第六章　机械波

6.1　一平面简谐波的波函数为

$$y=6\times10^{-3}\cos(20x+4t+\frac{\pi}{3})\quad(\mathrm{SI})$$

求:(1)波的振幅、波长、角频率、频率、周期、波速、波的传播方向;(2)$x=0$ 处波的位移达到最大值的时刻 t。

解　$(1)y(x,t)=6\times10^{-3}\cos[4(t+\frac{x}{0.2})+\frac{\pi}{3}]$

与标准形式 $y(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\frac{\pi}{3}]$对比,知

$$A=6\times10^{-3}\mathrm{m}\quad\omega=4\ \mathrm{rad/s}\quad u=0.2\mathrm{m/s}\quad\varphi=\frac{\pi}{3}$$

而　$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}\mathrm{s}\quad\nu=\frac{1}{T}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Hz}=0.64\mathrm{Hz}\quad\lambda=\frac{u}{\nu}=0.31\mathrm{m}$

沿 x 轴负方向传播。

$(2)x=0$ 处　$y(0,t)=6\times10^{-3}\cos(4t+\frac{\pi}{3})=6\times10^{-3}\mathrm{m}$

故　$4t+\frac{\pi}{3}=\pm2k\pi$　即 $t=(\pm\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12})=\pm kT-0.26\mathrm{s}$

6.2　一简谐波的振幅为 2.0cm,波长为 1.2m,沿 x 轴正向传播,波速为 6m/s,在 $t=0$ 时 $x=0$ 处是波峰,求(1)波的周期、频率、角频率;(2)波函数。

平面谐波 $A=2\mathrm{cm},\lambda=1.2\mathrm{m},u=6\mathrm{m/s}$,$x$ 正向传播。$t=0$ 时 $x=0$ 处为峰。求(1)T,ν,ω　(2)$y(x,t)$

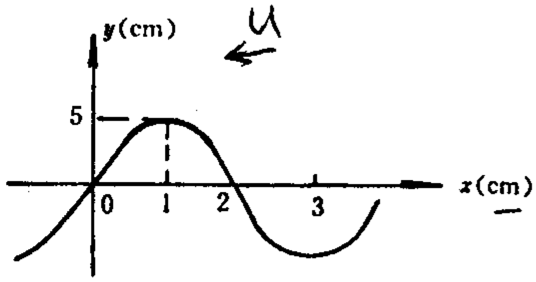
解　$(1)\nu=\frac{u}{\lambda}=5\mathrm{Hz}\quad T=\frac{1}{\nu}=0.2\mathrm{s}\quad\omega=2\pi\nu=10\pi\ \mathrm{rad/s}$

(2)设 $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

$$y(0,0)=A\cos\varphi=A\quad\varphi=0$$

故　$$y(x,t)=0.02\cos[10\pi(t-\frac{x}{6})]\quad(\mathrm{SI})$$

6.3 一沿 x 轴负向传播波速 1m/s 的平面简谐波在 $t=2$s 时的波形图如图所示。则(1)写出 o 点的振动方程;(2)写出这列行波的波函数。



题 6.3 图

解 (1)由图知

$A=0.05\text{m}\quad \lambda=4\text{m}\quad 0.04\text{m}$

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{u}{\lambda}=\frac{\pi}{2}\text{rad/s}\quad 50\pi$$

设 $x=0$ 处质点振动为 $y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

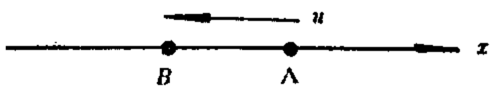
由图知

$$\left.\begin{aligned} y(0,2)&=0.05\cos(\overset{50\pi}{\frac{\pi}{2}}\times2+\varphi)=0\\ v(0,2)&=-0.05\times\frac{\pi}{2}\sin(\overset{50\pi}{\frac{\pi}{2}}\times2+\varphi)>0\end{aligned}\right\}\varphi=\overset{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

故 $$y(0,t)=0.05\cos(\overset{50\pi}{\frac{\pi}{2}}t+\frac{\pi}{2})\quad(\text{SI})$$

(2)波函数 $y(x,t)=0.05\cos[\overset{50\pi}{\frac{\pi}{2}}(t+\frac{x}{1})+\frac{\pi}{2}]\quad(\text{SI})$

6.4 已知一平面简谐波以波速 $u=10$m/s 沿 x 负向传播。若波线上 A 点的振动方程为 $y_A=2\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})$,波线上另一点 B 和 A 相距 2.5m(见图)。试分别以 A 及 B 为坐标原点,写出该波的波函数。



题 6.4 图

解 (1)A 为原点,$y(x,t)=2\cos[2\pi(t+\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]$

(2)B 为原点

B 点振动方程 $y_B=2\cos[2\pi(t+\frac{-2.5}{10})+\frac{\pi}{3}]$

$$=2\cos(2\pi t-\frac{\pi}{6})$$

故 $$y(x,t)=2\cos[2\pi(t+\frac{x}{10})-\frac{\pi}{6}] \quad (\mathrm{SI})$$

6.5 一沿着很长弦线行进的横波的方程由

$$y=6.0\sin(0.020\pi x+4.0\pi t)$$

给出，其中 x 与 y 的单位为厘米，t 的单位为秒。试求：振幅、波长、频率、波速、波传播的方向，以及弦线质点的最大横向速率。

解 $$y(x,t)=6\cos(4\pi t+0.02\pi x-\frac{\pi}{2})$$

$$=6\cos[4\pi(t+\frac{x}{200})-\frac{\pi}{2}]$$

故 $A=6\mathrm{cm}, \omega=4\pi\ \mathrm{rad/s}, u=200\mathrm{cm/s}$

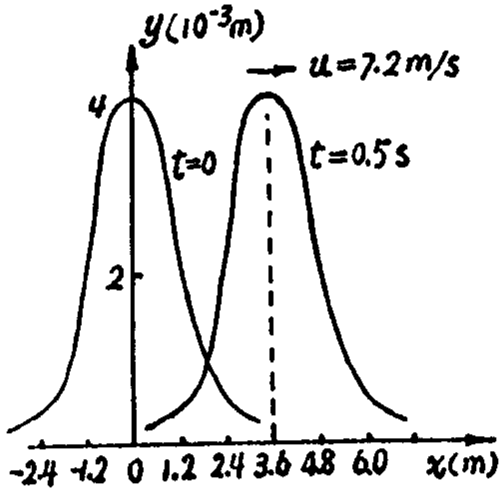
$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=2\mathrm{Hz} \quad T=\frac{1}{\nu}=0.5\mathrm{s} \quad \lambda=\frac{u}{\nu}=100\mathrm{cm}$$，x 负向传播

