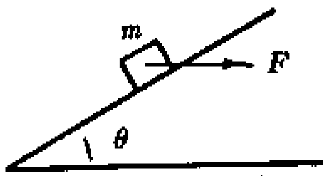
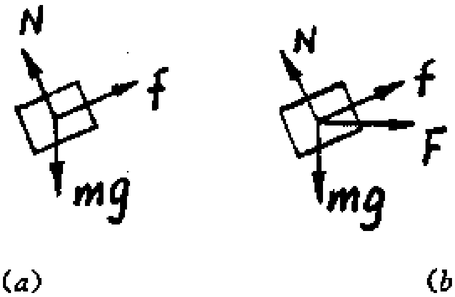
第二章　质点动力学

2.1　质量 m 的物体放在斜面上，两者之间的摩擦系数为 μ。求：(1)欲使物体沿斜面下滑，斜面的最小倾角 θ_{min}；(2)若斜面倾角为 θ，$\theta>\theta_{min}$，要使物体不沿斜面下滑，至少需对物体施加多大的水平力？



题 2.1 图



解 2.1 图

解　(1)若重力沿斜面的分量大于最大静摩擦力，则物体将下滑，即

$$\begin{cases} mg\sin\theta_{min} > f_{0max} \\ mg\cos\theta_{min} - N = 0 \\ f_{0max} = \mu N \end{cases}$$

解得

$$\theta_{min} > \mathrm{tg}^{-1}\mu$$

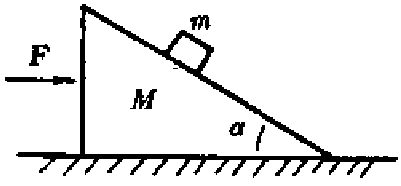
(2)沿斜面向上的静摩擦力小于或等于最大静摩擦力时，物体不下滑，即

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \\ mg\cos\theta + F\sin\theta - N = 0 \\ f \leqslant \mu N \end{cases}$$

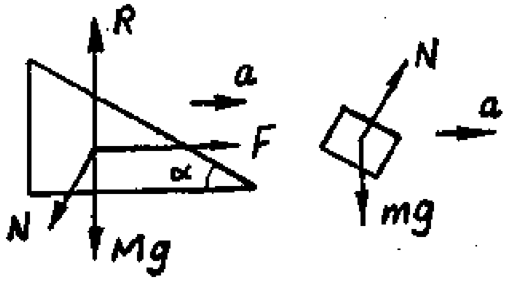
解得

$$F \geqslant \left(\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\mu\sin\theta + \cos\theta}\right)mg$$

2.2 质量为 M、倾角为 α 的斜面体放在水平桌面上，斜面上放一质量为 m 的物体，已知物体与斜面间、斜面体与桌面间均光滑。要使物体相对斜面体静止，需对斜面体施加多大的水平力 F？此时，物体与斜面间的正压力多大？斜面体与桌面间的正压力多大？



题 2.2 图



解 2.2 图

解 m 相对 M 静止，即 m 和 M 在地面参照系中加速度相同。

$$\begin{cases} mg - N\cos\alpha = 0 \\ N\sin\alpha = ma \\ F - N\sin\alpha = Ma \\ R - Mg - N\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

解得

$$F = (M + m)g\mathrm{tg}\alpha$$

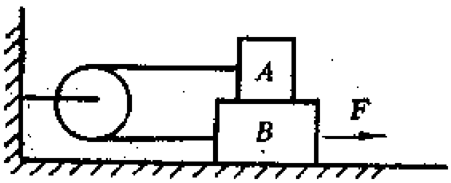
$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$R = (M + m)g$$

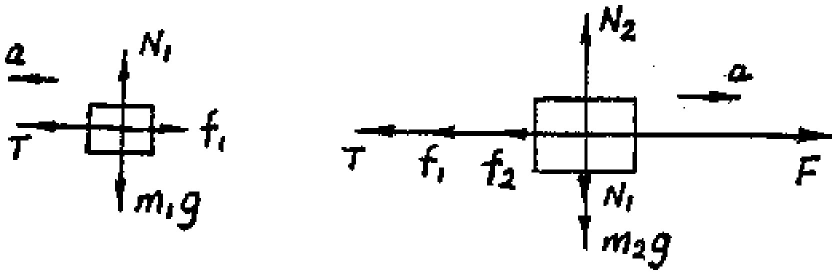
2.3 如图所示，物 A 和 B 的质量分别为 1.0kg 和 2.0kg，A 与 B 之间的摩擦系数为 0.20，B 与桌面间的摩擦系数为 0.30。已知相对于桌面，A 和 B 的加速度大小均为 0.15m/s²，问作用在 B 上的水平拉力 F 多大？设滑轮和绳的质量均可忽略。

解

$$\begin{cases} T - f_1 = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ f_1 = \mu_1 N_1 \\ F - T - f_1 - f_2 = m_2 a \\ N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \\ f_2 = \mu_2 N_2 \end{cases}$$



题 2.3 图



解 2.3 图

解得

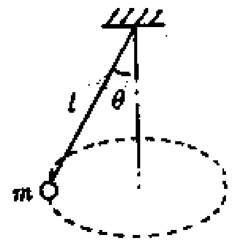
$$F = 2\mu_1 m_1 g + (m_1 + m_2)(\mu_2 g + a)$$
$$= 13\ \mathrm{N}$$

2.4 长 l 的细绳一端固定于梁上，另一端挂一质量为 m 的小球，已知小球在水平面内作匀速圆周运动、绳与铅垂线夹角为 θ。求小球运动一周所需的时间。

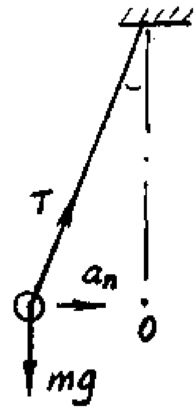
解 小球作匀速圆周运动

$$\begin{cases} T\sin\theta = m\dfrac{v^2}{l\sin\theta} \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

解得



题 2.4 图



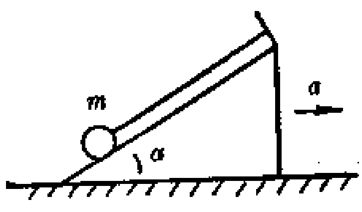
解 2.4 图

$$v = \sin\theta\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}$$

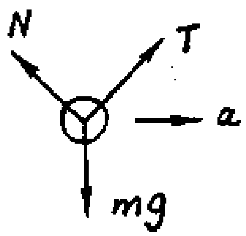
绕行一周所需时间为

$$T = \frac{2\pi l\sin\theta}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

2.5 质量为 1.0kg 的小球用细绳挂在倾角为 30°的光滑斜面体上，斜面体以加速度 3.0m/s² 沿如图所示方向运动，求：(1)绳中张力和小球与斜面间的正压力；(2)斜面体的加速度多大时，小球离开斜面？



题 2.5 图



解 2.5 图

解 (1)由示力图知

$$\begin{cases} T\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ T\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

解得

$$T = m(g\sin\alpha + a\cos\alpha) = 7.5\ \mathrm{N}$$
$$N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha) = 7.0\ \mathrm{N}$$

(2)$N=0$ 时，

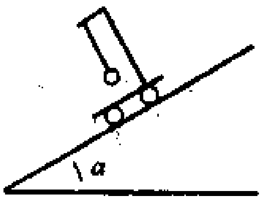
$$\begin{cases} T\cos\alpha = ma \\ T\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

解得

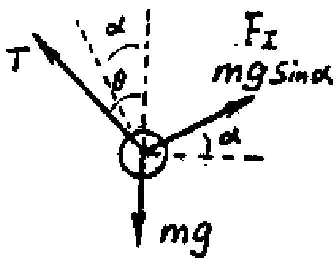
$$a = g\mathrm{ctg}\alpha = 17\ \mathrm{m/s^2}$$

故 $a \geqslant 17\ \mathrm{m/s^2}$ 时小球离开斜面

2.6 质量为 m、线长为 l 的单摆悬挂在小车顶上，小车沿倾角为 α 的光滑斜面滑下。求摆线与铅垂线之间的夹角及线中的张力。



题 2.6 图



解 2.6 图

解 以小车为参照系

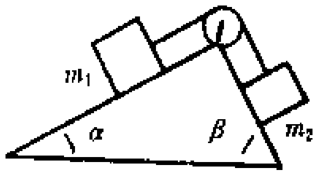
$$\begin{cases} T\sin(\theta - \alpha) + mg\sin\alpha - mg\sin\alpha = 0 \\ T\cos(\theta - \alpha) - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

解得

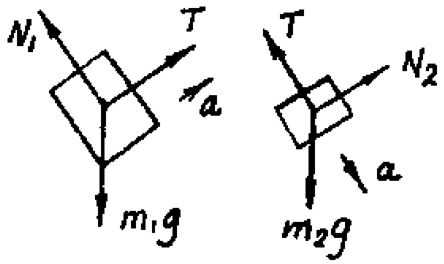
$$\theta = \alpha$$
$$T = mg\cos\alpha$$

2.7 如图所示，A、B 两物体质量分别为 $m_1 = 1.0\mathrm{kg}$ 和 $m_2 = 0.60\mathrm{kg}$，两斜面倾角分别为 $\alpha = 30°$ 和 $\beta = 60°$，设两斜面均光滑，且固定在地面上，绳和滑轮质量不计，求两物体的加速度和绳中张

力。



题 2.7 图



解 2.7 图

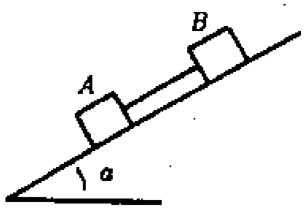
解

$$\begin{cases} T - m_1 g\sin\alpha = m_1 a \\ m_2 g\sin\beta - T = m_2 a \end{cases}$$

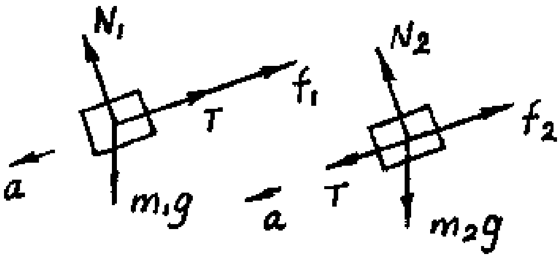
解得 $$a = \left(\frac{m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2}\right)g = 0.12\ \mathrm{m/s^2}$$

$$T = \frac{m_1 m_2(\sin\alpha + \sin\beta)g}{m_1 + m_2} = 5.02\ \mathrm{N}$$

2.8 甲、乙两物体质量分别为 $m_1=0.80\mathrm{kg}$ 和 $m_2=1.6\mathrm{kg}$，它们之间由轻绳相连，放在倾角为 $\alpha=37°$的斜面上，两物体与斜面之间的摩擦系数分别 $\mu_1=0.20$ 和 $\mu_2=0.40$。(1)若甲在下，乙在上，如图所示，求两物体的加速度；(2)甲、乙位置对调，求两物体的加速度。



题 2.8 图



解 2.8 图

解 (1)因 $\mu_1<\mu_2$，绳拉紧，$T>0$，$a_1=a_2=a$

$$\begin{cases} m_1 g\sin\alpha - T - f_1 = m_1 a \\ f_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \\ m_2 g\sin\alpha + T - f_2 = m_2 a \\ f_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g\cos\alpha \end{cases}$$

解得

$$a = \left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right)g = 3.29\ \text{m/s}^2$$

$$T = \frac{m_1 m_2(\mu_2 - \mu_1)g\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 8.35\ \text{N}$$

(2)因 m_2 在下，$\mu_2>\mu_1$，$a_1>a_2$，绳松弛，$T=0$，故

$$\begin{cases} m_1 g\sin\alpha - f_1 = m_1 a_1 \\ f_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \end{cases}$$

得

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) = 4.33\ \text{m/s}^2$$

同理

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) = 2.77\ \text{m/s}^2$$

2.9 质量为 m 的物体放在水平地面上，两者之间的摩擦系数为 μ，用与水平成 α 角的力 F 推物体。(1)F 多大时，物体匀速前进？(2)α 角多大时，无论 F 多大，都无法推动物体？

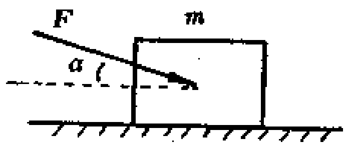
解 (1)匀速前进，合力为零。

$$\begin{cases} F\cos\alpha - f = 0 \\ N - F\sin\alpha - mg = 0 \\ f = \mu N \end{cases}$$

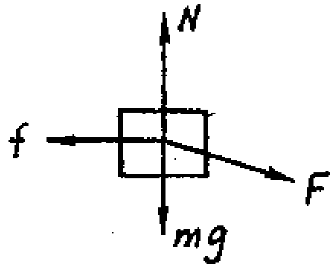
解得

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

(2)当 $\cos\alpha-\mu\sin\alpha=0$ 时，$F=\infty$，即木箱不能前进，故得



题 2.9 图



解 2.9 图

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\mu}$$

2.10 一密度均匀的球形脉冲星，其转动角速度为 $\omega = 60\pi$ rad/s。假设它仅靠万有引力使之不分解，求最小密度 ρ。

解 脉冲星不分解条件

$$m\omega^2 R \leqslant G\frac{Mm}{R^2} \qquad G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$$

故
$$\rho = \frac{M}{4\pi R^3/3} \geqslant \frac{3\omega^2}{4\pi G} = 1.27\times10^{14}\ \mathrm{kg/m^3}$$

2.11 质量 m 的火车以速率 v 沿半径 R 的圆形轨道行驶。问：(1)路面倾角 θ_0 多大时，铁轨所受侧压力为零？(2)若倾角 $\theta<\theta_0$，侧外轨受侧压力多大？

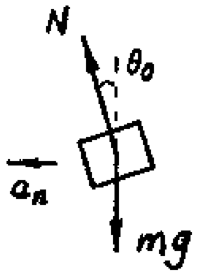
解 (1)正压力N的水平分力提供车厢向心力(见图 a)

$$\begin{cases} N\sin\theta_0 = m\dfrac{v^2}{R} \\ N\cos\theta_0 = mg \end{cases}$$

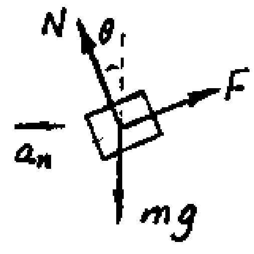
解得

$$\theta_0 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{v^2}{Rg}$$

(2)$\theta>\theta_0$ 时，除正压力 N 外，还有内轨所施的侧压力 F(见图 b)



(a)



(b)

解 2.11 图

$$\begin{cases} N\sin\theta - F\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R} \\ N\cos\theta + F\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

解得

$$F = m(g\sin\theta - \frac{v^2}{R}\cos\theta)$$

因$\frac{v^2}{R}=g\text{tg}\theta_0$，故

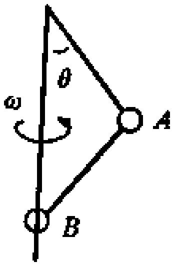
$$F = mg\cos\theta(\text{tg}\theta - \text{tg}\theta_0)$$

当 $\theta<\theta_0$ 时，外轨提供侧压力，方向与图示相反，大小为

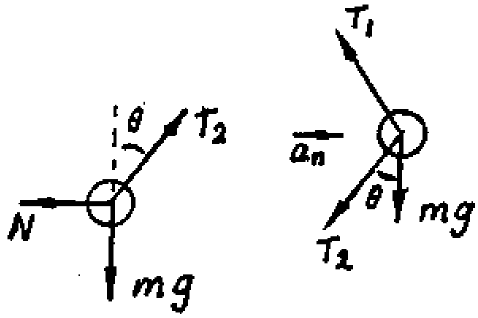
$$F = mg\cos\theta(\text{tg}\theta_0 - \text{tg}\theta)$$

2.12 长 $2l$ 的轻绳上端固定在竖直轴上，中间系一小球 A，下端系一小球 B。B 套在光滑的竖直轴上。两球的质量均为 m。若 A 球以角速度 ω 绕竖直轴作匀速圆周运动，求两绳与竖直轴的夹角和绳中的张力。

解 旋转稳定时



题 2.12 图



解 2.12 图

$$\begin{cases} T_2\sin\theta - N = 0 \\ T_2\cos\theta - mg = 0 \\ T_1\sin\theta + T_2\sin\theta = m\omega^2 l\sin\theta \\ T_1\cos\theta - T_2\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{3g}{\omega^2 l}$$

解得

$$T_1 = \frac{2}{3}m\omega^2 l$$

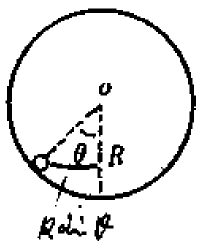
$$T_2 = \frac{1}{3}m\omega^2 l$$

2.13 半径为 R 的球形空腔内，一小球沿腔壁作水平圆周运动，小球与空腔球心的连线与铅垂线夹角为 θ，小球与腔壁之间的摩擦系数为 μ。问小球速率多大时，小球将脱离该圆周轨道向上滑动？

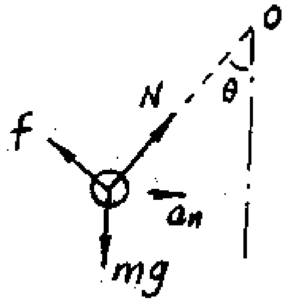
解 球壁参照系中

$$\begin{cases} N\sin\theta - f\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R\sin\theta} \\ N\cos\theta + f\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

