

第十五章 电磁场与电磁波

15.1 试证明平板电容器中位移电流可以表示为 $I_d = C \frac{dU}{dt}$ =

$\frac{dq}{dt}$ (略去边缘效应)

证明 按定义

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{d\Phi_D}{dt} \\ &= \frac{d(D \cdot S)}{dt} = \frac{d(\sigma \cdot S)}{dt} = \frac{dq}{dt} \end{aligned}$$

而平行板上 $q = CU$, 所以

$$I_d = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

15.2 一圆形极板的平板电容器极板半径为 5.0cm。在充电时, 其电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12} \text{V/m} \cdot \text{s}$ 。

(1) 求两极间的位移电流 I_d ;

(2) 求极板边缘的磁感应强度 B 。

解 (1)
$$\begin{aligned} I_d &= \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(D \cdot \pi R^2) \\ &= \frac{d}{dt}(\epsilon_0 E \cdot \pi R^2) \\ &= \pi R^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \\ &= \pi \times 0.05^2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.0 \times 10^{12} \\ &= 7.0 \times 10^{-2} \text{A} \end{aligned}$$

(2) 由

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_i + I_d = I_d$$

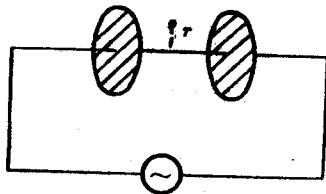
得

$$H = \frac{I_d}{2\pi R}$$

因此

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi R} = 2.8 \times 10^{-7} \text{T}$$

15.3 一平板电容器两圆形极板的面积均为 A , 其间距为 d 。一电阻为 R 、长度为 d 的细直导线沿电容器的轴线放置, 并将两极板连接起来。极板外部引线与一电压 $V = V_0 \sin \omega t$ 的交流电源连接。求:



解 15.3 图

(1) 细导线中的电流大小;

(2) 穿过电容器的位移电流大小;

(3) 电容器的外部引线上的电流大小;

(4) 在电容器中距轴为 r 处的磁感应强度。

解 (1)
$$i = \frac{V}{R} = \frac{V_0 \sin \omega t}{R}$$

(2)
$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \frac{V_0 \sin \omega t}{d} \cdot A) = \frac{A \epsilon_0 V_0 \omega}{d} \cos \omega t$$

(3)
$$I = i + I_d = \frac{V_0 \sin \omega t}{R} + \frac{A \epsilon_0 V_0 \omega}{d} \cos \omega t$$

(4)
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i + I_d'$$

I_d' 为回路 L 所包围的位移电流, 因为

$$j_d = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{\epsilon_0 dV}{d dt} = \frac{\epsilon_0 V_0 \omega \cos \omega t}{d}$$

$$I_d' = \pi r^2 \cdot j_d$$

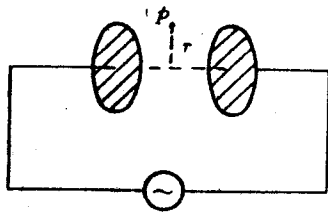
故

$$H_r = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{V_0 \sin \omega t}{rR} + \frac{\epsilon_0 \pi V_0 \omega r \cos \omega t}{d} \right)$$

$$B_r = \mu_0 H_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{V_0 \sin \omega t}{rR} + \frac{\epsilon_0 \pi V_0 \omega r \cos \omega t}{d} \right)$$

15.4 在平板电容器两极板间各点的交变电场强度 $E = 720 \sin 10^5 \pi t \text{ V/m}$ 。求：

- (1) 电容器中的位移电流密度；
- (2) 电容器内距中心联线 $r = 10^{-2} \text{ m}$ 的 p 点在 $t = 0$ 和 $t = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \text{ s}$ 时磁场强度的大小。



题 15.4 图

解 (1) $j_d = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$
 $= 720 \times 10^5 \pi \epsilon_0 \cos 10^5 \pi t$

