Stage Olimpiadi - Algebra

Fabio Lilliu

January 2026

1 Teoria

1.1 Pigeonhole (principio dei cassetti)

Problema 1 *(Cortona 1996) Una regione contiene* 17 *città; ognuna di esse è collegata ad esattamente altre 8 con un volo diretto (andata e ritorno). Dimostrare che da ogni città se ne può raggiungere qualsiasi altra.*

Problema 2 *Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.*

Problema 3 *(Cortona 1995) Siano* $a_1, \ldots, a_{10}$ *dei numeri interi. Dimostrare che è possibile trovare dei numeri* $x_1, \ldots, x_{10}$ *appartenenti all'insieme* $\{-1, 0, 1\}$ *tali che* $x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_{10} \cdot a_{10}$ *sia divisibile per* 1001.

1.2 Polinomi

Problema 4 *(Cesenatico 5, 1998) Siano* a_1, a_2, a_3, a_4 *quattro numeri interi distinti e sia P(x) un polinomio a coeffcienti interi tale che*

$$P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = 1 : \tag{1}$$

(i) Dimostrare che non esiste nessun numero intero n tale che P(n) = 12: (ii) Esistono un polinomio P(x) che soddisfa la condizione (1) ed un intero n tale che P(n) = 1998?

Problema 5 *(Febbraio 13, 2007) Sia* $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \ldots + a_1x + a_0$ *un polinomio, con gli* a_i *interi. Sappiamo che, per tutti gli interi* k *compresi tra 1 e 20,* $p(k) = 2k$*. Quali sono le ultime 3 cifre di* $p(21)$*?*

Problema 6 *(Febbraio 5, 2024) Dato il polinomio* $p(x) = x(x+1)(x-2)^2$ *, consideriamo il polinomio q(x) = p(p(p(. . . (p(x)). . .))) dato dalla composizione di p(x) con se stesso 2024 volte. Quanti sono gli interi k tali che si abbia q(k) = 0?*

1.3 Radici e coefficienti

Problema 7 *(Febbraio 10, 2008) Indicando con* x_1, x_2, x_3 *e* x_4 *le soluzioni dell'equazione* $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$*, quanto vale*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}?$$

Problema 8 *(Febbraio 9, 2025) Sia* $p(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$*. Se* $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ *è un polinomio che ha per radici i quadrati delle radici di* $p(x)$*, quanto vale* $q(4)$*?*

Problema 9 *(Cortona 99) Dimostrare che il polinomio*

$$x^{100} - 100 \cdot x^{99} + 99 \cdot x^{98} - \ldots - 2 \cdot x + 1$$

non ha 100 *radici reali positive.*

1.4 Fattorizzazione

Problema 10 *(Febbraio 12, 2009) Francesco vuole scrivere il polinomio* $x^{16} + x$ *come prodotto di più polinomi a coefficienti interi, ognuno di grado almeno 1. Quanti fattori potrà ottenere al massimo?*

2 Esercizi

Esercizio 1 *(Cesenatico 2, 1998) Si dimostri che in ogni poliedro convesso ci sono almeno due facce con lo stesso numero di lati.*

Esercizio 2 *(Febbraio 12, 2025) Un polinomio p(x) di quarto grado a coefficienti interi ha le seguenti proprietà:*

- *p(1) = 1;*
- *p(-1) = -1;*
- *il valore assoluto di p(-2) è un numero primo;*
- *per ogni numero reale a vale* $p(a) \geq a^3$

Quanto vale p(-2) al minimo?

Esercizio 3 *(Cortona, 1999) Un polinomio* $P(x)$ *di grado* $n \geq 5$ *ha i coefficienti interi e n radici intere distinte* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *con* $\alpha_1 = 0$. *Trovare tutte le radici intere del polinomio* $P(P(x))$.

Esercizio 4 *(Bonus, mezzo TDN - Cesenatico 5, 2003) Data una griglia* $m \times n$ $(m, n \geq 1)$ *si dispone una pedina al centro di ogni casella e una in ogni vertice della griglia. (a) Trovare tutte le tabelle che hanno esattamente* 500 *pedine. (b) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi k tali che non esistono griglie con esattamente k pedine.*