解得



题 2.13 图



解 2.13 图

$$f = m(g\sin\theta - \frac{v^2\cos\theta}{R\sin\theta})$$

$$N = m(g\cos\theta + \frac{v^2}{R})$$

向上滑动条件

$$-f \geqslant \mu N$$

即

$$-m(g\sin\theta - \frac{v^2\cos\theta}{R\sin\theta}) \geqslant \mu m(g\cos\theta + \frac{v^2}{R})$$

解得

$$v \geqslant \sqrt{\frac{\sin\theta(\sin\theta + \mu\cos\theta)Rg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}$$

2.14 质量为 m、速度为 v_0 的汽车关闭发动机后沿 x 轴正方向直线滑行，所受阻力 $f = -kv$，k 为正常量。若以刚关发动机时汽车的位置为坐标原点，并开始计时，求 t 时刻汽车的速度和位置。

解

$$-kv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{k}{m}dt$$

$$v = v_0 e^{-kt/m}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t v_0 e^{-kt/m}dt$$

解得

$$x = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-kt/m})$$

2.15 质量 m 的粒子以初速 v_0 沿 y 轴正方向运动，从 $t=0$ 起，粒子受到 x 正方向的作用力 kt，k 为常量。求粒子的运动轨道。

解

$$a_x = \frac{kt}{m}$$

$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t \frac{kt}{m}\mathrm{d}t$$

得

$$v_x = \frac{kt^2}{2m}$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{kt^2}{2m}\mathrm{d}t$$

解得

$$x = \frac{kt^3}{6m}$$

因

$$y = v_0 t$$

故轨道方程为

$$x = \frac{k}{6mv_0^3}y^3$$

或

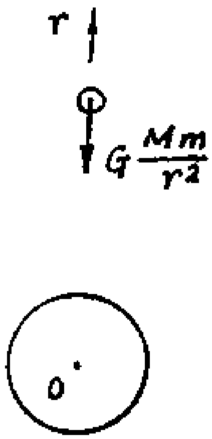
$$y = \left(\frac{6mx}{k}\right)^{1/3} v_0$$

2.16 离地心 $2R$ 处，一物体由静止向地面落下，求物体到达地面时的速度。R 为地球半径，空气阻力和地球自转忽略不计。

解 按万有引力定律和牛顿第二定律

$$-G\frac{Mm}{r^2} = ma$$

因$\frac{GM}{R^2}=g$,(R 为地球半径),故



解 2.16 图

$$-\frac{mgR^2}{r^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_{2R}^r-\frac{gR^2\mathrm{d}r}{r^2}$$

解得

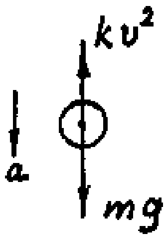
$$v=\sqrt{\frac{2gR^2}{r}-gR}$$

地面处 $r=R$,故速度为

$$v=\sqrt{gR}$$

2.17 跳伞运动员离开飞机后,不张伞而以鹰展姿势下落,受到空气的阻力大小为 kv^2,k 为常量,求运动员的收尾速度和任一时刻的速度。

解 运动方程为



解 2.17 图

$$mg-kv^2=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

当 $kv^2=mg$ 时为收尾速度,以符号 v_m 表示收尾速度,得

$$v_m=\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

将 $v_m=\sqrt{\frac{mg}{k}}$代入运动方程,分离变量,代入初始条件,积分

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{v_m^2-v^2}=\int_0^t\frac{g}{v_m^2}\mathrm{d}t$$

解得任一时刻的速度

$$v=v_m\frac{\mathrm{e}^{2gt/v_m}-1}{\mathrm{e}^{2gt/v_m}+1}=v_m\frac{1-\mathrm{e}^{-2gt/v_m}}{1+\mathrm{e}^{-2gt/v_m}}$$

2.18 质量为 m 的物体以初速 v_0 从地面竖直上抛，设所受空气阻力大小为 kv^2，k 为常量，求物体所能达到的最大高度。

解 选地面抛出处为原点，x 轴竖直向上。

$$-mg - kv^2 = ma \qquad ①$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad ②$$

②式代入①式，分离变量

$$-\mathrm{d}x = \frac{mv\mathrm{d}v}{mg + kv^2}$$

代入初始条件积分

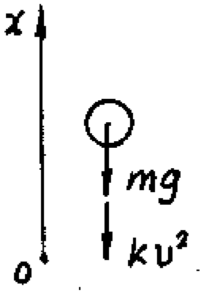
$$\int_0^x -\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v} \frac{mv\mathrm{d}v}{mg + kv^2}$$

得

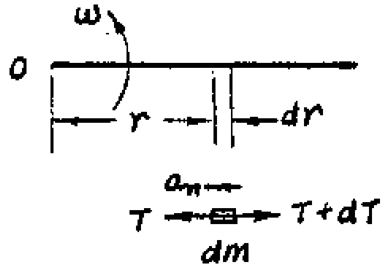
$$x = \frac{m}{2k}\ln\frac{mg + kv_0^2}{mg + kv^2}$$

最高点 $v=0$，故

$$x_{max} = \frac{m}{2k}\ln\frac{mg + kv_0^2}{mg}$$



解 2.18 图



解 2.19 图

2.19 长为 l 质量为 m 的均匀绳子，其一端系在竖直转轴上，

并以角速度 ω 在光滑的水平面上旋转，转动过程中绳子始终伸直。求距转轴 r 处绳中的张力。

解 在离转轴 r 处取 $\mathrm{d}r$ 线元，根据牛顿第二定律

$$T-(T+\mathrm{d}T)=\mathrm{d}m\,a_n=\frac{m}{l}\mathrm{d}r\omega^2 r$$

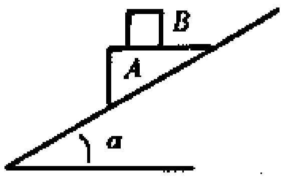
代入边界条件，积分

$$\int_T^0-\mathrm{d}T=\int_r^l\frac{m}{l}\omega^2 r\mathrm{d}r$$

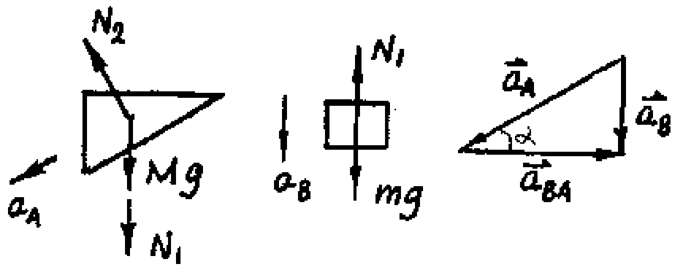
解得

$$T=\frac{m\omega^2}{2l}(l^2-r^2)$$

2.20 如图所示，质量为 M 的物体 A 放在倾角为 α 的斜面上，质量为 m 的物体 B 放在物体 A 上。A 与 B 间和 A 与斜面间均光滑。开始时，A 和 B 均静止。求：A 沿斜面下滑时，(1)A 相对地面的加速度；(2)B 相对 A 的加速度；(3)A 与 B 之间的正压力。



题 2.20 图



解 2.20 图

解 (1)以地面为参照系

$$\begin{cases}(Mg+N_1)\sin\alpha=Ma_A\\ mg-N_1=ma_B\\ a_B=a_A\sin\alpha\end{cases}$$

解得

$$a_A = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \quad （沿斜面向下）$$

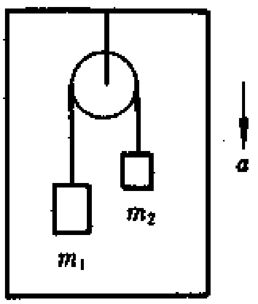
$$a_B = \frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \quad （竖直向下）$$

$$N_1 = \frac{mMg\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

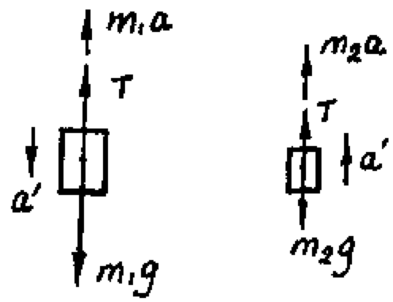
因
$$a_{BA} = a_B - a_A$$
故

$$a_{BA} = a_A\cos\alpha = \frac{(M+m)g\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \quad （水平向右）$$

2.21 如图所示，升降机以加速度 a 向下运动，$m_1 > m_2$，不计绳和滑轮质量，忽略摩擦。求 m_1 和 m_2 相对升降机的加速度和绳中的张力。



题 2.21 图



解 2.21 图

解 以升降机为参照系

以地面为参照系，向下为正

$$\begin{cases} m_1g - m_1a - T = m_1a' \\ m_2a + T - m_2g = m_2a' \end{cases}$$

$m_1g - T = m_1a_1 = m_1(a'+a)$

$m_2g - T = m_2a_2 = m_1(-a'+a$

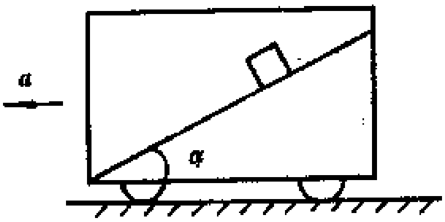
解得

有 $a_1 + a_2 = 2a$

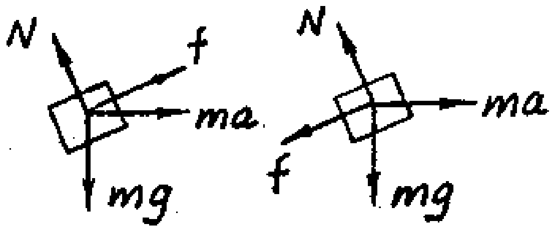
$$a' = \frac{(m_1 - m_2)(g-a)}{m_1 + m_2}$$

$$T=\frac{2m_1m_2(g-a)}{m_1+m_2}$$

2.22 车内倾角为 α 的固定斜面上放一物体，物体与斜面间的静摩擦系数为 μ_0。若要使物体相对斜面静止，车应以多大的水平加速度运动？



题 2.22 图



(a) (b)

解 2.22 图

解 以车为参照系。有下滑趋势而静止时，见图(a)，则

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - ma\cos\alpha - f = 0 \\ mg\cos\alpha + ma\sin\alpha - N = 0 \\ f \leqslant \mu N \end{cases}$$

解得
$$a \geqslant \left(\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}\right)g$$

有上滑趋势而静止时，见图(b)，则

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - ma\cos\alpha + f = 0 \\ mg\cos\alpha + ma\sin\alpha - N = 0 \\ f \leqslant \mu N \end{cases}$$

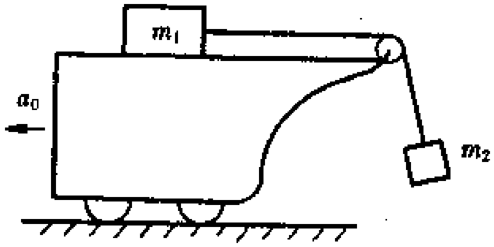
解得

$$a \leqslant \left(\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}\right)g$$

故要使物体相对斜面静止，列车加速度应满足下式

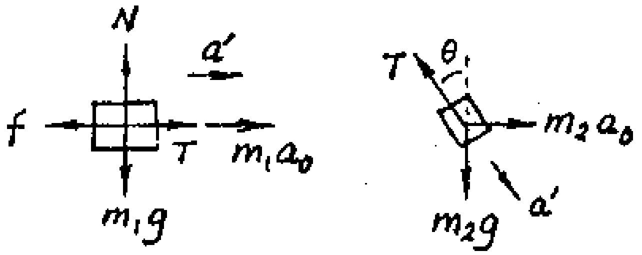
$$\left(\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha+\cos\alpha}\right)g\leqslant a\leqslant\left(\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha+\cos\alpha}\right)g$$

2.23 如图所示，车以 $a_0=2.0\text{m/s}^2$ 水平向左运动，水平桌面上的物体质量为 $m_1=2.0\text{kg}$，绳子另一端悬挂的物体质量为 $m_2=3\text{kg}$，物体与水平桌面间的摩擦系数为 $\mu=0.25$。绳和滑轮的质量不计。求绳中张力。



题 2.23 图

解： 以车为参照系



解 2.23 图

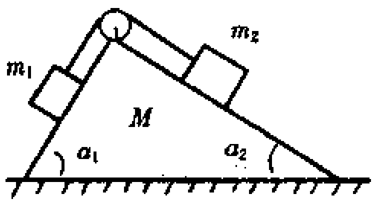
$$\begin{cases}T+m_1a_0-\mu N=m_1a'\\N-m_1g=0\\m_2g\cos\theta+m_2a_0\sin\theta-T=m_2a'\\m_2g\sin\theta-m_2a_0\cos\theta=0\end{cases}$$

解得

$$T=\frac{m_1m_2(\sqrt{g^2+a_0^2}+\mu g-a_0)}{m_1+m_2}$$
$$=12.5\text{N}$$

2.24 如图所示，质量为 M、倾角为 α_1 和 α_2 的斜面体放在水

平地面上，质量为 m_1 和 m_2 的两物体分置斜面体两侧，用轻绳经轻滑轮相连。所有摩擦均可忽略。求物体相对斜面体的加速度和斜面体相对地面的加速度。



题 2.24 图

解 研究 m_1、m_2 时，以斜面体为参照系，研究斜面体时，以地面为参照系

$$m_1 g\sin\alpha_1 + m_1 a\cos\alpha_1 - T = m_1 a'$$

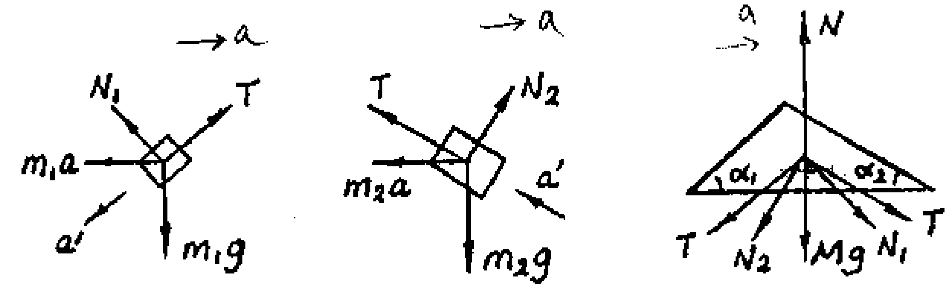
$$N_1 + m_1 a\sin\alpha_1 - m_1 g\cos\alpha_1 = 0$$

$$T + m_2 a\cos\alpha_2 - m_2 g\sin\alpha_2 = m_2 a'$$

$$N_2 - m_2 a\sin\alpha_2 - m_2 g\cos\alpha_2 = 0$$

$$N_1\sin\alpha_1 - N_2\sin\alpha_2 + T\cos\alpha_2 - T\cos\alpha_1 = Ma$$

$$N = N_1\cos\alpha_1 + N_2\cos\alpha_2 + T\sin\alpha_1 + T\sin\alpha_2$$



解 2.24 图

解得 a' 为

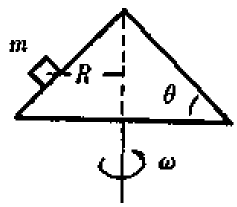
$$\left[\frac{(m_1 + m_2 + M)(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)}{(m_1 + m_2)M + 2m_1 m_2(1 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2) + m_1^2(\sin\alpha_1)^2 + m_2^2(\sin\alpha_2)^2}\right]g$$

解得 a 为

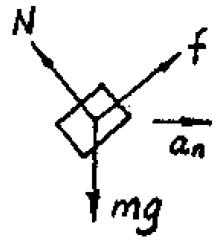
$$\left[\frac{(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)}{(m_1 + m_2)M + 2m_1 m_2(1 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2) + m_1^2(\sin\alpha_1)^2 + m_2^2(\sin\alpha_2)^2}\right]g$$

2.25 圆锥体表面放一质量为 m 的小物体，圆锥体以角速度 ω 绕竖直轴匀角速转动。物体与轴间距离为 R。锥面与水平面夹角为 θ。问物体与锥体间的静摩擦系数至少多大，物体才能与圆锥体

相对静止。



题 2.25 图



解 2.25 图

解 有向下滑趋势，但静止，则

$$\begin{cases} f\cos\theta - N\sin\theta = m\omega^2 R \\ f\sin\theta + N\cos\theta - mg = 0 \\ f \leqslant \mu N \end{cases}$$

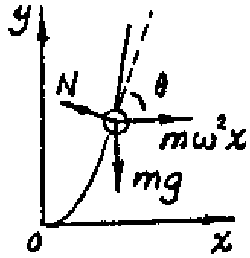
解得

$$\mu \geqslant \frac{g\sin\theta + \omega^2 R\cos\theta}{g\cos\theta - \omega^2 R\sin\theta}$$

2.26 圆柱形容器内的水与容器一起以角速度 ω 绕容器的竖直对称轴旋转，试证水面形状为旋转抛物面。

解 在以 ω 绕轴转动的参照系内，液体表面质量 m 的小块受力如图所示，在此参照系中小块静止。

$$\begin{cases} N\cos\theta - mg = 0 \\ N\sin\theta - m\omega^2 x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\theta \end{cases}$$



解 2.26 图

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

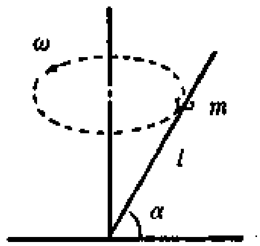
分离变量，代入边界条件积分

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^x \frac{\omega^2 x}{g}\mathrm{d}x$$

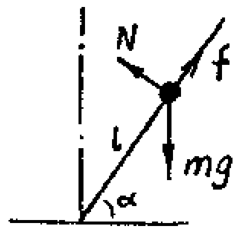
得
$$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2$$

