Introducción a la mecánica de vuelo.

FLIGHT CHALLENGE

Autor: Andrés Cremades Botella

1. Introducción

En este documento se presentan los conceptos básicos para realizar el diseño desde el punto de vista aerodinámico de un planeador. El procedimiento se ejemplifica con un planeador de ejemplo. La geometría de dicho planeador es la del modelo de prueba.

2. Estabilidad longitudinal

Para que el planeador sea estable se debe asegurar que el centro de gravedad del mismo esté por delante de su punto neutro. Se definen estos conceptos:

- Centro de gravedad: Es el punto sobre el que actúa el peso del avión. Cuando el avión gire lo hará respecto de este punto.
- Punto neutro: Es el centro aerodinámico del avión completo, es decir, es el lugar geométrico en el que el momento generado por las fuerzas de sustentación no depende del ángulo de ataque.

Para poder desarrollar estos conceptos es necesario que se muestre el sistema de fuerzas que actúa sobre un avión:

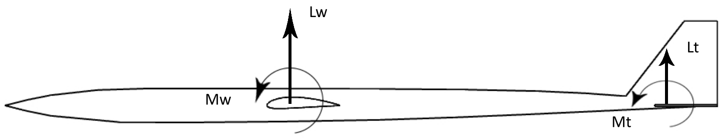


Figura 1: Fuerzas sobre el avión.

- L_w sustentación en el ala.
- M_w momento en el ala.
- L_t sustentación en el empenaje.
- M_t momento en el empenaje.

La sustentación se debe a dos motivos:

- Ángulo de ataque del ala.
- Curvatura del ala.

Se desplazan todas las fuerzas al cuarto de cuerda y se añade un momento que no depende del ángulo de ataque.

2.1. Expresión de la sustentación

La sustentación se define como:

$$L = \frac{1}{2}\rho S_w v^2 CL \rightarrow CL = CL_0 + CL_\alpha \alpha \tag{1}$$

Donde:

- CL_α se obtiene con la expresión:

$$CL_\alpha = 2\pi \frac{AR}{2 + \sqrt{4 + AR^4(1 + tan^2(\Lambda_{c/2}))}} \tag{2}$$

  Donde AR es el alargamiento del ala: $AR = \frac{b^2}{S_w}$.

- CL_0 se obtiene del perfil:

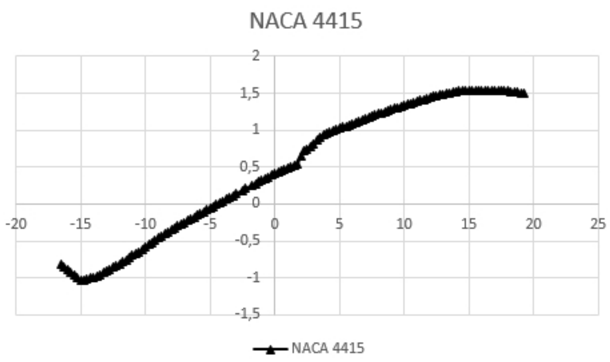


Figura 2: CL-α del NACA 4415.

  De este gráfico se toma el ángulo de sustentación nula y mediante la pendiente del ala se obtiene CL_0.

$$CL_0 = -CL_\alpha \alpha_{L=0} \tag{3}$$

2.2. Cálculo del punto neutro

El punto neutro es aquel lugar en el cual el momento aerodinámico del avión no depende de la variación del ángulo de ataque. Se calcula como:

$$\frac{dCM}{d\alpha} = 0 \rightarrow x_{PN} = \frac{CL_{\alpha w} x_{CA_w} + \frac{St}{Sw} CL_{\alpha t} \left(1 + \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right) x_{CA_t}}{CL_{\alpha w} + CL_{\alpha t} \left(1 + \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)} \tag{4}$$

Siendo $\left(1 + \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right) = \frac{-16 CL_{\alpha_w}}{\pi^3 AR_w}$.
El centro de gravedad del avión debe de estar por delante de este punto.

