

Stage Olimpiadi - Geometria

Fabio Lilliu

January 2026

1 Teoria

1.1 Punti notevoli

Problema 1 (Febbraio 16, 2008) Sia AB una corda di una circonferenza e P un punto interno ad AB tale che $AP = 2PB$. Sia DE la corda passante per P e perpendicolare ad AB . Dimostrare che il punto medio Q di AP è l'ortocentro di ADE .

Problema 2 (Febbraio 17, 2000) Si scelgano i punti H , K , M sui lati di un triangolo ABC in modo tale che AH sia un'altezza, BK sia una bisettrice e CM sia una mediana. Si indichi con D l'intersezione tra AH e BK , e con E l'intersezione tra HM e BK . Sapendo che $KD = 2$, $DE = 1$, $EB = 3$:

- (i) si dimostri che HM è parallelo ad AC ;
- (ii) si dimostri che $AB = AC$;
- (iii) si dimostri che $AB = BC$.

Problema 3 (Febbraio 16, 2014) Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano AM , BN e CL le mediane, che si intersecano nel baricentro G . Siano M_0 , N_0 e L_0 i punti medi di AG , BG e CG , rispettivamente. Mostrare che i sei punti M , M_0 , N , N_0 , L , L_0 giacciono su una circonferenza se e solo se ABC è equilatero.

1.2 Angoli e circonferenze

Problema 4 (Febbraio 16, 2001) Sia ABC un triangolo tale che l'angolo $ACB = 60^\circ$. Sia M il punto medio del lato AB e siano H e K i piedi delle altezze che partono da B e da A rispettivamente. Dimostrare che il triangolo HMK è equilatero.

Problema 5 (Febbraio 18, 2007) È data una circonferenza di diametro AB e centro O . Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O . Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB .

- Dimostrare che DO è bisettrice dell'angolo CDB .
- Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD .

Problema 6 (Febbraio 16, 1998) Dato il triangolo ABC con angolo CAB - angolo $ABC = 90^\circ$, detti M il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa ad AB , dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è uguale ad HM .

Problema 7 (Febbraio 17, 2012) Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC .

- Si dimostri che gli angoli BAP e QAC sono congruenti;
- Si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;
- Si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC , l'area del quadrilatero $ABPC$ vale quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.

Problema 8 (Febbraio 17, 2016) Sia $ABCD$ un rettangolo con $AB > BC$ e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano E e F rispettivamente le intersezioni (distinte da A) della bisettrice dell'angolo BAD con il lato CD e la circonferenza ω . La perpendicolare a DF passante per E interseca la corda DF in G e l'arco DF non contenente C nel punto H . Si dimostri che:

- i segmenti DF e FB hanno la stessa lunghezza;
- i triangoli DEG e DHG sono congruenti;
- i segmenti HF e FC sono uguali.

1.3 Quadrilateri inscritti e circoscritti

Problema 9 (Febbraio 16, 2005) Sia ABC un triangolo rettangolo in A , con $AB > AC$; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sulla retta BC si prenda D tale che H sia punto medio di BD ; sia poi E il piede della perpendicolare condotta da C ad AD . Dimostrare che $EH = AH$.

Problema 10 (Febbraio 16, 2002) Sia dato un triangolo ABC . Si indichino con M e N i punti medi rispettivamente dei lati AC e BC . Siano inoltre S e T rispettivamente punti sui lati AC e BC tali che $AS = \frac{1}{3}AC$, $BT = \frac{1}{3}BC$. Dimostra che le bisettrici degli angoli AST e BTS si incontrano su un punto P del lato AB se e solo se il quadrilatero $AMNB$ è circoscrivibile a una circonferenza.

Problema 11 (Febbraio 16, 2015) Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo BAD interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N . Dimostrare che

- il quadrilatero $ABCM$ è inscrittibile in una circonferenza;
- i triangoli ANB e ABM sono simili.

1.4 Similitudini

Problema 12 (Febbraio 16, 2009) È dato un triangolo ABC , rettangolo in A e con AC cateto maggiore; sia M il punto medio di BC , N il simmetrico di A rispetto a BC , O l'intersezione fra la perpendicolare ad MN passante per N e la retta contenente BC .

- a) Dimostrare che l'angolo OMN è il doppio dell'angolo ACB .
- b) Dimostrare che il rapporto fra le aree di MNO e ABC vale un quarto del rapporto fra le lunghezze di BC e HM , dove H è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa di ABC .

1.5 Allineamento

Problema 13 (Febbraio 15, 2021) Sia $ABCD$ un rettangolo e sia E un punto arbitrario, diverso da C , sul lato DC . Sia H la proiezione di E sulla diagonale AC e sia K la proiezione di C sulla semiretta AE .

- Dimostrare che K giace sulla circonferenza circoscritta ad $ABCD$ e che il quadrilatero $CKEH$ è ciclico, cioè inscritto in una circonferenza.
- Dimostrare che $\text{angolo } CKB + \text{angolo } CKH = 90^\circ$
- Dimostrare che K, H, B sono allineati se e solo se $ABCD$ è un quadrato

Problema 14 (Febbraio 17, 2020) Sia ABC un triangolo scaleno con $BC > CA > AB$. Siano ω e γ le circonferenze passanti per A di centro, rispettivamente, B e C . Esse intersecano il segmento BC in M e N , rispettivamente. Costruiamo Z come il simmetrico di A rispetto al punto medio di MN .

- Chiamata P l'intersezione di ZM con AC , mostrare che CPM è isoscele.
- Detta X l'intersezione di ZM con ω distinta da M , mostrare che BX e AC sono parallele.
- Detta Y l'intersezione di ZN con γ distinta da N , mostrare che A, X e Y sono allineati.

2 Esercizi

Esercizio 1 (Febbraio 15, 2023) Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di base maggiore AB tale che la bisettrice dell'angolo in D passi per B . Supponiamo che la bisettrice dell'angolo in A intersechi il lato BC nel punto P . Dimostrare che $AB = AP$ se e solo se la bisettrice dell'angolo PAD passa per C .

Esercizio 2 (Febbraio 16, 2010) È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC . All'interno di tale triangolo sono dati un punto M , dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $\angle CMA = 2\angle CBA$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $\angle BNM = \angle CBA$.

- Dimostrare che $\angle CBN = \angle BAM$.
- Dimostrare che $CM + MN = BN$.

Esercizio 3 (Febbraio 16, 2024) Siano ABC un triangolo acutangolo e D il piede della bisettrice uscente da A . Siano E ed F rispettivamente le intersezioni di AC con la circonferenza circoscritta ad ABD , e di AB con la circonferenza circoscritta ad ACD . Sia inoltre P l'intersezione tra BE e CF .

- (a) Mostrare che il triangolo PBC è isoscele.
- (b) Mostrare che $BD : BE = CD : CF$.
- (c) Sia F' il simmetrico di F rispetto al punto medio di BC . Mostrare che il triangolo EBF' è simile al triangolo ABC .

Esercizio 4 (Febbraio 16, 2019) Sia ABC un triangolo isoscele su base BC e siano D, E punti sui lati AB, AC rispettivamente, tali che le rette DE e BC risultino parallele. Si consideri inoltre il punto F sulla retta DE che si trova dalla parte opposta di D rispetto ad E ed è tale che FE sia congruente ad AD . Detto O il circocentro del triangolo BDE , dimostrare che i punti O, F, A, D giacciono su una circonferenza.