(2) 由 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I + I_d$, 得

$$H_p \cdot 2\pi r = \pi r^2 \cdot j_d$$

$$H_p = \frac{j_d \cdot r}{2} = 3.6 \times 10^5 \pi \epsilon_0 \cos 10^5 \pi t$$

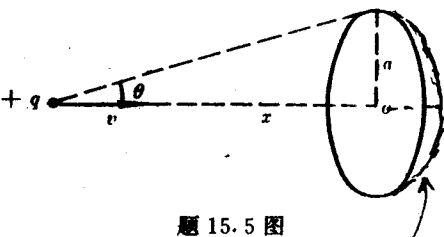
$t = 0$ 时

$$H_p = 3.6 \times 10^5 \times \pi \times 8.85 \times 10^{-12} = 1.0 \times 10^{-5} \text{ A/m}$$

$t = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \text{ s}$ 时

$$H_p = 0$$

15.5 如图所示, 电荷 $+q$ 以速度 v 向 o 点运动 (电荷到 o 的距离以 x 表示)。在 o 点处作一半径为 a 的圆, 圆面与 v 垂直, 试计算通过此圆面的位移电流。



题 15.5 图

$$S_{\text{球冠}} = 2\pi R h = 2\pi \sqrt{y^2 + a^2} (\sqrt{x^2 + a^2} - x)$$

解 先求出圆平面边缘处点电荷 q 产生的磁场大小为

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 q v a}{4\pi r^3} \quad \phi_D = \epsilon_0 E S_{\text{球冠}}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{q v a}{4\pi r^3} \quad I_d = \frac{d\phi_D}{dt}$$

方向沿圆周切向。

由安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_d$$

积分回路 L 为圆平面的圆周。

同时因为

$$I = 0$$

故

$$I_d = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi a$$

$$= \frac{q v a^2}{2r^3} = \frac{q v a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

说明: 本题也可先求点电荷在圆平面处 D , 再求通过圆平面的通量 Φ_D , 则 $I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}$ 。但数学上显得繁琐。

15.6 一个平面无线电波的电场强度最大值为 $100 \times 10^{-6} \text{ V/m}$, 试问其磁场强度的最大值是多少?

解 由平面电磁波性质

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$$

$$= \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} \times 100 \times 10^{-6}$$

$$= 2.65 \times 10^{-7} \text{ A/m}$$

15.7 有一平面电磁波在真空中传播, 电磁波通过某点时该点

电场强度 $E=50\text{V/m}$ 。试求该时刻该点 B 和 H 的大小,以及电磁能量体密度 w 和坡印亭矢量 S 的大小。

解

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = 0.133\text{A/m}$$

$$B = \mu_0 H = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E = 1.67 \times 10^{-7}\text{T}$$

$$w = w_e + w_m$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

$$= \epsilon_0 E^2 = 2.21 \times 10^{-8}\text{J/m}^3$$

由定义

$$S = E \times H$$

$$S = EH = 50 \times 0.133 = 6.65\text{J/m}^2 \cdot \text{s}$$

15.8 太阳射到地球上的能流约为 1.4KW/m^2 。求:

(1) 这种强度的电磁波的 E 和 B 的最大值;

(2) 太阳辐射的总功率(地球与太阳之间的距离为 $1.5 \times 10^{11}\text{m}$)。

解 (1) 由题意 $S = 1.4 \times 10^3\text{J/m}^2 \cdot \text{s}$, 因为

$$\frac{E}{H} = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

而 $S = E \times H$

$$S = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{E_0^2}{2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}$$

所以

$$E_0 = \sqrt{2S \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = 1027$$

$$= 1.03 \times 10^3\text{V/m}$$

$$B_0 = \mu_0 H_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 = 3.42 \times 10^{-6}\text{T}$$

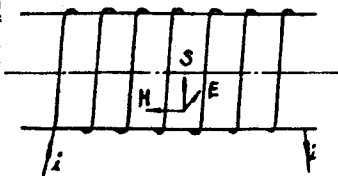
$$(2) \quad P = S \cdot 4\pi r^2 = 1.4 \times 10^3 \times 4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2$$

$$= 3.96 \times 10^{26}\text{J/s}$$

15.9 一个半径为 a 的长直螺线管, 每单位长度有 n 匝, 载有正在增加的电流 I 。试求:

(1) 在螺线管内距轴线为 r 处一点的涡旋电场强度;

(2) 该点的坡印亭矢量的大小及方向。



解 15.9 图

解 (1) 螺线管内 $H = nI$, $B = \mu_0 nI$, 又

$$\oint_L E_{\text{涡}} \cdot dl = - \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

$$E_{\text{涡}} \cdot 2\pi r = - \mu_0 n \frac{dI}{dt} \cdot \pi r^2$$

故

$$E_{\text{涡}} = - \frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dI}{dt}$$

