1.- Una barra de 12 pulg que está sujeta por ambos extremos se somete a una cantidad creciente de esfuerzo hasta que se rompe. Sea Y = la distancia del extremo izquierdo al punto donde ocurre la ruptura. Suponga que Y tiene la función de densidad de probabilidad:

$$f(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{24}\right)y\left(1-\frac{y}{12}\right), & 0 \le y \le 12 \\ 0, & \textit{De lo contrario} \end{cases}$$

Calcule lo siguiente:

a.- La función de distribución acumulativa de Y.

b.- $P(Y \le 4)$, $P(Y > 6)$ y $P(4 \le Y \le 6)$

c.- $E(Y)$, $E(Y^2)$ y $Var(Y)$.

d.- La probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulg del punto de ruptura esperado.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^{12} \left(\frac{1}{24}\right)y\left(1-\frac{y}{12}\right)dy$$

$$\int_0^{12} \frac{y}{24}\left(1-\frac{y}{12}\right)dy$$

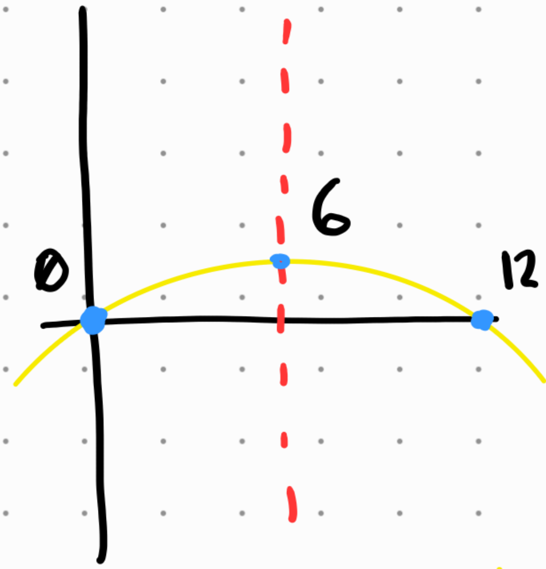
$$\int_0^{12} \left(\frac{y}{24}-\frac{y^2}{288}\right)dy$$

$$\frac{1}{24}\int_0^{12} y\,dy - \frac{1}{288}\int_0^{12} y^2\,dy$$

$$\frac{1}{24}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{12} - \frac{1}{288}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{12}$$

$$\frac{y^2}{48} - \frac{y^3}{864} \rightarrow \frac{144}{48} - \frac{1728}{864}$$

$$3 - 2 = 1$$



Valor Esperado

6

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\left[\left(\frac{1}{24}\right) y \left(1 - \frac{y}{12}\right)\right] dy$$

$$\frac{y^2}{24}\left(1 - \frac{y}{12}\right)$$

$$\frac{y^2}{24} - \frac{y^3}{288} \rightarrow \frac{y^3}{72} - \frac{y^4}{1152} \rightarrow \frac{16y^3 - y^4}{1152}$$

$$\frac{1}{24}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{12}\right) - \frac{1}{288}\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{12}\right)$$

$$24 - 18 = 6$$

Valor Esperado

Usando los valores obtenidos en la sig. página:

b)

$P(4)$ $Z = \frac{4-6}{2.68} = -0.746 \rightarrow$ NORM.S.DIST $\rightarrow$ 22.8%

