

第五篇 机械振动和机械波

第五章 机械振动

5.1 一个小球和轻弹簧组成的系统,按

$$x=0.05\cos(8\pi t+\frac{\pi}{3}) \quad (\text{SI})$$

的规律振动。求(1)振动的角频率、周期、振幅、初相、最大速率及最大加速度;(2) $t=1\text{s}, 2\text{s}, 10\text{s}$ 等时刻的相;(3)分别画出位移、速度,加速度与时间的关系曲线。

解 (1) $A=0.05\text{m} \quad \varphi=\frac{\pi}{3}$

$$\omega=8\pi \text{ rad/s} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=0.25\text{s}$$

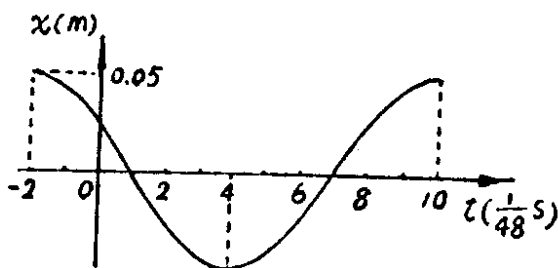
$$v_m=\omega A=0.4\pi \text{ m/s}=1.26\text{m/s}$$

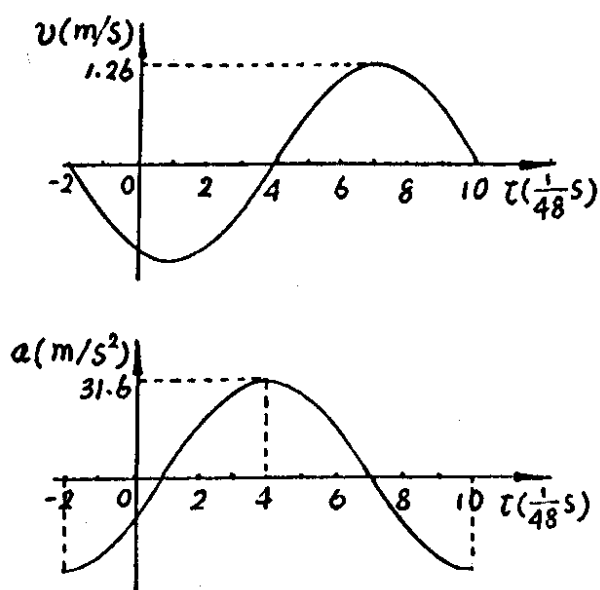
$$a_m=\omega^2 A=3.2\pi^2\text{m/s}^2=31.6\text{m/s}^2$$

$$(2) \text{位相}=\omega t+\varphi=8\pi t+\frac{\pi}{3}$$

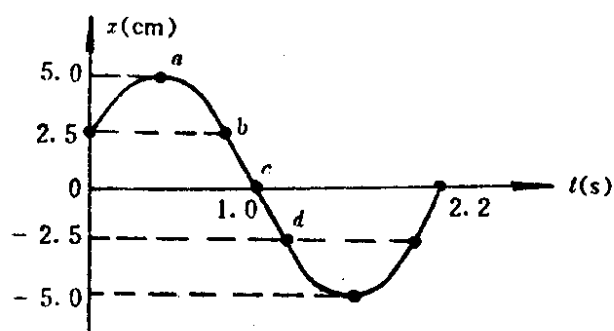
$$t=1\text{s}, 2\text{s} \text{ 和 } 10\text{s} \text{ 时相位为 } \frac{25}{3}\pi, \frac{49}{3}\pi \text{ 和 } \frac{241}{3}\pi$$

(3)





5.2 已知一个谐振子的振动曲线如题 5.2 图所示, 试由图线求(1) a 、 b 、 c 、 d 、 e 各状态相应的相位; (2) 振动表达式; (3) 画出旋转矢量图。



解(1)

