:“$\angle A$,$\angle B$ 的外角平分线(……)之长都等于 AB.”

这就意味着,三角形 ABC 中,有两条外角平分线的长度相等.

人所皆知,等腰三角形两个底角的外角平分线的长度相等.

可是,谁能想到,现在的题目里,三角形中,三个角一个比一个大,居然也有两条外角平分线的长度相等!三个角互不相等的三角形,肯定不是等腰三角形.

如果是往常随意翻翻,也许会对题目里这句至关重要的话视而不见,如过眼云烟,稍纵即逝.但是这次不同.这时我的头脑里正搁着一件事情,打算有空的时候做做看,而这件要做的事,恰好与外角平分线相等有关.一看见“外角平分线”这几个字,眼睛就发亮.

那一阵,斯坦纳-莱默斯定理正是热门话题.斯坦纳-莱默斯定理的内容是:有两条内角平分线长度相等的三角形是等腰三角形.它是等腰三角形内角平分线性质定理的逆定理.命题看起来很简单.证明却闹别扭,通常只能用间接证法,很难顺流而下.书刊里对它关注的焦点,是要寻找简单的直接证法.

内角平分线尚且如此,外角平分线更是可想而知.什么时候有空,倒要看看,等腰三角形外角平分线定理的逆命题怎样证明?更麻烦些,还是碰巧反而更简单些?

现在好了,不麻烦了,干脆不用去证明,那个逆命题根本就是错的.有两条外角平分线长度相等的三角形,不一定是等腰三角形,也可以三条边互不相等.谁不相信,就搬出这条竞赛题给他看.要不然,命题组的数学家们怎么会选中这样一道貌不出众的题目做竞赛试题呢,就是因为它其实妙不可言.

想要去找这样的反例,只怕是踏破铁鞋无觅处.哪里知道,得

来全不费功夫,它自己送上门来了.

不过,还是慢一点,小心为妙.这道题目有没有搞错呢?

2° 小心验证

自己动手,把例3中的竞赛题重新解一遍.

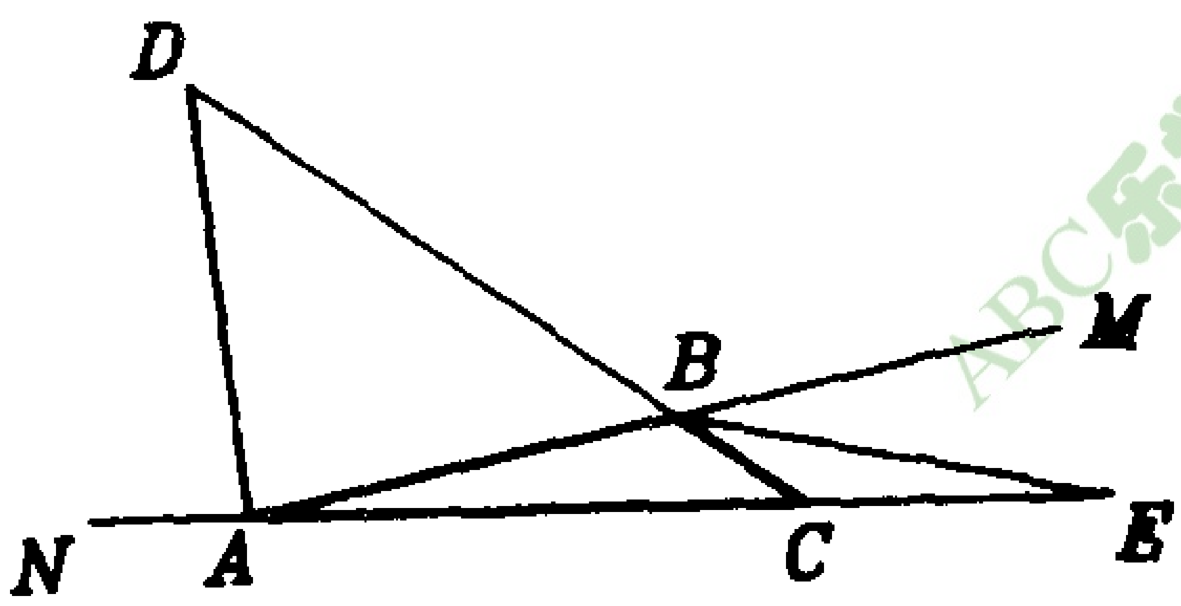

图23

解 如图23,记$\angle A=\alpha$.