$$v_m=\omega A=24\pi\ \mathrm{cm/s}=75.4\mathrm{cm/s}$$

6.6 一波脉冲的表达式为

$$y(x,t)=y_0 e^{-[(x-ut)/x_0]^2}$$

式中 $y_0=4\mathrm{mm}$、$x_0=1.2\mathrm{m}$，波速 u 为 $7.2\mathrm{m/s}$。试在同一张图（即 xy



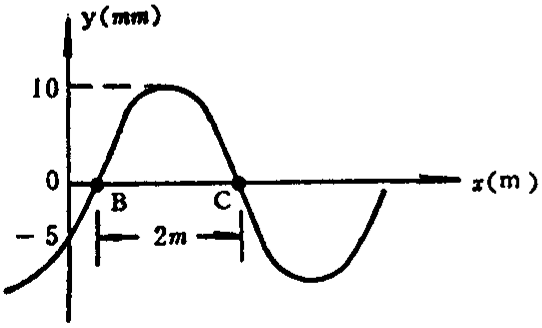
平面上)画出 $t=0$ 和 $t=0.5\text{s}$ 的波形草图。为了使波形显见,令 y 坐标放大 10^3 倍。

解 (1)$t=0$ 时 $y=4\times10^{-3}e^{-(\frac{x}{1.2})^2}$

(2)$t=0.5\text{s}$ 时

$y=4\times10^{-3}e^{-(\frac{x-3.6}{1.2})^2}$

6.7 一列频率为 0.5Hz 的平面余弦波沿 x 正方向传播。在 $t=1/3\text{s}$ 的波形如图所示。试求:(1)$x=0$ 处质点的谐振动表达式;(2)波函数;(3)C 点的谐振动表达式以及 C 点离原点 o 的距离。



题 6.7 图

解 (1)$\omega=2\pi\nu=\pi\ \text{rad/s}$

$A=10\times10^{-3}\text{m}$ $\lambda=4\text{m}$

$u=\nu\lambda=2\text{m/s}$

设 $x=0$ 处振动表达式为 $y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\omega t_1+\varphi=\cos^{-1}\frac{y(0,t_1)}{A}=\cos^{-1}(\frac{-5}{10})=\pm\frac{2\pi}{3}(\text{“}-\text{”删去})$$

由图知 $u(0,t_1)=-\omega A\sin(\omega t_1+\varphi)<0$

故 $\omega t_1+\varphi=\frac{2\pi}{3}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$

$$y(0,t)=0.01\cos(\pi t+\frac{\pi}{3})\quad(\text{SI})$$

(2) $y(x,t)=0.01\cos[\pi(t-\frac{x}{2})+\frac{\pi}{3}]$ (SI)

(3)由图知 $y(x_c,\frac{1}{3})=0.01\cos[\pi(\frac{1}{3}-\frac{x_c}{2})+\frac{\pi}{3}]=0$

$$x_c=\begin{cases}\frac{7}{3}\text{m}\\ \frac{1}{3}\text{m}(\text{删去})\end{cases}$$

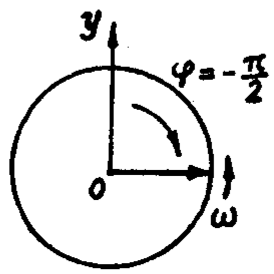
$$y(x_c,t)=0.01\cos[\pi(t-\frac{7/3}{2})+\frac{\pi}{3}]=0.01\cos(\pi t-\frac{5}{6}\pi)\quad(\mathrm{SI})$$

6.8 (1)将一振源系于一螺旋弹簧上，使这振源沿着螺旋弹簧激起一连续的余弦式纵波。振源的频率为 25Hz，而弹簧中相邻的两个稀疏区域之间的距离为 24cm。试求这纵波的速率；(2)如果弹簧的质点的最大纵向位移为 0.3cm，而这波沿负 x 方向行进。试写出其波函数。设振源放在 $x=0$ 处，在 $t=0$ 该处质点恰好通过平衡位置并正向运动。 $\nu=25\mathrm{Hz}$. $\lambda=0.24\mathrm{m}$.

解 (1) $$u=\nu\lambda=6\mathrm{m/s}$$

(2)设原点振动表达式为 $y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\omega=2\pi\nu=50\pi\ \mathrm{rad/s}$$



因 $$\left.\begin{array}{l}y(0,0)=A\cos\varphi=0\\ v(0,0)=-\omega A\sin\varphi>0\end{array}\right\}\text{得 }\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

故 $$y(0,t)=0.003\cos(50\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$$y(x,t)=0.003\cos[50\pi(t+\frac{x}{6})-\frac{\pi}{2}]\quad(\mathrm{SI})$$

6.9 在 $t=0$ 时刻，一列平面简谐波的波形为

$$y=0.04\sin 0.02\pi x\quad(\mathrm{SI})$$

这波以 300m/s 在负 x 方向传播。试求在 $t_0=\frac{1}{4}$s 时刻，该波引起的 $x_0=25$m 处质点的运动速度。

解 设 $y(x,t)=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$

由题意 $$y(x,0)=A\cos(\frac{\omega x}{u}+\varphi)=0.04\sin 0.02\pi x$$

$$=0.04\cos(0.02\pi x-\frac{\pi}{2})$$

故 $$A=0.04\mathrm{m}\quad \omega=0.02\pi u=6\pi\ \mathrm{rad/s}\quad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$y(x,t)=0.04\cos[6\pi(t+\frac{x}{300})-\frac{\pi}{2}]\quad(\mathrm{SI})$$