状态	a	b	c	d	e
位相	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

(2) 由图知: $A = 0.05\text{m}$, $T = 2.4\text{s}$

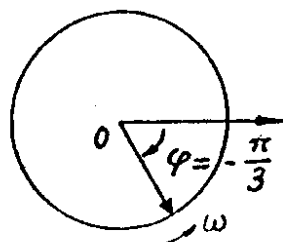
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{5}{6}\pi \text{ rad/s}$$

由旋转矢量图知 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

故振动表达式为

$$x = 0.05 \cos\left(\frac{5}{6}\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{SI})$$

(3) 旋转矢量图为:



5.3 物体作简谐振动, 其振动表达式

$$x = 6.0 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{SI})$$

试求这物体在 $t = 2.0 \text{ s}$ 时的位移、速度、加速度、和相位; 并求这物体的振动周期。

解 已知: $x = 6 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) (\text{SI})$

$$v = \frac{dx}{dt} = -18 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -54 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = 2 \text{ s 时}, x = 3 \text{ m} \quad v = -49 \text{ m/s} \quad a = -266 \text{ m/s}^2$$

$$\text{位相 } \omega t + \varphi = 6\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{19}{3}\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3} \text{ s} = 0.67 \text{ s}$$

5.4 物体作谐振动。已知 $a_{\max} = 13 \text{ m/s}^2$, $T = 0.94 \text{ s}$ 及初相 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。(1) 试写出位移 x 、速度 v 和加速度 a 的表达式; (2) 求当 $t =$

0.54s 时的位移、速度和加速度。

$$\text{解 (1)} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 6.7 \text{ rad/s}$$

$$A = \frac{a_m}{\omega^2} = 0.29 \text{ m}$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = 0.29 \cos(6.7t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= -1.9 \sin(6.7t + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -13 \cos(6.7t + \frac{\pi}{2})$$

$$(2) \quad t = 0.54 \text{ s 时}$$

$$(6.7t + \frac{\pi}{2}) = 5.19 \text{ rad} = 297.3^\circ$$

$$x = 0.13 \text{ m}$$

$$v = 1.7 \text{ m/s}$$

$$a = -6.0 \text{ m/s}^2$$

5.5 已知物体的振动表达式是

$$x = 0.20 \cos(3t) \quad (\text{SI})$$

试求当物体离平衡位置 5cm 时的速度和加速度；当 $x=0$ 时，再求解速度和加速度。

$$\text{解 (1)} \quad x = 0.20 \cos 3.0t = 0.05 \text{ m}$$

$$\cos 3.0t = 0.25$$

$$\sin 3.0t = \pm \sqrt{1 - (\cos 3.0t)^2} = \pm 0.968$$

$$\text{故} \quad v = -\omega A \sin \omega t = -3.0 \times 0.20 \sin 3.0t = \pm 0.58 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t = -3.0^2 \times 0.20 \cos 3.0t = -0.45 \text{ m/s}^2$$

$$(2) \quad x = 0.20 \cos 3.0t = 0$$

$$\cos 3.0t = 0$$

$$\sin 3.0t = \pm 1$$

故 $v = -3.0 \times 0.20 \sin 3.0t = \pm 0.60 \text{ m/s}$

$$a = -3.0^2 \times 0.20 \cos 3.0t = 0$$

5.6 水平弹簧振子, 振幅 $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$, 周期 $T = 0.50 \text{ s}$ 。当 $t = 0$ 时, (1) 物体过 $x = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处, 向负方向运动; (2) 物体过 $x = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处, 向正方向运动, 试分别写出以上两种情况下振动的表达式。

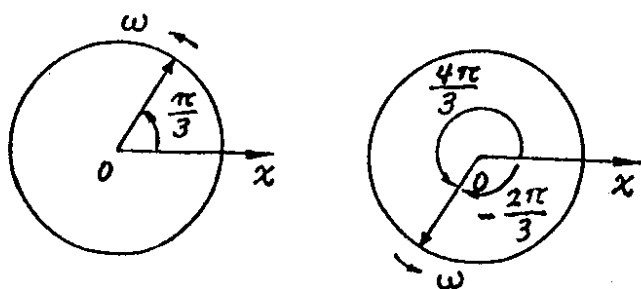
解 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \text{ rad}$