因为$\angle B>\angle C$,所以$\angle A$的外角平分线与CB的延长线相交,设交点为D.同理,从$\angle C>\angle A$,知道$\angle B$的外角平分线与AC的延长线相交,设交点为E.

由条件知$BE=BA$,因而

$$\angle BEA=\angle BAE=\alpha.$$

设M是AB延长线上的任意点,N是CA延长线上的任意点,那么

$$\angle MBE=\angle BEA+\angle BAE=2\alpha,$$

$$\angle DBA=\angle MBC=2\angle MBE=4\alpha.$$

又由条件得$AD=AB$,所以

$$\angle D=\angle DBA=4\alpha.$$

而AD是$\angle A$的外角平分线,所以

$$\angle DAB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

从$\triangle DAB$得

$$\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+4\alpha+4\alpha=180^\circ,$$

$$\therefore\quad \frac{15}{2}\alpha=90^\circ,\therefore\quad \alpha=12^\circ,$$

即

$$\angle A=12^\circ.$$

题目解答完毕.但是还不放心,把另外两个角也算出来试试

看.结果得到

$$\angle C=3\alpha=36^\circ,\angle B=180^\circ-4\alpha=132^\circ.$$

利用量角器,在纸上画一个三角形,使它的$\angle C=36^\circ$,$\angle A=12^\circ$,再画出$\angle A$ 和$\angle B$ 的外角平分线,量一量,果然两条外角平分线长相等,并且都等于 AB.

对于这个反例,现在可以完全放心了.

3° 是结束也是开始

高兴了一大阵,又烦起来了.

一个问题的结束,是另外一个新问题的开始.

对于否定等腰三角形外角平分线定理的逆命题,一个反例已经足够.

但是,怎么看来看去,只看见一个反例,总是看不到其它反例呢? 反例的个数,总不能今天是一,明天也是一,后天还是一,一直到永远.

把例 3 中原先的反例拿来研究研究,发现在图 23 中,折线 $DABE$ 是一根三节棍,它的三节 DA、AB 和 BE 长度都相等.妙就妙在这根三节棍.

其实,对于反例的一般要求,只需要三节棍的首尾两节 DA 和 BE 相等,当中一节 AB 长些或短些都无所谓.想要寻找新的反例,就应该放弃对中段 AB 长度的要求,难度势必增大.

问题的吸引力太大,难不难也顾不上了.试试看.

这样,就把例 3 推广,成为下面的问题.

例 4　设三角形 ABC 中$\angle A<\angle C<\angle B$.$\angle A$,$\angle B$ 的外角平分线(从角顶到对边延长线)之长相等.试求此三角形的各个角.

4° 正弦定理开路

遇到一般情形,几何退后,三角上前.不管什么有关三角形的

ABC乐学天府

问题,先当成解三角形做,找几个关系式出来.

解三角形问题,通常首先由正弦定理或余弦定理出马开路.本题条件中,角的关系多,边的关系少,先试用正弦定理.