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-6\pi\times 0.04\sin\left[6\pi\left(t+\frac{x}{300}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$t=\frac{1}{4}$s 时 $x=25$m 处质点的振动速度为

$$v=-6\pi\times 0.04\sin\left[6\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{300}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=0.75\text{m/s}$$

6.10 一根长为 2.0m 和质量为 0.060kg 的绳子，所受张力为 300N，试问这绳上的横波的速度为多大？

解 线密度 $\mu=\frac{m}{l}=0.03$kg/m

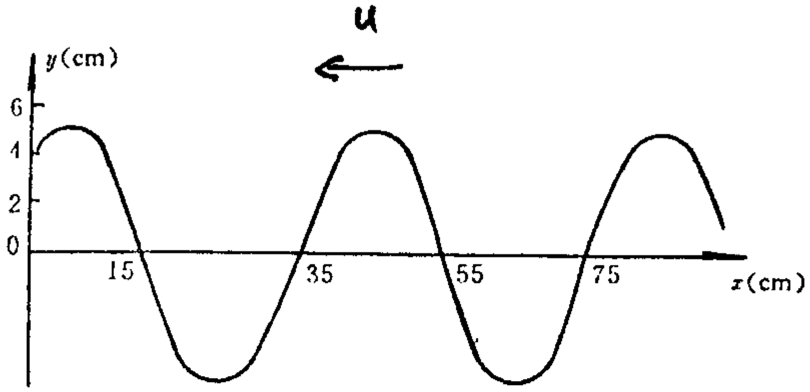
$$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=100\text{m/s}$$

6.11 一振动弦线的线密度为 1.3×10^{-4}kg/m。有一由波函数 $y=0.021\sin(30t+x)$ 所描述的横波在这弦线上传播，式中采用 SI 单位。试问这弦线上的张力有多大？

解 $$y(x,t)=0.021\cos\left[30\left(t+\frac{x}{30}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

故 $u=30$m/s $F=\mu u^2=0.117$N

6.12 某简谐横波沿弦线向左传播，在 $t=0$ 时刻的波形如图所示。已知弦



题 6.12 图

线张力为 3.6N 而线密度为 0.025kg/m。试计算(1)波的速率；(2)波线质点的最大速率；(3)试写出这行波的波函数。

解 (1) $u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=12\text{m/s}$

(2) $v_m=[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}]_{\max}=\omega A=60\pi\times 0.04\sqrt{2}=2.4\sqrt{2}\pi$

$$=10.7\text{m/s}$$

(3)设波函数 $y(x,t)=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$

由图知 $\lambda=0.4\text{m}\quad \omega=2\pi\nu=2\pi\frac{u}{\lambda}=60\pi\ \text{rad/s}$

$t=0$ 时波形 $y(x,0)=A\cos(\frac{\omega x}{u}+\varphi)=A\cos(\frac{60\pi x}{12}+\varphi)$

由图知 $y(0.05,0)=A\cos(\frac{60\pi\times 0.05}{12}+\varphi)=A$

得 $$\varphi=-\frac{\pi}{4}$$

又由图知 $y(0,0)=A\cos\varphi=A\cos(-\frac{\pi}{4})=0.04\text{m}$

得 $$A=0.04\sqrt{2}\ \text{m}$$

故波函数为 $y(x,t)=0.04\sqrt{2}\cos[60\pi(t+\frac{x}{12})-\frac{\pi}{4}]$ (SI)

6.13 一线密度为 0.1kg/m、张力为 10N 的长绳，其一端固定在电动音叉的一只臂上，使产生每秒 5 次的振动。并由此产生的横波的振幅为 4cm。试求(1)波速;(2)波长;(3)在该波所到之处，作用在 1mm 长一段绳子上的最大横向合力。

解 (1) $$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=10\text{m/s}$$

(2) $$\lambda=\frac{u}{\nu}=2\text{m}$$

(3) $$\omega=2\pi\nu=10\pi\ \text{rad/m}$$

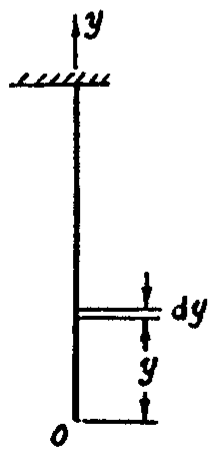
$$F_{\max}=m\omega^2A=0.1\times 10^{-3}\times(10\pi)^2\times 0.04=3.94\times 10^{-3}\text{N}$$

6.14 一质量为 m、长度为 L 的匀质绳子从天花板上挂下，试证(1)绳上横波的速率 u 是 y 的函数，其关系式是 $u=\sqrt{gy}$。y 是从

绳的下端量起的距离；(2)横波从绳的下端行进到绳的上端所需的时间由 $t=2\sqrt{\frac{L}{g}}$ 给出。

证 (1)建坐标如图，y 处绳中张力为

$$F=\frac{m}{L}gy$$



该处波速 $$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{mgy/L}{m/L}}=\sqrt{gy}$$

(2) $$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{u}=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{gy}}$$

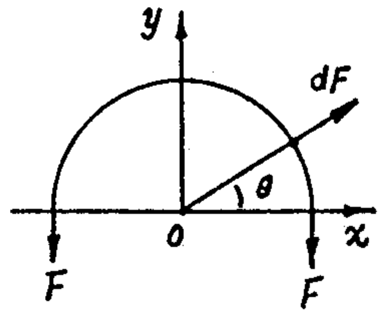
$$\int_0^t \mathrm{d}t=\int_0^L \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{gy}}$$

得 $$t=2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

6.15 在太空舱里，一均匀圆线环沿顺时针方向转动，其切向速率为 v_0。求波在圆线环上的传播速率。

解 0 处 $\mathrm{d}l$ 段受惯性离心力

$$\mathrm{d}F=\frac{m\mathrm{d}l}{2\pi r}\left(\frac{v_0^2}{r}\right)=\frac{mv_0^2}{2\pi r}\mathrm{d}\theta$$