负号表示 E 阻碍电流增加, 即 E 与 H 组成左旋关系, 如图所示。

(2)

$$S = E \times H$$

$$S = E \cdot H = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} I \frac{dI}{dt}$$

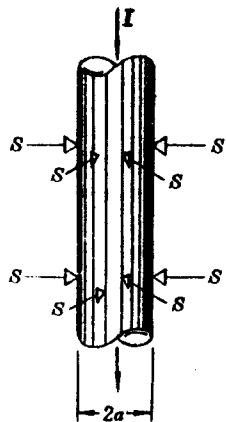
方向沿径向且指向轴线。

15.10 一圆柱形导体, 其半径为 a , 载有稳恒电流 I , 取长为 l 的一段(见图)。已知其电阻率为 ρ 。试证明:

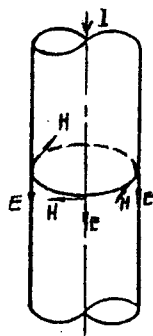
(1) 在该导体表面上, 坡印亭矢量处处都与表面垂直并指向导体内部;

(2) 坡印亭矢量对整个导体表面的积分等于导体内产生的焦耳热的功率。

证明 (1) 因为 $j = \gamma E$, 所以 E 与电流 I 的流向一致并平行于轴, 如图所示。



题 15.10 图



解 15.10 图

由右螺旋定则可知, B 和 H 均为环绕电流的同心圆, 由 $S = E \times j$ 可知, S 处处垂直表面并指向导体内部。

(2) 因为
$$j = \frac{I}{\pi a^2} = \frac{1}{\rho} E$$

故

$$E = \frac{I\rho}{\pi a^2}$$

电阻为

$$R = \rho \frac{l}{\pi a^2}$$

所以

$$E = \frac{IR}{l}$$

同时由安培环路定理

$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

$$S = EH = \frac{I^2 R}{2\pi a l}$$

$$P = \int S dA = \int \frac{2I^2 R}{2\pi a l} dA = \frac{I^2 R}{2\pi a l} \int dA$$

$$= \frac{I^2 R}{2\pi a l} \cdot 2\pi a l = I^2 R$$

15.11 一平面电磁波的波长为 3.0m, 在自由空间中沿 x 方向传播, 电场 E 沿着 y 方向, 振幅为 300V/m. 试求:

- (1) 该电磁波的频率 f ;
- (2) 磁场 B 的方向和振幅;
- (3) 电磁波的圆频率;
- (4) 电磁波的能流密度的平均值.

解 (1)
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{3.0} = 10^8 \text{ Hz}$$

(2) 根据 $S = E \times H$ 可判知 H 沿 z 轴正方向

$$B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$$

$$= \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$= \frac{300}{3 \times 10^8} = 1 \times 10^{-6} \text{ T}$$

(3)
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 = 6.28 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

(4)
$$S = EH = E_0 H_0 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = 119 \text{ W/m}^2$$

15.12 一同轴电缆, 内外导体间充满了相对介电常数为 $\epsilon_r = 2.25$ 的聚乙烯. 求讯号在此电缆中传播的速度.

解 电磁波在介质中的传播速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \times 2.25 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}} = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

15.13 一广播电台的平均辐射功率 $\bar{P}=10\text{kW}$ 。假定向外辐射的能流均匀地分布在以电台为中心的半球面上。求:

(1) 求在距离电台 $r=10\text{km}$ 处坡印矢量的平均值;

(2) 若将上述距离处的电磁波看作平面波, 试求该处电场强度和磁场强度的振幅。

$$\text{解 (1)} \quad \bar{S} = \frac{\bar{P}}{2\pi r^2} = \frac{10 \times 10^3}{2\pi \times (1.0 \times 10^4)^2} \\ = 1.59 \times 10^{-5} \text{J/m}^2 \cdot \text{s}$$

$$(2) \quad S = EH = E_0 H_0 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \varphi \right]$$

又因为 $\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0$, 而

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

所以

$$E_0 = \sqrt{2\bar{S}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 0.11 \text{V/m}$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = 2.9 \times 10^{-4} \text{A/m}$$