由于水面呈轴对称，故是旋转抛物面。

2.27 如图所示，细杆一端支在地面上，以角速度 ω 绕竖直轴旋转，杆与水平地面夹角为 α，质量为 m 的小环套在杆上，可沿杆滑动，环与杆间的摩擦系数为 μ。问环离支点的距离 l 在何范围内，环与杆相对静止？



题 2.27 图



解 2.27 图

解 设小环离支点 l 时作匀速圆周运动

$$\begin{cases} N\sin\alpha - f\cos\alpha = m\omega^2 l\cos\alpha \\ N\cos\alpha + f\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

解得

$$f = m(g\sin\alpha - \omega^2 l\cos^2\alpha)$$
$$N = m(g\cos\alpha + \omega^2 l\sin\alpha\cos\alpha)$$

稳定运动条件

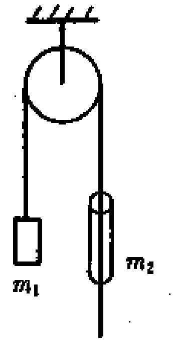
$$|f| \leqslant \mu N$$

即
$$-\mu N\leqslant f\leqslant\mu N$$

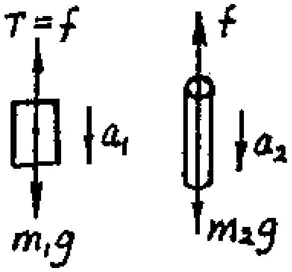
代入解得

$$\frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g}{\omega^2(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha} \leqslant l \leqslant \frac{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g}{\omega^2(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\cos\alpha}$$

2.28 细绳跨过一个定滑轮，一端挂一个质量为 m_1 的物体，另一端穿在质量为 m_2 的圆柱体的竖直细孔中。现柱体相对绳子以 a 匀加速下滑。求物体和柱体相对地面的加速度、绳中张力和柱体与绳间的摩擦力。



题 2.28 图



解 2.28 图

解　以地面为参照系

$$\begin{cases} m_1g - f = m_1a_1 \\ m_2g - f = m_2a_2 \\ a_2 = a - a_1 \end{cases}$$

解得

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2a}{m_1 + m_2} \quad （向下）$$

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1)g + m_1a}{m_1 + m_2} \quad （向下）$$

$$T = f = \frac{m_1m_2(2g - a)}{m_1 + m_2}$$

2.29 质量 $m=3000\text{kg}$ 的重锤从高 $h=1.5\text{m}$ 处自由下落，撞击工件后经(1)$\Delta t=1.0\times10^{-1}\text{s}$；(2)$\Delta t=1.0\times10^{-2}\text{s}$ 后静止，求锤对工件的平均冲力。

解　碰撞前锤向下的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 5.42\ \text{m/s}$$

对锤应用质点动量定理

$$(mg - \overline{N})\Delta t = 0 - mv_0$$

得

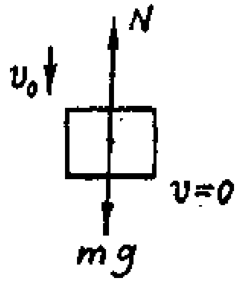
$$\overline{N} = m(\frac{mv_0}{\Delta t} + g)$$

(1)$\Delta t = 1.0 \times 10^{-1}$ s 代入得

$$\overline{N}_1 = 1.92 \times 10^5\ \text{N}$$

(2)$\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ s 代入得

$$\overline{N} = 1.66 \times 10^6\ \text{N}$$



解 2.29 图

锤对工件的平均冲力与工件对锤的平均冲力等值反向，即向下。

2.30 质量为 3kg，初速度为 1.0m/s 的质点，受到一个方向与初速度相同，大小随时间变化的力 F 作用。F 的变化规律为

$$F = \begin{cases} 200t & (0 \leqslant t \leqslant 0.1\text{s}) \\ 20 & (0.1\text{s} \leqslant t \leqslant 0.3\text{s}) \\ 80 - 200t & (0.3\text{s} \leqslant t \leqslant 0.4\text{s}) \end{cases}$$

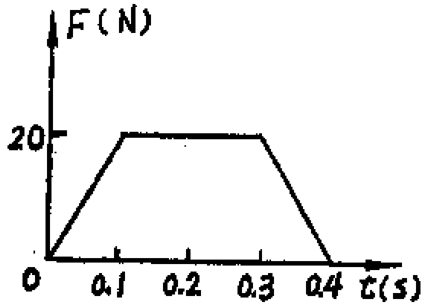
式中单位为 SI 单位。求(1)在 F 的作用时间内，质点所受的冲量和平均冲力；(2)$t=0.4$s 时质点的速度。

解 (1)$F(t)$曲线如图所示。

$$I = \text{曲线下面积}$$
$$= 6.0\ \text{N} \cdot \text{S}$$

平均冲力
$$\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{6.0}{0.4}$$
$$= 15\ \text{N}$$

(2)
$$I = mv - mv_0$$
$$v = \frac{I + mv_0}{m}$$
$$= 3.0\ \text{m/s}$$



解 2.30 图

2.31 已知质点的质量为 1kg，运动方程为 $r = 0.8(\cos\frac{t}{4}i + \sin\frac{t}{4}j)$(SI)，求从 $t=0$ 到 $t=2\pi$s 这段时间内，质点所受合力的冲量。

或 $\vec{v}|_{t=0} = 0.2\vec{j}$

$\vec{v}|_{t=2\pi} = -0.2\vec{i}$

解 质点所受合力为

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

$$= -0.05(\cos\frac{t}{4}i + \sin\frac{t}{4}j)$$

这段时间内质点所受冲量为

$$I = \int_0^{2\pi} F\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -0.05(\cos\frac{t}{4}i + \sin\frac{t}{4}j)\mathrm{d}t$$

$$= -0.2(i + j)\ \mathrm{N\cdot s}$$

2.32 质量为 70kg 的跳伞员从停在高空与地面相对静止的直升机中跳出，当速度达到 55m/s 时开伞，经 1.25s 后，速度减小为 5m/s。求这段时间内降落伞绳索对跳伞员的平均拉力。

解 动量定理

$$(mg - T)\Delta t = mv - mv_0$$

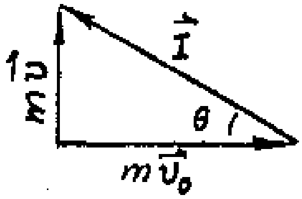
$$T = \frac{m(v_0 - v)}{\Delta t} + mg = 3.5 \times 10^3\ \mathrm{N}$$

2.33 质量为 0.3kg 的棒球以 20m/s 水平飞来，被球棒打击后竖直向上飞达 10m 高度。设球与棒的接触时间为 0.02s。求棒对球的平均冲力。

解
$$F\Delta t = mv - mv_0$$

故
$$\overline{F} = \frac{\sqrt{(mv)^2 + (mv_0)^2}}{\Delta t}$$

$$= \frac{m\sqrt{2gH + v_0^2}}{\Delta t} = 366\ \mathrm{N}$$

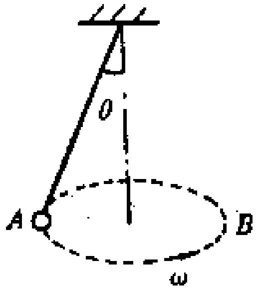


解 2.33 图

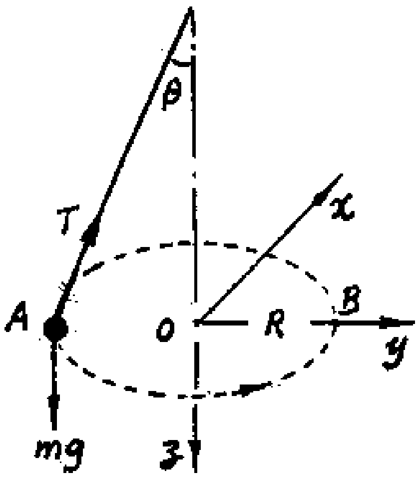
F 与v_0反方向的夹角为

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{v}{v_0} = 35°$$

2.34 细绳一端固定，另一端系一质量为 m 的小球，并以角速度 ω 在水平面内作匀速圆周运动，绳子与铅垂线的夹角为 θ，如图所示。求小球从 A 点运动到 B 点的过程中，绳子拉力对小球的冲量。



题 2.34 图



解 2.34 图

解 动量定理

$$\int (T + mg)\mathrm{d}t = m\,v_B - m\,v_A$$

拉力冲量为

$$\int_0^{\Delta t} T\mathrm{d}t = m(v_B - v_A) - \int_0^{\Delta t} mg\mathrm{d}t$$

$$= m2\omega Ri - mg\Delta tk$$

而

$$T\cos\theta - mg = 0$$

$$T\sin\theta = m\omega^2 R$$

得
$$R=\frac{g}{\omega^2}\mathrm{tg}\theta$$

$$\Delta t=\frac{1}{2}\text{周期}=\frac{\pi}{\omega}$$

故

$$\int_0^{\Delta t}T\mathrm{d}t=\frac{2mg}{\omega}\mathrm{tg}\theta i-\frac{\pi mg}{\omega}k$$

2.35 水平拉力 F 拉一静止于水平地面上、质量为 $m=10\mathrm{kg}$ 的木箱。F 大小随时间变化，从 $t=0$ 到 $t=4\mathrm{s}$ 期间，$F=30\mathrm{N}$，从 $t=4\mathrm{s}$ 到 $t=7\mathrm{s}$ 期间，F 由 30N 均匀减小到零。木箱与地面间的摩擦系数为 $\mu=0.2$。求：(1)$t=4\mathrm{s}$ 时木箱的速度；(2)$t=7\mathrm{s}$ 时木箱的速度；(3)$t=6\mathrm{s}$ 时木箱的速度。

解 (1)质点动量定理

$$\int_0^{t_1}(F-\mu mg)\mathrm{d}t=mv_1-0$$

故
$$v_1=\frac{F-\mu mg}{m}t_1=4.16\ \mathrm{m/s}$$

(2)在 $4\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 7\mathrm{s}$ 内
$$F=70-10t$$

$$\int_{t_1}^{t}[(70-10t)-\mu mg]\mathrm{d}t=mv-mv_1$$

解得

$$v=\frac{(70-\mu mg)(t-t_1)-5(t^2-t_1^2)}{m}+v_1$$

将 $t=t_2=7\mathrm{s}$，$t_1=4\mathrm{s}$ 代入得

$$v_2=2.78\ \mathrm{m/s}$$

(3)$t=t_3=6\mathrm{s}$ 代入上式，得 $v_3=v_1=4.16\ \mathrm{m/s}$

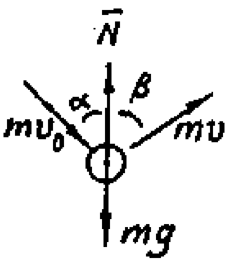
2.36 质量为 0.2kg 的小球以 8m/s 的速度与光滑水平地面碰撞，入射角为 30°，反射角为 60°。碰撞时间为 0.01s。求球对地面的平均冲力。

解 因光滑，地面对小球只有法向力，按质点动量定理

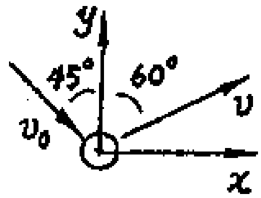
$$\begin{cases} 0 = mv\sin\beta - mv_0\sin\alpha \\ (\overline{N} - mg)\Delta t = mv\cos\beta - (-mv_0\cos\alpha) \end{cases}$$

解得

$$\overline{N} = \frac{mv_0\sin(\alpha+\beta)}{\Delta t\sin\beta} + mg$$
$$= 186\ \text{N}$$



解 2.36 图



解 2.37 图

2.37 质量为 0.25kg 的小球以 20m/s 的速度、45°的入射角与桌面碰撞，反弹速度为 10m/s，反射角为 60°。求碰撞过程中小球所受的冲量。

解 选坐标如图。按动量原理

$$\begin{cases} I_x = mv\sin 60° - mv_0\sin 45° \\ I_y = mv\cos 60° - m(-v_0\cos 45°) \end{cases}$$

小球所受冲量为

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = 5.0 \qquad \text{N}\cdot\text{s}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{I_y}{I_x} = 106°(\text{与 } x \text{ 轴正方向夹角，在第 II 象限})$$

2.38 质量为 m 的人站在质量为 M 的气球下面的绳梯上，最初气球相对地面静止。(1)如果人相对绳梯以速度 v' 向上攀登，求气球相对地面的速度；(2)人停止攀登，求气球速度。

解 (1)以地面为参照系，系统动量守恒

$$m(v'-V)-MV=0$$

气球相对地球运动速度为

$$V=\frac{mv'}{m+M}$$

(2)$v'=0$ 时，$V=0$，气球静止不动。

2.39 船的质量为 $M=1.0\times10^4$kg，炮弹的质量为 $m=10$kg，原来船以 $V_0=3.0$m/s 行驶，若炮弹相对于船以 $v'=1.0\times10^3$m/s 沿船前进方向发射，求船速。水对船的阻力忽略不计。

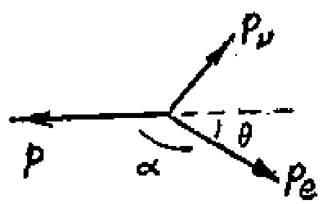
解 质点系动量守恒

$$(M+m)V_0=MV+m(V+v')$$

解得

$$V=V_0-\frac{mv'}{M+m}=2.0\ \text{m/s}$$

2.40 原来静止的原子核由于衰变，辐射出一个电子和一个中微子，电子和中微子的运动方向互相垂直，电子的动量为 1.2×10^{-22}kg·m/s，中微子的动量为 6.4×10^{-23}kg·m/s，求原子核剩余部分反冲动量的大小和方向。



解 2.40 图

解 衰变前后质点系动量守恒

$$\boldsymbol{p}_e+\boldsymbol{p}_\nu+\boldsymbol{p}=0$$

因$\boldsymbol{p}_e$与$\boldsymbol{p}_\nu$垂直，故原子核剩余部分动量大小为

$$p=\sqrt{p_e^2+p_\nu^2}=1.36\times10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

图中 θ 为

$$\theta=\text{tg}^{-1}\frac{p_\nu}{p_e}=28°4'$$

故原子核剩余部分动量与电子动量夹角为

$$\alpha = 180° - \theta = 151°56'$$

2.41 光滑的水平面上，A 球以 $v_{10}=20\text{m/s}$ 碰撞静止的 B 球，碰撞后 A 球的速度大小为 $v_1=15\text{m/s}$，方向与原运动方向垂直。已知 B 球的质量为 A 球质量的 5 倍。求碰撞后 B 球速度的大小和方向。

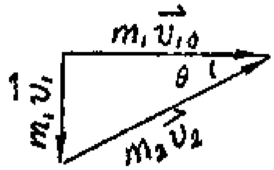
解 质点系动量守恒

$$m_1\vec{v}_{10} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

由图知 $m_2v_2=\sqrt{(m_1v_1)^2+(m_1v_{10})^2}$

即 $v_2=\frac{m_1}{m_2}\sqrt{v_1^2+v_{10}^2}=5.0\text{ m/s}$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{v_1}{v_{10}} = 36.9°$$



解 2.41 图

2.42 质量均为 M 的两辆小车沿一直线停在光滑的地面上。质量 m 的人从 A 车跳入 B 车，又以相同的速率(相对于地面)跳回 A 车。求两车速度之比。

解 人以 v(相对地面)跳离 A 车，设 A 车得速度 V_{A1}，水平方向动量守恒

$$mv - MV_{A1} = 0$$

人以 v 跳上 B 车后，设 B 车得速度 V_{B1}，水平方向动量守恒

$$(M+m)V_{B1} = mv$$

人再以 v 跳离 B 车后，设 B 车速度变为 V_{B2}，则

$$MV_{B2} - mv = (M+m)V_{B1}$$

人再以 v 跳上 A 车后，设 A 车速度变为 V_{A2}，则

$$(M+m)V_{A2} = MV_{A1} + mv$$

解得最后 B 车速度与 A 车速度之比为

$$\frac{V_{B2}}{V_{A2}} = \frac{M+m}{M}$$

2.43 质量为 1.0×10^2kg 长 3.6m 的小船原静止于静水中，若质量为 50kg 的人从船头走到船尾，则船相对地面移动了多少距离？

解 人相对地面速度为

$$v = v' - V$$

因系统动量守恒

$$MV - mv = 0$$

解得

$$V = \frac{mv'}{M+m}$$

船前进距离为

$$\int_0^t V\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{m}{M+m}v'\mathrm{d}t$$

$$= \frac{m}{M+m}\int_0^t v'\mathrm{d}t = \frac{50}{100+50}\times 3.6\mathrm{m}$$

$$= 1.2\mathrm{m}$$

2.44 质量为$(m+M)$的炮弹，其发射速度的方向与水平成 α 角，大小为 v_0，到达最高点时炸裂为质量为 m 和 M 的两块，m 相对 M 以速率 u 水平向后飞出，求爆炸后 M 飞过的水平距离。

解 设最高点高度 h，M 落地时间 t，M 水平速度 V，M 水平飞行距离为 l，则

$$2gh = (v_0\sin\alpha)^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$l = Vt$$

因爆炸前后，系统水平方向动量守恒

$$MV - m(u - V) = (M + m)v_0\cos\alpha$$

解得

$$l = (v_0\cos\alpha + \frac{mu}{M+m})\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

2.45 光滑水平桌面上，两物体沿一直线相向运动，它们的质量分别为 4.0kg 和 6.0kg，速度大小分别为 10.0m/s 和 5.0 m/s，碰撞后两物体粘在一起。求：(1)碰撞后两物体的速度；(2)碰撞过程中两物体相互作用冲量的模。