半圆环受合力 $=2F$ （F 为环中张力）

故 $$F=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{mv_0^2}{2\pi r}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{mv_0^2}{2\pi r}$$

环中波速 $$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{mv_0^2/2\pi r}{m/2\pi r}}=v_0$$

6.16 无线电波以 $3.0\times10^8\mathrm{m/s}$ 的速度传播。一无线电波的波源的功率为 50kW，在均匀、不吸收能量的媒质中发射球面波。试求离波源 50km 远处该波的平均能量密度。

解 该处平均能流密度为

$$\bar{I}=\bar{w}u=\frac{P}{4\pi r^2}$$

故 $$\bar{w}=\frac{P}{4\pi r^2 u}=5.3\times10^{-15}\text{J/m}^3$$

6.17 有一简谐波在媒质中传播，波速为 10^3m/s，振幅为 1×10^{-4}m，频率为 10^3Hz，媒质的密度为 800kg/m³。求(1)该波的平均能量密度、能流密度；(2)1 分钟内垂直通过面积 $4\times10^{-4}\text{m}^2$ 的能量。

解 (1) $$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2=158\text{J/m}^3$$

$$\bar{I}=\bar{w}u=1.58\times10^5\text{W/m}^2$$

(2) $$E=60\bar{I}S=3.79\times10^3\text{J}$$

6.18 一频率为 200Hz、振幅为 1cm 的横波沿绳子传播。设这绳子 20m 长、质量为 0.06kg，绳子张力为 50N。试求(1)这根绳上总的波能量；(2)通过绳上一给定点的平均功率。

解 (1)$\mu=\frac{m}{l}=0.003\text{kg/m}$　$\omega=2\pi\nu=400\pi\ \text{rad/s}$

$$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=129\text{m/s}$$

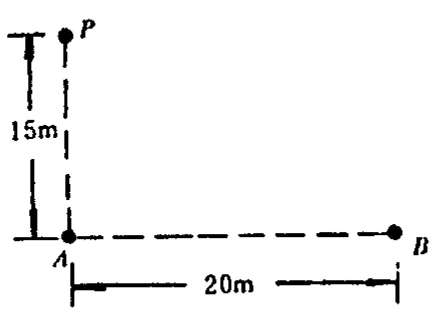
平均能量线密度 $$\bar{w}=\frac{1}{2}\mu\omega^2A^2=0.237\text{J/m}$$

绳上总波动能 $$E=\bar{w}l=4.74\text{J}$$

(2)通过绳上一点的平均功率为

$$\bar{I}=\bar{w}u=30.6\text{W}$$

6.19 如图所示，A、B 两点为同一媒质中的两相干波源，其频率皆为 100Hz，当 A 点为波峰时，B 点适为波谷。设媒质中的波速为 10m/s，每列波到达 P 点时振动的振幅均为 A。试求 P 点($PA\perp AB$)的合振动振幅。



题 6.19

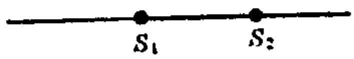
解 $\lambda=\frac{u}{\nu}=0.1\text{m}$

A、B 初位相差 $\varphi_2-\varphi_1=-\pi$ 或 π

P 点两分振动位相差 $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=-501\pi$ 或 -499π

故 P 点干涉减弱 $A_{合}=A_1-A_2=0$

6.20 s_1 和 s_2 为两相干波源，相距 1/4 波长，如图所示。s_1 的相位比 s_2 的相位落后 $\pi/2$，若两波在 s_1s_2 连线方向上的强度相同，均为 I_0，且不随距离变化，问 s_1s_2 连线上在 s_1 外侧各点的合成波的强度如何？又在 s_2 外侧各点的合成波的强度如何？



题 6.20 图

解 (1)

S_1 外侧任意一点 P 两分振动位相差为

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

$$=(\frac{\pi}{2})-\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\lambda}{4})=0$$

故 P 点干涉加强 $A_{合}=2A_0$

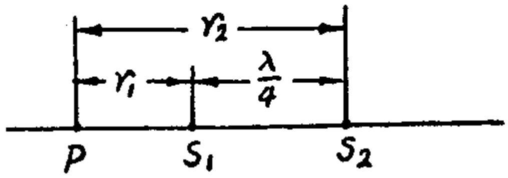
$$\frac{I_{合}}{I_0}=\frac{A_{合}^2}{A_0^2}=4$$

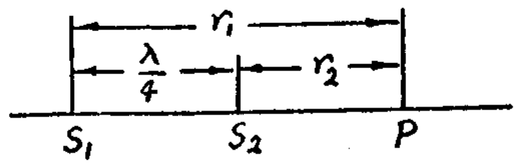
(2)S_2 外侧

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

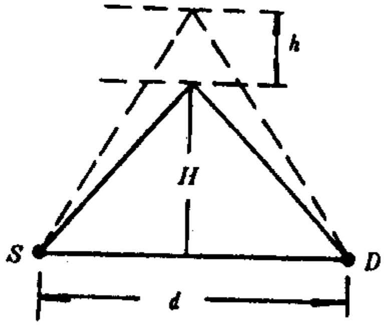
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}(-\frac{\lambda}{4})=\pi$$

故 $A_{合}=0$ $I_{合}=0$





6.21 如图所示，地面上一波源 S，与一高频率探测器 D 之间的距离为 d，从 S 直接发出的波与从 S 发出经高度为 H 的水平层反射后的波，在 D 处加强。当水平层逐渐升高 h 距离时，在 D 处未测到讯号。如不考虑大气对波能量的吸收，试求此波源 S 发出的波的波长 λ。



题 6.21 图

解 $\Delta r=2\sqrt{(\frac{d}{2})^2+H^2}-d=k\lambda$

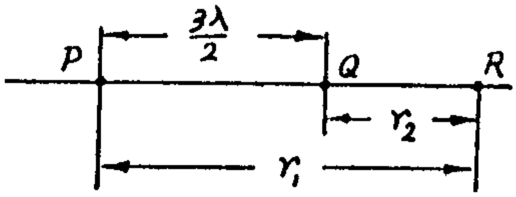
$$\Delta r'=2\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(H+h)^2}-d=(k+\frac{1}{2})\lambda$$

