

Stage Olimpiadi - Algebra

Fabio Lilliu

February 2025

1 Teoria

1.1 Pigeonhole/cassetti

Problema 1 *Ad uno stage partecipano 24 ragazzi. Successivamente ogni partecipante decide di scrivere a 12 altri partecipanti. Dimostrare che c'è una coppia di ragazzi che si scrivono reciprocamente.*

Problema 2 *Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.*

1.2 Polinomi

Problema 3 *(Febbraio 5, 2024) Dato il polinomio $p(x) = x(x+1)(x^2)$, consideriamo il polinomio $q(x) = p(p(p(\dots(p(x))\dots)))$ dato dalla composizione di $p(x)$ con se stesso 2024 volte. Quanti sono gli interi k tali che si abbia $q(k) = 0$?*

Problema 4 *(Febbraio 5, 2017) Il polinomio $P(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri primi dispari e nei loro reciproci (si ricorda che il reciproco di un intero positivo n è il numero razionale $1/n$). Quanto vale il rapporto $P(2)/P(1/2)$?*

Problema 5 *Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 0$ e $p(5) > 0$. Determinare il minimo valore possibile per $p(5)$.*

1.3 Radici e coefficienti

Problema 6 *(Febbraio 10, 2011) Quanto vale la somma delle seste potenze delle soluzioni dell'equazione $x^6 - 16x^4 + 16x^2 - 1 = 0$?*

1.4 Fattorizzazione

Problema 7 *(Febbraio 7, 2011) Quante sono le soluzioni reali distinte dell'equazione $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$?*

2 Esercizi

Esercizio 1 (Cesenatico 5,1998) Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di base maggiore AB tale che la bisettrice dell'angolo in D passi per B . Supponiamo che la bisettrice dell'angolo in A intersechi il lato BC nel punto P . Dimostrare che $AB = AP$ se e solo se la bisettrice dell'angolo PAD passa per C .

Esercizio 2 (Cesenatico 4, 2002) Siano a_1, a_2, a_3, a_4 quattro numeri interi distinti e sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che

$$P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = 1 : \quad (1)$$

(i) Dimostrare che non esiste nessun numero intero n tale che $P(n) = 12$: (ii) Esistono un polinomio $P(x)$ che soddisfa la condizione (1) ed un intero n tale che $P(n) = 1998$?

Esercizio 3 (Febbraio 2001) Qual è la somma algebrica dei coefficienti del polinomio

$$(x^{21} + 4x^2 - 3)^{2001} - (x^{21} + 4x^2 + 3)^{667} + x^{21} + 4x^2? \quad (2)$$