解 (1)设完全非弹性碰撞后共同速度为 V，由于质点系动量守恒

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)V$$

故

$$V = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = 1.0\ \mathrm{m/s}$$

方向向右。

(2)m_2 对 m_1 的冲量为

$$I_{12} = m_1V - m_1v_1 = -3.6\ \mathrm{N \cdot s}$$

方向向左。

m_1 对 m_2 的冲量为

$$I_{21} = m_2V - m_2v_2 = -I_{12} = 36\ \mathrm{N \cdot s}$$

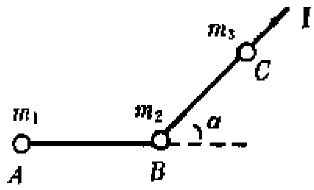
方向向右。

2.46 A、B、C 三质点放在光滑水平面上，它们的质量分别为 m_1、m_2、m_3，用不可伸长的柔软轻绳相连，AB 与 BC 的夹角为 α，如图所示。若沿 BC 方向的冲量 I 作用在 C 上，求质点 A 开始运动时的速度。

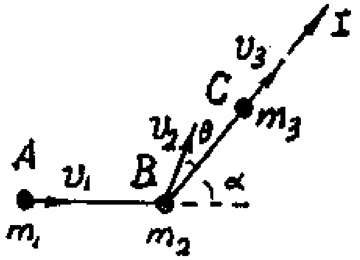
解 设 m_1、m_2、m_3 开始运动的初速度分别为 v_1、v_2、v_3。v_1、v_3 均沿绳方向，v_2 沿两绳张力的合力方向，设与 BC 夹角为 θ，则由动量定理

$$I = m_1v_1\cos\alpha + m_2v_2\cos\theta + m_3v_3$$

$$0 = m_1v_1\sin\alpha - m_2v_2\sin\theta$$



题 2.46 图



解 2.46 图

因绳不可伸长，m_2、m_3 沿 BC 方向速度分量相同，m_1、m_2 沿 AB 方向的速度分量相同，即

$$v_2\cos\theta = v_3$$

$$v_2\cos(\theta + \alpha) = v_1$$

求解方程组，得

$$v_1 = \frac{Im_2\cos\alpha}{m_2(m_1 + m_2 + m_3) + m_1m_3\sin^2\alpha}$$

2.47 从地面斜向发射的炮弹在最高点炸裂为质量相等的两块。第一块在炸裂后 1s 落到爆炸点正下方地面上，该处离发射点 1000m。已知最高点距地面 19.6m。忽略空气阻力。求第二块的落地点到发射点的距离。

解 设发射速度分量为 v_{0x}和 v_{0y}，则

$$\begin{cases} h = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v_{0y} - gt = 0 \end{cases}$$

故炮弹从发射至到达最高点所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\ \text{s}$$

炮弹在最高点时速度为

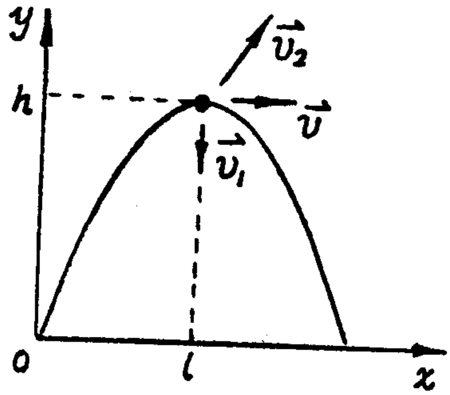
$$v = \frac{l}{t} = 500\ \mathrm{m/s}$$

设第一碎片初速为 v_1，炸裂后 $t_1=1\mathrm{s}$ 落地，则

$$h + v_1 t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 = 0$$

得

$$v_1 = \frac{1}{2}g t_1 - \frac{h}{t_1} = -14.7\ \mathrm{m/s}$$



解 2.47 图

炸裂前后系统动量守恒

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2}v_{2x} = mv \\ \dfrac{m}{2}v_1 + \dfrac{m}{2}v_{2y} = 0 \end{cases}$$

解得第二碎片初速分量为

$$v_{2x} = 2v = 1000\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{2y} = -v_1 = 14.7\quad \mathrm{m/s}$$

设炸裂后，第二碎片经 t_2 时间落地，则

$$\begin{cases} x_2 = l + v_{2x}t_2 \\ h + v_{2y}t_2 - \dfrac{1}{2}g t_2^2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$t_2 = 4\ \mathrm{s}$$

$$x_2 = 5000\ \mathrm{m}$$

2.48 质量为 M 的斜面体正沿光滑水平地面向右滑动，质量为 m 的小球以速率 v_0（相对地面）水平向右飞来，与斜面碰撞后竖直向上以速率 v（相对地面）弹起，设碰撞时间为 Δt，求碰撞前后斜面体速度的增量和碰撞过程中斜面体对地面的平均冲力。

解 (1)水平方向系统动量守恒

$$mv_0 + MV = M(V + \Delta V)$$

故斜面体速度增量为

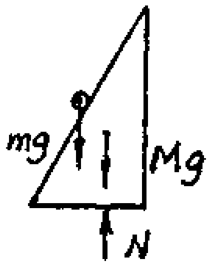
$$\Delta V = \frac{mv_0}{M}$$

(2)垂直方向,对系统应用动量定理

$$[\overline{N} - (M + m)g]\Delta t = mv - 0$$

地面对斜面体的平均冲力为

$$\overline{N} = (M + m)g + \frac{mv}{\Delta t}$$



解 2.48 图

2.49 三个质点的质量分别为 $m_1 = 2\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$, $m_3 = 4\text{kg}$,位矢分别为 $r_1 = 3i(\text{m})$, $r_2 = 2i + 4j(\text{m})$, $r_3 = -2j(\text{m})$。求此质点系的质心位置。

解 质点位矢为

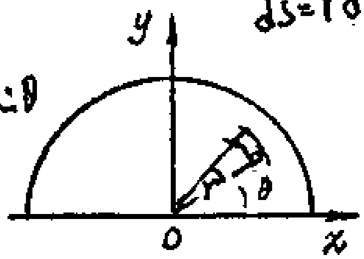
$$r_C = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$
$$= (1.4i + 0.8j)\ \text{m}$$

2.50 半圆形均匀薄板的半径为 R,求其质心的位置。

解 对称性知 $x_C = 0$,根据质心定义

y=rsinθ

ds=rdθdr



$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^R r\sin\theta\ \sigma r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{\sigma\ \pi R^2/2}$$
$$= \frac{4R}{3\pi}$$

解 2.50 图

2.51 已知细棒的质量线密度为 $\rho = \rho_0 \frac{x}{l}$,式中 ρ_0 为常量,l 为棒长,求此棒质心的位置。

解

$$x = \frac{\int x \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^l x \frac{\rho_0}{l} x \mathrm{d}x}{\int_0^l \frac{\rho_0}{l} x \mathrm{d}x}$$

$$= \frac{2}{3} l$$

2.52 半个均匀薄球壳的半径为 R，求其质心的位置。

解 因为对称性，质心在 z 轴上

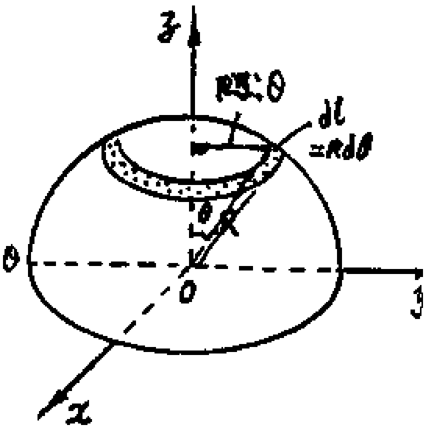
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$dV = dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$z_C = \frac{\int z \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} R\cos\theta \ \sigma 2\pi R\sin\theta \ R\mathrm{d}\theta}{\sigma \ 2\pi R^2}$$

$$= \frac{R}{2}$$



解 2.52 图

质心位矢为

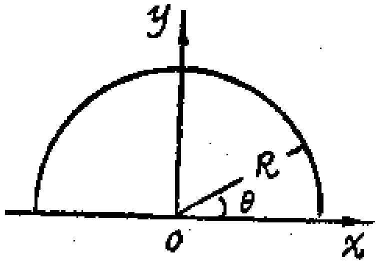
$$r_C = \frac{R}{2} k$$

2.53 求半圆形均匀细铜丝的质心位置。已知半圆的半径为 R。

解 设铜丝质量线密度为 λ。由对称性知

$$x_C = 0$$

根据质心定义



解 2.53 图

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^\pi R\sin\theta\lambda R\mathrm{d}\theta}{\lambda\pi R}$$

$$= \frac{2R}{\pi}$$

2.54 斜向升空的爆竹在最高点炸裂为质量相等的两块，其中第一块落在最高点的正下方，已知两块同时落地，求第二块的落地位置。设第一块落地点离发射点的距离为 l。

解 爆炸前后所受合外力不变，故质心运动轨道不变，质心落地点在 $x_C=2l$ 处。由质心定义

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = 2l$$

又因 $m_1=m_2=m$，故第二碎片落地点离发射点距离为

$$x_2 = 2x_C - x_1 = 2(2l) - l = 3l$$

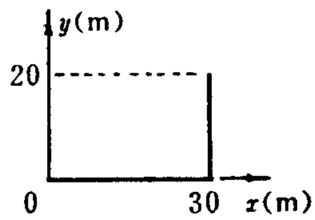
2.55 均匀棒弯成如图所示直角形，求它的质心位置。

解

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^{30} x\lambda\mathrm{d}x + 30\times 20\lambda}{50\lambda}$$

$$= 21\ \mathrm{m}$$

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^{20} y\lambda\mathrm{d}y}{50\lambda} = 4\ \mathrm{m}$$



题 2.55 图

2.56 在 2000m 高处，一个以 60m/s 的速度垂直下落的炸弹炸裂成质量相等的两块，其中一块的速度方向垂直向下，大小为 80m/s。求爆炸后 10s 时此系统的质心位置。

解 因爆炸前后，系统所受合外力不变，质心的运动规律不

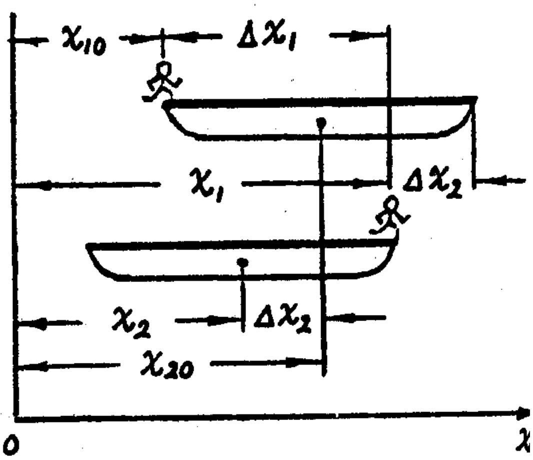
变，就好象没有爆炸一样，故爆炸 $t=10s$ 时系统质心位置为

$$z_C=z_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$=[2000+(-60)\times10+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times10^2]\text{m}$$

$$=910\ \text{m}$$

2.57 用质心概念和质心运动定律求题 2.43 中人和船相对地面移动的距离。



解 2.57 图

解 人行走过程中，人、船系统所受合外力为零，$a_C=0$。又因系统原静止，故走动过程，系统 $v_C=0$，质心位置不变，即

$$x_C=\frac{m_1x_{10}+m_2x_{20}}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

由图知，船移动距离为

$$\Delta x_2=x_{20}-x_2$$

人移动距离为

$$\Delta x_1=x_1-x_{10}=l-\Delta x_2$$

解得

$$\Delta x_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}l=\frac{50}{50+100}\times3.6\text{m}=1.2\ \text{m}$$

$$\Delta x_1=l-\Delta x_2=2.4\ \text{m}$$

2.58 在地面参照系中，质量为 m_1 和 m_2 的质点的速度分别为 v_1 和 v_2，求：(1)此质点系相对地面的质心速度；(2)每个质点相对系统质心的速度。

解： (1)质心相对地面的速度

$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

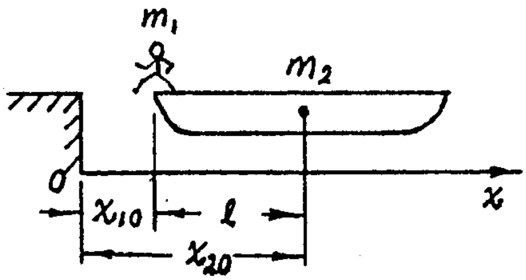
(2)m_1 和 m_2 相对系统质心的速度分别为

$$v_{1C} = v_1 - v_C = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2C} = v_2 - v_C = -\frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

故在质心系中两质点沿相反方向运动。

2.59 质量为 50kg 的人站在质量为 100kg 的小船船头上，船身与河岸垂直，船头离河岸 1.0m，求人跳上岸的时刻，船头离岸的距离。



解 2.59 图

解 人上岸前，人、船系统水平方向不受外力，系统的质心位置静止不变。设船的质心离船头 l，坐标如图所示，则

$$x_C = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

由图知

$$x_{20} = x_{10} + l$$

人上岸时刻，$x_1 = 0$，故人上岸瞬时船质心离岸为

$$x_2 = \frac{m_1 x_{10} + m_2(x_{10} + l)}{m_2}$$

人上岸时刻，船头离岸距离为

$$x_2 - l = (\frac{m_1}{m_2} + 1)x_{10}$$

$$= (\frac{50}{100} + 1) \times 1\text{m} = 1.5\text{m}$$

2.60 细绳跨过半径 $R=0.3\text{m}$ 的定滑轮，两端悬挂质量分别为 $m_1=0.6\text{kg}$ 和 $m_2=0.4\text{kg}$ 的两个物体。滑轮和绳的质量均不计。若 $t=0$ 时两物体在同一水平面上，并由静止释放，求两物体组成的质点系的质心加速度和 $t=0.5\text{s}$ 时的质心位置。

解 以 $t=0$ 时两物体连线中点为原点，向下为 y 轴正方向，m_1 指向 m_2 为 x 轴正方向。由牛顿第二定律

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$T - m_2 g = m_2 a$$

由质心运动定律

$$(m_1 + m_2)g - 2T = (m_1 + m_2)a_C$$

解得

$$a_C = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})^2 g = 0.04g = 0.392\ \text{m/s}^2 \downarrow$$

$t=0.5\text{s}$ 时质心坐标为

$$y_C = \frac{1}{2}a_C t^2 = (\frac{1}{2} \times 0.392 \times 0.5^2)\text{m}$$

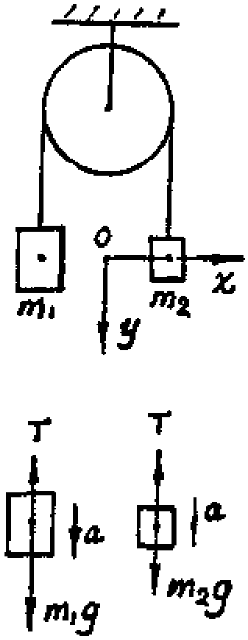
$$= 0.049\ \text{m}$$

x 方向不受外力，x_C 恒定

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{0.6 \times (-0.10) + 0.4 \times 0.10}{0.6 + 0.4}\text{m}$$

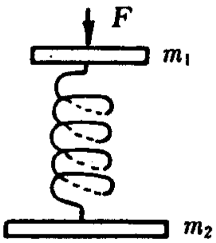
$$= -0.02\ \text{m} \quad -0{,}06$$



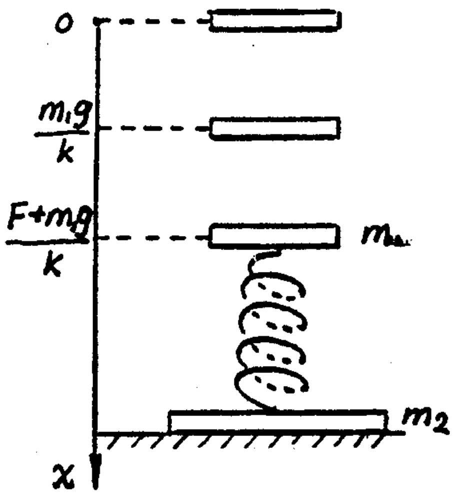
解 2.60 图

2.61 质量为 m_1 和 m_2 的两物体用劲度系数为 k 的轻弹簧相

连，m_2 放在水平地面上。以大小为 $F=(m_1+m_2)g$、方向竖直向下的力作用在 m_1 上，使弹簧压缩，然后释放，如图所示。以两物体为质点系，求：(1)刚释放时和 m_2 刚离地时的质心加速度；(2)m_1 在平衡位置时的质心加速度。