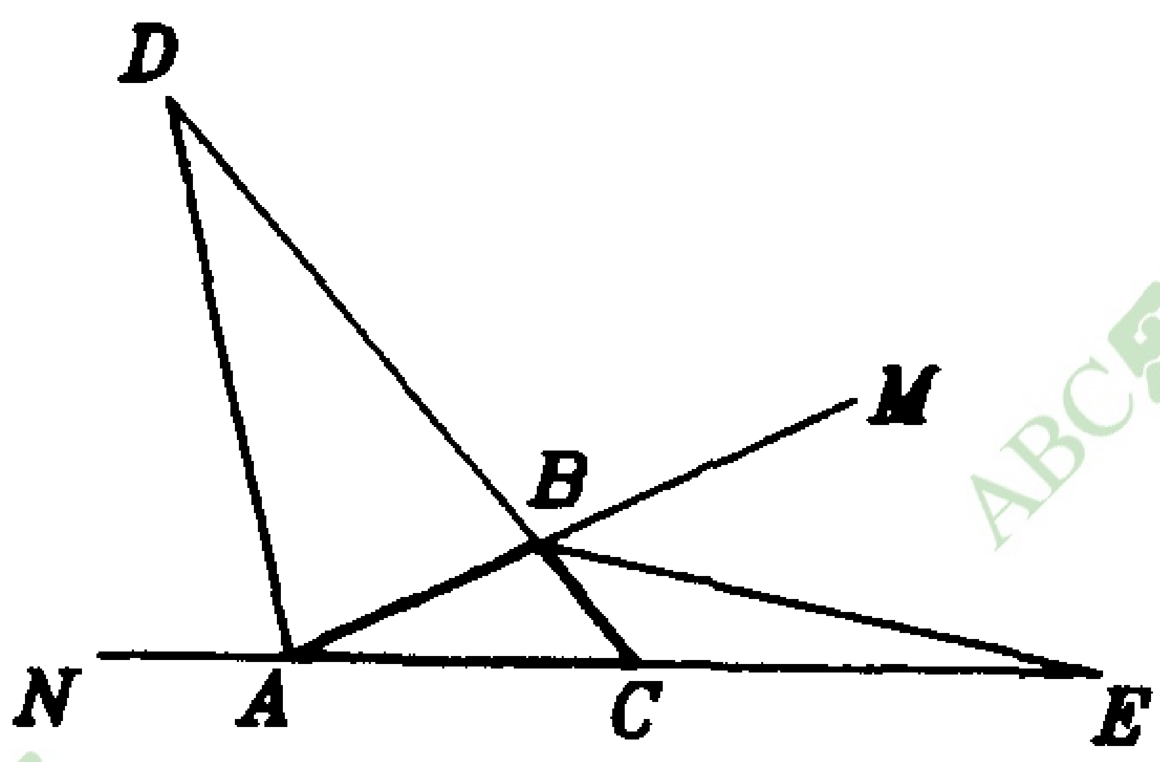

图 24

如图 24,从$\angle A<\angle C<\angle B$可知$\angle A$的外角平分线与$CB$的延长线相交,设交点为$D$;$\angle B$的外角平分线与$AC$的延长线相交,设交点为$E$.

在$\triangle ABE$中应用正弦定理,得$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sin A}{\sin E}$.

在$\triangle ABD$中应用正弦定理,得$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sin(\pi-B)}{\sin D}$.

由条件知$AD=BE$,因而$\dfrac{\sin A}{\sin E}=\dfrac{\sin(\pi-B)}{\sin D}$,

即
$$\sin A\sin D=\sin B\sin E. \qquad ①$$

5° 联系条件考虑

在①式中包含 4 个角.三角形的内角是需要知道的,另外两个角没有兴趣,设法把它们用三角形的内角表示出来.为此,利用外角平分线条件,得到

$$\angle D=\angle B-\angle BAD=\angle B-\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\angle A+\angle B\right)-\frac{\pi}{2},$$
$$\angle E=\angle MBE-\angle A=\frac{1}{2}(\pi-\angle B)-\angle A$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(\angle A+\frac{1}{2}\angle B\right).$$

ABC乐学天府

代入①式,化为

$$-\sin A\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)=\sin B\cos\left(A+\frac{B}{2}\right). \quad ②$$

现在已经得到一个联系$\angle A$ 和$\angle B$ 的关系式.在这两个角中任意确定一个,另一个随之可从②式确定.只要确定了两个角的大小,三角形的第三个角也就确定了.

可以认为,到这一步,原则上已经能确定无穷多反例,它们都是不等边三角形,但却有两条外角平分线相等.

但是②式没有把一个角表示成另一个角的显函数,用起来不方便.所以需要变形,设法能解出其中某一个角.

6° 三角变形接应

利用积化和差,将②式变形,得

$$-\sin\left(\frac{3A}{2}+B\right)-\sin\left(\frac{A}{2}-B\right)=\sin\left(\frac{3B}{2}+A\right)+\sin\left(\frac{B}{2}-A\right),$$

$$\sin\left(A-\frac{B}{2}\right)+\sin\left(B-\frac{A}{2}\right)=\sin\left(\frac{3B}{2}+A\right)+\sin\left(\frac{3A}{2}+B\right).$$

再利用和差化积,得

$$\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{3(B-A)}{4}=\sin\frac{5(A+B)}{4}\cos\frac{B-A}{4}.$$

令

$$\frac{A+B}{4}=\alpha,\frac{B-A}{4}=\beta, \quad ③$$

代入上式,得

$$\sin\alpha\cos3\beta=\sin5\alpha\cos\beta. \quad ④$$

由于

$$0<\angle A<\angle C<\angle B<\pi,0<\angle A+\angle B<\pi,$$

从③式知道 $\sin\alpha\neq0,\cos\beta\neq0$.可将④式两边同除以 $\sin\alpha\cos\beta$,再利

ABC乐学天府

用三倍角公式

$$\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta,$$

化简得

$$4\cos^2\beta - 3 = \frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha}.$$

上式左边利用 $2\cos^2\beta = 1 + \cos 2\beta$,化简得

$$2\cos 2\beta = \frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} + 1.$$

将所得等式右边通分,然后将分子和差化积,约简,得

$$\cos 2\beta = \frac{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha}. \qquad ⑤$$

现在已经明显解出 β.任意指定一个容许的 α 的值,可以从⑤式求出对应的 β 值,再代入③式,就得到一组$\angle A$ 和$\angle B$ 的大小,从而确定三角形的形状.