(1) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{\pi}{3}) \quad (\text{SI})$$

(2) $\varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ 或 } -\frac{2\pi}{3}$

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - \frac{2\pi}{3}) \quad (\text{SI})$$



5.7 某物体作谐振动, 周期 $T = 1.8 \text{ s}$ 。在初始时刻, $x_0 = 0, v_0 = 0.35 \text{ m/s}$ 。(1) 试写出这物体位移、速度和加速度的表达式; (2) 画出在 $t = 0$ 到 $t = 3.0 \text{ s}$ 的间隔内的 $x-t, v-t$ 和 $a-t$ 图。

解 (1) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{10\pi}{9}$
 $= 3.5 \text{ rad/s}$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{v_0}{-\omega \sin \varphi} = 0.10 \text{ m}$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

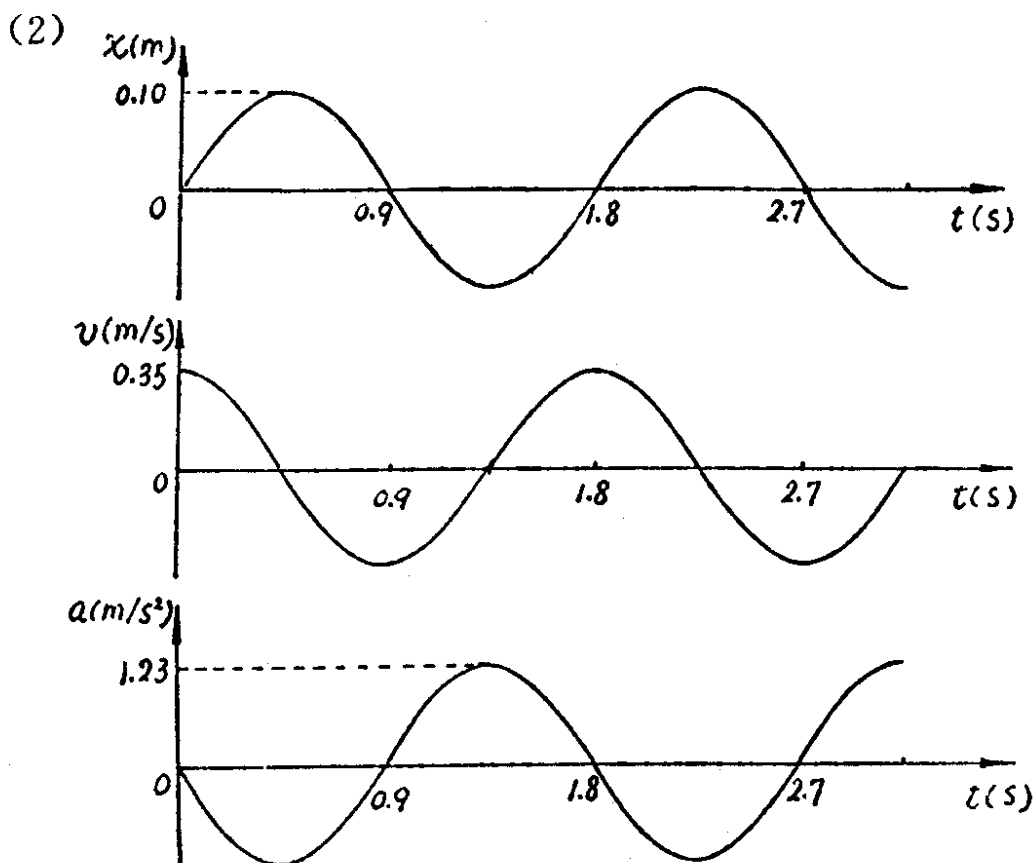
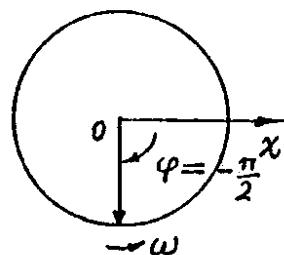
$$= 0.10 \cos(3.5t - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= -0.35 \sin(3.5t - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -1.22 \cos(3.5t - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$



