第三章　刚体力学基础

3.1　半径 $R=0.02\text{m}$ 的飞轮由静止开始作 $\beta=10\text{rad/s}^2$ 的匀角加速转动。求 $t=2\text{s}$ 时飞轮的(1)角速度；(2)飞轮边缘一点的速度和加速度；(3)已转过的圈数。

解　(1)

$$\omega=\omega_0+\beta t=20\ \text{rad/s}$$

(2)

$$v=\omega R=4.0\ \text{m/s}$$

$$a_n=\omega^2 R=80\ \text{m/s}^2$$

$$a_\tau=\beta R=2.0\ \text{m/s}^2$$

(3)

$$\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2=20\ \text{rad}$$

$$N=\frac{\theta-\theta_0}{2\pi}=3.2\ \text{rev}$$

3.2　已知地球半径 $R=6.37\times10^6\text{m}$，求：(1)地球自转的角速度；(2)北纬 45° 处一点的速度和法向加速度。

解　(1)

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=7.27\times10^{-5}\ \text{rad/s}$$

(2)

$$v=\omega R\cos45^\circ=327\ \text{m/s}$$

$$a_n=\omega^2 R\cos45^\circ=2.4\times10^{-2}\ \text{m/s}^2$$

3.3　A 轮半径为 0.10m、转速为 1450rev/min，B 轮半径为 0.29m。两轮间利用皮带传动，皮带与轮间不打滑。(1)求 B 轮的转速；(2)若 A 轮的输出功率为 1kW，求皮带对 B 轮的力矩。

解　(1)

$$2\pi n_1 r_1 = 2\pi n_2 r_2$$

$$n_2 = n_1 \frac{r_1}{r_2} = 500 \text{ rev/min}$$

(2)

因 $$P = M_1\omega_1 = M_2\omega_2$$

故 $$M_2 = \frac{P}{\omega_2} = \frac{P}{2\pi n_2} = 19.1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3.4　一飞轮作定轴转动，其角速度与时间的关系为 $\omega=4+0.3t^2$(SI)。求：(1)$t=10$s 时飞轮的角加速度；(2)在 $t=0$ 到 $t=10$s 这一段时间内，飞轮转过的角度。

解(1)

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 0.6t$$

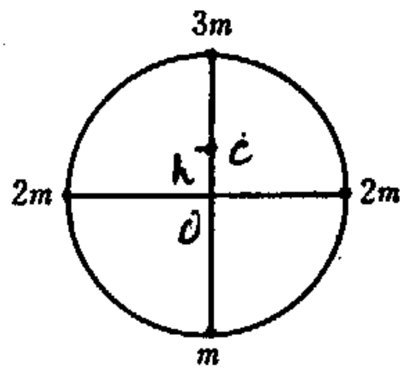
$t=10$s 时

$$\beta = 6 \text{ rad/s}^2$$

(2)

$$\Delta\theta = \int \omega dt = \int_0^{10} (4 + 0.3t^2) dt = 140 \text{ rad}$$

3.5　如图所示，质量分别为 m、$2m$、$3m$ 和 $2m$ 的四个小球安装在半径为 R 的圆形刚性轻架上。求此系统对下述两轴的转动惯量。(1)通过圆心并垂直纸面的轴；(2)通过此系统质心并垂直纸面的轴。



题 3.5 图

解：(1)

$$J_0 = 8mR^2$$

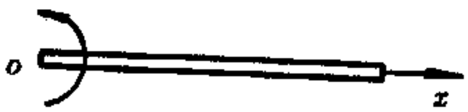
(2)设质心 C 在 O 正上方 h 处，

则

$$h=\frac{3mR-mR}{8m}=\frac{R}{4}$$

故 $$J_C=J_0-8mh^2=7.5mR^2$$

3.6 如图所示，细杆长为 l，质量线密度为 $\lambda=kx$，式中 k 为常量。求此杆对通过 o 点并与杆垂直的轴的转动惯量。



题 3.6 图

解

$$J=\int x^2\mathrm{d}m=\int_0^l x^2kx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}kl^4$$

3.7 如图所示，质量为 m、半径为 R 的圆盘与质量为 m、长为 $2R$ 的均匀细杆一端装在一起，杆的延长线通过圆心。求此组合刚体对通过杆的另一端并与纸面垂直的轴的转动惯量。

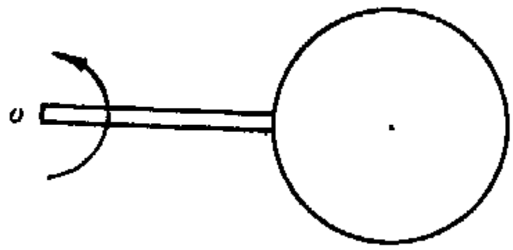
解

$$J_{杆}=\frac{1}{3}m(2R)^2=\frac{4}{3}mR^2$$

$$J_{盘}=\frac{1}{2}mR^2+m(3R)^2$$

$$=9\frac{1}{2}mR^2$$

$$J=J_{杆}+J_{盘}=10.8mR^2$$



题 3.7 图

3.8 如图所示，质量为 m，半径为 R 的匀质圆盘，对称地挖去半径为 $\frac{R}{3}$ 的小圆孔。求它对通过圆盘中心并与圆盘垂直的轴的转动惯量。

解

$$J=J_{盘}-J_{孔}$$

$$J_{盘} = \frac{1}{2}mR^2$$

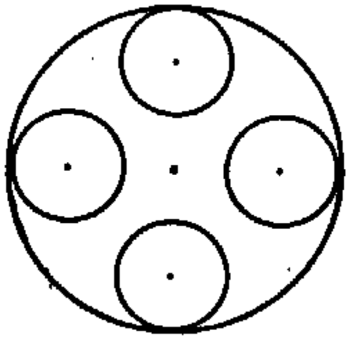
每个孔质量

$$\frac{m}{\pi R^2}\pi(\frac{R}{3})^2 = \frac{m}{9}$$

$$J_{孔} = 4[\frac{1}{2}(\frac{m}{9})(\frac{R}{3})^2 + (\frac{m}{9})(\frac{2}{3}R)^2]$$

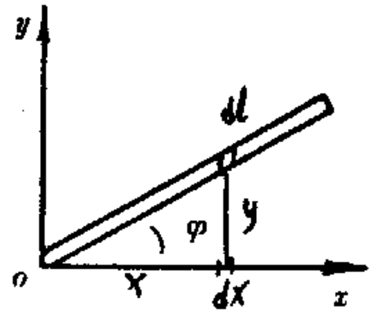
$$= \frac{4}{18}mR^2$$

故 $$J = \frac{5}{18}mR^2$$



题 3.8 图

3.9 如图所示，质量为 m、长为 l 的均匀细杆在 xy 平面内，与 x 轴夹角为 φ，其一端在原点 o。求此细杆对 ox 轴、oy 轴和 oz 轴的转动惯量。



题 3.9 图

解

$$J_x = \int y^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}l = \int_0^{l\sin\varphi} y^2 \frac{m}{l}\frac{\mathrm{d}y}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\sin^2\varphi$$

$$J_y = \int x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}l = \int_0^{l\cos\varphi} x^2 \frac{m}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\cos^2\varphi$$

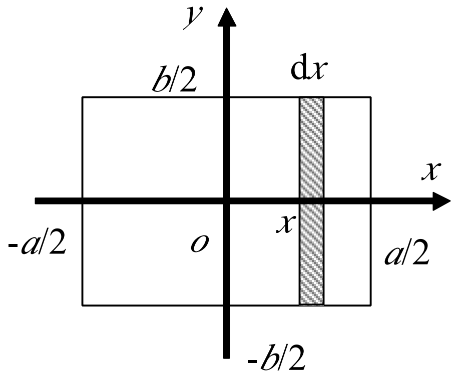
$$J_z = J_x + J_y = \frac{1}{3}ml^2$$

3.10 矩形薄板的质量为 m、长为 a、宽为 b，求它对通过其中心并与板面垂直的轴的转动惯量和回转半径。

解

$$J_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{1}{12}(\frac{m}{ab}b\mathrm{d}x)b^2$$

3.10 题



解 1　取 dx，看作细杆，$dm=\frac{m}{ab}b\,dx$，

$dJ_x=\frac{1}{12}dm\cdot b^2$

$J_x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{12}\frac{m}{ab}b^3\,dx=\frac{1}{12}mb^2$

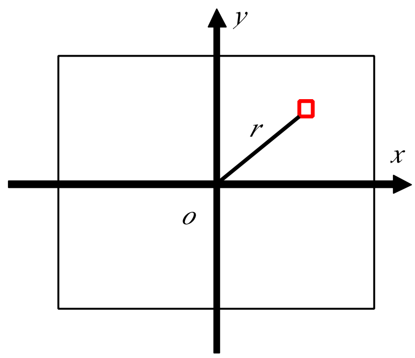
同理：$J_y=\frac{1}{12}ma^2$，则 $J_z=J_x+J_y=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

解 2　直接求细杆 dx 对 z 轴的转动惯量，自身轴的转动惯量加平行轴定理。

$$dJ_z=\frac{1}{12}\frac{m}{ab}b\,dx\cdot b^2+\frac{m}{ab}b\,dx\cdot x^2$$

$J_z=\frac{1}{12}\frac{mb^2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx+\frac{m}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2\,dx=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

解 3　按定义求



$J_z=\int r^2\,dm=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}(x^2+y^2)\frac{m}{ab}\cdot dx\,dy$

$=\frac{m}{ab}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2\,dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dy+\frac{m}{ab}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y^2\,dy$

$=\frac{1}{12}m(x^2+y^2)$

$$= \frac{1}{12}mb^2$$

同理

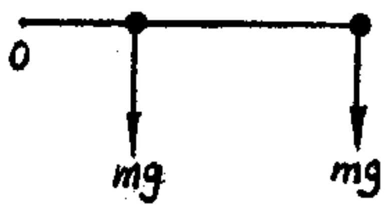
$$J_y = \frac{1}{12}ma^2$$

垂直轴定理

$$J_z = J_x + J_y = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

$$R_G = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$$

3.11 长 l 的刚性杆可绕通过杆的一端并与杆垂直的光滑水平轴在竖直平面内转动，在杆上离轴 $\frac{l}{3}$ 处和另一端各连结一个质量为 m 的小球。求杆水平时的角加速度。



