Stage Olimpiadi - Combinatoria

Fabio Lilliu

January 2026

1 Teoria

1.1 Induzione

Problema 1 *Dimostrare che è sempre possibile tassellare una griglia* $2^n \times 2^n$ *con una casella rimossa con trimini ad L.*

Problema 2 *Sia* N *un intero positivo. Dimostra che se la somma degli elementi dell'insieme* $1, 2, \ldots, N$ *è pari, allora è possibile colorare ogni elemento dell'insieme di rosso o di verde, in maniera tale che la somma degli elementi rossi sia pari a quella degli elementi verdi.*

1.2 Colorazioni

Problema 3 *Data una scacchiera 8x8 privata di due caselle corrispondenti ad angoli opposti della scacchiera, dimostrare che non può essere coperta con tasselli 2x1.*

Problema 4 *Data una scacchiera* $n \times n$*, per quali* n *posso ricoprirla con tasselli* 4×1*?*

1.3 Giochi

Problema 5 *Un giocatore ha davanti a sé una fila con delle gemme. Inizialmente c'è solo un rubino nella fila. A ogni turno, il giocatore può:*

- *Aggiungere uno zaffiro alla fine della fila*
- *Creare una copia della fila, e aggiungerla alla fine di quella originale*
- *Sostituire tre rubini consecutivi con uno zaffiro*
- *Togliere due zaffiri consecutivi.*

È possibile fare in modo che, a un certo punto, la fila abbia solo uno zaffiro?

Problema 6 *Su un tavolo ci sono* $N > n^2$ *gettoni. Viktor e Anna fanno un gioco: inizia Viktor, e poi muovono a turno. Il giocatore di turno può togliere* k *gettoni, dove* k *è un numero più piccolo di* n*, oppure un multiplo di* n*. Chi toglie l'ultimo gettone vince. Dimostra che Viktor ha una strategia vincente.*

1.4 Conteggi

Problema 7 *(Febbraio 17, 2010) In quanti modi diversi si possono mettere in fila i numeri* $\{21, 31, 41, 51, 61, 71, 81\}$ *in modo che, comunque se ne scelgano quattro in posti consecutivi, la loro somma sia divisibile per tre?*

Problema 8 *(Febbraio 13, 2025) Una cassettiera contiene 10 cassetti numerati da 1 a 10. Stefano ha 10 palline, a loro volta numerate da 1 a 10, e deve inserirne una in ogni cassetto in modo tale che, se la pallina* a *si trova nel cassetto* b*, allora il massimo comun divisore fra* a *e* b *sia 1. Quanti modi ha Stefano per abbinare le palline ai cassetti?*

1.5 Percorsi

Problema 9 *In una griglia* 5×8*, quanti sono i possibili percorsi dall'angolo in alto a sinistra a quello in basso a destra, potendoci muovere solamente verso il basso e verso destra?*

Problema 10 *Dimostra che*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

per ogni $n \geq k$*,* n, k *interi positivi.*

2 Esercizi

Esercizio 1 *(Cesenatico 2, 2003) Un museo ha la pianta quadrata ed è suddiviso in n^2 stanze quadrate tutte uguali (con $n > 1$). Ogni coppia di stanze adiacenti (cioè con un muro in comune) comunica mediante una porta. Il guardiano notturno vuole organizzare il suo giro di ispezione in modo da rispettare le seguenti regole: il guardiano parte da una certa stanza, dove rimane per un minuto, terminato il quale si sposta in una stanza adiacente, dove rimane per un altro minuto; il percorso prosegue collegando stanze adiacenti, in ognuna delle quali il guardiano rimane sempre esattamente un minuto prima di spostarsi.*

È consentito ripassare più volte dalla stessa stanza, ma al termine del percorso (che non si trova necessariamente nella stanza d'inizio) il guardiano deve essere stato in ognuna delle n^2 stanze per esattamente k minuti.

Determinare per quali interi positivi n e k è possibile organizzare il percorso rispettando queste regole.

Esercizio 2 *(Cortona 1999) Un gruppo di 22 concorrenti siede attorno a una tavola rotonda. Uno di loro possiede 110 monete, mentre gli altri non possiedono nulla. Ogni minuto un concorrente che possiede almeno due monete può donarne una ad ognuno dei suoi vicini. È possibile che, a un certo punto, ogni concorrente si ritrovi con esattamente 5 monete?*

Esercizio 3 *(Cesenatico 4, 1999) Alberto e Barbara fanno il seguente gioco. Su di un tavolo ci sono 1999 cerini: a turno ogni giocatore deve togliere dal tavolo un numero di cerini a sua scelta, purché maggiore o uguale a uno, e minore o uguale alla metà del numero di cerini rimasti in quel momento. Il giocatore che lascia sul tavolo un solo cerino perde. Barbara è la prima a giocare. Determinare per quale dei due giocatori esiste una strategia vincente e descrivere tale strategia.*