Stage Olimpiadi - Teoria dei Numeri

Fabio Lilliu

January 2026

1 Teoria

1.1 Conteggio dei divisori

Problema 1 *Siano a e b due numeri che hanno rispettivamente 99 e 101 divisori. È possibile che il numero ab abbia esattamente 150 divisori?*

Problema 2 *(Febbraio 2000) Qual è il più piccolo intero positivo che possiede esattamente 15 divisori?*

1.2 Congruenze

Problema 3 *Trova tutti gli interi n tali che*

$$(n-1)(n-3)(n-5)\cdots(n-2013) = (n+2)(n+4)(n+6)\cdots(n+2012).$$

Problema 4 *Dimostra che $2^n + 6 \cdot 9^n$ è sempre un multiplo di 7.*

Problema 5 *Dimostra che l'equazione*

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+2001)^2 = y^2$$

non ha soluzioni intere positive per (x, y).

Problema 6 *Trova tutte le coppie di numeri primi (p, q) tali che*

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2$$

Problema 7 *Dimostra che l'equazione*

$$x^5 - y^2 = 4$$

non ammette soluzioni intere.

1.3 Divisibilità e simili

Problema 8 *(Febbraio 5, 2010) Per quanti interi relativi* n *si ha che* $\frac{3n}{n+5}$ *è intero e divisibile per 4?*

Problema 9 *(Febbraio 15, 2010) Trovare tutte le terne ordinate di numeri interi positivi* (p, q, n) *tali che* p, q *siano primi e*

$$p^2 + q^2 = pqn + 1.$$

Problema 10 *Trova tutte le soluzioni intere all'equazione*

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0.$$

2 Esercizi

Esercizio 1 *Trova tutte le coppie* (x, y) *di numeri interi positivi che soddisfino l'equazione*

$$x^2 - y! = 2001$$

Esercizio 2 *(Febbraio 17, 2008)*

- *a) Si hanno sette numeri interi positivi* a, b, c, d, e, f, g *tali che i prodotti* ab, bc, cd, de, ef, fg, ga *sono tutti cubi perfetti. Dimostrare che anche* a, b, c, d, e, f, g *sono cubi perfetti.*
- *b) Si hanno sei numeri interi positivi* a, b, c, d, e, f *tali che i prodotti* ab, bc, cd, de, ef, fa *sono tutti cubi perfetti. È sempre vero che* a, b, c, d, e, f *sono tutti cubi perfetti?*

Nota: si dice cubo perfetto un intero m *tale che* $m = n^3$ *per qualche intero* n.

Esercizio 3 *(Cesenatico 6, 1999)*

- *a) Determinare tutte le coppie di interi positivi* (x, k) *che soddisfino l'equazione*

$$3^k - 1 = x^3$$

- *b) Dimostra che se* n *è un numero intero positivo maggiore di* 1 *e diverso da* 3 *non esistono coppie* (x, k) *che soddisfino l'equazione*

$$3^k - 1 = x^n$$