解得 $$\lambda=4\left[\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(H+h)^2}-\sqrt{(\frac{d}{2})^2+H^2}\right]$$

6.22 P、Q 为两个同相位、同振幅的相干波源。这两波源在同一媒质中，它们所发出的波在 PQ 连线上的强度相同。设波长为 λ，P、Q 间距离为 $\frac{3}{2}\lambda$，R 为 PQ 连线上 P 或 Q 点外侧的任一点。试求：(1)自 P、Q 发出的两列波在 R 点处引起的振动的相位差；(2)R 点的合振动的振幅。

解 (1)$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$

$$=0-\frac{2\pi}{\lambda}(-\frac{3}{2}\lambda)=3\pi$$



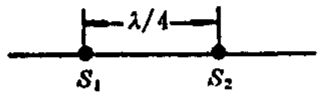
(2) $A_{合}=0$

6.23 S_1 和 S_2 是相距为 1/4 波长的两个波源（见图），它们分别在 x 和 y 方向作谐振动，其表达式为

$$x=A_0\cos\omega t$$

和

$$y=A_0\cos\omega t$$

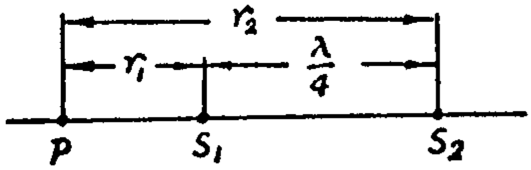


题 6.23

如由这两波源发出的两列波在它们连线上

的振幅仍相同，设为 A。试求在 S_1S_2 连线上 S_1 外侧和 S_2 外侧各点的合成振动的状态。

解　(1) P 点两分振动位相差为



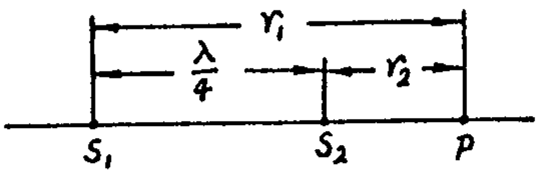
$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

$$=0-\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

相互垂直两谐振动合成，同频率，位相差 $-\frac{\pi}{2}$，同振幅，故合运动轨道为半径为 A 的圆，逆时针方向绕行。(迎着波)

(2)　$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=0-\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}\right)=+\frac{\pi}{2}$$

合运动为半径 A 的圆，顺时针方向绕行。



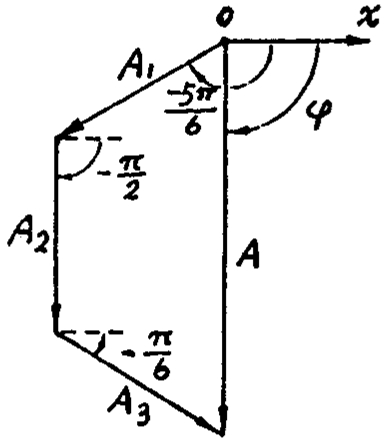
6.24　三列相干波以相同的振幅在同一方向传播。这些波的波函数分别为

$$y_1(x,t)=0.05\sin\left(\omega t-kx-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_2(x,t)=0.05\sin(\omega t-kx)\qquad\qquad(\text{SI})$$

$$y_3(x,t)=0.05\sin\left(\omega t-kx+\frac{\pi}{3}\right)$$

求合成波的波函数。



解　$x=0$ 处，三振动为 $y_1(0,t)=0.05\cos\left(\omega t-\frac{5}{6}\pi\right)$，$y_2(0,t)=0.05\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right.$，$y_3(0,t)=0.05\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$。旋转矢量法合成，得 $x=0$ 处合振动 $A=0.1\text{m}$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，$x=0$ 处质点合

振动为

$$y_{合}(0,t)=0.1\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

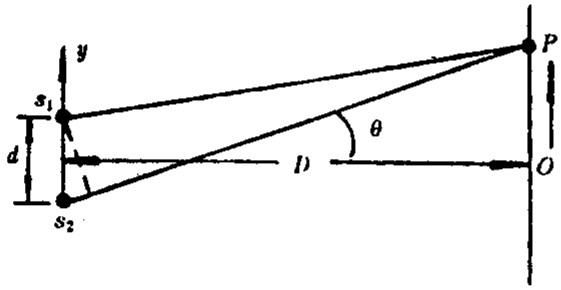
因 $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{u}$故 $u=\frac{\omega}{k}$

合成波 $y_{合}(x,t)=0.1\cos[\omega(t-\frac{x}{\omega/k})-\frac{\pi}{2}]$

$$=0.1\cos(\omega t-kx-\frac{\pi}{2})$$

$$=0.1\sin(\omega t-kx) \qquad (SI)$$

6.25 两只扬声器由一个频率为600Hz的音频放大器作同步驱动。这两只扬声器都在y轴上，一只在$y=+1.0$m处，另一只在$y=-1.0$m。一听者自与y轴相距为D的o点沿平行y轴方向移动(见图)。如$D>>d$，并设声速为331m/s，试问(1)θ为多大时，他第一次听到声音最弱？(2)θ为多大时(除$\theta=0$外)，他第一次听到声音最强？(3)如一直保持在同一方向行进，他最多(除$\theta=0$外)能听到声音最强的次数？



题6.25图

解 (1)$\lambda=\frac{u}{\nu}=0.552$m

$$\Delta r=r_2-r_1\approx d\sin\theta=\frac{1}{2}\lambda \quad 第1次减弱$$

得
$$\theta=\sin^{-1}\frac{\lambda}{2d}=7.9°$$

(2)
$$\Delta r=d\sin\theta=\lambda \quad 第1次加强$$

$$\theta=\sin^{-1}\frac{\lambda}{d}=16°$$

(3)设最大加强次数为k。因$\theta\leqslant 90°$，故

$$d\sin\theta = k\lambda \qquad \sin\theta = \frac{k\lambda}{d} \leqslant 1 \qquad k \leqslant \frac{d}{\lambda} = 3.6$$

