

第二十章 量子力学简介

20.1 试求:(1)初速很小的电子经过100V电压加速后的德布罗意波长;(2)质量为 10^{-2}kg 的子弹以每秒800米速率运动时的德布罗意波长。

解 (1)电子经过电压 U 加速后,其速度为

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = eU$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

根据德布罗意关系式,此时电子的波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2em_0}} \frac{1}{\sqrt{U}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 100}} \\ &= 1.23 \times 10^{-10}\text{m} = 0.123\text{nm} \end{aligned}$$

(2)根据德布罗意关系式

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.01 \times 800} \\ &= 8.29 \times 10^{-35}\text{m} \end{aligned}$$

20.2 若电子和光子的德布罗意波长均为0.2nm,则它们的动量和总能量各为多少?

解 根据德布罗意关系式,它们的动量为

$$p_{\text{电}} = p_{\text{光}} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.2 \times 10^{-9}} \\ &= 3.32 \times 10^{-24}\text{kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

电子的总能量为

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{m_0^2c^4 + p_{\text{电}}^2c^2} \\ &= \sqrt{(9.1 \times 10^{-31})^2 \times (3 \times 10^8)^4 + (3.32 \times 10^{-24})^2 \times (3 \times 10^8)^2} \\ &= 8.19 \times 10^{-14}\text{J} = 5.12 \times 10^5\text{eV} \end{aligned}$$

光子的能量为

$$\begin{aligned} E &= pc = 3.32 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^8 \\ &= 9.96 \times 10^{-16}\text{J} \\ &= 6.22 \times 10^3\text{eV} \end{aligned}$$

20.3 当电子的动能等于它的静止能量时,它的德布罗意波长是多少?

解 利用相对论公式,电子的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2$$

得 $m = 2m_0$, 又根据质速关系

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ v &= c \sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c \end{aligned}$$

电子的德布罗意波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{2m_0 \frac{\sqrt{3}}{2}c} \\ &= \frac{h}{m_0 \sqrt{3}c} \end{aligned}$$

20.4 电子在铝箔上散射时,第一级最大($k=1$)的偏转角 θ 为 2° (参看题20.4图),铝的晶格常数 a 为 $4.05 \times 10^{-10}\text{m}$,求电子速度

解 设电子的德布罗意波长为 λ ,则有

$$d\sin\theta = k\lambda \quad \theta = 1^\circ \text{ 射向}$$

$$\alpha \sin\theta = k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots$$

已知 $k=1, \theta=2^\circ$, 故有

$$\begin{aligned} \lambda &= 4.05 \times 10^{-10} \sin 2^\circ \\ &= 0.142 \times 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

根据德布罗意关系式, 电子的速度为

$$\begin{aligned} v &= \frac{\hbar}{m_0 \lambda} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 0.142 \times 10^{-10}} \\ &= 5.14 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

由于 v 已接近光速, 必须考虑相对论效应, 有

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\hbar}{m_0 \lambda}$$

解得

$$v = 5.07 \times 10^7 \text{ m/s}$$

20.5 假定有一个粒子的动量不确定量等于它的动量, 试求这个粒子的位置的最小不确定量与它的德布罗意波长的关系。

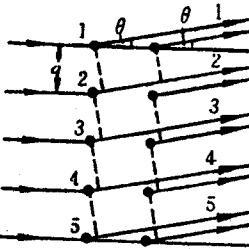
解 已知 $\Delta p = p$, 由不确定性关系式为

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{h}{4\pi p} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

因此, 这个粒子的位置的最小不确定量为 $\frac{\lambda}{4\pi}$, λ 是该粒子的德布罗意波长。

20.6 一般显像管中电子的速度约为 $v_x = 1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$, 若测量电子速度的精确度为 1% (这在实验中已很精确), 试求射线束中电子位置的不确定量, 并对所得结果进行讨论。