题 2.61 图



解 2.61 图

解 以弹簧原长时 m_1 位置为原点，竖直向下为 x 轴正方向。F 释放后，质点系受重力 $(m_1+m_2)g$，地面支持力 $N=kx+m_2g$，合外力为

$$(m_1+m_2)g-(kx+m_2g)=m_1g-kx \qquad ①$$

质心速度为

加

$$a_C=\frac{m_1g-kx}{m_1+m_2} \qquad ②$$

(1)刚释放时

$$x=\frac{F+m_1g}{k}=\frac{(m_1+m_2)g+m_1g}{k}=(\frac{2m_1+m_2}{k})g \qquad ③$$

③式代入②式，得刚释放时的质心加速度

$$a_C = -g \qquad \text{（方向向上）}$$

m_2 刚离地时

$$N = kx + m_2 g = 0$$

即

$$x = -\frac{m_2 g}{k} \qquad ④$$

④式代入②式，得 m_2 刚离地时的质心加速度

$$a_C = g \qquad \text{（方向向下）}$$

(2)m_1 处于平衡位置时，

$$m_1 g = kx$$

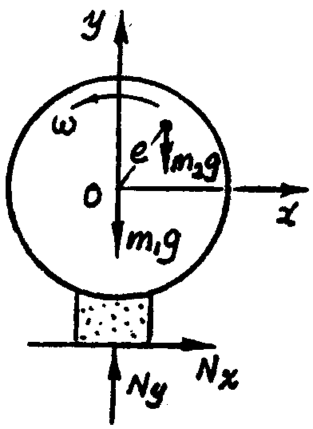
即

$$x = \frac{m_1 g}{k} \qquad ⑤$$

⑤式代入②式，得 m_1 处于平衡位置时质心加速度

$$a_C = 0$$

2.62 轴对称的电动机定子质量为 m_1，固定在水平地基上。转子质量为 m_2，角速度为 ω。若因安装误差，转子质心与定子轴线的偏心距离为 e。求地基对电机的作用力。



解 2.62 图

解 由质心运动定律

$$N_x = (m_1 + m_2)a_{Cx} \qquad ①$$

$$N_y - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2)a_{Cy} \qquad ②$$

质心坐标为

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + m_2 e\cos\omega t}{m_1 + m_2} \qquad ③$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + m_2 e \sin\omega t}{m_1 + m_2} \quad ④$$

③、④式对 t 求二阶导数代入①、②式，得

$$N_x = - m_2 e\omega^2 \cos\omega t$$

$$N_y = (m_1 + m_2)g - m_2 e\omega^2 \sin\omega t$$

若不偏心，$e=0$，则 $N_x=0$，$N_y=(m_1+m_2)g$

2.63 质量 0.4kg 的小球从高塔上自由落下后 1s 时，质量 0.6kg 的小球从同一点自由落下。求第二个小球释放后 t 秒时，这两球质点系的质心速度和质心加速度。

解

$$v_1 = g(1 + t)$$

$$v_2 = gt$$

$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0.4 + gt$$

质心运动定律

$$(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_C$$

故 $$a_C = g$$

2.64 一喷气式飞机以 200m/s 的速度在空中飞行，燃气轮机每秒钟吸入 50kg 空气，与 2kg 燃料混合燃烧后，相对飞机以 400m/s 的速度向后喷出。求该燃气轮机的推力。

解 推力为

$$F = \sum v' \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = v_1' \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} + v_2' \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$$

$$= [(-200) \times 50 + (-400) \times (-52)]\mathrm{N}$$

$$= 1.08 \times 10^4 \mathrm{N}$$

2.65 质量为 6000kg 的火箭铅直发射，喷气相对火箭的速度为 2000m/s，每秒钟喷气 120kg，求：(1)起飞时火箭的加速度；(2)若所带燃料为 4800kg，求火箭的最后速度；(3)火箭能达到的最大

高度。设上升高度范围内 $g=9.8\text{m/s}^2$。分忽略重力和不忽略重力两种情况分别求解。

解 由密舍尔斯基方程，竖直方向投影式为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

(1)起飞时，火箭主体质量为 $m=m_0=6000\text{kg}$，故加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g-\frac{v'}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$=[-9.8-\frac{2000}{6000}\times(-120)]\text{m/s}^2$$

$$=30.2\ \text{m/s}^2$$

(2)分离变量，代入初始条件积分

$$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t-g\mathrm{d}t+\int_{m_0}^m(-v')\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

得 t 时刻火箭速度

$$v=-gt+v'\ln\frac{m_0}{m}$$

燃料用完时，$t=\frac{4800}{120}=40\ \text{s}$，$m=6000-4800=1200\text{kg}$，故速度为

$$v=(-9.8\times40+2000\ln\frac{6000}{1200})\text{m/s}$$

$$=2.83\times10^3\ \text{m/s}$$

(3)燃料用完之前，t 时刻高度为(假设 g 不变)

$$x=\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t(v'\ln\frac{m_0}{m_0-\alpha t}-gt)\mathrm{d}t$$

$$=v'[t-(\frac{m_0}{\alpha}-t)\ln\frac{m_0}{m_0-\alpha t}]-\frac{1}{2}gt^2$$

燃料刚用完时高度为

$$x=\{2000[40-(\frac{6000}{120}-40)\ln\frac{6000}{6000-120\times40}]$$

$$-\frac{1}{2}\times 9.8\times 40^2)\mathrm{m}$$

$$=4.00\times 10^4\ \mathrm{m}$$

最大高度为 $$H=x+\frac{v^2}{2g}=4.49\times 10^5\ \mathrm{m}$$

2.66 线密度为 $\lambda=0.2\mathrm{kg/m}$ 的柔软均匀细绳卷成一堆放在地面上，手握绳的一端以 $v=2\mathrm{m/s}$ 的速度垂直向上匀速提起，求提起 0.5m 时手的提力。

解 以提起部分为主体，向上为 x 轴正方向，则

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(F-mg)-v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

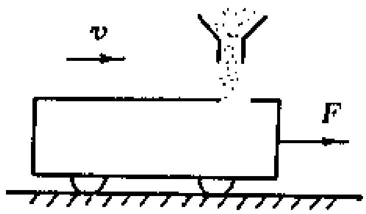
式中 $$m=\lambda vt=\lambda x$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\qquad x=vt$$

解得

$$F=\lambda(v^2+xg)$$
$$=0.2\times(2^2+0.5\times 9.8)\mathrm{N}$$
$$=1.78\ \mathrm{N}$$

2.67 车厢以 3m/s 的速度从煤斗下匀速通过，已知每秒钟有 500kg 煤从煤斗垂直落入车厢，求机车对该车厢的牵引力。



题 2.67 图

解 按密舍尔斯基方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F+v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

而 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=500\mathrm{kg/s}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，

$v'=-v=-3\ \mathrm{m/s}$，故

$$F=v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=(3\times 500)\ \mathrm{N}=1.5\times 10^3\ \mathrm{N}$$

2.68 物料从 B 车中以每秒 μkg 的速率铅直喷进 A 车，B 车水平速度为 v_b，某时刻 A 车的质量为 m，速度为 v_a，求该时刻 A 车的加速度。A、B 车沿同一水平路面前后行驶。

解 以 A 车为主体

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F+v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

前进方向投影式为（地面摩擦力不计）

$$ma=0+(v_b-v_a)\mu$$

故 A 车加速度为

$$a=\frac{\mu(v_b-v_a)}{m}$$

2.69 初始质量为 $m_0=1000$kg，初始速度为 $v_0=200$ m/s 的飞船进入外层空间的尘埃中，已知飞船前表面的面积为 $S=10^2$ m^2，尘埃密度 $\rho=0.10\times10^{-3}$ kg/m^3。若飞船上尘埃沉积的速率为 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho Sv$。求任意时刻飞船的速度。

解 以飞船为研究主体，前进方向密舍尔斯基方程投影式为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F+v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0+(-v)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

分离变量，、代入初始条件积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

得

$$v=\frac{m_0}{m}v_0$$

又因

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho Sv=\rho S\frac{m_0}{m}v_0$$

$$\int_{m_0}^{m}m\mathrm{d}m=\int_0^t\rho Sm_0v_0\mathrm{d}t$$

$$m=\sqrt{2\rho Sm_0v_0t+m_0^2}$$

故飞船速度与时间关系为

$$v=\frac{m_0v_0}{\sqrt{2\rho Sm_0v_0t+m_0^2}}$$

$$=\frac{200}{\sqrt{1+0.004\ t}}\ \mathrm{m/s}$$

2.70 质量为m的小球下系一条足够长的柔软绳子。绳子的质量线密度为λ。将小球以初速v_0从地面竖直上抛，忽略空气阻力。求：(1)上升过程中，小球速率与高度的关系；(2)小球上升的最大高度。

解 设小球和离地绳子为主体，按密舍尔斯基方程

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F+v\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

以地面为原点，竖直向上为x轴正方向，则$M=m+\lambda x$，分量式为

$$(m+\lambda x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-(m+\lambda x)g-v\lambda v$$

即
$$(m+\lambda x)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(m+\lambda x)g-\lambda v^2 \qquad ①$$

令$\xi=(m+\lambda x)^2v^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=2(m+\lambda x)\lambda v^2+2(m+\lambda x)^2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad ②$$

②式代入①式，有

$$\mathrm{d}\xi=-2(m+\lambda x)^2g\mathrm{d}x$$

代入初始条件积分

$$\int_{m^2v_0^2}^{\xi}\mathrm{d}\xi=\int_0^x-2(m+\lambda x)^2g\mathrm{d}x$$

得
$$\xi=-\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda x)^3+m^2v_0^2+\frac{2g}{3\lambda}m^3$$

因$\xi=(m+\lambda x)^2v^2$，故

$$v^2=\frac{m^2v_0^2}{(m+\lambda x)^2}-\frac{2g}{3\lambda}\left[\frac{(m+\lambda x)^3-m^3}{(m+\lambda x)^2}\right]$$

当 $v=0$ 时小球到达最高点，得

$$x_{max}=\frac{m}{\lambda}\left[\sqrt[3]{\frac{3\lambda v_0^2}{2mg}+1}-1\right]$$

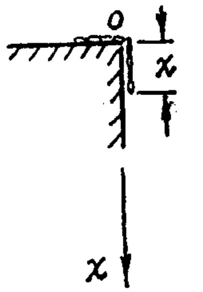
2.71 质量线密度为 λ 的柔软细绳卷成一堆放在水平桌面上，绳一端从桌面上的小孔中依靠自身重量落下。设摩擦均可忽略不计。求：(1)下落速度与已落下长度的关系；(2)落下长度与时间 t 的关系。

解 (1)以落下部分绳子为主体

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

选坐标如图，x 方向投影式为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg+(-v)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$



解 2.71 图

因 $m=\lambda x,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda v,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，故上式可写为

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v^2=gx$$

或

$$\frac{d(x^2v^2)}{\mathrm{d}x}=2gx^2$$

分离变量，代入初始条件 $x=0$时 $v=0$，积分

$$\int_0^{x^2v^2}\mathrm{d}(x^2v^2)=\int_0^x 2gx^2\mathrm{d}x$$

得

$$v=\sqrt{\frac{2gx}{3}}$$

(2)

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2g}{3}x}$$

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\int_0^t\sqrt{\frac{2g}{3}}\mathrm{d}t$$

得

$$x = \frac{1}{6}gt^2$$

2.72 质量 $m=2\text{kg}$ 的物体在力 $F=4t$(SI)的作用下，由静止出发沿直线运动，求从 $t=0$到 $t=3\text{s}$ 的时间内，F 对物体所作的功。

解
$$a=\frac{F}{m}=2t$$

$$v=\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t=\int_0^t 2t\mathrm{d}t=t^2$$

$$A=\int \mathrm{d}A=\int F\mathrm{d}x=\int Fv\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^3 4t\ t^2\mathrm{d}t=3^4=81\ \text{J}$$

2.73 质量为 $m=0.1\text{kg}$ 的质点，其速度为 $\boldsymbol{v}=(2+6t)\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ (SI)。求：$t=1\text{s}$ 时，合力对质点作功的功率。

解
$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}=6m(2+6t)$$

$t=1\text{s}$ 时
$$P=4.8\text{W}$$

2.74 质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿 x 轴运动，已知在质点的运动范围内，$F=8x$，$\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正方向夹角 $\theta=\arccos 0.03x$，式中单位均为 SI 单位。求质点从 $x_1=10\text{m}$ 运动到 $x_2=20\text{m}$ 的过程中，$\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功。

解

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F_x\mathrm{d}x$$

$$=8x\times 0.03x\ \mathrm{d}x$$

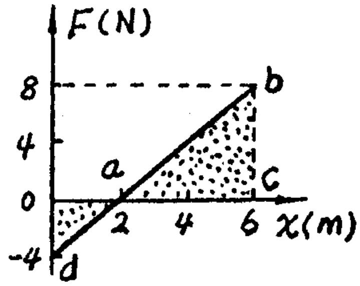
$$A=\int_{10}^{20}=0.24x^2\mathrm{d}x=560\ \text{J}$$

2.75 质点在力 $F(x)=2x-4$ (SI)作用下，沿 x 轴从 $x=0$运

动到 $x=6\text{m}$，分别用积分法和图示法求 F 对质点所作的功。

解

$$A=\int F(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^6(2x-4)\mathrm{d}x=12\ \mathrm{J}$$

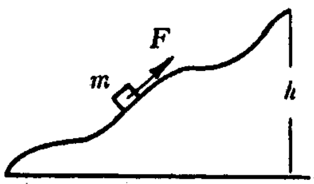


解 2.75图

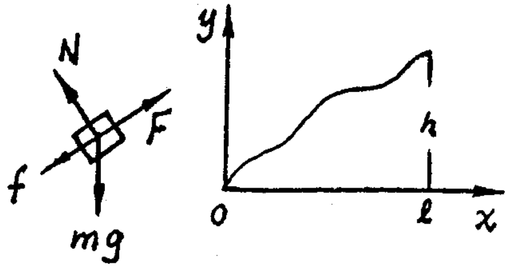
或

$$A=\Delta abc\text{ 面积}-\Delta oad\text{ 面积}$$
$$=12\ \mathrm{J}$$

2.76 一山坡高 h，水平距离 l，各处坡度不同。用方向处处沿山坡切向的力 F，将质量为 m 的物体匀速地从山底沿山坡拉上山顶，物体与山坡间的摩擦系数为 μ。求上山过程中重力、摩擦力、支持力和拉力所作的功。



题 2.76图



解 2.76图

解

$$A_N=0$$
$$A_p=-mgh$$
$$A_f=\int f\cdot\mathrm{d}r=\int-\mu mg\cos\alpha|\mathrm{d}r|$$

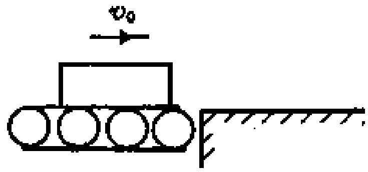
$$= \int_0^l -\mu mg \mathrm{d}x = -\mu mgl$$

动能定理

$$A_F + A_p + A_f + A_N = E_k - E_{k0} = 0$$

故
$$A_F = -(A_p + A_f) = mg(h + \mu l)$$

2.77 传送带以速率 v_0 将质量 $m=20\mathrm{kg}$、长 $L=0.6\mathrm{m}$ 的均匀柔软物体送上水平台面，物体的前端在台面上前进 $l=0.8\mathrm{m}$ 后停住。已知物体与台面间的摩擦系数为 $\mu=0.5$。求 v_0。



题 2.77图

解 因柔软，摩擦力为

$$f = \begin{cases} \mu \dfrac{m}{L} gx & (0 < x \leqslant L) \\ \mu mg & (x \geqslant L) \end{cases}$$

$$A_f = \int_0^L -\mu \frac{m}{L} gx \mathrm{d}x + \int_L^l -\mu mg \mathrm{d}x$$

$$= -\mu mg\left(l - \frac{L}{2}\right)$$

质点动能定理

$$A_f = 0 - \frac{mv_0^2}{2}$$

故
$$v_0 = \sqrt{2\mu g\left(l - \frac{L}{2}\right)} = 2.21\ \mathrm{m/s}$$

2.78 质量 $m=10\mathrm{kg}$ 的物体原静止于原点，在合力 $F=3+4x$ (SI)的作用下，沿 x 轴运动。求物体经过 $x=3\mathrm{m}$ 时的速度。

解

$$A = \int F \mathrm{d}x = \int_0^3 (3 + 4x) \mathrm{d}x$$

$$= 27\ \mathrm{J}$$

质点动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

故
$$v = \sqrt{\frac{2A}{m}} = 2.3\ \text{m/s}$$

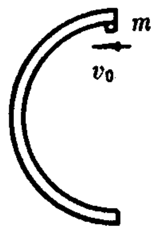
2.79 半圆形的屏固定在光滑的水平面上，质量 m 的小物体以速率 v_0沿切向进入屏，沿屏内壁滑动，并从屏的另一端滑出。已知物体与屏内壁间的摩擦系数为 μ。求摩擦力对物体所作的功。

解 由牛顿定律，

$$\begin{cases} N = m\dfrac{v^2}{R} \\ f = -\mu N = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{mv}{R}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} \end{cases}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\mu d\theta$$



题 2.79图

积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^{\pi} -\mu d\theta$$

得末速

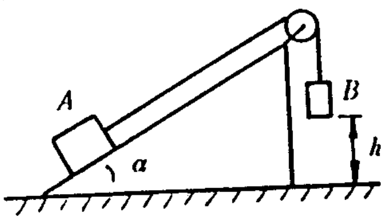
$$v = v_0 e^{-\mu\pi}$$

由动能定理

$$A_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$= \frac{1}{2}mv_0^2(e^{-2\mu\pi} - 1)$$

2.80 图中倾角为 $\alpha=30°$的斜面体固定在水平地面上，物体 A 和 B 的质量均为 $m=1\text{kg}$，A 与斜面间的摩擦系数 $\mu=0.37$。滑轮和绳子质量忽略不计。$h=10\text{m}$。物体 A 和 B 由静止开始运动，

求 B 到达地面时的速度。要求分别用质点动能定理和功能原理求解。



题 2.80图

解 质点动能定理

$$-mg\sin\theta\, h + Th - \mu mg\cos\theta\, h = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh - Th = \frac{1}{2}mv^2$$

