Stage Olimpiadi - Combinatoria

Fabio Lilliu

February 2025

1 Teoria

1.1 Induzione

Problema 1 *Dimostrare che ogni intero positivo si può scrivere come somma di due o più numeri di Fibonacci distinti.*

Problema 2 *Dimostrare che è sempre possibile tassellare una griglia* $2^n \times 2^n$ *con una casella rimossa con trimini ad L.*

1.2 Colorazioni

Problema 3 *Data una scacchiera 8x8 privata di due caselle corrispondenti ad angoli opposti della scacchiera, dimostrare che non può essere coperta con tasselli 2x1.*

Problema 4 *Un quadrato* 7×7 *è ricoperto da 16 tessere* 1×3 *non sovrapposte. In quali caselle può capitare l'unico buco* 1×1 *rimanente?*

1.3 Giochi

Problema 5 *(Cesenatico 4, 2004) Antonio e Bernardo giocano al seguente gioco: sono date due pile di gettoni, una con* m *gettoni e l'altra con* n *gettoni. Ogni giocatore sceglie a turno una delle seguenti mosse:*

- *prendere un gettone da una delle pile;*
- *prendere un gettone da ciascuna delle pile;*
- *spostare un gettone da una pila ad un'altra.*

Perde chi non può più muovere. Comincia Antonio. Determinare, in funzione di m *ed* n*, se uno dei due giocatori ha una strategia vincente, e in caso affermativo specificare di quale giocatore si tratta.*

1.4 Conteggi

Problema 6 *(Febbraio 11, 2024) Alberto ha davanti a sé 13 caselle disposte una sopra l'altra, e vuole inserirvi i numeri da 1 a 10, uno per casella (tre caselle rimarranno vuote). Vuole inoltre che, se due numeri sono scritti in caselle che si toccano, quello più in alto sia maggiore. In quanti modi può farlo?*

1.5 Percorsi

Problema 7 *In una griglia 5x7, quanti sono i possibili percorsi dall'angolo in alto a sinistra a quello in basso a destra, potendoci muovere solamente verso il basso e verso destra?*

Problema 8 *(Febbraio 12, 2023) Una complicata coreografia prevede una fila di 7 ballerine equispaziate su un palcoscenico piano; di fronte a quella delle ballerine vi è una fila identica, parallela, di altrettanti ballerini. La coreografa vuole assegnare a ciascuna ballerina alcuni ballerini in modo che, tracciando sul palcoscenico il segmento che unisce la posizione di ciascuna ballerina a quella dei ballerini a lei assegnati, non vi siano segmenti che si intersecano se non negli estremi. Vuole inoltre che il numero totale di segmenti tracciati sia 13. Quanti sono i possibili modi di effettuare le assegnazioni che soddisfano queste proprietà?*

2 Esercizi

Esercizio 1 *(Febbraio 16,2018) Alice e Barbara hanno inventato il seguente gioco. Hanno una griglia 1×2018, con le caselle numerate da 1 a 2018 da sinistra verso destra, e 2018 tessere numerate anch'esse da 1 a 2018. La partita inizia con la griglia vuota, e le due giocatrici si alternano nel fare mosse; la giocatrice di turno può scegliere fra:*

- *selezionare una tessera non ancora collocata sulla griglia e porla su una casella libera, a patto che i numeri sulle tessere collocate, se letti da sinistra verso destra, siano in ordine crescente;*
- *selezionare una tessera già collocata sulla griglia e spostarla in una casella adiacente in modo che la tessera si avvicini alla casella che reca lo stesso numero della tessera, a patto che la casella di arrivo sia libera (esempio: se la tessera col numero 7 si trova sulla casella numero 12, la si può spostare a sinistra, ma non a destra; se invece una tessera si trova già nella casella col suo stesso numero, non potrà più essere spostata).*

(a) Dimostrare che a ogni turno, se le tessere non sono tutte sulla griglia, esiste una mossa lecita. (b) Se inizia Alice e vince chi colloca l'ultima tessera, chi ha una strategia vincente?

Esercizio 2 *(Febbraio 17, 2017) Un triangolo equilatero è diviso in 9 triangolini come in figura, e su ogni triangolino è inizialmente scritto il numero 0.*

Marco, per passare il tempo, fa il seguente gioco: ad ogni mossa sceglie 2 triangolini con un lato in comune e somma o sottrae 1 ad entrambi i numeri scritti su questi triangolini (si intende che l'operazione effettuata sui due triangolini è la stessa). Dopo qualche tempo si accorge che i numeri scritti sui 9 triangolini sono, in un qualche ordine, n, $n+1$, ..., $n+8$, dove n è un intero non negativo. Dimostrare che n può essere soltanto 0 o 2.

Esercizio 3 *(Febbraio 15,2015) Camilla ha una scatola che contiene 2015 graffette. Ne prende un numero positivo n e le mette sul banco di Federica, sfidandola al seguente gioco. Federica ha a disposizione due tipi di mosse: può togliere 3 graffette dal mucchio che ha sul proprio banco (se il mucchio contiene almeno 3 graffette), oppure togliere metà delle graffette presenti (se il mucchio ne contiene un numero pari). Federica vince se, con una sequenza di mosse dei tipi sopra descritti, riesce a togliere tutte le graffette dal proprio banco.*
(a) Per quanti dei 2015 possibili valori di n Federica può vincere?
(b) Le ragazze cambiano le regole del gioco e decidono di assegnare la vittoria a Federica nel caso riesca a lasciare sul banco una singola graffetta. Per quanti dei 2015 valori di n Federica può vincere con le nuove regole?