Stage Olimpiadi - Geometria

Fabio Lilliu

February 2025

1 Teoria

1.1 Punti notevoli

Problema 1 *(Febbraio 16, 2014) Sia* ABC *un triangolo acutangolo. Siano* AM, BN *e* CL *le mediane, che si intersecano nel baricentro* G. *Siano* M_0, N_0 *e* L_0 *i punti medi di* AG, BG *e* CG, *rispettivamente. Mostrare che i sei punti* M, M_0, N, N_0, L, L_0 *giacciono su una circonferenza se e solo se* ABC *è equilatero.*

1.2 Congruenza

Problema 2 *(Febbraio 16, 2022) Sia ABC un triangolo, sia r la bisettrice interna dell'angolo acuto BAC e siano K la proiezione di B su r, L la proiezione di K su AB e D il simmetrico di B rispetto ad L. Chiamiamo infine H il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente da B. Dimostrare che:*

- *BH = 2LK;*
- *KA biseca l'angolo HKD ;*
- *il triangolo ADH è isoscele.*

1.3 Angoli e circonferenze

Problema 3 *(Febbraio 17, 2012) Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.*

- *Si dimostri che gli angoli BAP e QAC sono congruenti;*
- *Si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;*
- *Si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero ABPC vale quattro volte l'area del quadrilatero AMON.*

Problema 4 *(Febbraio 17, 2016) Sia $ABCD$ un rettangolo con $AB > BC$ e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano E e F rispettivamente le intersezioni (distinte da A) della bisettrice dell'angolo BAD con il lato CD e la circonferenza ω. La perpendicolare a DF passante per E interseca la corda DF in G e l'arco DF non contenente C nel punto H. Si dimostri che:*

- *i segmenti DF e FB hanno la stessa lunghezza;*
- *i triangoli DEG e DHG sono congruenti;*
- *i segmenti HF e FC sono uguali.*

1.4 Quadrilateri inscritti

Problema 5 *(Febbraio 16, 2015) Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo BAD interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N. Dimostrare che*

- *il quadrilatero $ABCM$ 'e inscrittibile in una circonferenza;*
- *i triangoli ANB e ABM sono simili.*

Problema 6 *(Febbraio 15, 2021) Sia $ABCD$ un rettangolo e sia E un punto arbitrario, diverso da C, sul lato DC. Sia H la proiezione di E sulla diagonale AC e sia K la proiezione di C sulla semiretta AE.*

- *Dimostrare che K giace sulla circonferenza circoscritta ad $ABCD$ e che il quadrilatero $CKEH$ è ciclico, cioè inscrivibile in una circonferenza.*
- *Dimostrare che angolo CKB + angolo $CKH = 90^o$*
- *Dimostrare che K, H, B sono allineati se e solo se $ABCD$ è un quadrato*

1.5 Similitudini

Problema 7 *(Febbraio 16, 2011) Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E i piedi delle altezze uscenti da A, B. Siano A_0 il punto medio di AD, B_0 il punto medio di BE. CA_0 interseca BE in X, CB_0 interseca AD in Y. Dimostrare che esiste una circonferenza passante per i punti A_0, B_0, X, Y.*

2 Esercizi

Esercizio 1 *(Febbraio 15,2023) Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di base maggiore AB tale che la bisettrice dell'angolo in D passi per B. Supponiamo che la bisettrice dell'angolo in A intersechi il lato BC nel punto P. Dimostrare che $AB = AP$ se e solo se la bisettrice dell'angolo PAD passa per C.*

Esercizio 2 *(Febbraio 16, 2019) Sia ABC un triangolo isoscele su base BC e siano D, E punti sui lati AB, BC rispettivamente, tali che che le rette DE e AC risultino parallele. Si consideri inoltre il punto F sulla retta DE che si trova dalla parte opposta di D rispetto ad E ed 'e tale che $F E$ sia congruente ad AD. Detto O il circocentro del triangolo BDE, dimostrare che i punti O, F, A, D giacciono su una circonferenza*

Esercizio 3 *(Febbraio 17,2020) Sia ABC un triangolo scaleno con $BC > CA > AB$. Siano ω e γ le circonferenze passanti per A di centro, rispettivamente, B e C. Esse intersecano il segmento BC in M e N, rispettivamente. Costruiamo Z come il simmetrico di A rispetto al punto medio di MN.*

- *Chiamata P l'intersezione di ZM con AC, mostrare che CPM è isoscele.*
- *Detta X l'intersezione di ZM con ω distinta da M, mostrare che BX e AC sono parallele.*
- *Detta Y l'intersezione di ZN con γ distinta da N, mostrare che A, X e Y sono allineati.*