解得

$$v = \sqrt{gh(1 - \sin\theta - \mu\cos\theta)}$$
$$= 4.19\ \mathrm{m/s}$$

或功能原理

$$mgh - mg\sin\theta\, h - \mu mg\cos\theta\, h = \frac{1}{2}(m + m)v^2$$

得
$$v=\sqrt{gh(1-\sin\theta-\mu\cos\theta)}$$

2.81 质量为 M 的沙箱原静止于光滑水平面上，质量为 m 的子弹沿水平方向射入沙箱。相对沙箱前进 l 后静止。这段时间中沙箱相对地面前进 s，此后子弹与沙箱一起以速度 v 运动。求：(1)在这段时间内，子弹对沙箱的平均冲力；(2)子弹射入沙箱前的速度；(3)这段时间内，子弹和沙箱组成的系统所损失的动能。

解 (1)按动能定理

$$Fs = \frac{1}{2}Mv^2 - 0$$

故
$$F=\frac{M}{2s}v^2$$

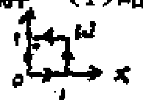
(2)
$$-F(s+l)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

得
$$v_0 = v\sqrt{\frac{M}{ms}(s + l) + 1}$$

(3)
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(M+m)v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{Mlv^2}{s}$$

2.82 轻弹簧的一端固定，另一端系一质量 $m=0.3\text{kg}$ 的小球，放在光滑的水平面上。弹簧回复力 $F=-6x-4x^3$(SI)，式中 x 为弹簧的伸长。(1)证明此回复力为保守力；(2)以平衡位置为势能零点，求 $x=0.1\text{m}$ 时，这一系统的势能；(3)先拉长到 $x=0.2\text{m}$，然后由静止放手，求小球回到 $x=0.1\text{m}$ 时的速度。

解 (1)略 $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$. $\int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}+\int_{(1,1)}^{(0,1)}+\int_{0,1}^{0,0} \vec{F}\cdot d\vec{r}$



(2)
$$E_p = \int_x^0 (-6x-4x^3)\mathrm{d}x$$
$$= 3x^2 + x^4$$

当 $x=0.1\text{m}$ 时，$E_p=3.01\times10^{-2}\text{J}$

(3)由动能定理
$$A = \frac{mv^2}{2} - 0$$

而
$$A = \int_{0.2}^{0.1}(-6x-4x^3)\mathrm{d}x$$
$$= 9.15\times10^{-2}\text{J}$$

故
$$v=\sqrt{\frac{2A}{m}}=0.78\ \text{m/s}$$

2.83 $5\times10^3\text{kg}$ 的损石从天外落到地球上，求万有引力所作的功。已知地球质量 $M=6.0\times10^{24}\text{kg}$，半径 $R=6.4\times10^6\ \text{m}$。

解
$$A_{内保} = E_{p0} - E_p$$
$$= \left(-G\frac{Mm}{\infty}\right) - \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$
$$= 3.1\times10^{11}\ \text{J}$$

2.84 双原子分子的势能函数为

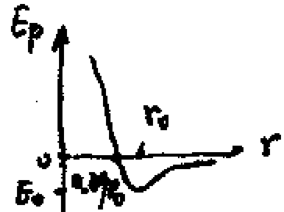
$$E_p = E_0[(\frac{r_0}{r})^{12} - 2(\frac{r_0}{r})^6]$$

式中 r 为两原子之间的距离，r_0 为常量。求：(1)保守内力为零处所对应的 r；(2) $E_p=0$ 处对应的 r；(3)画出势能曲线的示意图。

解 (1) $\frac{dE_p}{dr}=0$ 时 E_p 极小，即

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{d}{dr}\{E_0[(\frac{r_0}{r})^{12} - 2(\frac{r_0}{r})^6]\}$$

$$= E_0[-12(\frac{r_0}{r})^{11}\frac{r_0}{r^2} + 12(\frac{r_0}{r})^5\frac{r_0}{r^2}] = 0$$



得 $$r=r_0$$

(2) $$E_p=E_0[(\frac{r_0}{r})^{12}-2(\frac{r_0}{r})^6]=0$$

得 $$r = 2^{-\frac{1}{6}}r_0 = 0.89r_0$$

2.85 物体以初速 $v_0=4.0\text{m/s}$ 沿倾角为 $\alpha=15°$ 的斜面向上滑。已知物体与斜面间的摩擦系数为 $\mu=0.20$，求：(1)物体能冲上斜面多远？(2)物体下滑回到斜面底部时速度多大？

解 (1)功能原理

$$-\mu mg\cos\alpha\, l = mgl\sin\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2$$

得

$$l = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\text{con}\alpha)} = 1.81\text{ m}$$

(2) $$-\mu mg\cos\alpha\, l=\frac{1}{2}mv^2-mgl\sin\alpha$$

得 $$v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 1.53\text{ m/s}$$

2.86 质量为 $m=2.0\text{kg}$ 的物体由静止开始，从四分之一圆柱形槽的内壁滑下，经过底部时速率为 $v=6.0\text{m/s}$。已知圆槽半径为 $R=4.0\text{m}$。求滑下过程中摩擦力对物体所作的功。

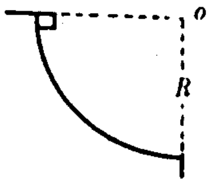
解 功能原理

$$A_{外} + A_{内非} = (E_k + E_p) - (E_{k0} - E_{p0})$$

即 $$0 + A_f = (\frac{1}{2}mv^2 + 0) - (0 + mgR)$$

故 $$A_f = \frac{1}{2}mv^2 - mgR$$

$$= -42.4 \text{ J}$$



题 2.86图

2.87 劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的轻弹簧 A 和 B 中间连结一质量为 m 的物体，放在光滑的水平面上，弹簧 B 的另一端用水平力 F 极其缓慢地拉长 l，求力 F 所作的功。

解 功能原理

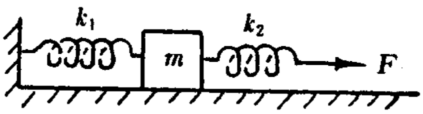
$$A_{外} + A_{内非} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

即 $$A_F + 0 = [0 + (\frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2)] - [0 + 0]$$

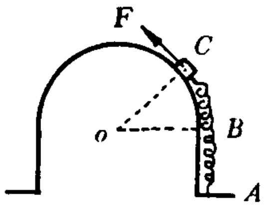
而 $$x_2 = l - x_1$$

$$k_1x_1 = k_2x_2$$

解得 $$A_F = \frac{k_1k_2l^2}{2(k_1 + k_2)}$$



题 2.87图



题 2.88图

2.88 如图所示，劲度系数为 k 的轻弹簧一端固定于 A 点，另一端系一质量为 m 的物体，靠在半径为 a 的光滑圆柱体表面上，弹簧原长为 AB，在切向力 F 的作用下，物体极其缓慢地沿柱面从 B 点移到 C 点，求力 F 所作的功。

解 功能原理

$$A_{外} + A_{内非} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

即
$$A_F + 0 = [0 + (mga\sin\theta + \frac{1}{2}ka^2\theta^2)] - [0 + 0]$$

故

$$A_F = mga\sin\theta + \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$

2.89 先把登月舱从地面发射到地球同步轨道站，再从同步轨道站发射到月球表面上。求两步发射中火箭推力应作的功。已知登月舱质量 $m=1.0\times10^3$kg，同步轨道半径 $r_1=4.22\times10^7$m，地心到月心的距离为 $r_2=39.0\times10^7$m，地球半径 $R_e=6.37\times10^6$m，月球半径 $R_m=1.74\times10^6$m，地球质量 $M_e=5.97\times10^{24}$kg，月球质量 $M_m=7.35\times10^{22}$kg。

解 登月舱在地面、轨道站和月球表面时的势能分别为

$$E_{p0} = (-G\frac{M_e m}{R_e}) + (-G\frac{M_m m}{r_2 - R_e}) = -6.20\times10^{11}\ \text{J}$$

$$E_{p1} = -Gm(\frac{M_e}{r_1} + \frac{M_m}{r_2 - r_1}) = -9.48\times10^{10}\ \text{J}$$

$$E_{p2} = -Gm(\frac{M_e}{r_2 - R_m} + \frac{M_m}{R_m}) = -3.83\times10^{10}\ \text{J}$$

推力作功

$$A_1 = E_{p1} - E_{p0} = 5.25\times10^{11}\ \text{J}$$

$$A_2 = E_{p2} - E_{p1} = 5.65\times10^{10}\ \text{J}$$

2.90 劲度系数为 $k=100$N/m 的轻弹簧一端固定，另一端系一质量为 $M=8.98$kg 的木块，放在水平面上，质量为 $m=0.02$kg 的子弹水平射入木块内，弹簧被压缩了 0.10m。木块与平面间的摩擦系数为 $\mu=0.20$。求子弹射入木块前的速率。

解 碰撞过程系统动量守恒

$$mv_0 = (M+m)V$$

压缩过程，应用功能原理

$$-fx=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}(M+m)V^2$$

而
$$f=\mu N=\mu(M+m)g$$

解得

$$v_0=\frac{1}{m}\sqrt{(M+m)[kx^2+2\mu(M+m)gx]}$$
$$=319\ \mathrm{m/s}$$

2.91质量为 m、长为 l 的均匀链条直线状放在桌面上，设桌面与链条间的摩擦数为 μ。当链条下垂长度为 a 时，由静止开始下滑，求链条刚好全部离开桌面时的速率。

解 功能原理

$$A_f=(E_k+E_p)-(E_{k0}+E_{p0})$$

即

$$\int_a^l-\mu mg\frac{l-x}{l}\mathrm{d}x=(\frac{mv^2}{2}-mg\frac{l}{2})-(0-\frac{ma}{l}g\frac{a}{2})$$

得

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2]}$$

2.92 质量为 m 的小球系在长 l 的细绳下端，绳的上端固定。当绳与铅垂线成 θ_0角时，由静止放手，求绳与铅垂线成 θ 角时小球的速度、加速度和绳中张力的值。

解 机械能守恒

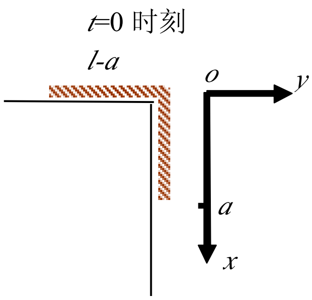
$$\frac{1}{2}mv^2-mgl\cos\theta=0-mgl\cos\theta_0$$

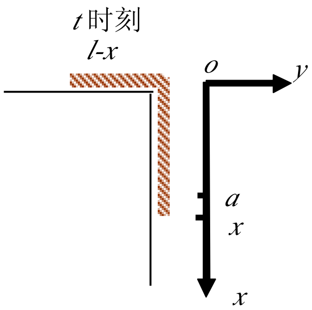
故

$$v=\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$
$$a_n=\frac{v^2}{l}=2g(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

习题 2.91

解 1





在 t 时刻，下一 dt 时间内摩擦阻力作功为

$$\mathrm{d}A_f = -f\,\mathrm{d}x = -\mu\lambda(l-x)g\,\mathrm{d}x = \mu\frac{m}{l}(l-x)g\,\mathrm{d}x$$

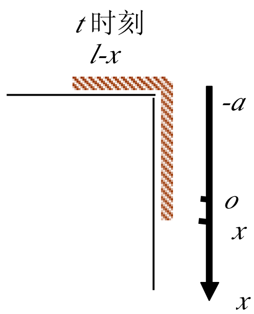
由功能原理　$A_{合}=A_f=\Delta E=$（E_k+E_p）$-(E_{k0}+E_{p0})$

$$\int_a^l -\mu\frac{m}{l}(l-x)gdx = (\frac{1}{2}mv^2 - mg\frac{l}{2}) - (0-\frac{m}{l}ag\frac{a}{2})$$

式中势能以桌面为势能零点。解得 $v=\sqrt{\frac{g}{l}[(l^2-a^2)-\mu(l-a)^2]}$

解 2　　用牛顿定律求

t 时刻垂下长度为 $a+x$，所受合力为垂下段的重力和摩擦阻力



$$\frac{m}{l}(a+x)g - \frac{m}{l}(l-a-x)g\mu = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

积分可得速度。x 积分限为 $0\to l-a$

$$a_\tau = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$$

因
$$T - mg\cos\theta = ma_n$$

故
$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

2.93 长 l 的单摆挂在 o 点，o 点正下方 $l-a$ 处有一钉子。使摆线与竖直方向成 β 角时由静止释放。当摆线遇到钉子后，摆锤以钉子为圆心作圆周运动。求摆线偏离竖直方向 θ 角时，摆锤的速率。

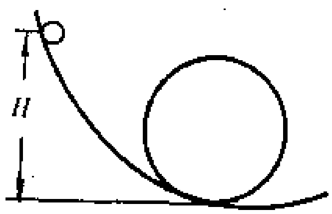
解 机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg(l - a + a\cos\theta) = -mgl\cos\beta$$

故

$$v = \sqrt{2g[l(1-\cos\beta) - a(1-\cos\theta)]}$$

2.94 要使小球完成翻圈运动，不脱离圆形轨道，最少应从多高由静止开始滑下？（见题 2.94图）。设滑道光滑。



题 2.94图

解 2.94图

解 设 H 高处滑下不脱轨，任一位置 θ 时，根据机械能守恒和牛顿定律

$$E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0}$$
$$\frac{1}{2}mv^2+mg(R-R\cos\theta)=0+mgH$$
$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv^2-mgR\cos\theta=mg(H-R)\\ N-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}\end{cases}$$

解得

$$N=mg(\frac{2H}{R}-2+3\cos\theta)$$

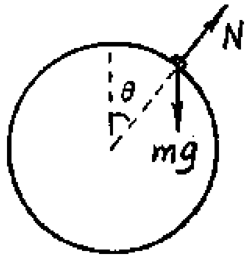
要不脱轨，需满足 $\theta=\pi$ 时，$N\geqslant 0$，故得

$$H\geqslant\frac{5}{2}R$$

2.95 在半径为 R 的光滑球面的最高点处，质点由静止开始向下滑动，滑到何处后质点脱离球面？

解 设 θ 处脱离球面

$$\begin{cases}mgR=\frac{1}{2}mv^2+mgR\cos\theta\\ mg\cos\theta-N=m\frac{v^2}{R}\\ N=0\end{cases}$$



解 2.95图

解得

$$\theta=\cos^{-1}\frac{2}{3}$$

2.96 弹簧原长为 l，劲度系数为 k，上端固定，下端挂一质量为 m 的物体。先用手托住，使弹簧为原长，物体静止。(1)若将物体托住，极其缓慢地放下，弹簧最大伸长多少？(2)手突然释放物体，弹簧最大伸长多少？

解 (1)平衡位置时伸长最大，为

$$x=\frac{mg}{k}$$

(2)机械能守恒，伸长最大时，重力势能全部转化为弹性势能

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgx$$

故最大伸长为

$$x = \frac{2mg}{k}$$

2.97 劲度系数为 k 的轻弹簧左端固定，右端连结一质量为 m_1 的物体，放在光滑的水平面上。使质量为 m_2 的物体紧靠 m_1，并使弹簧压缩 b，然后由静止释放。与求 m_1 与 m_2 开始分离时的速度。

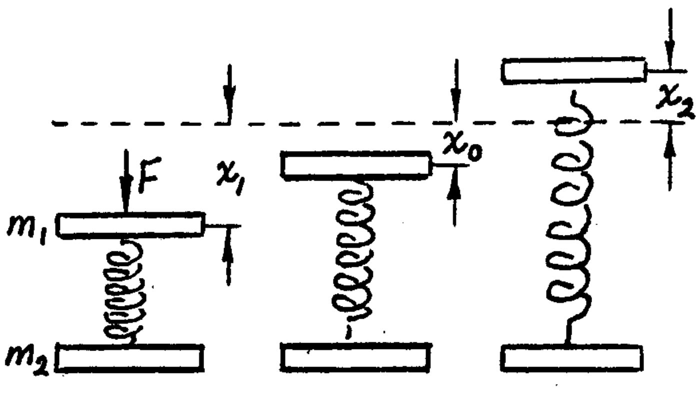
解 弹簧恢复原长时，m_1 与 m_2 分离，由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

得

$$v = b\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

2.98 轻弹簧的两端分别连结质量为 m_1 和 m_2 的两块平板，m_2 放在水平地面上。若在 m_1 上施一竖直向下的力 F，然后实然撤去 F，问 F 至少多大，m_2 才能被提起离开地面？



解 2.98图

解 (1)设需加力 F 才能提起 m_2，则

$$F + m_1 g = kx_1$$

$$kx_2 \geqslant m_2 g$$

F 撤去后，机械能守恒

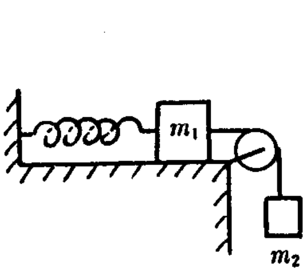
$$\frac{1}{2}kx_2^2 + m_1 g x_2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - m_1 g x_1$$

解得

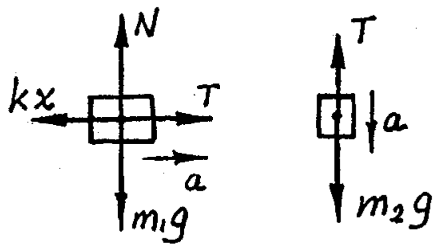
$$F \geqslant (m_1 + m_2)g$$

(2)m_1与 m_2对调，结果与(1)相同。

2.99 如图所示，劲度系数为 k 的轻弹簧一端固定，另一端系一质量为 m_1的物体，放在光滑的水平桌面上。m_1的右边连一轻绳绕过轻滑轮接一挂钩，把质量为 m_2的物体轻轻挂上。求 m_1的最大速度。