2.3. Cálculo del momento de cabeceo y trimado del avión

Para ello se expresa la ecuación del momento de cabeceo:

$$CM = CM_0 + CM_\alpha \alpha + CM_\delta \delta \tag{5}$$

Siendo δ la deflexión del estabilizador respecto al ala. El cálculo de cada una de estas expresiones es:

$$CM_0 = CL_{0w} \frac{x_{CA_w} - x_{CDG}}{c_w} + CL_{0t} \frac{x_{CA_t} - x_{CDG}}{c_w} \frac{S_t}{S_w} + CM_{0w} + CM_{0t} \frac{S_t c_t}{S_w c_w} \tag{6}$$

$$CM_\alpha = CL_{\alpha w}\frac{x_{CA_w} - x_{CDG}}{c_w} + CL_{\alpha t}\left(1 + \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)\frac{x_{CA_t} - x_{CDG}}{c_w}\frac{S_t}{S_w} \tag{7}$$

$$CM_\delta = CL_{\alpha t}\left(1 + \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)\frac{x_{CA_t} - x_{CDG}}{c_w}\frac{S_t}{S_w} \tag{8}$$

El momento sub-cero de los perfiles se obtiene a partir de los gráficos de los mismos.

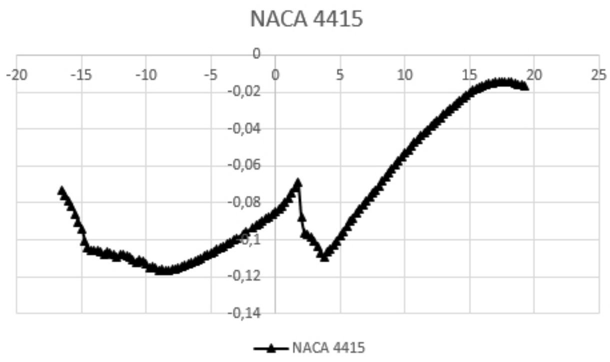


Figura 3: CM-α del NACA 4415.

Una vez que se tiene la ecuación del momento se puede obtener el valor de la deflexión del empenaje para que el avión vuele inclinado con un ángulo de ataque determinado:

$$\delta = -\frac{CM_0 + CM_\alpha \alpha}{CM_\delta} \tag{9}$$

3. Vuelo de planeo

Una vez que se ha trimado el avión se pasa a analizar el vuelo. Las ecuaciones que lo rigen son:

$$m\frac{dv}{dt} = -D - Wsin(\gamma) \tag{10}$$

$$mv\frac{d\gamma}{dt} = L - Wcos(\gamma) \tag{11}$$

$$CM = 0 \tag{12}$$

$$\frac{dx}{dt} = vcos(\gamma) \tag{13}$$

$$\frac{dz}{dt} = vsin(\gamma) \tag{14}$$

Se obtiene el alcance desde un punto en el que empieza a caer como:

$$X = \int_{z_f}^{z_o} \frac{Wdz}{D(z, v, W)V} \tag{15}$$

Para tener en cuenta la salida de la ballesta se tienen que integrar las ecuaciones anteriores, con las condiciones iniciales:

$$v(0) = 12m/s \tag{16}$$

$$\gamma(0) = 30^{o} \tag{17}$$

$$x(0) = 0 \tag{18}$$

$$z(0) = 2sin(30^{o}) \tag{19}$$

3.1. Cálculo del coeficiente de drag (resistencia aerodinámica).

Para calcular la resistencia aerodinámica se va a emplear un modelo simplificado. Se diferencia entre:

- Resistencia parásita: por fricción con el aire y por diferencias de presiones. Se estima de forma simplificada en la siguiente ecuación.

$$CD_0 = 0{,}0055\frac{S_{wet}}{S_w} \tag{20}$$

- Resistencia inducida se produce por la generación de sustentación. Se calcula como:

$$CD_i = \frac{CL^2}{\pi AR_w e} \tag{21}$$

La e es un valor de la eficiencia del ala. Se calcula:

$$e = (1 - 0{,}045AR_w^0{,}68)(1 - 0{,}227\Lambda_{c/4_w}^1{,}615) \tag{22}$$

4. Ejemplo

Flight challenge

En este anexo se muestra un ejemplo de tratamiento del problema de planeadores para el Flight Challenge

