Stage Olimpiadi - Geometria

Fabio Lilliu

January 2026

1 Teoria

1.1 Punti notevoli

Problema 1 *(Febbraio 17, 2000) Si scelgano i punti H, K, M sui lati di un triangolo ABC in modo tale che AH sia un'altezza, BK sia una bisettrice e CM sia una mediana. Si indichi con D l'intersezione tra AH e BK, e con E l'intersezione tra HM e BK. Sapendo che $KD = 2$, $DE = 1$, $EB = 3$:*

- *(i) si dimostri che HM è parallelo ad AC;*
- *(ii) si dimostri che $AB = AC$;*
- *(iii) si dimostri che $AB = BC$.*

Problema 2 *(Febbraio 16, 2014) Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano AM, BN e CL le mediane, che si intersecano nel baricentro G. Siano M_0, N_0 e L_0 i punti medi di AG, BG e CG, rispettivamente. Mostrare che i sei punti M, M_0, N, N_0, L, L_0 giacciono su una circonferenza se e solo se ABC è equilatero.*

Problema 3 *(Febbraio 16, 2008) Sia AB una corda di una circonferenza e P un punto interno ad AB tale che $AP = 2PB$. Sia DE la corda passante per P e perpendicolare ad AB. Dimostrare che il punto medio Q di AP è l'ortocentro di ADE.*

1.2 Angoli e circonferenze

Problema 4 *(Febbraio 18, 2007) È data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB.*

- *Dimostrare che DO è bisettrice dell'angolo CDB.*
- *Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD.*

Problema 5 *(Febbraio 16, 1998) Dato il triangolo ABC con angolo CAB - angolo $ABC = 90°$, detti M il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa ad AB, dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è uguale ad HM.*

Problema 6 *(Febbraio 17, 2012) Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.*

- *Si dimostri che gli angoli BAP e QAC sono congruenti;*
- *Si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;*
- *Si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero $ABPC$ vale quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.*

Problema 7 *(Febbraio 17, 2016) Sia $ABCD$ un rettangolo con $AB > BC$ e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano E e F rispettivamente le intersezioni (distinte da A) della bisettrice dell'angolo BAD con il lato CD e la circonferenza ω. La perpendicolare a DF passante per E interseca la corda DF in G e l'arco DF non contenente C nel punto H. Si dimostri che:*

- *i segmenti DF e FB hanno la stessa lunghezza;*
- *i triangoli DEG e DHG sono congruenti;*
- *i segmenti HF e FC sono uguali.*

1.3 Quadrilateri inscritti e circoscritti

Problema 8 *(Febbraio 16, 2005) Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB > AC$; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sulla retta BC si prenda D tale che H sia punto medio di BD; sia poi E il piede della perpendicolare condotta da C ad AD. Dimostrare che $EH = AH$.*

Problema 9 *(Febbraio 16, 2001) Sia ABC un triangolo tale che l'angolo $ACB = 60°$. Sia M il punto medio del lato AB e siano H e K i piedi delle altezze che partono da B e da A rispettivamente. Dimostrare che il triangolo HMK è equilatero.*

Problema 10 *(Febbraio 16, 2002) Sia dato un triangolo ABC. Si indichino con M e N i punti medi rispettivamente dei lati AC e BC. Siano inoltre S e T rispettivamente punti sui lati AC e BC tali che $AS = \frac{1}{3}AC$, $BT = \frac{1}{3}BC$. Dimostra che le bisettrici degli angoli AST e BTS si incontrano su un punto P del lato AB se e solo se il quadrilatero $AMNB$ è circoscrivibile a una circonferenza.*

Problema 11 *(Febbraio 16, 2015) Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo BAD interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N. Dimostrare che*

- *il quadrilatero ABCM è inscrittibile in una circonferenza;*
- *i triangoli ANB e ABM sono simili.*