故最多干涉加强 3 次。

6.26 一驻波的表达式

$$y = 0.02\cos 20x \cos 750t \quad (\mathrm{SI})$$

试求(1)形成此驻波的两行波的振幅和波速；(2)相邻两波节间的距离；(3) $t = 2.0 \times 10^{-3}$s 时，$x = 5.0 \times 10^{-2}$m 处质点振动的速度。

解 (1)驻波方程标准式为

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

对比，知：$A = 0.01\mathrm{m} \qquad \frac{2\pi}{T} = 750\mathrm{rad/s} \qquad \frac{2\pi}{\lambda} = 20\mathrm{rad/m}$

故 $T = \frac{2\pi}{750}\mathrm{s} = \frac{\pi}{375}\mathrm{s} \quad \lambda = \frac{\pi}{10}\mathrm{m} \quad u = \frac{\lambda}{T} = 37.5\mathrm{m/s}$

(2)相邻两波节间距离为 $\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{20}\mathrm{m} = 0.157\mathrm{m}$

(3) $y(5\times 10^{-2}, t) = 0.02\cos(20\times 5\times 10^{-2})\cos 750t$

$$= 0.0108\cos 750t$$

$$v(5\times 10^{-2}, t) = -750 \times 0.0108\sin 750t = -8.1\sin 750t$$

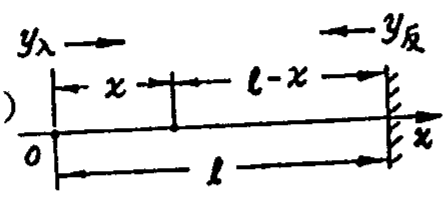
$$v(5\times 10^{-2}\mathrm{m}, 2\times 10^{-3}\mathrm{s}) = -8.1\sin(750\times 2\times 10^{-3}) = -8.08\mathrm{m/s}$$

6.27 设入射波为 $y_1 = A\cos(\omega t - kx)$，式中 x 的单位为米，在 $x = 3$m 处发生反射且反射点为一固定端。试求(1)反射波的表达式；(2)合成波的表达式。反射波回到原点时，波程为6米，相位落后(以弧度) $6k$，加半波损失，共 $6k \pm \pi$，则 $y_反 = A\cos(\omega t + kx - 6k \pm \pi)$

解 (1) $y_入 = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\omega/k}\right)\right]$

$$y_反 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{3}{\omega/k} - \frac{3-x}{\omega/k}\right) + \pi\right]$$

$$= A\cos[\omega t + kx - (6k - \pi)] \quad (\mathrm{SI})$$



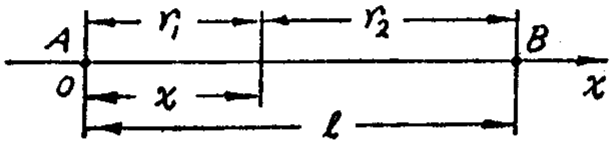
(2) $y_驻 = y_入 + y_反$

$$= 2A\cos\left(kx - \left(3k - \frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left[\omega t - \left(3k - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2A\sin(kx - 3k)\sin(\omega t - 3k)$$

6.28 同一媒质中的两个相干波源位于 A、B 两点，其振幅相等，频率为 100Hz，相位差为 π。若 A、B 两点相距 30m，波在媒质中的传播速度为 400m/s，试求 AB 连线上因干涉而静止的各点位置。

解



以 A 为原点 o，x 轴正向由 A 向 B。设 x 处干涉静止。

则
$$(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=(2k+1)\pi$$

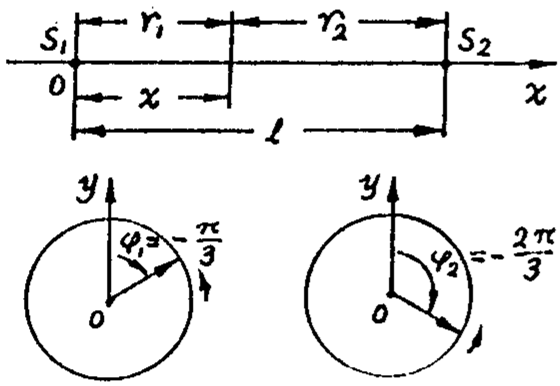
式中
$$(\varphi_2-\varphi_1)=\pi,\lambda=\frac{u}{\nu}=4\text{m},r_1=x,r_2=30-x$$

代入上式得　　$x=2k+15$　$(k=0,\pm1\cdots\cdots\pm7)$

即 $x=1,3,5,\cdots\cdots27,29$m 处为质点干涉静止。

6.29 如图所示，两相干简谐波源 s_1 和 s_2 相距 10m，周期为 1s，振幅各为0.1m。在 $t=0$ 时刻，波源 s_1 的位移为0.05m、向正 y 方向运动；而波源 s_2 的位移为-0.05m，向平衡位置运动。设每一波源沿 s_1s_2 连线方向发出简谐波，波速为 2m/s。试求(1)在这两波源之间波节的位置；(2)在每一波源的外侧是否有波节？

题 6.29 图



解　(1)取坐标如图。按题意，

作矢量图知 $\varphi_1=-\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2=-\frac{2}{3}\pi$

而波长为 $\lambda=uT=2\text{m}$

设 x 处为波节,则

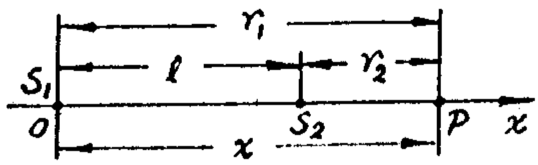
$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\\&=(-\frac{2\pi}{3})-(-\frac{\pi}{3})-\frac{2\pi}{2}[(10-x)-x]\\&=(2k+1)\pi\end{aligned}$$

解得 $$x=5\frac{2}{3}+k\quad(k=0,\pm1,\cdots\pm4,-5)$$

即 $x=\frac{2}{3},1\frac{2}{3}\cdots9\frac{2}{3}\text{m}$ 处为波节。

(2)S_2 外侧任一点 P 处,两波分振动位相差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\\&=[(-\frac{2\pi}{3})-(-\frac{\pi}{3})]-\frac{2\pi}{2}[(x-10)-x]\\&=9\frac{2}{3}\pi\neq(2k+1)\pi\text{,故无波节。}\end{aligned}$$