解 3.11 图

解

$$J = m(\frac{l}{3})^2 + ml^2 = \frac{10}{9}ml^2$$

$$M = mg\,\frac{l}{3} + mgl = \frac{4}{3}mgl$$

转动定律

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{6g}{5l}$$

3.12 马达带动一个转动惯量为 20kg.m² 的刚体由静止开始作匀角加速定轴转动，在 1.0s 内转速达到 30 rev/min。求马达

作用在刚体上对轴的力矩。

解

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t}$$

$$= \frac{2\pi \times \frac{30}{60}}{1}\text{rad/s}^2 = \pi \text{ rad/s}^2$$

$$M = J\beta = 20\pi \text{ N} \cdot \text{m} = 62.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3.13 一个定滑轮的转动惯量为 $J=0.20\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$、半径为 $0.10\ \text{m}$，力 $F=4t$(SI)沿切线方向作用在滑轮边缘上。设 $t=0$ 时滑轮静止，求 $t=5\text{s}$ 时滑轮的角速度。

解

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{FR}{J}$$

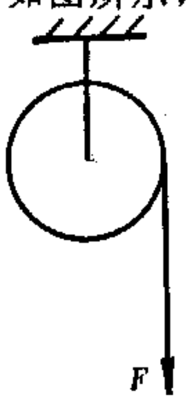
$$= \frac{4t \times 0.1}{0.2} = 2t$$

因 $\qquad \beta = \dfrac{d\omega}{dt} \qquad d\omega = \beta dt$

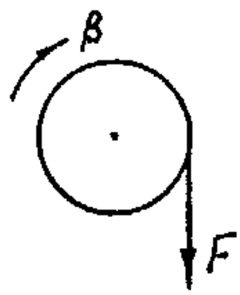
故 $\qquad \displaystyle\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 2t\ dt$

得 $\qquad \omega = t^2 = 25\ \text{rad/s}$

3.14 如图所示，质量为 $M=20\text{kg}$、半径为 $R=0.20\text{m}$ 的均



题 3.14 图



解 3.14 图

匀圆柱形轮子，可绕光滑的水平轴转动，轮子上绕有轻绳。若有恒力 $F=9.8\mathrm{N}$ 拉绳的一端，使轮子由静止开始转动。轮子与轴承间的摩擦可忽略。求：(1)轮子的角加速度；(2)绳子拉下 1m 时，轮子的角速度和动能。

解 (1)

$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{FR}{\frac{1}{2}mR^2}$$

$$=4.9\ \mathrm{rad/s^2}$$

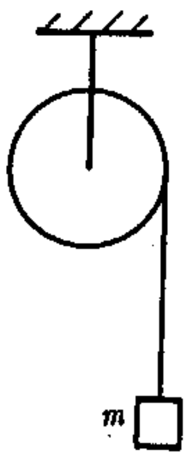
(2)转过角度

$$\Delta\theta=\frac{l}{R}=5\ \mathrm{rad}$$

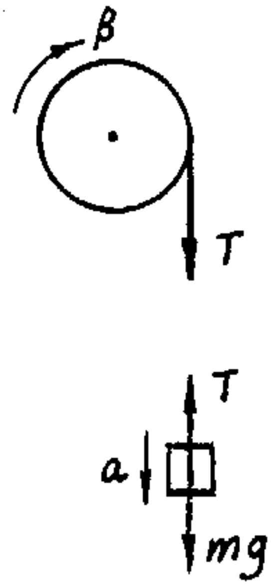
因
$$\omega^2=2\beta\Delta\theta$$

故
$$\omega=7\ \mathrm{rad/s}$$

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=Fl=9.8\ \mathrm{J}$$



题 3.15 图



解 3.15 图

3.15 上题中绳的一端挂一质量 $m=0.10\text{kg}$ 的物体，求轮子的角加速度、物体的加速度和绳中的张力。

解

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = \dfrac{1}{2}MR^2\beta \\ a = \beta R \end{cases}$$

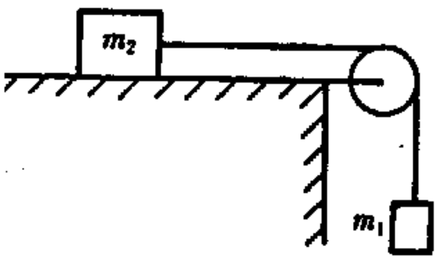
解得

$$\beta = \frac{mg}{(m + M/2)R} = 0.485\ \text{rad/s}^2$$

$$a = \beta R = 0.097\ \text{m/s}^2$$

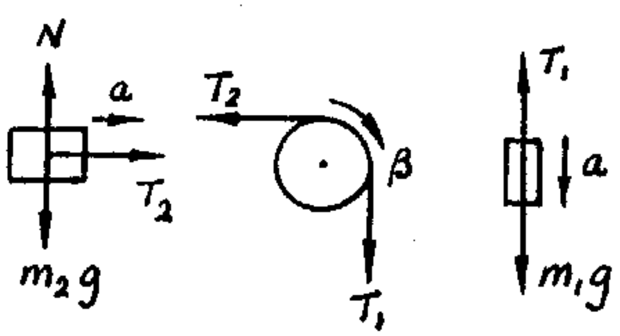
$$T = \frac{mMg}{2(m + M/2)} = 0.97\ \text{N}$$

3.16 如图所示，轻绳两端各系质量为 m_1 和 m_2 的物体，m_2 放在光滑的水平桌面上，绳跨过一个半径为 r，转动惯量为 J 的定滑轮，m_1 铅垂悬挂。滑轮与轴承间摩擦可忽略。绳与滑轮间不打滑。求两物体的加速度和绳中张力。



题 3.16 图

解



解 3.16 图

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_1 r - T_2 r = J\beta = J\dfrac{a}{r} \\ T_2 = m_2 a \end{cases}$$

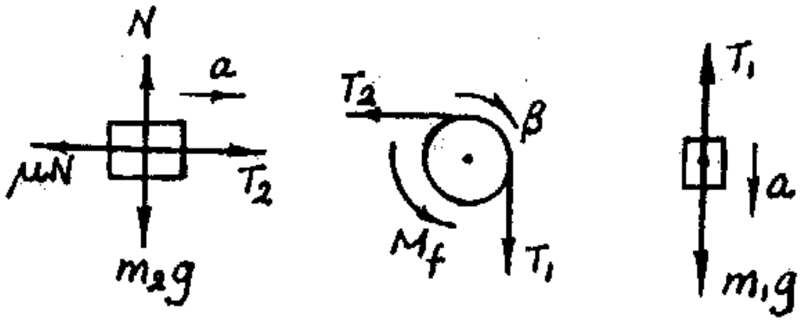
解得

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$T_1 = m_1 g\left(\frac{m_2 + J/r^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}\right)$$

$$T_2 = m_2 g\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2 + J/r^2}\right)$$

3.17 上题中，若 m_2 与桌面间的摩擦系数为 μ，滑轮与轴承间的摩擦力矩为 M_f，求两物体的加速度和绳中张力。



解 3.17 图

解

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_1 r - T_2 r - M_f = J\beta \\ T_2 - \mu m_2 g = m_2 a \\ a = \beta\, r \end{cases}$$

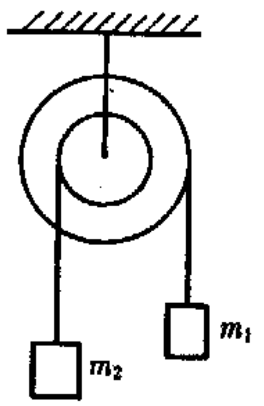
解得

$$a = \frac{(m_1 - \mu m_2)g - M_f/r}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

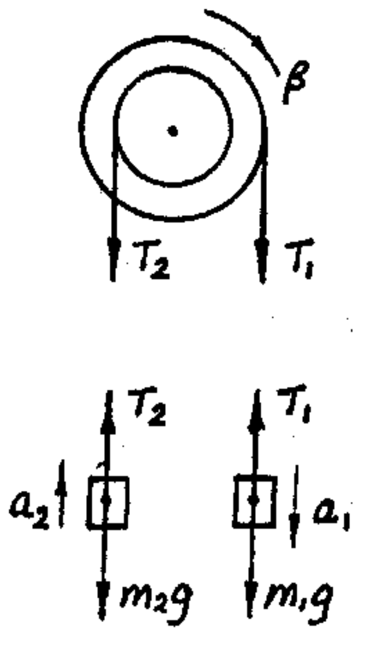
$$T_1 = m_1\left[\frac{(m_2 + \mu m_2 + J/r^2)g + M_f/r}{m_1 + m_2 + J/r^2}\right]$$

$$T_2 = m_2\left[\frac{(m_1 + \mu m_1 + \mu J/r^2)g - M_f/r}{m_1 + m_2 + J/r^2}\right]$$

3.18 半径为 R_1 和 R_2 的阶梯状滑轮上($R_1 > R_2$)，反向绕两条轻绳，分别悬挂质量为 m_1 和 m_2 的物体。滑轮对转轴的转动惯量为 J。滑轮与轴间摩擦可忽略。求两物体的加速度和绳中的张力。若最初两物体静止，则什么条件下滑轮顺钟向转动？什么条件下滑轮逆钟向转动？什么条件下滑轮和两物体均静止？



题 3.18 图



解 3.18 图

解

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ T_1 R_1 - T_2 R_2 = J\beta \\ a_1 = \beta R_1 \\ a_2 = \beta R_2 \end{cases}$$

解得

$$a_1 = \left(\frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J}\right) R_1 g$$

$$a_2 = \left(\frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J}\right) R_2 g$$

$$\beta = \left(\frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J}\right) g$$

$$T_1 = \left(\frac{m_2 R_2^2 - m_2 R_1 R_2 + J}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J}\right) m_1 g$$

$$T_2 = \left(\frac{m_1 R_1^2 - m_1 R_1 R_2 + J}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J}\right) m_2 g$$