1.4 Similitudini

Problema 12 *(Febbraio 16, 2009) È dato un triangolo ABC, rettangolo in A e con AC cateto maggiore; sia M il punto medio di BC, N il simmetrico di A rispetto a BC, O l'intersezione fra la perpendicolare ad MN passante per N e la retta contenente BC.*

- *a) Dimostrare che l'angolo OMN è il doppio dell'angolo ACB.*
- *b) Dimostrare che il rapporto fra le aree di MNO e ABC vale un quarto del rapporto fra le lunghezze di BC e HM, dove H è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa di ABC.*

1.5 Allineamento

Problema 13 *(Febbraio 15, 2021) Sia ABCD un rettangolo e sia E un punto arbitrario, diverso da C, sul lato DC. Sia H la proiezione di E sulla diagonale AC e sia K la proiezione di C sulla semiretta AE.*

- *Dimostrare che K giace sulla circonferenza circoscritta ad ABCD e che il quadrilatero CKEH è ciclico, cioè inscrivibile in una circonferenza.*
- *Dimostrare che angolo CKB + angolo CKH =* 90^o
- *Dimostrare che K, H, B sono allineati se e solo se ABCD è un quadrato*

Problema 14 *(Febbraio 17,2020) Sia ABC un triangolo scaleno con* $BC > CA > AB$*. Siano* ω *e* γ *le circonferenze passanti per A di centro, rispettivamente, B e C. Esse intersecano il segmento BC in M e N, rispettivamente. Costruiamo Z come il simmetrico di A rispetto al punto medio di MN.*

- *Chiamata P l'intersezione di ZM con AC, mostrare che CPM è isoscele.*
- *Detta X l'intersezione di ZM con* ω *distinta da M, mostrare che BX e AC sono parallele.*
- *Detta Y l'intersezione di ZN con* γ *distinta da N, mostrare che A, X e Y sono allineati.*

2 Esercizi

Esercizio 1 *(Febbraio 15,2023) Sia ABCD un trapezio isoscele di base maggiore AB tale che la bisettrice dell'angolo in D passi per B. Supponiamo che la bisettrice dell'angolo in A intersechi il lato BC nel punto P. Dimostrare che AB = AP se e solo se la bisettrice dell'angolo PAD passa per C.*

Esercizio 2 *(Febbraio 16,2010) È dato un triangolo acutangolo isoscele* ABC *di base* AC*. All'interno di tale triangolo sono dati un punto M, dalla parte di C rispetto all'asse di* AC *e tale che* $CcMA = 2C\ b\ BA$*, e un punto N all'interno del segmento* AM *tale che angolo* BNM = *angolo* CBA.

- *Dimostrare che angolo* CBN = *angolo* BAM.
- *Dimostrare che* $CM + MN = BN$.

Esercizio 3 *(Febbraio 16,2024) Siano* ABC *un triangolo acutangolo e* D *il piede della bisettrice uscente da* A*. Siano E ed F rispettivamente le intersezioni di AC con la circonferenza circoscritta ad ABD, e di AB con la circonferenza circoscritta ad ACD. Sia inoltre P l'intersezione tra BE e CF.*

- *(a) Mostrare che il triangolo PBC è isoscele.*
- *(b) Mostrare che* $BD : BE = CD : CF$.
- *(c) Sia* F' *il simmetrico di F rispetto al punto medio di BC. Mostrare che il triangolo* EBF' *è simile al triangolo* ABC.

Esercizio 4 *(Febbraio 16, 2019) Sia ABC un triangolo isoscele su base BC e siano D, E punti sui lati AB, BC rispettivamente, tali che che le rette DE e AC risultino parallele. Si consideri inoltre il punto F sulla retta DE che si trova dalla parte opposta di D rispetto ad E ed è tale che FE sia congruente ad AD. Detto O il circocentro del triangolo BDE, dimostrare che i punti O, F, A, D giacciono su una circonferenza*