In[240]:=

```
Clear["Global`*"]
```

Datos

In[317]:=

```
bw = 1.65;
cw = 0.175;
bt = 0.4;
ct = 0.15;
h = 0.75;
Λc4w = 0;
Λc4t = 0;
Λc2w = 0;
Λc2t = 0;
angCL0w = -5 * Pi / 180;
angCL0t = 0;
CM0w = -0.09;
CM0t = 0;
Sw = bw * cw
St = bt * ct
ARw = bw / cw
ARt = bt / ct
xCAw = 0.25 * cw
xCAt = cw + h + ct * 0.25
Swet = 1005441.079578089 * 10^-6;
```

Out[330]=

```
0.28875
```

Out[331]=

```
0.06
```

Out[332]=

```
9.42857
```

Out[333]=

```
2.66667
```

Out[334]=

```
0.04375
```

Out[335]=

```
0.9625
```

CL

In[337]:=

```
CLαw = 2 * Pi * (ARw / (2 + Sqrt[4 + ARw^2 (1 - Tan[Λc2w])]))
```

Out[337]=

```
5.09019
```

In[338]:=
```
CLαt = 2 * Pi * (ARt / (2 + Sqrt[4 + ARt^2 (1 - Tan[Λc2w])]))
```
Out[338]=
```
3.14159
```
In[259]:=
```
δϵδα = -16 / Pi^3 * CLαw / ARw
```
Out[259]=
```
-0.278585
```
In[260]:=
```
CL0w = CL0 /. Flatten[Solve[0 == CLαw * angCL0w + CL0, CL0]]
```
Out[260]=
```
0.444203
```
In[261]:=
```
CL0t = CL0 /. Flatten[Solve[0 == CLαw * angCL0t + CL0, CL0]]
```
Out[261]=
```
0.
```
In[262]:=
```
CLw = CL0w + CLαw * α
CLt = CL0t + CLαt * (1 + δϵδα) * (α + δ)
```
Out[262]=
```
0.444203 + 5.09019 α
```
Out[263]=
```
0. + 2.26639 (α + δ)
```
In[264]:=
```
CL = CLw + CLt * St / Sw // Expand
```
Out[264]=
```
0.444203 + 5.56113 α + 0.470938 δ
```

CM

In[265]:=
```
CM = CM0w + CM0t * St * ct / Sw / cw + CLw * (xCAw - xCDG) / cw + CLt * (xCAt - xCDG) / cw
```
Out[265]=
```
-0.09 + 5.71429 (0.04375 - xCDG) (0.444203 + 5.09019 α) +
 5.71429 (0.9625 - xCDG) (0. + 2.26639 (α + δ))
```
In[266]:=
```
xPN = xCDG /. Flatten[Solve[D[CM, α] == 0, xCDG]]
```
Out[266]=
```
0.326795
```
In[267]:=
```
xCDG = 0.08
```
Out[267]=
```
0.08
```
Se toma este valor ya que está por delante del punto neutro.

In[268]:=
```
δfα = δ /. Flatten[Solve[CM == 0, δ]] // Expand
```
Out[268]=
```
0.0159255 - 0.907744 α
```

El trimado

Para trimar el avión suponemos que δ=0º.

In[269]:=
```
δtrim = 0;
```
In[270]:=
```
αtrim = (α /. Flatten[Solve[δfα == δtrim, α]]);
αtrim * 180 / Pi
```
Out[271]=
```
1.0052
```

El avión volará con 1º de ángulo de ataque.

¿Qué peso es capaz de levantar cuando vuela a 10m/s?

In[272]:=
```
m10ms = 1 / 2 * 1.225 * 10^2 * Sw * CL / 9.8 /. α → αtrim /. δ → δtrim
```
Out[272]=
```
0.977721
```

El avión volando a 10 m/s puede levantar casi 1 kg.