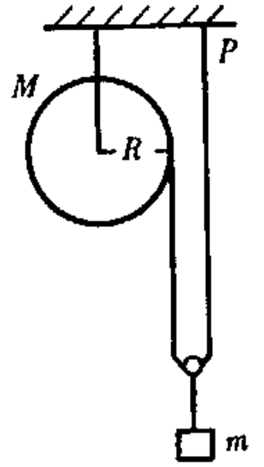
3.19 如图所示，轻绳绕在质量为 $M=0.60\text{kg}$、半径为 $R=8.0\text{cm}$ 的圆柱形定滑轮上，绳的另一端穿过一个光滑的小环后固定于 P 点，小环下面悬挂一个质量为 $m=0.30\text{kg}$ 的物体。设滑轮与轴间摩擦可忽略。求物体的加速度。

解

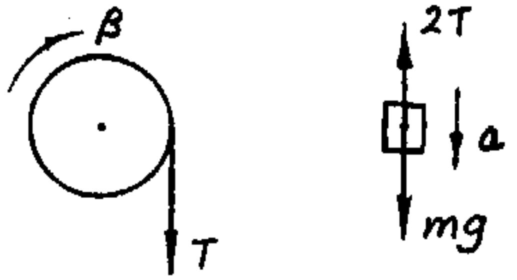
$$\begin{cases} mg - 2T = ma \\ TR = \dfrac{1}{2} M R^2 \beta \\ \beta R = 2a \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{mg}{2M + m}$$

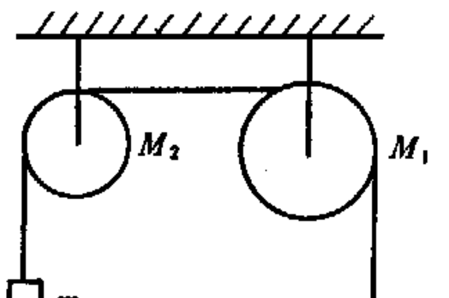


题 3.19 图

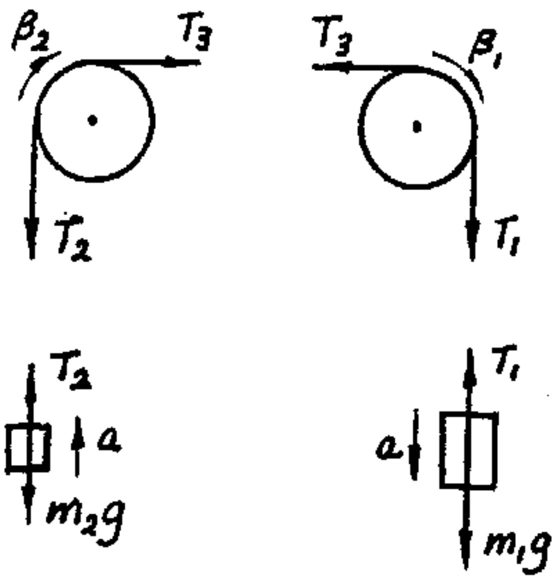


解 3.19 图

3.20 如图所示，轻绳跨过质量 M_1、半径 R_1 和质量 M_2、半径 R_2 的两个均匀圆柱形定滑轮，两端各悬挂质量为 m_1 和 m_2 的物体。设滑轮与轴间光滑无摩擦，绳与滑轮间不打滑。$m_1>m_2$。求两物体的加速度和绳中张力。



题 3.20 图



解 3.20 图

解

$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a \\ T_2 - m_2g = m_2a \\ T_1R_1 - T_3R_1 = \dfrac{1}{2}M_1R_1^2\beta_1 \\ T_3R_2 - T_2R_2 = \dfrac{1}{2}M_2R_2^2\beta_2 \\ a = \beta_1R_1 = \beta_2R_2 \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{2(m_1 - m_2)g}{2(m_1 + m_2) + (M_1 + M_2)}$$

$$T_1 = \left[\frac{4m_1m_2 + m_1(M_1 + M_2)}{2(m_1 + m_2) + (M_1 + M_2)}\right]g$$

$$T_2 = \left[\frac{4m_1m_2 + m_2(M_1 + M_2)}{2(m_1 + m_2) + (M_1 + M_2)}\right]g$$

$$T_3 = \left[\frac{4m_1m_2 + m_1M_2 + m_2M_1}{2(m_1 + m_2) + (M_1 + M_2)}\right]g$$

3.21 如图所示，质量为 M、半径为 R 的均匀球体可绕通过球心的光滑竖直轴转动，球体赤道上绕有轻绳，绳的另一端跨过转动惯量为 J、半径为 r 的定滑轮，悬挂一个质量为 m 的物体。物体由静止开始向下运动，求向下移动 h 时物体的速度。

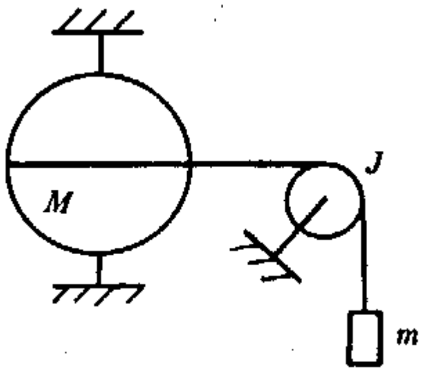
解

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma \\ T_1r - T_2r = J\beta_1 = J\,\dfrac{a}{r} \\ T_2R = (\dfrac{2}{5}MR^2)\beta_2 = (\dfrac{2}{5}MR^2)\,\dfrac{a}{R} \end{cases}$$

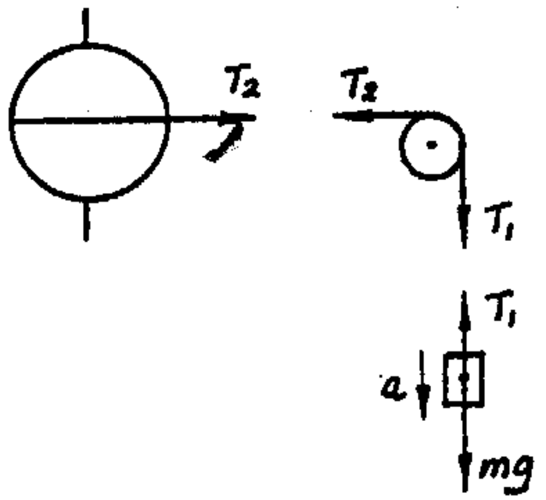
由上述三式解出 a，又因

$$v^2 = 2ah$$

解得



题 3.21 图



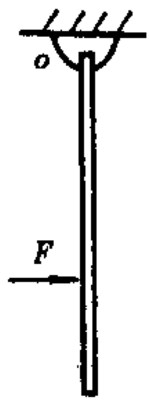
解 3.21 图

$$v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+2M/5+J/r^2}}$$

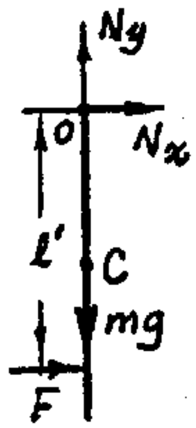
3.22 竖直悬挂的均匀细杆可绕通过上端的光滑水平轴转动，问：水平力打击在杆上离转轴多远处，杆对轴的水平作用力为零？

解

$$\begin{cases} Fl'=\dfrac{1}{3}ml^2\beta \\ F+N_x=ma_{Cx}=m\beta\,\dfrac{l}{2} \\ N_y-mg=ma_{Cy}=m\omega^2\,\dfrac{l}{2}=0 \end{cases}$$



题 3.22 图



解 3.22 图

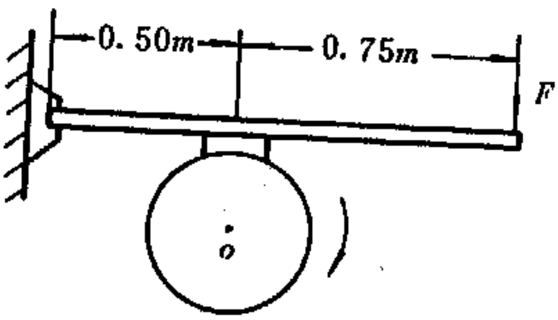
解得

$$N_x=F(\frac{3l'}{2l}-1)$$

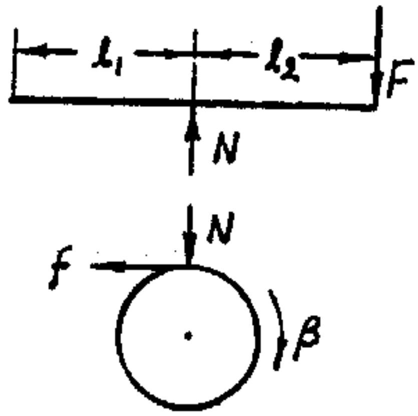
$$N_y=mg$$

故 $l'=\frac{2}{3}l$ 时，杆对轴的水平作用力为零。

3.23 如图所示，质量 $m=60\text{kg}$、半径 $R=0.25\text{m}$ 的均匀圆柱形飞轮绕通过中心的水平轴以 900rev/min 的转速转动。若在闸杆右端施一竖直方向的制动力 $F=100\text{N}$，闸瓦与飞轮间的摩擦系数为 $\mu=0.40$，问飞轮经多长时间停止转动？在这段时间内，飞轮已转了几圈？



题 3.23 图



解 3.23 图

解

$$\begin{cases} F(l_1+l_2)=Nl_1 \\ f=\mu N \\ -fR=\dfrac{mR^2}{2}\beta \end{cases}$$

解得

$$\beta=\frac{-2\mu(l_1+l_2)F}{mRl_1}$$

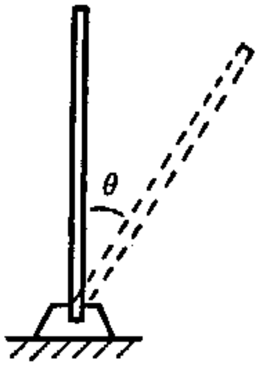
因
$$0=\omega_0+\beta t$$

$$t=-\frac{\omega_0}{\beta}=7.07\ \text{s}$$

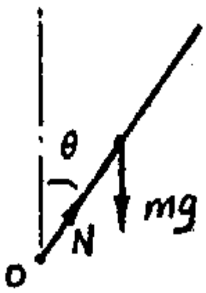
故已转过圈数

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2) = 53.1 \text{ rev}$$

3.24 如图所示，质量为 m、长为 l 的均匀细杆可绕通过下端的光滑水平轴在竖直平面内转动，若从竖直位置开始由静止释放，因受微扰而往下转动。求杆转到与铅垂线成 θ 角时的角加速度和角速度。