5.8 系在弹簧上的质点的振动频率为 3Hz。在 $t=0$, 这质点的位移为 0.20m, 速度为 4.0m/s。(1) 试写出这质点振动的表达式; (2)

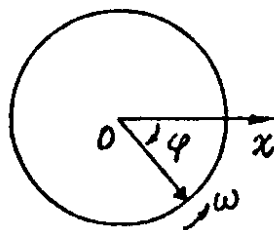
何时这质点第一次到达转向点？此时的加速度有多大？

解 (1) $\omega = 2\pi\nu = 6\pi \text{ rad/s}$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = 0.20\text{m} \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi = 4.0\text{m/s} \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0.29\text{m}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-v_0/\omega}{x_0}\right) = \begin{cases} -46.7^\circ \\ 133.3^\circ (\text{删去}) \end{cases}$$



振动表达式 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= 0.29\cos(6\pi t - 46.7^\circ) \quad (\text{SI})$$

(2) 第一次转向点: $\omega t + \varphi = 6\pi t - 46.7^\circ = 0$

故 $t = \frac{46.7}{6 \times 180} \text{s} = 0.043\text{s}$

或由旋转矢量图 $\frac{T}{2\pi} = \frac{t}{46.7^\circ} \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3}\text{s}$

故 $t = \frac{|\varphi|}{2\pi} T = \frac{46.7}{360} \times \frac{1}{3} = 0.043\text{s}$

此时 $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$
 $= -\omega^2 A = -103\text{m/s}^2$

5.9 某机器内的活塞按正弦方式上下振动，振幅为 10cm。设有一个垫圈偶尔遗落在活塞上。假定机器运转速率不断增大，问活塞振动频率达何值时，垫圈就不再平稳地留在活塞上面？

解 最上方

$$mg - N = ma = m\omega^2 A$$

离开活塞

$$N = m(g - \omega^2 A) \leq 0$$

得

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{A}} = 9.9\text{rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \geq 1.58\text{Hz}$$



5.10 一竖直悬挂的弹簧，当挂上质量为 8 克物体后，其伸长量为 39.2mm；现将该物体由平衡位置向下拉 1.0cm，并给予向上的初

速度 50cm/s; 试求振动的表达式(设坐标向下为正方向)。

解
$$k = \frac{mg}{l} = 2\text{N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 15.8\text{rad/s}$$

设振动为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

则

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 3.3 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{(-v_0/\omega)}{x_0} = 72.5^\circ = \frac{2\pi}{5}$$

故

$$x = 3.3 \times 10^{-2} \cos(15.8t + \frac{2\pi}{5}) \quad (\text{SI})$$

5.11 质量为 0.01kg 的物体沿 x 轴作谐振动, 振幅 $A=10\text{cm}$, 周期 $T=4.0\text{s}$ 。 $t=0$ 时位移 $x_0=-5.0\text{cm}$, 且物体朝 x 负向运动。求 (1) $t=1.0\text{s}$ 时物体的位移和物体受的力; (2) $t=0$ 之后何时物体第一次到达 $x=5.0\text{cm}$ 处? (3) 第二次和第一次经过 $x=5.0\text{cm}$ 处的时间间隔。

解 (1)
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{rad/s}$$

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

故

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= 0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \times 0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

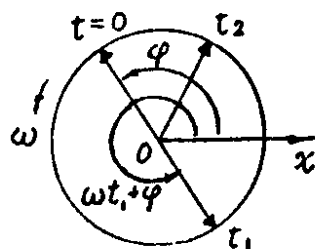
$t=1\text{s}$ 时

$$x = -8.7 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$F = ma = 2.1 \times 10^{-3}\text{N}$$

(2)

$$\frac{T}{360} = \frac{t_1}{180}$$



故

$$t_1 = \frac{T}{2} = 2\text{s}$$

或

$$\omega t_1 + \varphi = \frac{\pi}{2} t_1 + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