Vuelo de planeo

In[273]:=
```
Clear[v]
```
In[294]:=
```
e = (1 - 0.045 * ARw^0.68) * (1 - 0.227 Λc4w^1.615)
ρ = 1.225
m = 1
g = 9.81
CL = CL /. δ → δtrim /. α → αtrim
```
Out[294]=
```
0.793064 (1 - 0.227 Λc4w^1.615)
```
Out[295]=
```
1.225
```
Out[296]=
```
1
```
Out[297]=
```
9.81
```
Out[298]=
```
0.541767
```

In[279]:=
```
CD0 = 0.0055 * Swet / Sw
CDi = CL^2 / ARw / Pi / e
```
Out[279]= 0.0191513

Out[280]= 0.0123863

In[281]:=
```
CD = CD0 + CDi
```
Out[281]= 0.0315375

In[282]:=
```
Drag = 1 / 2 * ρ * v[t]^2 * Sw * CD(*/.α→α[t]*)
Lift = 1 / 2 * ρ * v[t]^2 * Sw * CL(*/.α→α[t]*)
W = g * m
```
Out[282]= $0.0055777\, v[t]^2$

Out[283]= $0.0958166\, v[t]^2$

Out[284]= 9.81

In[285]:=
```
z0 = v * Sin[Pi / 6] * t - 1 / 2 * g * t^2 /.
  t → (t /. Flatten[Solve[0 == v * Sin[Pi / 6] - g * t]])
```
Out[285]= $-4.905\,(0. + 0.0509684\, v)^2 + \frac{1}{2}\,(0. + 0.0509684\, v)\, v$

In[286]:=
```
X = Integrate[W / Drag, {z, 0, z0}]
```
Out[286]= $\frac{1758.79\left(-4.905\,(0. + 0.0509684\, v)^2 + \frac{1}{2}\,(0. + 0.0509684\, v)\, v\right)}{v[t]^2}$

In[287]:=
```
e1 = m * D[v[t], t] == -Drag - W * Sin[γ[t]]
e2 = m * v[t] * D[γ[t], t] == Lift - W * Cos[γ[t]]
e3 = D[x[t], t] == v[t] * Cos[γ[t]]
e4 = D[z[t], t] == v[t] * Sin[γ[t]]
```
Out[287]= $v'[t] == -9.81\, \mathrm{Sin}[\gamma[t]] - 0.0055777\, v[t]^2$

Out[288]= $v[t]\, \gamma'[t] == -9.81\, \mathrm{Cos}[\gamma[t]] + 0.0958166\, v[t]^2$

Out[289]= $x'[t] == \mathrm{Cos}[\gamma[t]]\, v[t]$

Out[290]= $z'[t] == \mathrm{Sin}[\gamma[t]]\, v[t]$

In[291]:=

```
s = NDSolve[{e1, e2, e3, e4, v[0] == 12, γ[0] == Pi / 6, x[0] == 0, z[0] == 2 * Sin[Pi / 6]},
  {v, γ, x, z}, {t, 0, 10}]
```

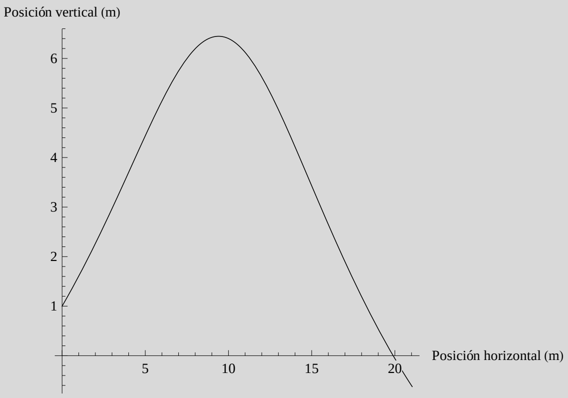
Out[291]=

```
{{v → InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>],
  γ → InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>],
  x → InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>],
  z → InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]}}
```

In[292]:=

```
graf = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], z[t]} /. s], {t, 0, 3}, AspectRatio → 1,
  AxesLabel → {"Posición horizontal (m)", "Posición vertical (m)"},
  PlotStyle → Black]
```

Out[292]=



In[340]:=

```
Show[graf, PlotRange → {{0, 20}, {0, 20}}]
```

Out[340]=