题 3.24 图



解 3.24 图

解 转动定律

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\beta$$

故
$$\beta = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

因
$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} == \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta$$

得
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

3.25 如图所示，均匀细杆质量为 m、长为 l，上端连结一个质量为 m 的小球，可绕通过下端并与杆垂直的水平轴转动。设杆最初静止于竖直位置，受微小干扰而往下转动。求转到水平位置时，(1)杆的角速度；(2)杆的角加速度；(3)轴对杆的作用力。

解 (1)机械能守恒

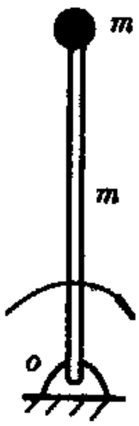
$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{l}{2} + mgl$$

式中

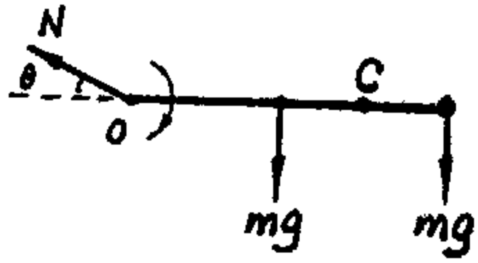
$$J = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2$$

故

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$



题 3.25 图



解 3.25 图

(2)转动定律

$$mg\frac{l}{2} + mgl = J\beta$$

故

$$\beta = \frac{9g}{8l}$$

(3)质心运动定律

$$N\cos\theta = 2m\omega^2 r_C$$

$$2mg - N\sin\theta = 2m\beta r_C$$

式中

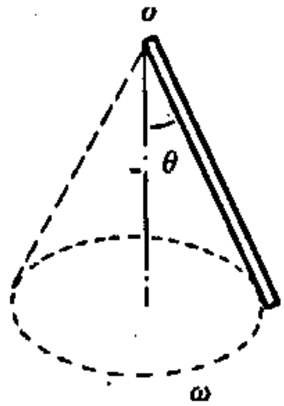
$$r_C = \frac{m\dfrac{l}{2} + ml}{2m} = \frac{3}{4}l$$

解得

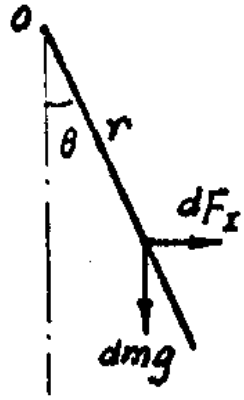
$$N = 3.39mg$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{5}{54} = 5.29°$$

3.26 如图所示，质量为 m、长为 l 的均匀细杆的上端 o 静止，其杆以角速度 ω 沿圆锥面转动，求稳定转动时杆与竖直轴之间的夹角 θ。



题 3.26 图



解 3.26 图

解 在相对杆静止的参照系中

$$M_1 = \int_0^l \rho S \mathrm{d}r \omega^2 r\sin\theta \; r\cos\theta$$

$$M_2 = -\int_0^l \rho S \mathrm{d}r g \; r\sin\theta$$

因杆静止

$$M_1 + M_2 = 0$$

解得

$$\theta = \cos^{-1}\frac{3g}{2\omega^2 l}$$

3.27 冲床飞轮的转动惯量为 $4.0\times10^3\mathrm{kg\cdot m^2}$，当它以 30rev/min 作定轴转动时，其动能多大？若每冲一次，转速降为 10rev/min，问每冲一次飞轮对外作功多少？

解

$$E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega_0^2 = 1.96\times10^4\ \mathrm{J}$$

$$A = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = -1.7\times10^4\ \mathrm{J}$$

飞轮对外作功　$1.7\times10^4 J$

3.28　质量为 M、半径为 R 的均匀圆盘可绕通过盘心、垂直盘面的光滑水平轴转动，若质量为 m 的小胶块粘在与轴等高的圆盘边缘上，由静止释放。求 m 到达最低点时圆盘的角速度。

解　机械能守恒

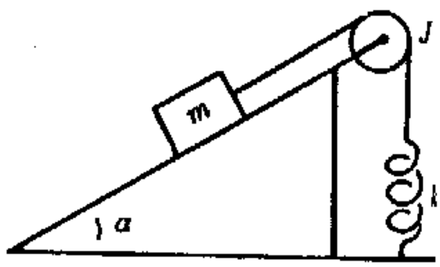
$$(M+m)gR = MgR + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg}{(m+M/2)R}}$$

3.29　如图所示，劲度系数为 k 的轻弹簧下端固定在地面上，上端与轻绳相连，轻绳跨过转动惯量为 J、半径为 r 的定滑轮，另一端系一质量为 m 的物体，物体放在倾角为 α 的光滑斜面上。滑轮与轴间无摩擦。设最初弹簧为原长，m 由静止释放。求：(1)物体能滑下的最大距离 l；(2)物体滑下 x 时的速度；(3)物体离释放处多远时速度最大？



题　3.29图

解　(1)机械能守恒

$$\frac{1}{2}kl^2 - mgl\sin\alpha = 0$$

故
$$l = \frac{2mg\sin\alpha}{k}$$

(2)

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = 0$$

故 $$v = \omega r = \sqrt{\frac{2mgx\sin\alpha - kx^2}{m + J/r^2}}$$

(3) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$时 v 最大，解得

$$x = \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

3.30 质量为 m、长为 l 的均匀细杆可绕通过细杆一端并与杆垂直的光滑水平轴转动，将杆由水平静止释放，求转到竖直位置时细杆的(1)角速度 ω；(2)动能 E_k；(3)质心速度 v_C。

解 (1)机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - mg\,\frac{l}{2} = 0$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

(2)

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = mg\,\frac{l}{2}$$

(3)

$$v_C = \omega\,\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

3.31 质量为 m、长为 l 的均匀细杆可绕通过一端并与杆垂直的光滑水平轴转动，要使铅垂静止的杆恰好能转到水平位置，必须给杆多大的初角速度？

解 机械能守恒

$$mg\,\frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

故
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

3.32 光滑的水平面上，质量为 M、长为 l 的均匀细杆可绕通过杆质心的竖直光滑轴转动。最初杆静止，质量为 m 的小球以垂直于杆的水平速度 v_0 与杆的一端发生完全弹性碰撞。求碰后球的速度和杆的角速度。

题 3.32图

解 碰撞前后小球、杆组成的系统角动量守恒，动能守恒：

$$\begin{cases} \frac{1}{12}Ml^2\omega - mv\frac{l}{2} = mv_0\frac{l}{2} \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{12}Ml^2)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \end{cases}$$

解得

$$v = (\frac{M-3m}{M+3m})v_0$$

$$\omega = (\frac{12m}{M+3m})\frac{v_0}{l}$$

3.33 质量 M、半径 R 的圆盘形转台可绕竖直的中心轴转动，摩擦不计。起初，质量为 m 的人在台上距轴 $\frac{R}{2}$ 处与台一起以角速度 ω_0 转动，求当人走到台的边缘后人与台一起转动的角速度。

解 转台和人组成的系统角动量守恒

$$[\frac{1}{2}MR^2 + m(\frac{R}{2})^2]\omega_0 = (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega$$

解得

$$\omega = (\frac{2M+m}{2M+4m})\omega_0$$

3.34 上题中的转台，起初质量 m 的人在台的中心与台一起以角速度 ω_0 转动。若此人相对转台以恒定速度 v' 沿半径向外走，求：走了时间 t 后，台已转过的角度。

解 转台和人组成的系统角动量守恒

$$\left[\frac{1}{2}MR^2 + m(v't)^2\right]\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

解得

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \left(\frac{2mv'^2}{MR^2}\right)t^2}$$

台转过角度为

$$\Delta\theta = \int \mathrm{d}\theta = \int \omega \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{\omega_0 \mathrm{d}t}{1 + \left(\frac{2mv'^2}{MR^2}\right)t^2}$$

$$= \frac{R\omega_0}{v'\sqrt{\frac{2m}{M}}}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{v't\sqrt{\frac{2m}{M}}}{R}\right)$$

3.35 质量为 10kg、半径为 0.50m 的均匀球体绕通过球心的竖直光滑轴以角速度 2.0rad/s 转动，质量为 0.50kg 的小胶块以 0.40m/s 的水平速度飞来，顺球转动的切线方向与球的赤道边缘相碰并粘住，求：(1)碰撞后球的角速度；(2)碰撞前后球和胶块所组成的系统机械能的变化。

解 (1)球、胶系统角动量守恒

$$\begin{cases} J\omega = J_1\omega_0 + mv_0R \\ J_1 = \frac{2}{5}MR^2 \\ J = \frac{2}{5}MR^2 + mR^2 \end{cases}$$

解得

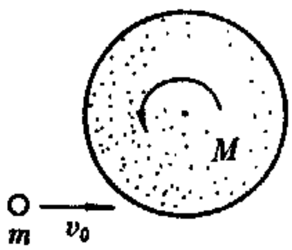
$$\omega = \frac{2MR\omega_0 + 5mv_0}{(2M + 5m)R} = \cancel{2.67}\ 1.87\ \text{rad/s}$$

(2)动能变化

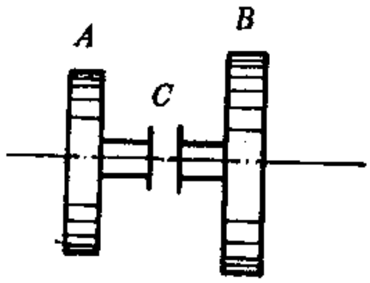
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 - (\frac{1}{2}J_1\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2)$$

$$= \cancel{-2.00\ \text{J}}$$

$$-0.07\ \text{J}$$



题 3.35图



题 3.36图

3.36 如图所示，A、B 两轮同轴心，A 轮的转动惯量为 $J_1 = 10\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$B$ 轮的转动惯量为 $J_2 = 20\text{kg}\cdot\text{m}^2$。起初 A 轮转速为 600rev/min，B 轮静止。求：(1)两轮通过摩擦啮合器 C 啮合后的转速 ω；(2)啮合过程中两轮各自所受的冲量矩；(3)啮合过程中损失的机械能。