6.30 一根长 3m、两端固定的弦以三次谐频作振动。绳上波腹处的位移为 4mm,绳上横波的速率为 50m/s。试求(1)相应的行波的波长、频率;(2)该驻波的表达式。

解 (1)3 次谐振 $\lambda=\frac{2l}{3}=2\text{m}$ $\nu=\frac{u}{\lambda}=25\text{Hz}$

(2)设 $\varphi_1=0$ 时开始计时,则

$$y_{驻}(x,t)=2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\varphi_2}{2})\cos(2\pi\nu t+\frac{\varphi_2}{2})$$

$$=4\times10^{-3}\cos(\pi x+\frac{\varphi_2}{2})\cos(50\pi t+\frac{\varphi_2}{2})$$

因 $x=0,1,2,3\text{m}$ 处为波节。故 $\frac{\varphi_2}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$，因此

$$y_{驻}(x,t)=4\times10^{-3}\sin\pi x\sin50\pi t$$

6.31 设入射波的波函数为 $y_1=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\frac{\pi}{2}]$，在 $x=0$ 处发生反射，反射点为一自由端。(1)写出反射波的波函数；(2)写出驻波的表达式；(3)说明哪些点是波腹？哪些点是波节？

解　(1)反射波引起 $x=0$ 处质点振动方程

$$y_{反}(0,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T})+\frac{\pi}{2}]$$

故 $$y_{反}(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\frac{\pi}{2}]\quad(\text{SI})$$

(2) $$y_{驻}(x,t)=y_1+y_{反}$$

$$=2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2})$$

$$=-2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\sin(\frac{2\pi}{T}t)\quad(\text{SI})$$

(3) $$\frac{2\pi}{\lambda}x_{腹}=k\pi\quad x_{腹}=\frac{k\lambda}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_{节}=(k+\frac{1}{2})\pi\quad x_{节}=(\frac{k}{2}+\frac{1}{4})\lambda\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

6.32 已知一绳上的驻波的表达式为

$$y=0.5\sin\frac{\pi x}{3}\cos40\pi t$$

式中 x 和 y 以厘米为单位，时间以秒为单位。试求(1)形成该驻波的两行波的振幅和波速；(2)相邻波腹间的距离；(3)绳上 $x=1.5\text{cm}$ 处的质点在 $t=\frac{9}{8}\text{s}$ 时的速度。

解　(1) $2A=0.5\text{cm}$　　$A=0.25\text{cm}$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x=\frac{\pi x}{3} \qquad \lambda=6\text{cm}$$

$$40\pi t=2\pi\nu t \qquad \nu=20\text{Hz}$$

$$u=\nu\lambda=120\text{cm/s}$$

(2)相邻波腹间距为$\frac{\lambda}{2}=3\text{cm}$

(3)$x=1.5\text{cm}$ 处振动为 $y(1.5\text{cm},t)=0.5\cos 40\pi t$

$$v=-40\pi\times0.5\sin 40\pi t$$

$t=\frac{9}{8}\text{s}$ 时 $\qquad v=0$

6.33 一长 3m、线密度为 $2.5\times10^{-3}\text{kg/m}$ 的绳子两端固定，如所激发起的驻波的相继两个谐频是 252Hz 和 336Hz。试求(1)驻波的基频；(2)绳子的张力。

解 (1) $\qquad \lambda_1=2l=6\text{m}$

因 $\qquad \nu_n=n\nu_1 \qquad \nu_{n+1}=(n+1)\nu_1$

故 $\qquad \nu_1=\nu_{n+1}-\nu_n=84\text{Hz}$

(2) $\qquad u=\nu_1\lambda_1=504\text{m/s}$

(3)因 $u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$，

故 $\qquad F=\mu u^2=635\text{N}$

6.34 一根长 2m，质量为 0.1kg 的绳子两端固定，按基频的模式振动。绳子中央一点的振幅为 2cm。已知绳上的张力为 45N，试求(1)整根绳子的最大动能；(2)当波形为 $y=0.02\sin\frac{\pi x}{2}(\text{m})$ 的瞬时，整根绳子的动能是多大？这时的势能是多大？

解 (1) $\qquad \mu=\frac{m}{l}=0.05\text{kg/m}$

$$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=30\mathrm{m/s}$$

行波频率 $$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{u}{2l}=7.5\mathrm{Hz}$$

$$\omega=2\pi\nu=15\pi\ \mathrm{rad/s}\quad \lambda=\frac{u}{\nu}=4\mathrm{m}$$

设 $\varphi_1=0$ 时开始计时

$$y_{驻}=2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\varphi_2}{2})\cos(\omega t+\frac{\varphi_2}{2})$$

$$=2\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\varphi_2}{2})\cos(15\pi t+\frac{\varphi_2}{2})$$

因 $x=0,2\mathrm{m}$ 处为波节，故 $\frac{\varphi_2}{2}=\frac{\pi}{2}$，因此

$$y_{驻}=2\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2})\cos(15\pi t+\frac{\pi}{2})$$

$$=2\times10^{-2}\sin\frac{\pi}{2}x\sin15\pi t$$

$$v_m=(\frac{\partial y_{驻}}{\partial t})_{\max}=15\pi\times2\times10^{-2}\sin\frac{\pi}{2}x=0.3\pi\sin\frac{\pi}{2}x$$

$$E_{\max}=\int(\frac{1}{2}\mathrm{d}mv_m^2)\int_0^l\frac{1}{2}(\mu\mathrm{d}x)(0.3\pi\sin\frac{\pi}{2}x)^2$$

$$=2.22\times10^{-2}\mathrm{J}=E$$

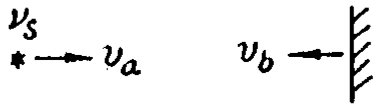
(2) $y_{驻}=2\times10^{-2}\sin\frac{\pi x}{2}$ 时，$15\pi t=(2k-\frac{1}{2})\pi$

$$v=\frac{\partial y_{驻}}{\partial t}=15\pi\times2\times10^{-2}\sin\frac{\pi}{2}x\cos15\pi t=0$$