有关两变量的三角方程,通常不一定能用初等方法把其中一个变量表示成另一个的显函数.能解出 β 来,得到求解公式⑤,已经算是比较幸运了.

美中不足,⑤式应用起来不太方便,还要再做许多计算.

能不能把求解公式⑤继续变形,使得应用起来更加方便呢?

7° 参数锦上添花

在⑤式右边,利用三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

代入后,约去 $\sin\alpha$,并且继续变形,得到

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= (3 - 4\sin^2\alpha)\cos 2\alpha \\ &= [3 - 2(1 - \cos 2\alpha)]\cos 2\alpha \\ &= \cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha \\ &= \cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha.\end{aligned}$$

现在引进参数,令

$$\theta = 2\alpha = \frac{A+B}{2}, \phi = 2\beta = \frac{B-A}{2}, \qquad ⑥$$

那么上式化为

$$\cos\phi = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta. \qquad ⑦$$

⑦式已经很简单很方便了,不过其中参数 θ 的取值范围还不清楚,需要讨论.

为此,从⑥式得

$$0 < \phi < \theta < \frac{\pi}{2},$$

所以 $\cos\phi < 1$,因而从⑦式得

$$\cos\theta + \cos 2\theta < 0,$$

$$\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 < 0,$$

$$\therefore \quad -1 < \cos\theta < \frac{1}{2}. \quad \therefore \quad \theta > \frac{\pi}{3}.$$

这样就确定了 θ 值的范围.利用⑦式、⑥式和 $A + B + C = \pi$,最后得到

$$\phi = \arccos(1 + \cos\theta + \cos 2\theta) \quad \left(\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \qquad ⑧$$

$$A = \theta - \phi, B = \theta + \phi, C = \pi - 2\theta, \qquad ⑨$$

⑧式和⑨式就是最后的用参数表示的求解公式,用起来非常方便.

8° 计算实例

实际计算时,采用角度制比较方便.这时参数取值范围是

$$60° < \theta < 90°.$$

取 $\theta = 72°$时,三角形的各个角都是整数度:

$$\angle A = 12°, \angle B = 132°, \angle C = 36°.$$

这正是例 3 普特南数学竞赛试题中的数据.

如果改取 $\theta = 65°$,则得到

$$\angle A = 26°15', \angle B = 103°45', \angle C = 50°.$$

例 4 中的图 24 就是根据这组数据画出的.

怎样走向数学发现,是一个重要话题,一个新鲜话题,也是一个很难说清楚的话题.本书所谈的内容,不过是抛砖引玉而已.个人所见,未必妥当,疏漏之处,在所难免,衷心欢迎各位专家和各位朋友批评指正.

ABC乐学天府

主要参考书目

[1] M.克莱因,《古今数学思想》,第1~4册,上海科学技术出版社,上海,1979~1981.

[2] D.J.斯特洛伊克,《数学简史》,科学出版社,北京,1956.

[3] A.艾鲍,《早期数学史选编》,北京大学出版社,北京,1990.

[4] 吴文俊主编,《世界著名科学家传记》(数学家Ⅱ),科学出版社,北京,1992.

[5] 袁小明,《世界著名数学家评传》,江苏教育出版社,南京,1987.

[6] 钱克仁,《数学史选讲》,江苏教育出版社,南京,1989.

[7] 沈康身,《中算引论》,上海教育出版社,上海,1986.

[8] C.H.爱德华,《微积分发展史》,北京出版社,北京,1987.

[9] 胡作玄,《数学在你身边》,中国华侨出版社,北京,1995.

[10] H.彭加勒,《科学的价值》,光明日报出版社,北京,1988.

ABC乐学天府

[11]　G.波利亚,《数学的发现》(第1卷),科学出版社,北京,1982.

[12]　J.阿达玛,《数学领域中的发明心态学》,江苏教育出版社,南京,1988.

[13]　E.B.威尔逊,《科学研究方法论》,上海科学技术文献出版社,上海,1988.

[14]　蒋声,《欧几里得第五公设》,辽宁教育出版社,沈阳,1988(繁体字版:九章出版社,台北,1993).

ABC乐学天府