解 根据题意, 电子速度的不确定量为 $\Delta v_x = 1.0 \times 10^5 \text{ m/s}$, 则由不确定性关系为



题 20.4 图

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{h}{4\pi m \Delta v_x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.0 \times 10^5} \\ &= 5.8 \times 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

由此可见, 尽管电子位置坐标的可能误差比电子本身的尺度 10^{-15} m 大得多, 但射线束在荧光屏上的斑点已小到 10^{-10} m 的程度, 这对大多数观测已足够清晰了。因此在这种情况下把电子看成宏观的“质点”, 用牛顿力学来讨论它的运动规律显然是可行的。

20.7 一束具有动量 p 的电子, 垂直地射入宽度为 a 的狭缝, 若在狭缝后面与狭缝相距为 f 的地方放置一块荧光屏, 试证明屏幕上衍射图样中央最大强度的宽度 $d = 2fh/(ap)$, 式中 h 为普朗克常量。

证明 单缝衍射中各级极小的条件为

$$a \sin \theta = \pm k\lambda \quad k = 1, 2, \dots$$

令 $k=1$, 得 $a \sin \theta = \lambda$

可见衍射图像中第一级极小离中心点的距离为

$$x_1 = f \tan \theta \approx f \sin \theta = f\lambda/a$$

根据德布罗意关系 $\lambda = \frac{h}{p}$, 故中央最大强度的宽度为

$$d = 2x_1 = \frac{2fh}{ap}$$

20.8 波长为 300 nm 的平面光波沿 x 轴正向传播。若波长的相对不确定量 $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-6}$, 试求此光子坐标的最小不确定量。

解 光子的动量 $p_x = \frac{h}{\lambda}$, 则此光子动量的不确定量在数值上为

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

根据不确定性关系式, 可得

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{h}{4\pi\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi\Delta\lambda/\lambda} \\ &= \frac{3.0 \times 10^{-7}}{4\pi \times 10^{-6}} \approx 2.4 \times 10^{-2} \text{ m} = 24 \text{ mm} \end{aligned}$$

20.9 如果一个原子处于某能态的寿命为 10^{-6} s , 那么这个原

子的这个能态的能量的最小不确定量是多少?

解 根据不确定性关系式 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{4\pi}$, 有

$$\begin{aligned}\Delta E &\geq \frac{\hbar}{4\pi \Delta t} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi \times 10^{-6}} \\ &= 5.28 \times 10^{-29} \text{J} \\ &= 3.3 \times 10^{-10} \text{eV}\end{aligned}$$

20.10 粒子在一维无限深势阱中运动, 势阱宽度为 a , 其波函数为

$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a}$ ($0 < x < a$)。求粒子出现的概率最大的各个位置。

解 由题意, 其概率密度为

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x) \cdot \psi^*(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi x}{a}$$

令 $\frac{d|\psi(x)|^2}{dx} = 0$, 得

$$\frac{6\pi}{a^2} \sin \frac{6\pi x}{a} = 0$$

故有

$$\frac{6\pi x}{a} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x = k \cdot \frac{a}{6}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$$

又因为 $0 < x < a$, 因此当 $x = \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6}$ 时, $|\psi(x)|^2$ 有极大值, 当 $x = \frac{a}{3}, \frac{2a}{3}$ 时, $|\psi(x)|^2 = 0$, 所以粒子出现概率最大的位置为

$$x = \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6}$$

20.11 一粒子被限制在相距为 l 的两个不可穿透的壁之间, 描述粒子状态的波函数为 $\psi = cx(l-x)$, 其中 c 为待定常量。求在 $0 \sim$

$\frac{1}{3}l$ 区间发现该粒子的概率。

解 由波函数的归一化条件

$$\int_0^l |\psi|^2 dx = \int_0^l c^2 x^2 (l-x)^2 dx = 1$$

解得

$$c^2 = \frac{30}{l^5}, \quad c = \frac{\sqrt{30l}}{l^3}$$

则在 $0 \sim \frac{l}{3}$ 区间内发现该粒子的概率 P 为

$$\begin{aligned}P &= \int_0^{l/3} |\psi|^2 dx = \int_0^{l/3} \frac{30x^2(l-x)^2}{l^5} \cdot dx \\ &= \frac{17}{81}\end{aligned}$$