解(1)啮合过程中 A、B 两轮系统角动量守恒

$$(J_1 + J_2)\omega = J_1\omega_0$$

故
$$\omega = \frac{J_1\omega_0}{J_1 + J_2} = 20.9\ \text{rad/s}$$

(2)按角动量定理，A 受冲量矩

$$\int M_1 dt = J_1\omega - J_1\omega_0 = -419\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

B 受的冲量矩为

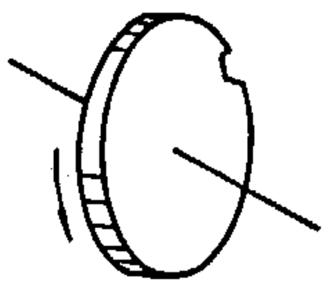
$$\int M_2 dt = J_2\omega = 419\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

(3)损失机械能

$$\frac{1}{2}J_1\omega_0^2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2$$
$$= 1.32 \times 10^4 \text{ J}$$

3.37 质量为 M、半径为 R 的均匀圆柱形飞轮绕通过轮心垂直轮子的水平轴以角速度 ω_0 转动，某瞬时质量为 m 的小碎片从飞轮边缘飞出，碎片脱离飞轮时的速度恰好竖直向上。求：(1)碎片上升的高度；(2)飞轮余下部分的角速度、角动量和转动动能。

01



题 3.37图

解 (1)碎片初速为

$$v_0 = \omega_0 R$$

竖直上抛

$$0^2 - v_0^2 = 2(-g)h$$

故上升高度为

$$h = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g}$$

(2)飞出前后，系统角动量守恒

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega + mv_0R = \frac{1}{2}MR^2\omega_0 \\ v_0 = \omega_0 R \end{cases}$$

解得剩余部分角速度

$$\omega = \omega_0$$

角动量和动能为

$$L = (\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega_0$$

$$E_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega_0^2$$

3.38 质量 $M=1.0\text{kg}$、长 $l=0.40\text{m}$ 的均匀细杆可绕通过杆一端的光滑水平轴在竖直平面内转动。起初杆自然下垂，质量 $m=8.0\text{g}$ 的子弹以 $v=200\text{m/s}$ 的水平速度射入离转轴 $\frac{3}{4}l$ 处的杆中，求：(1)杆开始转动时的角速度；(2)杆的最大偏转角。

解 (1)子弹射入过程中，子弹和杆组成的系统角动量守恒

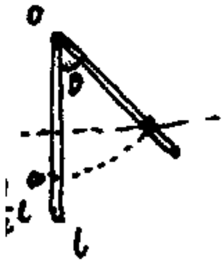
$$J\omega = mv(\frac{3}{4}l)$$

式中

$$J = \frac{1}{3}Ml^2 + m(\frac{3}{4}l)^2 = 0.054\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

故

$$\omega = \frac{3mlv}{4J} = 8.87\ \text{rad/s}$$



(2)上摆过程机械能守恒

$$Mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta) + mg(\frac{3}{4}l)(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}J\omega^2$$

解得最大偏转角为

$$\theta = \cos^{-1}[1 - \frac{2J\omega^2}{(2M+3m)gl}] = 94.1°$$

3.39 质量为 M、长为 l 的均匀细杆可绕垂直于杆一端的水平轴无摩擦地转动。杆原来静止于平衡位置，现有质量为 m 的小球水平飞来，与杆的下端发生完全弹性碰撞。碰拦后，杆的最大偏转角为 θ。求：(1)小球的初速度；(2)碰撞过程中，杆所受的冲量矩。

解 (1)杆、球所构成的系统角动量守恒、动能守恒

$$J\omega + mvl = mv_0 l$$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

上摆过程机械能守恒

$$Mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}J\omega^2$$

式中

$$J=\frac{1}{3}Ml^2$$

解得

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

小球初速为

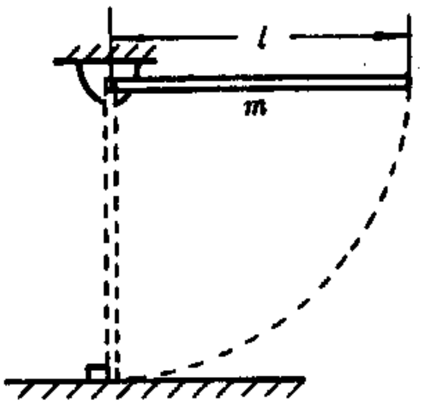
$$v_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{M}{3m}\right)\sqrt{3gl(1-\cos\theta)}$$

(2)按角动量定理，杆所受冲量矩为

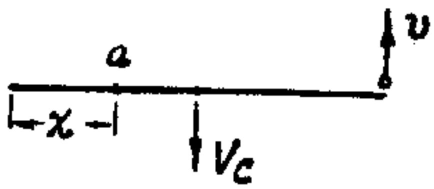
$$\int M dt=J\omega-J\omega_0$$

$$=\frac{Ml}{3}\sqrt{3gl(1-\cos\theta)}$$

3.40 质量为 m、长为 l 的均匀细杆可绕通过杆一端的光滑



题 3.40图



解 3.41图

水平轴在竖直平面内转动，使杆从水平位置由静止释放，杆摆到竖

直位置时杆的下端恰好与光滑水平面上质量为$\frac{m}{3}$的小物发生完全弹性碰撞。求碰撞后小物的速度。

解 摆下过程，机械能守恒

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega_1^2 - mg\frac{l}{2} = 0$$

碰撞过程角动量、动能守恒

$$(\frac{1}{3}ml^2)\omega_2 + \frac{m}{3}vl = (\frac{1}{3}ml^2)\omega_1$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega_2^2 + \frac{1}{2}(\frac{m}{3})v^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega_1^2$$

解得碰后杆角速度为

$$\omega_2 = 0$$

小物速度为

$$v = \sqrt{3gl}$$

3.41 质量为 m 的人站在质量为 M、长为 l 的竹筏一端，起初，人和筏均处于静上状态。若人以速度 v(相对于河岸)向垂直于竹筏的方向跳出，求竹筏获得的角速度。假设竹筏的转动惯量可按均匀细杆公式计算，水的阻力可忽略。

解 人跳出时，设竹筏绕相对河岸静止的 a 轴转动，人和筏组成的系统角动量守恒，动量守恒。

$$J_a\omega - mv(l - x) = 0$$

式中

$$J_a = \frac{1}{12}Ml^2 + M(\frac{l}{2} - x)^2$$

$$MV_C - mv = 0$$

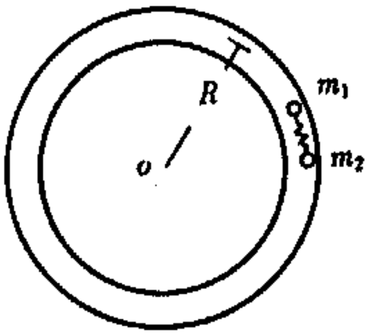
式中

$$V_C = \omega(\frac{l}{2} - x)$$

解得竹筷获得的角速度

$$\omega = \frac{6mv}{Ml}$$

3.42 在光滑的水平面上，有一平均半径为 R 的光滑圆形沟槽，在槽内质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球将劲度系数为 k 的轻弹簧压缩 λ(球与弹簧并不连结)，然后由静止释放。问(1) m_1 转过多大角度后与 m_2 相碰？(2)释放后多长时间两球相碰？



题 3.42图

解 (1)释放前后两球弹簧系统角动量守恒。设释放后经过 t 时间，m_1 转过 θ_1、m_2 转过 θ_2 后两球相碰，则

$$m_1R^2\omega_1 - m_2R^2\omega_2 = 0 \qquad ①$$

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} = \frac{2\pi - \theta_1}{\omega_2} \qquad ②$$

解得

$$\theta_1 = \frac{2\pi m_2}{m_1 + m_2}$$

(2)释放前后系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}m_1R^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\omega_2^2 = \frac{1}{2}k\lambda^2 \qquad ③$$

由①、②、③式解得

$$t = \pi R\sqrt{\frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)k\lambda^2}}$$

3.43 质量为 M、长为 l 的均匀细杆放在摩擦系数为 μ 的水平桌面上，可绕通过细杆一端的竖直光滑轴转动。最初细杆处于静止状态，质量为 m 的小滑块以垂直于杆的水平速度 v_0 与杆的另一端碰撞，碰后以速度 v 反向弹回。设碰撞时间很短。问碰撞后经过多少时间细杆停止转动？

解 碰撞过程中，系统角动量守恒

$$\frac{1}{3}Ml^2\omega - mvl = mv_0 l$$

转动过程中，杆受摩擦力矩为

$$M_f = \int_0^l -\mu\frac{M}{l}\mathrm{d}rg\, r = -\frac{1}{2}\mu Mgl$$

由角动量定理

$$\int M_f dt = \int_0^t -\frac{1}{2}\mu Mgl\mathrm{d}t = 0 - \frac{1}{3}Ml^2\omega$$

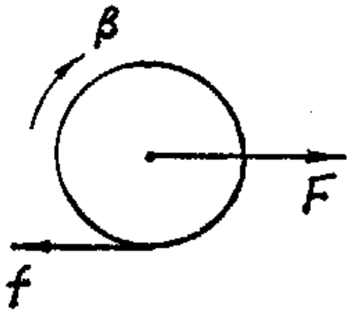
解得

$$t = \frac{2m(v_0 + v)}{\mu Mg}$$

3.44 质量 $m=1.0\times10^4$kg、半径 $R=0.50$m 的均匀圆柱形压路滚子，其轴上受到 $F=1.5\times10^4$N 的水平牵引力，使它在水平地面上作纯滚动。求：(1)滚子的角加速度和质心加速度；(2)地面对滚子的摩擦力。