得

$$t_1 = 2\text{s}$$

(3)

$$\omega t_2 + \varphi = \frac{\pi}{2} t_2 + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$

得

$$t_2 = \frac{10}{3}\text{s}$$

故

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{4}{3}\text{s} = 1.3\text{s}$$

或:

$$\frac{T}{360} = \frac{\Delta t}{120} \quad \Delta t = \frac{T}{3} = \frac{4}{3}\text{s}$$

5.12 将一质量可忽略的弹簧挂在天花板上,下端系一物体。使这物体从弹簧未被拉伸的位置释放,它便上下振动。其最低位置在初始释放位置下方 10cm 处。试求(1)振动的频率;(2)物体在初始位置下方 8.0cm 处的速率。当一个 0.3kg 的砝码系于这物体下面,系统的振动频率就变成原来的一半,试问(3)第一个物体质量有多大?(4)两个物体系于弹簧后,其新的平衡位置在何处?

解 (1)

$$k = \frac{m_1 g}{A_1}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{g}{A_1}} = 14\text{rad/s}$$

$$\nu_1 = \frac{\omega}{2\pi} = 2.23\text{Hz}$$

(2) 设向上为 x 正向,平衡位置为原点,则 $\varphi = 0$

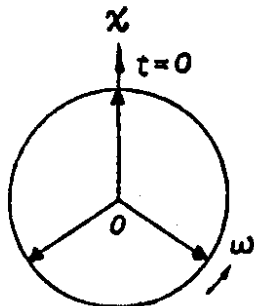
$$x = A_1 \cos \omega t = 0.05 \cos 14t$$

$$v = -\omega_1 A_1 \sin \omega_1 t = -0.7 \sin 14t$$

$x = -0.03\text{m}$ 时

$$\cos(14t) = \frac{x}{A} = -0.6$$

$$\sin(14t) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(14t)} = \pm 0.8$$



故
$$v = -0.7 \times (\pm 0.8) = \begin{cases} -0.56 \text{ m/s} \\ +0.56 \text{ m/s} \end{cases}$$

(3)
$$\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

故
$$m_1 = \frac{m_2}{3} = 0.1 \text{ kg}$$

(4)
$$(m_1 + m_2)g = kl$$

故
$$l = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} A_1 = 0.2 \text{ m}$$

即未伸长时弹簧下端下方 0.2m 处。

5.13 一根轻质弹簧,一端固定,另一端系一物体,其振动频率为 γ 。如这根弹簧两端固定,中间剪断后,将同一物体嵌入并系在一起,试问这时的振动频率。

解 设半根弹簧的倔强系数为 k

(1)原来:物体位移 x 时,受恢复力为:

$$F = -kx_1 = -kx_2$$

(x_1 和 x_2 为半根弹簧伸长)弹簧总位移 x 为

$$x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{k} - \frac{F}{k} = -\frac{F}{k/2}$$

即
$$F = -\left(\frac{k}{2}\right)x$$

故作无限尼自由振动时
$$\omega = \sqrt{\frac{k/2}{m}}$$

(2)物体嵌中间:物体位移 x 时,受恢复力为

$$F = -(kx + kx) = -(2k)x$$

故作无阻尼自由振动时
$$\omega' = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

于是
$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\omega'}{\omega} = 2$$

5.14 将一质量为 2.0kg 的物体挂在弹簧上,待静止后再施以 2N 的拉力,则弹簧再伸长 4cm,如这拉力突然移去,该物体将作谐振

动。试求(1)这物体的最大动能;(2)振动的频率。

解 (1)

$$mg = kl$$

$$mg + f = k(l + A)$$

故

$$k = \frac{f}{A} = 50 \text{ N/m}$$

$$\text{最大动能 } E_{k\max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}kA^2 = 0.04 \text{ J}$$

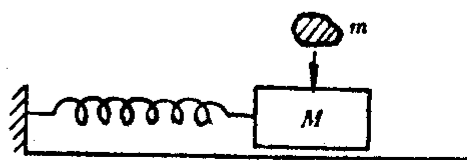
(2)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 0.80 \text{ Hz}$$

5.15 如图所示,在水平面上有一弹簧振子(物体质量为 M),其谐振动的表达式为

$$x = A \sin \omega t$$



题 5.15 图

在 $t = t_1$ 时刻,一块质量为 m 的粘土自由下落到物体上,并马上粘住。

试问(1)振动周期变为多大?(2)振幅变为多大?