15.14 一很长的均匀带电圆筒, 半径为 R , 长度为 L , 电荷面密度为 σ 。今施加一力矩, 使该圆筒以角速度 $\omega(t) = at$ (a 为常量) 绕圆筒的轴旋转。

(1) 求圆筒内的磁感应强度;

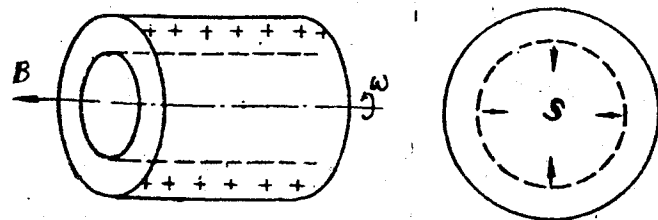
(2) 求圆筒内表面上的电场强度 E ;

(3) 求圆筒内表面上的坡印矢量 S ;

(4) 证明进入圆筒内部体积的 S 通量等于 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi R^2 L}{2\mu_0} B^2 \right)$ 。

解 (1) 带电圆筒在转动时的等效电流为

$$I = q \cdot n = 2\pi R L \sigma \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$



解 15.14 图

$$= RL\sigma at$$

单位长度上载流 $j = \frac{I}{L} = R\sigma at$, 此时圆筒可视为长直载流螺线管, 内部 B 的大小为

$$B = \mu_0 ni = \mu_0 j = \mu_0 R\sigma at$$

方向与轴平行且指向左端。

$$(2) \quad \oint_L \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_D}{dt} \\ \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot 2\pi R = - \frac{d}{dt} (\pi R^2 \cdot B) \\ E_{\text{内}} = - \frac{R}{2} \frac{dB}{dt} = - \frac{\mu_0 R^2 \sigma a}{2}$$

负号表示 $E_{\text{内}}$ 阻碍磁场增加, 方向沿圆周切向。

$$(3) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E}_{\text{内}} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_{\text{内}} \mathbf{H} = E_{\text{内}} \frac{B}{\mu_0} \\ = \frac{\mu_0}{2} R^3 \sigma^2 a^2 t$$

方向沿半径指向轴线, 如图所示。

$$(4) \quad P = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = S \cdot 2\pi RL \\ = \frac{1}{\mu_0} \frac{R}{2} \frac{dB}{dt} B 2\pi RL \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi R^2 L}{2\mu_0} B^2 \right) \quad \text{得证}$$

15.15 一振荡电路,由自感系数为 $1.2 \times 10^{-3} \text{H}$ 的线圈和电容为 $3.0 \times 10^{-8} \text{F}$ 的电容器所组成,线路中的电阻可以略去,求振荡频率。

解 振荡频率为

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{1.2 \times 10^{-3} \times 3.0 \times 10^{-8}}} \\ &= 2.65 \times 10^4 \text{Hz}\end{aligned}$$

第十六章 光的干涉

16.1 杨氏双缝干涉实验中,两缝中心距离为 0.60mm ,紧靠双缝的凸透镜的焦距为 2.5m ,屏幕置于焦平面上。

(1)用单色光垂直照射双缝,测得屏上条纹的间距为 2.3mm 。求入射光的波长。

(2)当用波长为 480nm 和 600nm 的两种光垂直照射时,问它们的第三级明条纹相距多远。

解 (1)杨氏双缝干涉的条纹间距

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

则

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{d}{D} \Delta x = \frac{0.6 \times 10^{-3} \times 2.3 \times 10^{-3}}{2.5} \\ &= 5.5 \times 10^{-7} \text{m} = 550 \text{nm}\end{aligned}$$

(2)当光线垂直照射时,明纹中心位置

$$X = \frac{D}{d} k \lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

λ_1, λ_2 两种光的第三级明纹相距

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_3 - x_3' = \frac{D}{d} \cdot 3(\lambda_2 - \lambda_1) \\ &= \frac{2.5 \times 3}{0.6 \times 10^{-3}} \times (600 - 480) \times 10^{-9} \\ &= 1.50 \times 10^{-3} \text{m} = 1.5 \text{mm}\end{aligned}$$

16.2 在杨氏双缝干涉实验中,若用折射率分别为 1.5 和 1.7 的块透明薄膜覆盖双缝(膜厚相同),则观察到第 7 级明纹移到了