解 平面运动

$$\begin{cases} F - f = ma_C \\ fR = J_C\beta = (\frac{1}{2}mR^2)\beta \\ a_C = \beta R \end{cases}$$



解 3.44图

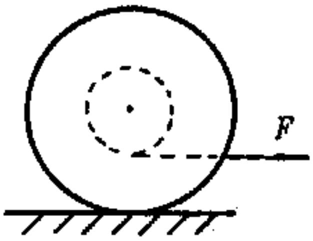
解得

$$\beta = \frac{2F}{3mR} = 2.0\ \mathrm{ras/s^2}$$

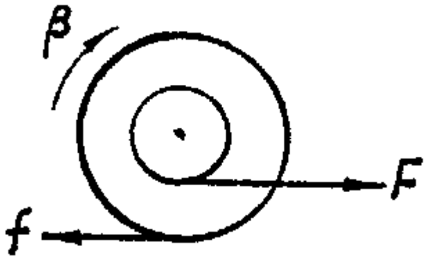
$$a_C = \beta R = 1.0\ \mathrm{m/s^2}$$

$$f=\frac{F}{3}=5.0\times10^3\mathrm{N}$$

3.45 绕线轮的质量为 4.0kg，绕对称轴的转动惯量为 $J=9.0\times10^{-2}\mathrm{kg\cdot m^2}$，大圆半径为 $R=0.20$m，小圆半径为 $r=0.10$m。用 $F=25$N 的水平力拉线的一端，使绕线轮在水平地面上作纯滚



题 3.45图



解 3.45图

动。求:(1)绕线轮的角加速度和质心加速度;(2)地面对绕线轮的摩擦力;(3)摩擦系数至少多大才无相对滑动?

解

$$\begin{cases} F - f = ma_C \\ fR - Fr = J\beta \\ a_C = \beta R \end{cases}$$

解得

$$\beta = \frac{F(R-r)}{J+mR^2} = 10\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$a_C = \beta R = 2.0\ \mathrm{m/s^2}$$

$$f = \frac{F(J+mRr)}{J+mR^2} = 17\ \mathrm{N}$$

无滑动条件:

$$f = \frac{F(J+mRr)}{J+mR^2} \leqslant \mu N = \mu mg$$

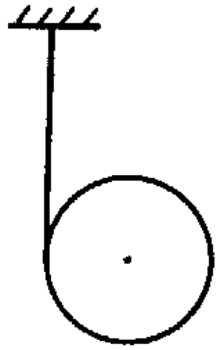
解得

$$\mu \geqslant \frac{F(J+mRr)}{(J+mR^2)mg} = 0.43$$

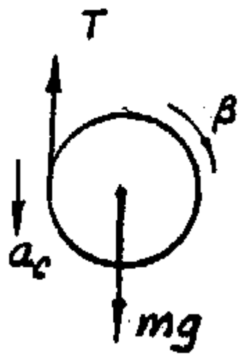
故 μ 至少 0.43才不滑动。

3.46 质量为 m、半径为 R 的均匀圆柱体上绕有轻线,线的

一端固定于天花板上，求圆柱体的角加速度、质心加速度和绳中张力。



题 3.46图



解 3.46图

解 平面运动

$$\begin{cases} mg - T = ma_C \\ TR = \dfrac{1}{2}mR^2\beta \\ a_C = \beta R \end{cases}$$

解得

$$\beta = \frac{2g}{3R}$$

$$a_C = \frac{2g}{3}$$

$$T = \frac{1}{3}mg$$

3.47 上题中线的一端不是固定在天花板上，而是用手提着以加速度 3g 竖直向上运动，求圆柱体的角加速度、质心加速度和绳中张力。

解 平面运动

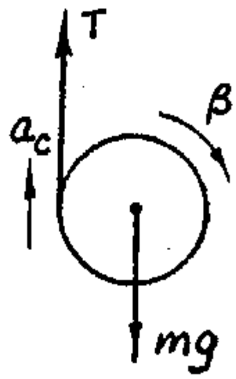
$$\begin{cases} T - mg = ma_C \\ TR = \dfrac{1}{2}mR^2\beta \\ a_C = 3g - \beta R \end{cases}$$

解得

$$\beta=\frac{8g}{3R}$$

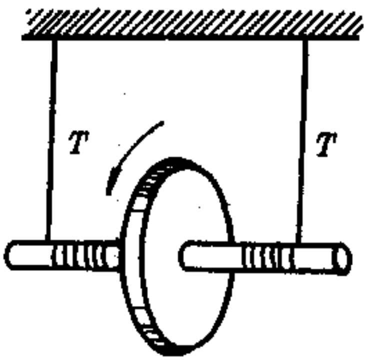
$$a_C=\frac{1}{3}g$$

$$T=\frac{4}{3}mg$$

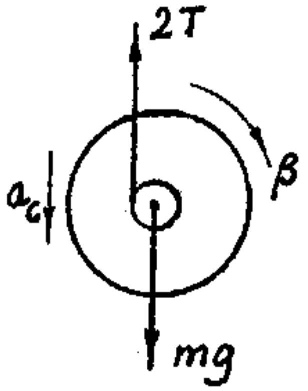


解 3.47图

3.48 如图所示，半径为 r、质量可以不计的圆柱形细长杆的中间装一个质量为 m，半径为 R 的均匀短圆柱体，两条细绳绕在细长杆上，绳的另一端挂在天花板上。这一装置称为滚摆。求释放后，此滚摆的质心加速度和绳中张力。



题 3.48图



解 3.48图

解 平面运动

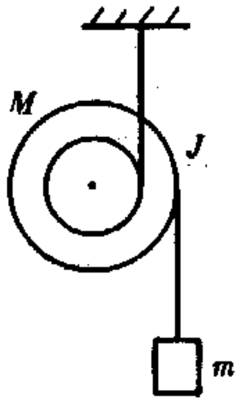
$$
\begin{cases}
mg - 2T = ma_C \\
2Tr = \dfrac{1}{2}mR^2\beta \\
a_C = \beta r
\end{cases}
$$

解得

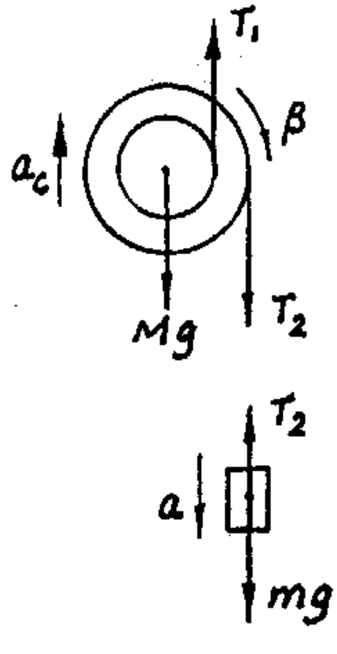
$$a_C = (\frac{2r^2}{2r^2 + R^2})g$$

$$T = \frac{1}{2}(\frac{R^2}{2r^2 + R^2})mg$$

3.49 半径 $r_1 = 0.04\text{m}$ 和 $r_2 = 0.10\text{m}$ 的两个短圆柱同心地装在一起，总质量为 $M = 8.0\text{kg}$，绕对称轴的转动惯量为 $J = 0.03\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$。小圆柱上绕有轻绳，绳的上端固定在天花板上。大圆柱上也绕有轻绳，绳的下端挂一质量为 $m = 6.0\text{kg}$ 的物体。求圆柱体的角加速度、质心加速度、物体的加速度和绳中张力。



题 3.49图



解 3.49图

解 圆柱平面运动，物体平动

$$\begin{cases} T_1 - T_2 - Mg = Ma_C \\ T_2 r_2 - T_1 r_1 = J\beta \\ a_C = \beta r_1 \\ mg - T_2 = ma \\ a = \beta(r_2 - r_1) \end{cases}$$

解得

$$\beta = \left[\frac{m(r_2 - r_1) - Mr_1}{m(r_2 - r_1)^2 + Mr_1^2 + J}\right]g = 6.09 \text{ rad/s}^2$$

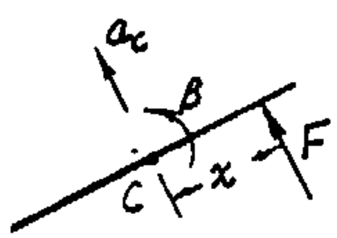
$$a_C = \beta r_1 = 0.244 \text{ m/s}^2$$

$$a = \beta(r_2 - r_1) = 0.365 \text{ m/s}^2$$

$$T_2 = m(g - a) = 56.6 \text{ N}$$

$$T_1 = M(g + a_C) + T_2 = 137 \text{ N}$$

3.50 质量为 m、长为 l 的均匀细杆静止于光滑水平桌面上，垂直于杆的恒定水平力 F 作用在离质心 x 的杆上，作用时间 Δt 很短。可认为在 Δt 内杆的位置不变。求：(1)F 作用时杆的角加速度和质心加速度；(2)F 作用结束后杆的角速度和质心速度；(3)t 时刻($t \gg \Delta t$)杆已转过的角度和质心已移动的距离。



解 3.50图

解 (1)

$$\begin{cases} F = ma_C \\ Fx = \dfrac{1}{12}ml^2\beta \end{cases}$$

解得

$$a_C = \frac{F}{m}$$

$$\beta = \frac{12Fx}{ml^2}$$

(2)质点系动量定理

$$F\Delta t = mv_C$$

质点系角动量定理

$$Fx\Delta t = \frac{1}{12}ml^2\omega$$

解得

$$\omega = \frac{12Fx\Delta t}{ml^2}$$

$$v_C = \frac{F\Delta t}{m}$$

(3)质心移动

$$\Delta x = v_C t = (\frac{F\Delta t}{m})t$$

杆转过角度

$$\Delta\theta = \omega t = (\frac{12Fx\Delta t}{ml^2})t$$

3.51 均匀圆柱体放在倾角为 α 的斜面上，圆柱上部边缘受平行于斜面向上的切向力 F 作用。要使圆柱体静止不动，圆柱体与斜面间的摩擦系数必须满足什么条件？

解 静止时

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F - f = 0 \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ Fr - fr = 0 \end{cases}$$