题 2.99图



解 2.99图

解 设弹簧原长时 m_1位置处为原点，x 轴正方向水平向右。

$$\begin{cases} T - kx = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{m_2 g - kx}{m_1 + m_2}$$

v 极大条件：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{x_0}=\frac{m_2g-kx}{m_1+m_2}\Big|_{x_0}=0$$

得
$$x_0=\frac{m_2g}{k}$$

弹簧、m_1、m_2和地球所组成的系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{max}^2+\frac{1}{2}kx_0^2-m_2gx_0=0$$

解得最大速度

$$v_{max}=\frac{\pm m_2g}{\sqrt{(m_1+m_2)k}}$$

正、负号表示往返经过 x_0时，速率都最大。

2.100 劲度系数分别为 k_1和 k_2的两个轻弹簧互相连结后，上端固定，下端系一质量为 m 的物体。在两弹簧为原长时，由静止释放，求弹簧的最大伸长量和弹簧对物体的最大作用力。

解 放手后机械能守恒，最大伸长时动能为零

$$\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2-mg(x_1+x_2)=0$$

而
$$k_1x_1=k_2x_2$$

故

$$x_1=\frac{2mg}{k_1}$$

$$x_2=\frac{2mg}{k_2}$$

弹簧最大伸长为

$$x_1+x_2=2\left(\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\right)mg$$

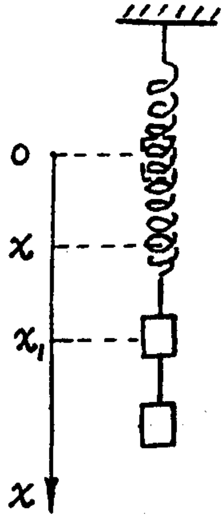
此时弹力最大，为

$$F=k_1x_1=k_2x_2=2mg$$

2.101 劲度系数为 k 的轻弹簧上端固定，下端悬挂质量为

m_1和m_2的两个物体，达到平衡后，突然撤去m_2。求m_1的最大速度

解 选竖直向下为x轴正方向，弹簧恰好为原长时m_1所在处为原点o，悬挂m_1和m_2时m_1的平衡位置为x_1，则



解 2.101图

$$(m_1+m_2)g=kx_1 \quad ①$$

撤去m_2后，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m_1v^2+(\frac{1}{2}kx^2-m_1gx)=\frac{1}{2}kx_1^2+m_1g \quad ②$$

m_1动能最大位置的条件为

$$\frac{dE_p}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}kx^2-m_1gx)=0$$

即 $$x=\frac{m_1g}{k} \quad ③$$

①、③式代入②式，解得v的最大值为

$$v_{max}=\frac{m_2g}{\sqrt{m_1k}}$$

2.102 从地面发射，要使航天器脱离地球引力范围，发射速度至小多大？这一速度称为第二宇宙速度。

解 设使物体脱离地球引力范围的发射速度为v，则在$r=\infty$处，物体的动能恰好为零。根据机械能守恒定律

$$E_{k0}+E_{p0}=E_k+E_p$$

即 $$\frac{1}{2}mv^2+(-G\frac{Mm}{R})=0+0$$

得

$$v=\sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

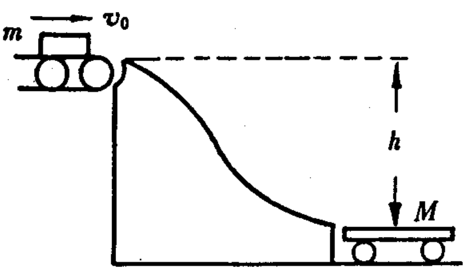
因$G\frac{M}{R}=g$，故

$$v = \sqrt{2gR}$$

将 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$，$R=6.37\times10^6$ m 代入，得

$$v = 11.2\ \mathrm{km/s}$$

2.103 如图所示，传输带以 $v_0=2$ m/s 的速度把 $m=20$kg 的行李包送到光滑的坡道上滑下，装到 $M=40$kg 的小车上。已知坡道高 $h=0.6$m，行李包与车之间的摩擦系数 $\mu=0.4$，小车与地面间的摩擦可忽略。取 $g=10$ m/s²，求：(1)行李包与车无相对滑动后的车速；(2)行李包从上车到相对小车静止所需时间。



题 2.103图

解 (1)包滑下过程机械能守恒

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh$$

包与车碰撞过程，系统水平方向动量守恒

$$(M+m)V = mv$$

解得

$$V = \frac{\sqrt{v_0^2+2gh}}{\frac{M}{m}+1}$$

$$= \frac{4}{3}\ \mathrm{m/s} = 1.32\ \mathrm{m/s}$$

(2)对包应用动量定理

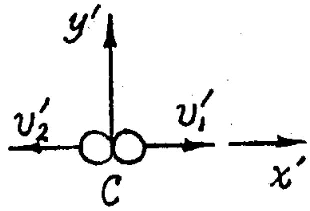
$$-\mu mg\Delta t = mV - mv$$

得

$$\Delta t = \frac{v - V}{\mu g} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{\mu g(1 + \frac{m}{M})} = 0.68\ \mathrm{s}$$

2.104 炮弹以初速 v_0与水平成 α 角发射。在最高点炸裂为质量 m_1和 m_2的两块弹片，速度均沿原方向。爆作能量 E 全部转变为动能。求：(1)炸裂时两弹片的相对速度；(2)相对地面，两弹片的速度；(3)落地时两弹片间的距离。

解：(1)爆炸过程系统能量守恒，水平方向动量守恒，在质心参照系中



解 2.104图

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = E$$

$$m_1 v_1' - m_2 v_2' = 0$$

解得

$$v_1' = \sqrt{\frac{2m_2 E}{m_1(m_1 + m_2)}} \qquad (\text{方向} \rightarrow)$$

$$v_2' = \sqrt{\frac{2m_1 E}{m_2(m_1 + m_2)}} \qquad (\text{方向} \leftarrow)$$

相对速度为

$$v_1' + v_2' = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)E}{m_1 m_2}}$$

(2)最高点时，质心速度为水平方向

$$v_C = v_0 \cos\alpha$$

故两弹片相对实验室的速度为

$$v_1 = v_1' + v_C = \sqrt{\frac{2m_2 E}{m_1(m_1 + m_2)}} + v_0\cos\alpha \quad (\text{方向} \rightarrow)$$

$$v_2 = v_2' - v_C = \sqrt{\frac{2m_1 E}{m_2(m_1 + m_2)}} - v_0\cos\alpha \quad (\text{方向} \leftarrow)$$

(3)从最高点到落地需时间为

$$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

落地时两弹片相距

$$l=v_1t+v_2t$$

$$=\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)E}{m_1m_2}}\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

2.105 质量为 1.0kg 的冲击摆用长 1.0m 的细绳悬挂，质量为 2.0g 的子弹以 500m/s 的速度水平射入冲击摆，穿出摆时的速度为 100m/s。求摆的上升高度。设子弹穿过摆的时间极短。

解： 从子弹射入到穿出的过程，系统水平方向动量守恒

$$MV+mv=mv_0$$

上摆过程摆的机械能守恒

$$Mgh=\frac{1}{2}MV^2$$

解得摆上升高度为

$$h=\frac{m^2(v_0-v)^2}{2M^2g}=0.33\text{ m}$$

2.106 质量为 $M=10$kg 的物体放在光滑水平面上，并与一水平轻弹簧相连，弹簧另一端固定，弹簧的劲度系数为 $k=1000$ N/m。今有质量为 $m=1$kg 的小球以水平速度 $v_0=4$m/s 飞来，与物体 M 相撞后以 $v_1=2$m/s 弹回。问：(1)M 起动后，弹簧的最大压缩量多大？(2)小球与物体的碰撞是完全弹性吗？恢复系数多大？(3)若小球上涂有粘胶，碰撞后即与 M 粘在一起，则(1)、(2)的结果又如何？

解： (1)碰撞过程中系统动量守恒

$$MV-mv_1=mv_0$$

压缩过程中系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}MV^2$$

解得弹簧最大压缩量为

$$x=\frac{m(v_0+v_1)}{\sqrt{kM}}=0.06\mathrm{m}$$

(2)因$\frac{1}{2}mv_0^2>\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}MV^2$,故不是完全弹性碰撞,恢复系

数为

$$e=\frac{v_1+V}{v_0-0}$$

$$=\frac{m}{M}+(\frac{m}{M}+1)\frac{v_1}{v_0}=0.65$$

(3)完全非弹性碰撞

$$(M+m)V=mv_0$$

机械能守恒

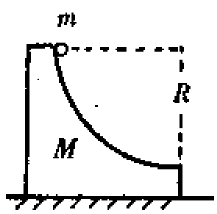
$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(M+m)V^2$$

解得

$$x=\frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}}=0.04\mathrm{m}$$

$$e=\frac{V-V}{v_0-0}=0$$

2.107 质量为 m 的小球从光滑的四分之一圆弧形槽上由静止开始滑下。槽的半径为 R,质量为 M,球与槽间、槽与地面间的摩擦均可忽略。求球离槽时球和槽的速率。



题 2.107图

解: 在小球滑下过程中,系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=mgR$$

在小球离槽过程中,系统水平动量守恒

$$mv-MV=0$$

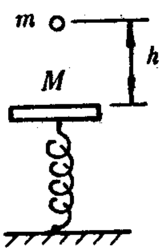
解得

• 80 •

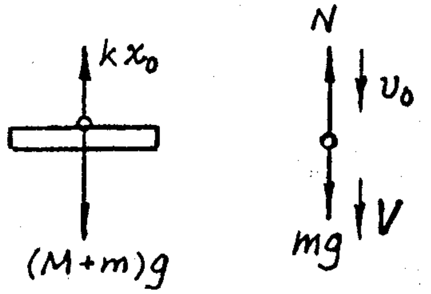
$$v=\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}\quad（方向\rightarrow）$$

$$V=\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}\quad（方向\leftarrow）$$

2.108 轻弹簧下端固定在地面上，上端连结一块质量为 M 的平板，质量为 m 的胶块由平板上方 h 处自由下落到平板上，并粘在一起，碰撞时间为 Δt。碰撞后胶块和平板一起下降的最大距离为 x。求：(1)碰撞后胶块与平板一起运动的速度；(2)弹簧的劲度系数 k。



题 2.108图



解 2.108图

解 (1)碰前 m 速度 $v_0=\sqrt{2gh}=\cancel{1.4\text{m}}/\text{s}$

碰前弹簧压缩 $\qquad x_0=\dfrac{Mg}{k}$

碰撞过程，应用质点系动量定理

$$[(m+M)g-kx_0]\Delta t=(m+M)V-mv_0$$

得碰后 m 和 M 一起运动的速度

$$V=\frac{m}{m+M}(v_0+g\Delta t)$$

$$=\cancel{0.28\text{ m}}/\text{s}$$

碰撞过程，对 m 应用质点动量定理

$$(mg-\overline{N})\Delta t=mV-mv_0$$

故平均冲力为

$$\overline{N} = \frac{m(v_0 - V)}{\Delta t} - mg$$

$$= \cancel{220\ \mathrm{N}}$$

(2)下降过程机械能守恒

$$\frac{k}{2}(x_0 + x)^2 + (m + M)gx = \frac{m + M}{2}V^2 + \frac{k}{2}x_0^2$$

解得

$$k = \frac{(m + M)V^2}{x^2} + \frac{2mg}{x} = \cancel{47.0}\ \mathrm{N/m}$$

2.109 质量为 m_3的平板放在水平地面上,通过劲度系数为 k 的竖直轻弹簧与质量为 m_2的平板相连,并达到平衡。质量为 m_1的小球从距 m_2为 h 的高处自由落下,与 m_2作完全非弹性碰撞。为使 m_2向上反弹时能带动 m_3刚好离开地面,h 应为多少?

解: 设 m_1未落下时弹簧压缩 x_0,弹簧伸长 a 时 m_3恰好能被提起,则

$$kx_0 = m_2 g$$

$$ka = m_3 g$$

碰撞前夕 m_1速度为

$$v = \sqrt{2gh}$$

碰撞过程系统动量守恒

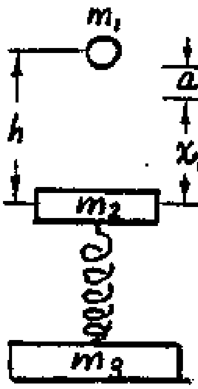
$$(m_1 + m_2)V = m_1 v$$

碰撞结束后系统机械能守恒

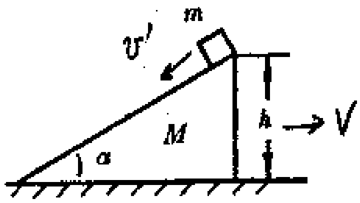
$$(m_1 + m_2)ga + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - (m_1 + m_2)gx_0 + \frac{1}{2}k$$

解得 $$h = \frac{g}{2m_1^2 k}[(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)(m_2 + m_3 + 2m_1)]$$

2.110 质量为 M、倾角为 α 的斜面体放在光滑水平面上,质量为 m 的物体从 h 高处沿斜面滑下。已知斜面光滑。求:(1)物体



解 2.109图



题 2.110图

滑到斜面底端时，物体相对斜面体的速度和斜面体相对地面的速度；(2)在物体从 h 高滑到底的过程中，物体对斜面体所作的功。

解： (1) 水平方向动量守恒

$$m(v'\cos\alpha - V) - MV = 0$$

机械能守恒

$$\frac{m}{2}[(v'\cos\alpha - V)^2 + (v'\sin\alpha)^2] + \frac{MV^2}{2} = mgh$$

解得

$$v' = \sqrt{2gh(\frac{M+m}{M+m\sin^2\alpha})}$$

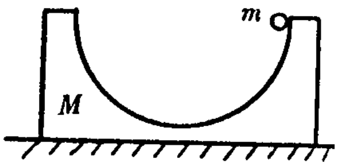
$$V = \frac{m\cos\alpha}{M+m}\sqrt{2gh(\frac{M+m}{M+m\sin^2\alpha})}$$

(2)动能定理

$$A = \frac{1}{2}MV^2 - 0$$

$$= \frac{Mm^2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}$$

2.111 质量为 m 的小球沿半径 R、质量 M 的半圆形光滑槽从最高点滑下。槽放在光滑的水平面上。开始时槽和小球都静止。求：(1)小球滑到槽的最低点时，小球相对槽的速度、槽相对地面的速度和槽对球的作用力；(2)在小球从最高点滑到最低点的过程中，槽所移动的距离。



题 2.111图

解 (1)设 v' 为小球到底部时相对槽的速度，V 为该时刻槽速，因系统水平方向的动量守恒

$$m(v'-V)-MV=0$$

机械能守恒 $$\frac{1}{2}m(v'-V)^2+\frac{1}{2}MV^2=mgR$$

解得

$$v'=\sqrt{2gR(1+\frac{m}{M})}$$

$$V=\frac{m}{M+m}\sqrt{2gR(1+\frac{m}{M})}$$

以槽为参照系，小球的法向运动方程为

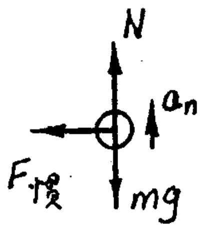
$$N-mg=m\frac{v'^2}{R}$$

得 $$N=m(g+\frac{v'^2}{R})=(3+\frac{2m}{M})mg$$

(2)水平方向系统质心坐标不变

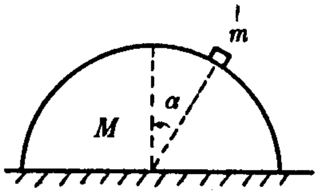
$$m(R-s)=Ms$$

故槽移动距离为 $$s=\frac{mR}{M+m}$$

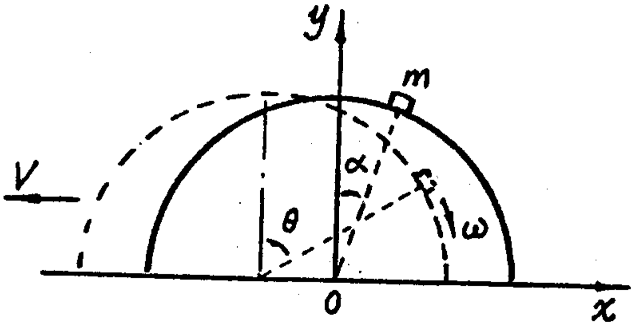


解 2.111图

2.112 质量为 M、半径为 R 的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上。质量为 m 的小物块沿半球面滑下。物块初始位置与铅垂线之间的夹角为 α。初始时刻半球与小物块均静止。求物块脱离半球面之前，与竖直方向成 θ 角时，物块绕球心运动的角速度。



题 2.112图



解 2.112图

解 设 θ 角时物块相对半球体的角速度为 ω，半球体的运动速度为 V，则物块相对地面的速度为

$$v_x = \omega R\cos\theta - V$$

$$v_y = -\omega R\sin\theta$$

落下过程水平方向动量守恒，机械能守恒

$$mv_x - MV = 0$$

$$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}MV^2+mgR\cos\theta=mgR\cos\alpha$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}\frac{\cos\alpha - \cos\theta}{1-\dfrac{m}{m+M}\cos^2\theta}}$$

2.113 质量为 M_2 的天车静止在光滑的水平轨道上。天车下用长 l 的细绳挂一质量为 M_1 的沙袋，也处于静止状态。质量为 m 的子弹水平飞来，射入沙袋中与沙袋一起运动，并带动天车前进。已知细绳与竖直方向间的最大偏转角为 α。求射入沙袋前子弹的速度。