20.12 一维无限深方势阱中的粒子, 其波函数在边界处为零, 这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波, 因而势阱的宽度 a 必须等于德布罗意波半波长的整数倍。试利用这一条件导出能量量子化公式 $E_n = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot n^2$ 。

解 由题意 $a = n \frac{\lambda}{2}$, 根据德布罗意关系式有

$$p = \frac{\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar n}{2a}$$

粒子的能量为

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

20.13 一质量为 m 的微观粒子被约束在长度为 L 的一维线段上, 试根据不确定性关系式估算该粒子所具有的最小能量值, 并由此计算在直径为 10^{-14}m 的核内质子和中子的最小能量。

$$(\hbar = 6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}, m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg})$$

解 根据不确定性关系式 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{4\pi}$, 可得

$$\Delta v_x \geq \frac{h}{4\pi m \Delta x}$$

粒子的最小能量应满足

$$E_{\min} \geq \frac{1}{2} m (\Delta v_x)^2 \geq \frac{h^2}{32\pi^2 m \Delta x^2} = \frac{h^2}{32\pi^2 m l^2}$$

在核内，质子和中子的最小能量

$$E_{\min} \geq \frac{h^2}{32\pi^2 m l^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{32\pi^2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (10^{-14})^2} \\ = 8.3 \times 10^{-15} \text{ J}$$

20.14 试证明，对于作圆周运动的粒子，不确定性关系可表达为 $\Delta L \Delta \varphi \geq \frac{h}{4\pi}$ 。这里 ΔL 是角动量的不确定量， $\Delta \varphi$ 是角位置的不确定量。

证明 设粒子在某处的角位置不确定量为 $\Delta \varphi$ ，则沿该处切向的线位置不确定量 $\Delta x = r \Delta \varphi$ ，相应的粒子动量在该处沿切向的不确定量 $\Delta p_x = \Delta p$ ，由此引起的角动量不确定量为

$$\Delta L = r \cdot \Delta p$$

根据不确定性关系， $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ ，有

$$r \Delta \varphi \cdot \frac{\Delta L}{r} \geq \frac{h}{4\pi}$$

故

$$\Delta L \Delta \varphi \geq \frac{h}{4\pi}$$

20.15 在无限深方势阱中，势阱宽度为 0.6nm，当电子从 $n=3$ 的能级跃迁到 $n=2$ 的能级时，试问所辐射的光子的能量是多少？

解 无限深势阱中电子的能量为

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2, \quad n=1, 2, \dots$$

当电子从 $n=3$ 的能级跃迁到 $n=2$ 的能级发出光子的能量

$$E = E_3 - E_2 = \frac{h^2}{8ma^2} (9 - 4)$$

$$= \frac{5h^2}{8ma^2} \\ = \frac{5 \times (6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (0.6 \times 10^{-9})^2} = 8.39 \times 10^{19} \text{ J} \\ = 5.25 \text{ eV}$$

20.16 计算宽度为 0.6nm 的无限深方势阱中，电子的最低的三个能级。

解 无限深势阱的能量公式为

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2, \quad n=1, 2, \dots$$

由此可得电子最低三个能级的能量为

$$E_1 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (0.6 \times 10^{-9})^2} \times 1 \\ = 1.68 \times 10^{-19} \text{ J} \\ = 1.05 \text{ eV} \\ E_2 = 4E_1 = 4.20 \text{ eV} \\ E_3 = 9E_1 = 9.45 \text{ eV}$$

20.17 假设粒子在一维空间运动，处于如下波函数所描述的状态

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

式中 λ 为正的常量。试求：

- (1) 归一化波函数；
- (2) 粒子在空间分布的概率密度。

解 (1) 由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \cdot dx = \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} \cdot dx \\ = \frac{A^2}{8\lambda^3} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy \\ = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$