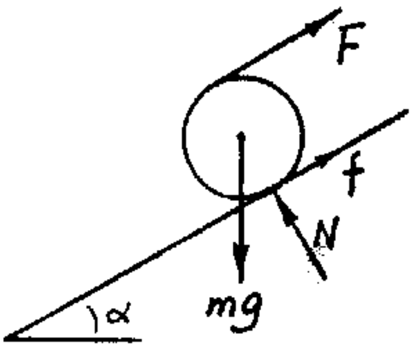
解得

$$F = f = \frac{1}{2}mg\sin\alpha$$

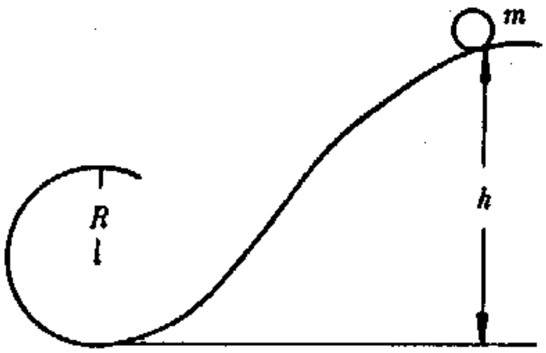
静摩擦力应满足

$$f = \frac{1}{2}mg\sin\alpha \leqslant \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

故
$$\mu \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$$



解 3.51图



题 2.52图

3.52 质量为 m、长径为 r 的均匀小球从高 h 的斜坡上向下作纯滚动，问 h 必须满足什么条件，小球才能翻过如图所示半径为 R 的圆形轨道顶部而不脱轨？(设 $r \ll R$)

解 机械能守恒

$$mg\,2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh$$

式中
$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

牛顿第二定律

$$mg + N = m\frac{v^2}{R}$$

纯滚动

$$\omega = \frac{v}{r}$$

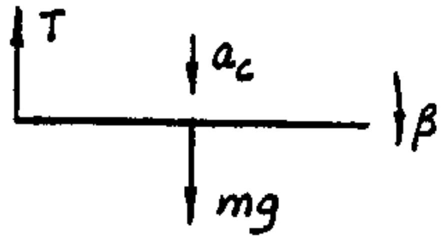
不脱轨

$$N \geqslant 0$$

解得

$$h \geqslant \frac{27}{10}R$$

3.53 质量为 m 的均匀细杆的一端用细绳挂起，另一端从水平位置由静止释放。求释放瞬时，绳中的张力。



解 3.53图

解

$$\begin{cases} mg - T = ma_C \\ T\dfrac{l}{2} = \dfrac{1}{12}ml^2\beta \\ a_C = \beta\dfrac{l}{2} \end{cases}$$

解得

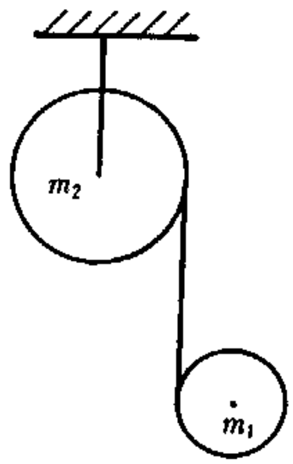
$$T = \frac{1}{4}mg$$

3.54 如图所示，轻绳一端绕在质量为 m_1、半径为 r_1 的均匀圆柱体上，另一端绕在质量为 m_2、半径为 r_2 的匀质圆柱形定滑轮上。求：(1)定滑轮的角加速度；(2)圆柱体的角加速度和质心加速度；(3)绳中张力。

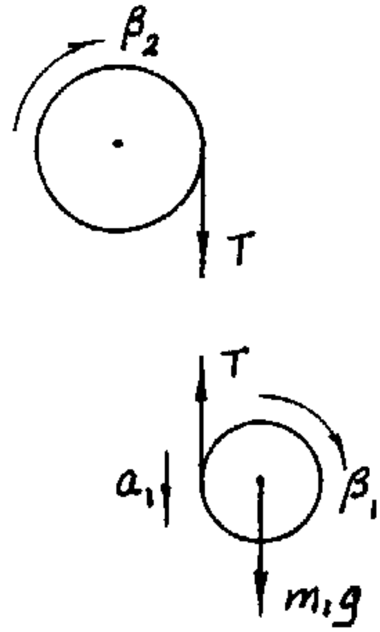
解 定滑轮定轴转动，圆柱体平面运动。

$$\begin{cases} Tr_2 = \dfrac{1}{2}m_2r_2^2\beta_2 \\ m_1g - T = m_1a_1 \\ Tr_1 = \dfrac{1}{2}m_1r_1^2\beta_1 \\ a_1 = \beta_1r_1 + \beta_2r_2 \end{cases}$$

解得



题 3.54



解 3.54图

$$\beta_1 = \left(\frac{2m_2}{2m_1 + 3m_2}\right)\frac{g}{r_1}$$

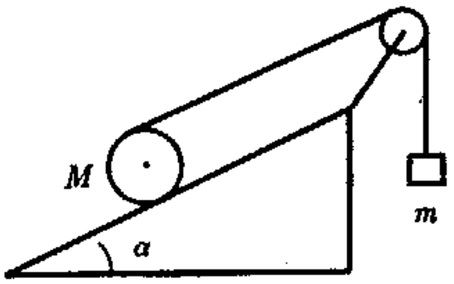
$$\beta_2 = \left(\frac{2m_1}{2m_1 + 3m_2}\right)\frac{g}{r_2}$$

$$a_1 = 2\left(\frac{m_1 + m_2}{2m_1 + 3m_2}\right)g$$

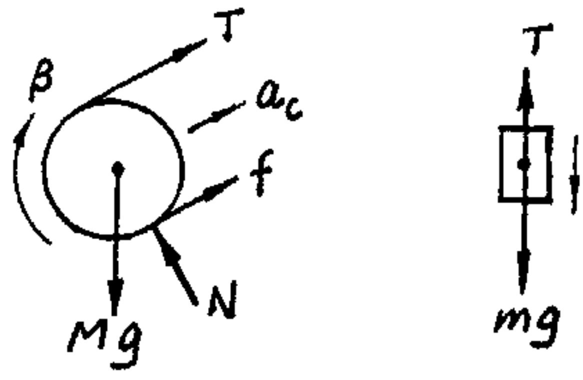
$$T = \frac{m_1 m_2 g}{2m_1 + 3m_2}$$

3.55 质量为 $M=4.0\text{kg}$，半径为 $R=0.10\text{m}$ 的均匀圆柱体上绕有轻绳，圆柱体在倾角 $\alpha=37°$ 的斜面上作纯滚动，绳的另一端跨过一个不计质量和摩擦的定滑轮后，悬挂一个质量 $m=1.0\text{kg}$ 的物体。求：(1)物体的加速度；(2)圆柱体的角加速度和质心加速度；(3)斜面对圆柱体的摩擦力。

解 圆柱体平面运动，物体平动



题 3.55图



解 3.55图

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T + f - Mg\sin\alpha = Ma_C \\ TR - fR = \dfrac{1}{2}MR^2\beta \\ a_C = \beta R \\ a = 2a_C \end{cases}$$

解得

$$a_C = \left(\frac{4m - 2M\sin\alpha}{8m + 3M}\right)g = -\ 0.40\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a = 2a_C = -\ 0.80\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\beta = \frac{a_C}{R} = -\ 4.0\ \mathrm{rad/s^2}$$

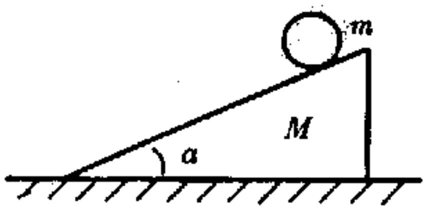
$$f = m(g - a) - \frac{1}{2}Ma_C = 11.4\mathrm{N}$$

3.56 质量为 M、倾角为 α 的斜面体放在光滑的水平面上，质量为 m、半径为 r 的均匀圆柱体由静止开始沿斜面向下纯滚动。求圆柱体的角加速度和斜面体的加速度。

解 水平方向系统动量守恒

$$m(\omega r\cos\alpha - V) - MV = 0$$

机械能守恒



$$mgr\theta\sin\alpha=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}m[(\omega r\cos\alpha-V)^2+(\omega r\sin\alpha)^2]+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\omega^2$$

式中 θ 为 t 时间内圆柱体转过的角度。

由上述两式解出

$$\omega=\sqrt{[\frac{4(m+M)\sin\alpha\ \theta}{3(m+M)-2m\cos^2\alpha}]\frac{g}{r}}$$

$$V=\frac{m\omega r\cos\alpha}{m+M}$$

题 3.56图

圆柱体的角加速度为

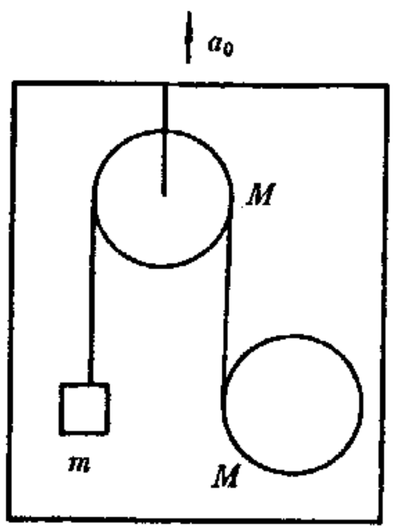
$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=[\frac{2(m+M)\sin\alpha}{3(m+M)-2m\cos^2\alpha}]\frac{g}{r}$$

斜面体加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{mr\cos\alpha}{m+M}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