解 子弹射入沙袋的过程，子弹和沙袋系统动量守恒

$$mv = (m + M_1)V$$

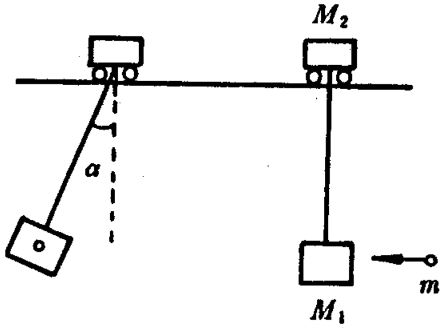
前进和摆高过程，子弹、沙袋和天车系统水平方向动量守恒，机械能守恒

$$(m + M_1)V = (m + M_1 + M_2)V_C$$

$$\frac{1}{2}(m + M_1)V^2 = \frac{1}{2}(m + M_1 + M_2)V_C^2 + (m + M_1)gl(1 - \cos\alpha)$$

解得子弹的入射速度为

$$v = \frac{m + M_1}{m}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)(\frac{m + M_1 + M_2}{M_2})}$$



题 2.113图

2.114 质量均为 m 的物体 A 和 B 用劲度系数为 k 的轻弹簧连接，放在光滑的水平面上。质量为 m 的子弹沿弹簧方向以速率 v_0水平飞来，与物体 A 发生完全非弹性碰撞，冲力远大于弹力。求：(1)弹簧的最大压缩量；(2)物体 B 的最大动能。

解 (1)子弹射入过程，子弹和 A 组成的系统动量守恒(因弹力≪内冲力)。以子弹初速度方向为坐标轴正方向，设子弹在 A 内停止运动瞬时的速度为 v_{A0}，则有

$$2mv_{A0} = mv_0 \quad ①$$

因碰撞时间 Δt 极短，Δt 内可认为弹簧未被压缩，故此时 B 的速度仍为零，即 $v_{B0}=0$。

此后进行的过程中，A(含子弹)、B 和弹簧组成的系统的动量和机械能均守恒。设弹簧压缩 Δl 时，A、B 速度为 v_A 和 v_B，则有

$$2mv_A + mv_B = 2mv_{A0} \quad ②$$

$$\frac{1}{2}(2m)v_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}(2m)v_{A0}^2 \quad ③$$

压缩量最大时，有

$$v_A = v_B \quad ④$$

解方程①、②、③和④，得最大压缩量

$$(\Delta l)_{max} = \sqrt{\frac{m}{6k}}v_0$$

(2)物体 B 动能最大时

$$\Delta l = 0$$

代入方程③，由①、②、③解得 B 的最大速度

$$v_{Bmax} = \frac{2}{3}v_0$$

故 B 的最大动能为

$$E_{kBmax} = \frac{1}{2}mv_{Bmax}^2 = \frac{2}{9}mv_0^2$$

2.115 水流以速率 v 与挡板法线成 α 角冲向光滑的挡板，分成左右两路支流。支流的速率均为 v。水的总流量为 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=q$。求：(1)水流对挡板的作用力；(2)两路支流的流量。

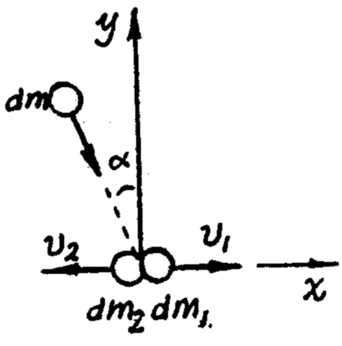
解 (1)挡板光滑，只有法向力 F

$$F\mathrm{d}t = 0 - [-(\mathrm{d}m)v\cos\alpha] = \mathrm{d}p_y$$

故 $$F=\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v\cos\alpha=qv\cos\alpha$$

(2)x 方向动量守恒

$$\begin{cases}(\mathrm{d}m_1)v_1 - (\mathrm{d}m_2)v_2 = (\mathrm{d}m)v\sin\alpha \\ \mathrm{d}m_1 + \mathrm{d}m_2 = \mathrm{d}m\end{cases}$$



解 2.115图

解得

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}q(1 + \sin\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}q(1 - \sin\alpha)$$

2.116 在光滑的水平桌面上，质量为 $m_1 = 10\text{g}$ 和 $m_2 = 50\text{g}$ 的两个小球分别以速率 $v_{10} = 0.30\text{m/s}$ 和 $v_{20} = 0.10\text{m/s}$ 相向而行，发生正碰撞。(1)若碰撞后 m_2恰好静止，求 m_1的速度；并判断是否完全弹性碰撞；(2)若 m_2固定于桌面上，m_1以 0.30m/s 与 m_2相碰，碰后以 0.30m/s 反向弹回，求碰撞过程中系统动量的改变，并判断是否完全弹性碰撞。

解 (1)以 m_1原运动方向为正方向，质点系动量守恒

$$m_1v_1 = m_1v_{10} - m_2v_{20}$$

碰撞后 m_1速度为

$$v_1 = \frac{m_1v_{10} - m_2v_{20}}{m_1} = -0.20\ \text{m/s}$$

即 m_1碰后反向弹回。质点系动能减少，不是完全弹性碰撞。

(2)因受桌子所施的冲量，故碰撞前后两球系统动量改变，动量增量 ΔP 为

$$\Delta P = m_1v_1 - m_1v_{10}$$

是完全弹性碰撞。

$$= -0.60 \times 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

2.117 一个小球与另一个质量相等的静止小球发生完全弹性斜碰撞，证明碰撞后两小球的运动方向相互垂直。

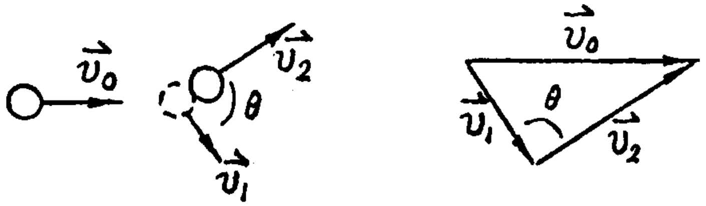
解 碰撞过程质点系动量守恒，机械能守恒

$$\begin{cases} m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\ v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases}$$

由矢量三角形和上述两式知，$\theta=90°$，即 v_1 与 v_2 互相垂直。



解 2.117图

2.118 小球与光滑平面碰撞，入射角为 θ_0，反射角为 θ，求碰撞的恢复系数。

解 因平面光滑，小球 x 方向不受力，动量守恒

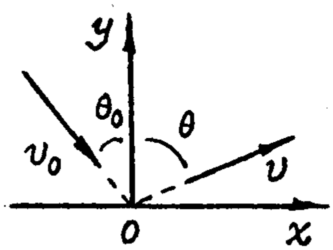
$$mv\sin\theta = mv_0\sin\theta_0$$

按恢复系数定义

$$e=\frac{0-v\cos\theta}{-v_0\cos\theta_0-0}$$

解得

$$e=\frac{\mathrm{tg}\theta_0}{\mathrm{tg}\theta}$$

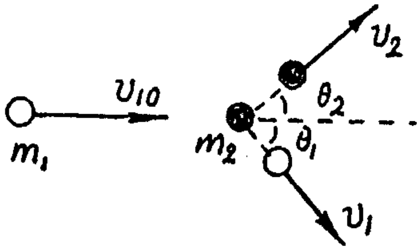


解 2.118图

2.119 质量为 m_1 的粒子与质量为 m_2 的静止粒子作完全弹性碰撞。碰撞后，两粒子的散射角分别为 θ_1 和 θ_2。散射角是碰撞后粒子的速度方向与原入射方向间的夹角。证明：θ_1 与 θ_2 满足如下关系：

$$\tan\theta_1=\frac{\sin 2\theta_2}{\dfrac{m_1}{m_2}-\cos 2\theta_2}$$

解 碰撞前后系统动量守恒，动能守恒



解 2.119图

$$\begin{cases} m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2 = m_1v_{10} \\ m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2 = 0 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{10}^2 \end{cases}$$

解得

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{\sin2\theta_2}{\frac{m_1}{m_2} - \cos2\theta_2}$$

2.120 质量为 m_1 的重锤从 h 高处自由落下，与质量为 m_2 的桩发生完全非弹性碰撞。每打一次，桩深入土中距离 d。假设土对桩的阻力为恒量。求土对桩的阻力。

解 锤落下过程机械能守恒

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = m_1gh$$

碰撞过程，冲力很大，其它外力可忽略，故锤和桩系统动量守恒

$$(m_1 + m_2)V = m_1v$$

桩进入土壤过程，应用功能原理

$$-Fd = [0-(m_1 + m_2)gd] - [\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0]$$

解得

$$F = \frac{m_1 gh}{(m_1 + m_2)d} + (m_1 + m_2)g$$

2.121 硼离子的摩尔质量为 $\mu_1 = 10.0\times10^{-3}$kg，硅原子的摩尔质量为 $\mu_2 = 28.0\times10^{-3}$kg。动能为 2.00×10^5eV 的硼离子与静止的硅原子发生完全弹性正碰撞，求碰撞中硼离子失去的动能（在制造半导体材料时，这一动能称为最大传输能量）。

解 完全弹性正碰撞，动量及动能守恒

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 \end{cases}$$

解得

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10}$$

故

$$\begin{aligned} -\Delta E_k &= \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 \left[1 - \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^2\right] \\ &= 1.55 \times 10^5\ \text{eV} \end{aligned}$$

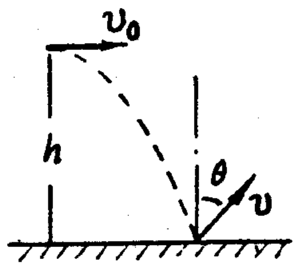
2.122 小球从 h 高处以初速 v_0 水平抛出，落地时与光滑水平地面碰撞。已知恢复系数为 e。求小球回跳速度 v。

解 碰撞过程水平方向动量守恒

$$mv\sin\theta = mv_0$$

竖直方向碰撞恢复系数为

$$e = \frac{v\cos\theta}{\sqrt{2gh}}$$



解 2.122图

解得

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ghe^2}$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{e\sqrt{2gh}}{v_0}$$

2.123 在光滑水平面上，小球 A 以速度 v_{10}与质量相同的小球 B 发生完生弹性斜碰撞。碰撞时两球心连线与 v_{10}夹角为 α。设两球表面光滑。求碰撞后两球的速度。

解 因光滑，碰撞力沿两球连心线，故

$$v_{1y} = v_{10}\sin\alpha$$

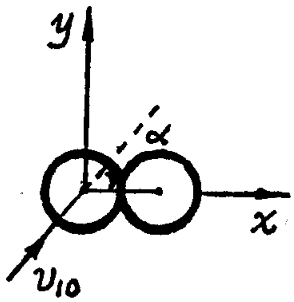
$$v_{2y} = 0$$

两球系统 x 方向动量守恒

$$mv_{1x} + mv_{2x} = mv_{10}\cos\alpha$$

因完全弹性碰撞，恢复系数为 1

$$e = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{v_{10}\cos\alpha} = 1$$



解 2.123图

解得

$$v_{1x} = 0$$

$$v_{2x} = v_{10}\cos\alpha$$

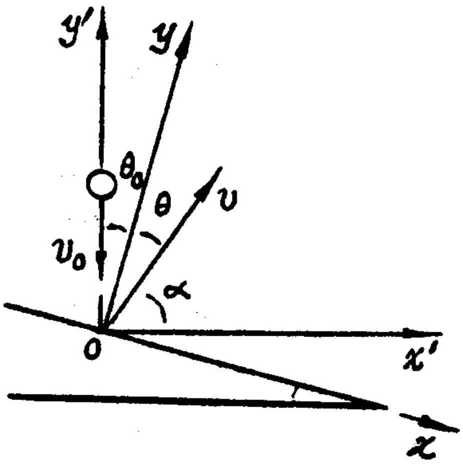
故碰撞后两球速度方向相互垂直。

2.124 倾角为 $\theta_0 = 15°$的固定光滑斜面上，点 o 上方 $h=1.6\text{m}$ 处，一小球由静止自由落下，与斜面碰撞，恢复系数 $e=0.60$。求：(1)碰撞后小球的速度；(2)碰撞后小球达到的最高点与 o 点的高度差；(3)碰撞后小球机械能损失的百分数。

解 (1)小球碰撞前速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 5.60\ \text{m/s}$$

碰撞过程用 $0xy$ 坐标系，碰前小球速度分量为



解 2.124图

$$v_{0x} = v_0\sin\theta_0 = 1.45\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{0y} = -v_0\cos\theta_0 = -5.41\mathrm{m/s}$$

因斜面光滑，碰后小球速度分量为

$$v_x = v_{0x} = 1.45\ \mathrm{m/s}$$

$$e = \frac{0 - v_y}{v_{0y} - 0}$$

即
$$v_y = -ev_{0y} = 3.25\ \mathrm{m/s}$$

(2)因 $e = \frac{\mathrm{tg}\theta_0}{\mathrm{tg}\theta}$，故反射角为

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{tg}\theta_0}{e}\right) = 24°$$

碰后反跳过程用 $0x'y'$ 坐标系，抛射初速为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3.55\ \mathrm{m/s}$$

发射角为

$$\alpha = 90° - \theta_0 - \theta = 51°$$

故射高为

$$H = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} = 0.39\ \text{m}$$

(3)碰撞中机械能损失百分数为

$$\frac{-\Delta E_k}{E_{k0}} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_0^2}$$

$$= 1 - (\frac{v}{v_0})^2 = 60\%$$

2.125 细绳穿过光滑平板上的小孔，板上面绳的一端系一质量为 $m=50\text{g}$ 的小球，板下面绳的一端悬挂一质量为 $M_1=200\text{g}$ 的重物。已知当小球在板上作半径为 $r_0=24.8\text{cm}$ 的匀速圆周运动时，重物 M_1达到平衡。若在 M_1下方再挂一质量为 $M_2=100\text{g}$ 的重物，求小球作匀速圆周运动的半径 r 和角速度 ω。

解 只挂 M_1时

$$M_1 g = m\omega_0^2 r_0 \quad ①$$

挂 M_1和 M_2时

$$(M_1 + M_2)g = m\omega^2 r \quad ②$$

小球所受合外力矩为零，角动量守恒

$$mr^2\omega = mr_0^2\omega_0 \quad ③$$

解得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M_1 g}{mr_0}} = 12.6\ \text{rad/s}$$

$$\omega = (\frac{M_1 + M_2}{M_1})^{2/3}\omega_0 = 16.5\ \text{rad/s}$$

$$r = (\frac{M_1 + M_2}{m\omega^2})g = 21.7 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

2.126 细绳跨过光滑轻定滑轮，一端挂一质量为 M 的升降

机，升降机中有一质量为 m 的人，绳另一端挂一质量为 $M+m$ 的物体。已知人在地面上跳时质心能达到的最大高度为 h。若人在升降机中消耗同样能量往上跳，相对地面，人的速度多大?能跳多高?

解 设人上跳速度 v，升降机下降速度 V(均相对地)。以升降机、滑轮、人和重物为质点系，滑轮中心为参考点，角动量守恒

$$mvr-(2M+m)Vr=0$$

人上跳能量为 mgh，转变为系统的动能，即

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(2M+m)V^2$$

解得

$$v=\sqrt{(\frac{2M+m}{M+m})gh}$$

故在升降机中人上跳的最大高度为

$$H=\frac{v^2}{2g}=\frac{(2M+m)}{2(M+m)}h$$

2.127 水星绕太阳运行轨道的近日点距太阳 $r_1=4.59\times10^{10}$m，远日点距太阳 $r_2=6.98\times10^{10}$m。求水星经近日点和远日点时的速率 v_1 和 v_2。

解 角动量守恒

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$

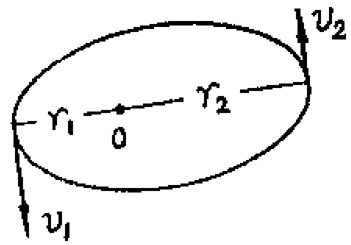
机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{r_2}$$

解得

$$v_1=\sqrt{2GM\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}}$$

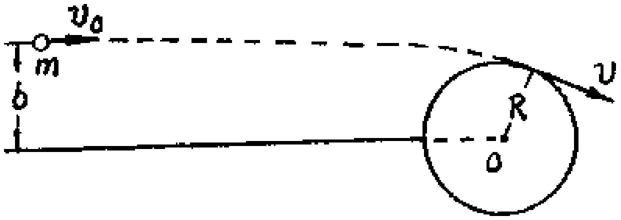
$$=5.91\times10^4\ \mathrm{m/s}$$



解 2.127图

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1 = 3.88 \times 10^4\ \mathrm{m/s}$$

2.128 质量为 m 的飞船关闭发动机后以速度 v_0 飞向质量为 M、半径为 R 的遥远星球。过球心作一直线与 v_0 平行，问飞船与此直线间的垂直距离 b(称为描准距离)多大时，飞船轨道恰好与星球表面相切，能在星球表面着陆?俘获截面 πb^2 多大?



解 2.128图

解 角动量守恒

$$mvR = mv_0b$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{\infty}$$

解得

$$b = R\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}}$$

俘获截面为

$$\pi b^2 = \pi R^2\left(1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}\right)$$

2.129 轻绳跨过轻定滑轮，一猴子抓住绳的一端，绳的另一端挂一与猴子质量相等的重物。若猴子由静止开始，相对绳子以速度 v 向上爬，求重物上升的速度 V。

解 角动量守恒

$$mVR - m(v - V)R = 0$$

故

$$V = \frac{v}{2}$$

2.130 质量为 $m=0.1\text{kg}$ 的质点在 $\boldsymbol{r}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$(SI)位置时的速度为 $\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$(SI)，求此时该质点对原点的角动量。

解：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0.1(-2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) \times (5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})$$

$$= 0.1\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4.2\boldsymbol{j} - 2.8\boldsymbol{k}\ (\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$$