故此时 $E_k=0, E_p=E-E_k=E_{k\max}=2.22\times10^{-2}\mathrm{J}$

6.35 一声源的频率为 10^3Hz，它相对地面以 20m/s 的速率向右运动，其右方有一反射面相对于地面以 28m/s 的速率向左运动。空气中的声速为 340m/s。求(1)声源发出的在空气中传播的声波的波长；(2)每秒到达反射面的波的数目；(3)反射波的波长和频率。

解



设声源速度 v_a，向右；反射面速度 v_b，向左，声源频率 ν_s

(1)声源右方声波波长为

$$\lambda_1 = (u - v_a)T$$

$$= \frac{u - v_a}{\nu_s} = 0.32\text{m}$$

(2)每秒到达反射面的波的数目为

$$\nu_2 = \frac{u + v_b}{u - v_a}\nu_s = 1150\text{Hz}$$

(3)反射波的波长为

$$\lambda_3 = (u - v_b)T_2$$

$$= \frac{u - v_b}{\nu_2} = 0.271\text{m}$$

反射波频率为

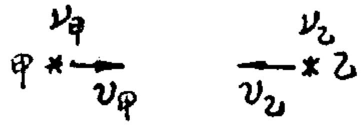
$$\nu_3 = \frac{u}{\lambda_3} = \left(\frac{u}{u - v_b}\right)\nu_2 = 1253\text{Hz}$$

6.36 设两辆汽车相向行驶，甲车的车速是 25m/s，乙车的车速是 15m/s。这两车鸣笛的声频均为 520Hz。试计算每辆车的驾驶员听到迎面而来的另一辆车发出的鸣笛的频率。假定路上无风。声波的速率为 331m/s。

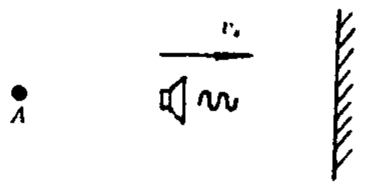
求(1)甲听到乙发出的鸣笛频率 $\nu_{乙}'$；(2)乙听到甲发出的声波频率 $\nu_{甲}'$

解 (1) $\nu_{乙}' = \frac{u + v_{甲}}{u - v_{乙}}\nu_{乙} = \frac{331 + 25}{331 - 15} \times 520 = 585.8\text{Hz}$

(2) $\nu_{甲}' = \frac{u + v_{乙}}{u - v_{甲}}\nu_{甲} = \frac{331 + 15}{331 - 28} \times 520 = 588\text{Hz}$



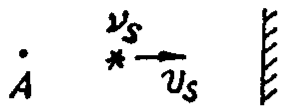
6.37 一波源振动的频率为 2040Hz，以速度 v_s 向墙壁接近（如图所示），观察者在 A 点听到拍频的频率为 $\Delta\nu=3\text{Hz}$，求波源移动的速度 v_s。设声速为 340m/s。



题 6.37 图

解　波源直接传到 A 处的波的频率为

$$\nu_1=\frac{u}{u+v_s}\nu_s=\frac{340}{340+v_s}\times 2040\quad \text{Hz}$$



反射到 A 处的波的频率为

$$\nu_2=\frac{u}{u-v_s}\nu_s=\frac{340}{340-v_s}\times 2040\text{Hz}$$

拍频　　$$\nu_B=\nu_2-\nu_1=\nu_s\left(\frac{u}{u-v_s}-\frac{u}{u+v_s}\right)$$

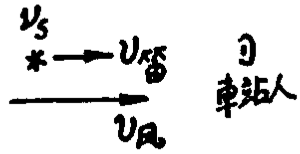
整理　　$$\nu_B v_s^2+2u\nu_s v_s-u^2\nu_B=0$$

解得　　$$v_s=\frac{u(\sqrt{\nu_s^2+\nu_B^2}-\nu_s)}{\nu_B}=0.25\text{m/s}$$

6.38 当火车以 30m/s 的速度进站时，车上汽笛发出的频率为 440Hz。如这时有一股与火车行驶方向相同的风，风速为 20m/s。问站台上观察者所听到的汽笛声的频率？设声速为 340m/s。

解　运动汽笛发出声波（右边）的频率为

$$\nu'=\frac{u}{u-(v_{笛}-v_{风})}\nu_s=\frac{340}{340-(30-20)}\times 440=453.3\text{Hz}$$



车站静止人相对媒质的运动速度为 $v_B=20\mathrm{m/s}$，故接收到频率为

$$\nu''=\frac{u+v_B}{u}\nu'=\frac{340+20}{340}\times 453.3=480\mathrm{Hz}$$

6.39 面积为 $1.5\mathrm{m}^2$ 的窗户朝向街道，街上噪声在窗口的声强级为 70dB，问有多少声功率由窗口传入室内。

解 因声强级 $L=10\lg\dfrac{I}{I_0}$ (dB)

$$I_0=10^{-12}\mathrm{W/m^2}$$

故声强 $I=I_0 10^{(\frac{L}{10})}=10^{-12}\times 10^{7}=10^{-5}\mathrm{W/m^2}$

传入 $1.5\mathrm{m}^2$ 功率为 $P=IS=10^{-5}\times 1.5\mathrm{W}$

6.40 两种声音的声强级差 3dB，试求(1)它们的强度之比；(2)声压幅值之比。

解 (1) $L_2-L_1=10\lg\dfrac{I_2}{I_0}-10\lg\dfrac{I_1}{I_0}=10\lg\dfrac{I_2}{I_1}$

故 $$\frac{I_2}{I_1}=10^{(\frac{L_2-L_1}{10})}=10^{0.3}=1.9953\approx 2$$

(2)因 $$I\propto \Delta p_m^2$$

故 $$\frac{\Delta p_{m2}}{\Delta p_{m1}}=\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.41$$

式中 Δp_m 为声压幅值。