$P(6) \rightarrow$ al ser la media $\rightarrow$ 50% $\rightarrow$ entre ambos $\rightarrow$ 27.2%

d) $P(6+2) \rightarrow \frac{8-6}{2.68} = 77.2\%$ ← mayor o igual

$P(6-2) = 22.8\% \rightarrow 22.8 + 100 - 77.2 = 45.6\%$

Varianza

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$Var[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$(y-6)^2 \left[\left(\frac{1}{24}\right) y \left(1 - \frac{y}{12}\right)\right] dy$$

$$(y^2 - 12y + 36)\left[\frac{y}{24} - \frac{y^2}{288}\right]$$

$$\frac{y^3}{24} - \frac{y^4}{288} - \frac{12y^2}{24} + \frac{12y^3}{288} + \frac{36y}{24} - \frac{36y^2}{288}$$

$$\frac{y^3}{24} - \frac{y^4}{288} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{24} + \frac{3}{2}y - \frac{y^2}{8}$$

$$\frac{y^4}{96} - \frac{y^5}{1440} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{9} + \frac{3y^2}{4} - \frac{y^3}{24} \Bigg|_0^{12}$$

$$216 - 172.8 - 288 + 216 + 108 - 72 = 7.2$$

Desviación Estandar $= \sqrt{Var} = \sqrt{7.2} = 2.6832$

3.- El artículo “Computer Assisted Net Weight Control” (Quality Progress, 1983: 22-25) sugiere una distribución normal con media de 137.2 oz y una desviación estándar de 1.6 oz del contenido real de frascos de cierto tipo. El contenido declarado fue de 135 oz.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de que un solo frasco contenga más que el contenido declarado?

b.- Suponiendo que la media permanece en 137.2, ¿a qué valor se tendría que cambiar la desviación estándar de modo que 95% de todos los frascos contengan más que el contenido declarado?

c.- Entre 10 frascos seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos ocho contengan más que el contenido declarado?

media = $\mu = 137.2$

desviación estandar = $\sigma = 1.6$

valor observado = $x = 135$

NORM.S.DIST $\downarrow$ 91.54% $\uparrow$

a) $$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{135 - 137.2}{1.6} = -1.375$$

b) 5% < 135 & 95% > 135

NORM.S.INV (0.05) = −1.64485

1.337 $\uparrow$

$$-1.645 = \frac{135-137.2}{\sigma\,?} \rightarrow \sigma = \frac{135-137.2}{-1.645}$$

c)

$$P(x=8) = \frac{10!}{8!\,2!}(0.9154)^8(1-0.9154)^2 = 0.159$$

45

$\downarrow$ + $\downarrow$

$$P(x=9) = \frac{10!}{9!\,1!}(0.9154)^9(0.0846) = 0.382$$

10

$\downarrow$ + $\downarrow$

$$P(x=10) = \frac{10!}{10!}(0.9154)^{10}\cancel{(0.0846)^0} = 0.413$$

1

$= * 1$

$\downarrow$

= 95.42%

4.- El artículo "Characterization of Room Temperature Damping in Aluminum-Idium Alloys" (Metallurgical Trans., 1993: 1611-1619) sugiere que el tamaño de grano de matriz A1 (μm) de una aleación compuesta de 2% de indio podría ser modelado con una distribución normal con valor medio de 96 y desviación estándar de 14.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de grano exceda de 100?

b.- ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de grano sea de 50 y 80?

c.- ¿Qué intervalo (a, b) incluye el 90% central de todos los tamaño s de grano (de modo que 5% esté por debajo de a y 5% por encima de b)?

a) = 0.21%

0.002139

media = μ = 96

desviación estandar = σ = 1.4

$1-0.997861$

NORM.S.DIST = 0.997861

a) $Z = \frac{100-96}{1.4} = \frac{4}{1.4} = 2.857$

b) $Z_{50} = \frac{50-96}{1.4} = -32.86$ $\quad Z_{80} = \frac{80-96}{1.4} = -11.43$

NORM.S.DIST(-32.86) → 0 → b) = 0 ← 0 ← NORM.S.DIST(-11.43)

c) $5\% \leq \text{intervalo} \leq 5\%$ → 90% $\quad 5\% = 1.645$

2.303

inferior $= 96 - (\underbrace{-1.645 * 1.4}_{2.303}) = 93.7$

superior $= 96 - (1.645 * 1.4) = 98.303$