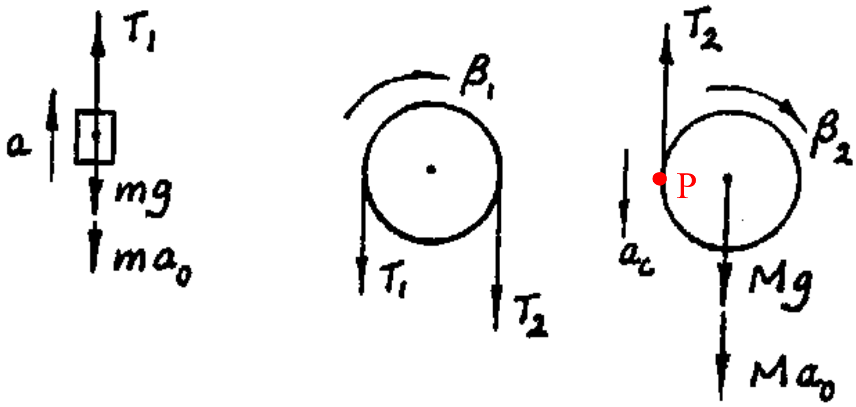
$$=\frac{mg\sin2\alpha}{3(m+M)-2m\cos^2\alpha}$$

3.57 如图所示，在以加速度 $a_0=2.2\mathrm{m/s^2}$ 竖直上升的升降机中，质量为 $M=6.0\mathrm{kg}$、半径为 $R=0.10\mathrm{m}$ 的均匀圆柱体上绕有轻绳，绳的另一端跨过质量为 $M=6.0\mathrm{kg}$、半径 $R=0.10\mathrm{m}$ 的均匀圆柱形定滑轮，悬挂一个质量为 $m=1.0\mathrm{kg}$ 的物体。求：(1)相对于升降机，物体的加速度和圆柱体的质心加速度；(2)绳中的张力。



题 3.57图

解 以升降机为参照系



解 3.57图

质心对 P 点（绳）的加速度为 $a'=R\beta_2$
绳对定滑轮的加速度为 a（牵连加速度）
动滑轮对定滑轮的加速度为
$a_C=a+\beta_2 R$

$$
\begin{cases}
T_1 - m(g+a_0) = ma \\
T_2 R - T_1 R = \dfrac{MR^2}{2}\beta_1 \\
a = \beta_1 R \\
M(g+a_0) - T_2 = Ma_C \\
T_2 R = \dfrac{MR^2}{2}\beta_2 \\
a_C = a + \beta_2 R
\end{cases}
$$

解得

$$a = \frac{2(M-3m)(g+a_0)}{5M+6m} = 2.00\ \mathrm{m/s^2}$$

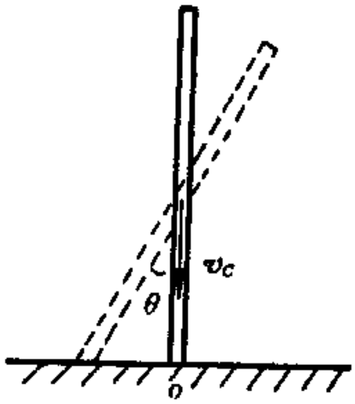
$$T_1 = m(g+a_0+a) = 1\cancel{.}4\cancel{0}\ \mathrm{N}\quad 14\mathrm{N}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{M}{2}a = 20.0\ \mathrm{N}$$

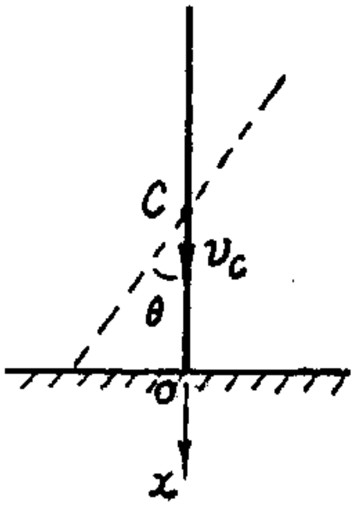
$$a_C = (g+a_0) - \frac{T_2}{M} = 8.67\ \mathrm{m/s^2}$$

3.58 质量为 m、长为 l 的均匀细杆在光滑桌面上由竖直自由倒下。求杆与铅垂线夹角为 θ 时杆的质心速度。

解 因桌面光滑，水平方向不受力，质心沿竖直方向向下运



题 3.58图



解 3.58图

动。以桌面为原点，竖直向下为 x 轴正方向。设夹角为 θ 时，质心坐标 x、质心速度 v_C、角速度 ω，则

$$x = -\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$v_C = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{l\omega}{2}\sin\theta$$

倒下过程中机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta = mg\frac{l}{2}$$

式中
$$J_C=\frac{1}{12}ml^2$$

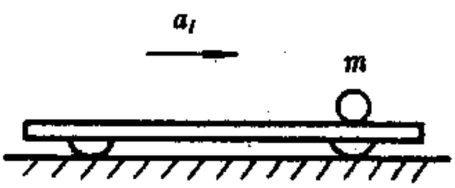
解得

$$\omega = 2\sqrt{\frac{3(1-\cos\theta)g}{(1+3\sin^2\theta)l}}$$

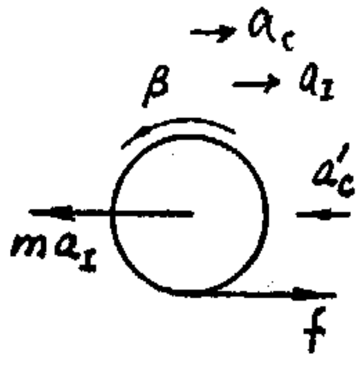
$$v_C = \sqrt{\frac{3(1-\cos\theta)gl}{(\csc^2\theta+3)}}$$

3.59 一辆很长的平板车上，有一个均匀小球，原来车和小球均静止。若车突然开始以加速度 a_l 沿水平路面作匀加速直线运

动,小球在车上作纯滚动。求经过时间 t,小球相对地面已移动的距离。设小球还未离开车。



题 3.59图



解 3.59图

解 以车为参照系

$$\begin{cases} ma_l - f = ma_C' \\ fR = \dfrac{2}{5}mR^2\beta \\ a_C' = \beta R \end{cases}$$

解得

$$a_C' = \frac{5}{7}a_l$$

球相对地面的质心加速度为

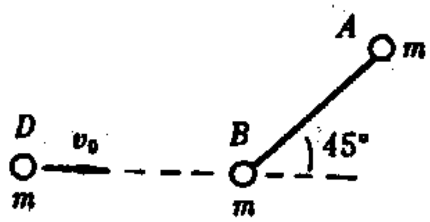
$$a_C = a_l - a_C' = \frac{2}{7}a_l$$

故球相对地面移动距离为

$$\Delta x = \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{7}a_l t^2$$

3.60 如图所示,长 l 的刚性轻杆两端各连一个质量为 m 的小球 A 和 B,放在光滑的水平面上。质量也为 m 的小球 C 以水平速度 v_0与杆成 45°角方向飞来,与轻杆一端的小球 B 进行完全弹性碰撞,碰撞后小球 C 反方向弹回。求:(1)碰撞后杆的角速度;(2)当 A、B 球和轻杆组成之刚体的质心移动距离 x 时,杆已转了

几圈？(3)当 A、B 球和轻杆组成之刚体的质心移动 x 时，其动能多大？



题 3.60图

解 碰撞过程，系统动量、角动量、动能守恒

$$mv_0 = 2mV_C - mv$$

$$mv_0 \frac{l}{2}\sin 45^\circ = J_C\omega - mv\frac{l}{2}\sin 45^\circ$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}(2m)V_C^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$J_C = 2m(\frac{l}{2})^2$$

解得碰后杆角速度为

$$\omega = \frac{4\sqrt{2}\,v_0}{7l}$$

质心速度为

$$V_C = \frac{4v_0}{7}$$

碰后 C 球速度为

$$v = \frac{v_0}{7}$$

(2)设经过 t 时间质心移动 x，转了 N 圈，则

$$t = \frac{x}{V_C} = \frac{2\pi N}{\omega}$$

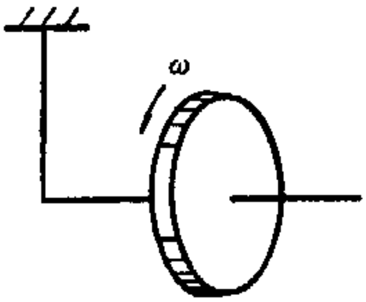
故
$$N = \frac{\omega x}{2\pi V_C} = \frac{\sqrt{2}\,x}{2\pi l}$$

(3)质心移动 x 时的动能

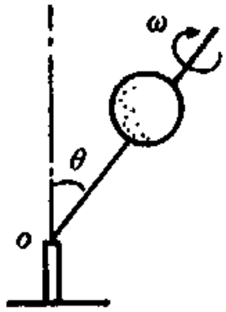
$$E_k = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}(2m)V_C^2 = \frac{24}{49}mv_0^2$$

3.61 如图所示，质量为 m、回转半径为 R_G 的轮子装在长 l

的自转轴的中部，轴为刚性轻杆，其一端用绳子挂起。使轴处于水
平位置，轮子绕自转轴以角速度 ω 高速转动，转动方向如图所示
求：(1)轮子的自转角动量；(2)旋进角速度，并判断旋进方向。



题 3.61图



题 3.62图

解 (1)自转角动量为

$$L = J\omega = mR_G^2\omega \qquad (\text{方向} \rightarrow)$$

(2)旋进角速度

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mg\,\dfrac{l}{2}}{mR_G^2\omega\sin 90^\circ} = \frac{gl}{2\omega R_G^2}$$

旋进方向为：俯视逆时针。

3.62 如图所示，陀螺质量为 $m=2\text{kg}$，绕自转轴的转动惯量
为 $J=0.02\text{kg}\cdot\text{m}^2$，陀螺绕自转轴以角速度 $\omega=100\text{rad/s}$ 转动，陀
螺下端被放在支点上 o 上，自转轴与竖直轴之间的夹角为 $\theta=30^\circ$
质心到支点的距离为 $r=0.10\text{m}$。求：(1)自转角动量；(2)陀螺所受
对支点的外力矩；(3)旋进角速度，并判断旋进方向。

解 (1)自转角动量为

$$L = J\omega = 2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

方向沿自转轴向下

(2)对支点力矩为

$$M = |\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{g}| = mgr\sin\theta = 0.98\ \text{N}\cdot\text{m}$$

方向垂直纸面向里。

(3)旋进角速度为

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = 0.98 \text{ rad/s}$$

旋进方向：俯视顺时针。