解 (1)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

即

$$k = M\omega^2$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{M\omega^2}{M+m}} = \omega \sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

(2) $t = t_1$ 时

$$x_1 = A \sin \omega t_1$$

$$v_1 = \omega A \cos \omega t_1$$

粘住过程,水平方向应用质点系动量定理:

$$-kx_1 \Delta t = (M+m)v' - Mv_1$$

因马上粘住, Δt 很小,近似水平动量守恒:

$$(M+m)v' = Mv_1$$

$$v' = \frac{M}{M+m} \omega A \cos \omega t_1$$

振动过程机械能守恒

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2$$

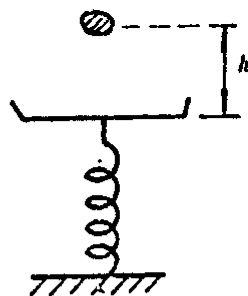
$M\omega^2 = k, x_1 = A \sin \omega t, v_1 = \omega A \cos \omega t, v' = \frac{M}{M+m} v_1$ 代入, 整理,

得 $kA^2 \left[\frac{M}{M+m} \cos^2 \omega t_1 + \sin^2 \omega t_1 \right] = kA'^2$

因 $\cos^2 \omega t_1 = 1 - \sin^2 \omega t_1$

故 $A' = A \sqrt{\frac{M+m \sin^2 \omega t_1}{M+m}}$

5.16 如图所示, 一质量为 m 的物体从弹簧秤盘上方高 h 处自静止自由下落, 在接触秤盘后, 两者一起运动。设弹簧及秤盘的质量忽略不计, 弹簧的劲度系数为 k 。已知 $m = 0.5\text{kg}, h = 1.5\text{cm}, k = 490\text{N/m}$, 试写出这物体作谐振动的表达式(以平衡位置为原点, 向上为正方向)。



题 5.16 图

解 设 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 31.3 \text{ rad/s}$$

碰撞过程, 冲力 \gg 弹力, 动量守恒

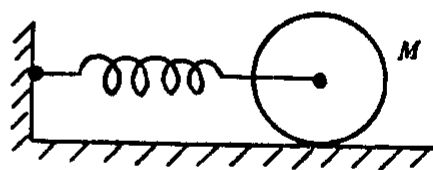
$$\begin{cases} v_0 = -\omega A \sin \varphi = -\sqrt{2gh} = -0.54 \text{ m/s} \\ x_0 = A \cos \varphi = \frac{mg}{k} = 0.01 \text{ m} \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0.02 \text{ m}$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(-v_0/\omega)}{x_0} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \text{ (删去)} \end{cases}$$

故 $x = 0.02 \cos(31.3t + \frac{\pi}{3}) \quad (\text{SI})$

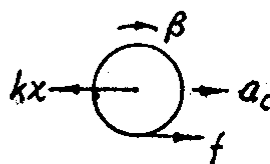
5.17 一个水平放置的轻弹簧系在实心圆柱体的轴上,使圆柱体可在水平面上作无滑动地滚动(见图)。试证:该柱体的质心作谐振动,并求振动的周期。已知弹簧的劲度系数为 k 、圆柱体的质量为 M 。



题 5.17 图

解

$$\begin{cases} f - kx = Ma_c \\ -fR = \frac{MR^2}{2}\beta \\ a_c = \beta R \end{cases}$$



解得

$$a_c = -\left(\frac{2k}{3M}\right)x$$

故质心作谐振动

由能量求
总机械能为

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \left(\frac{v_c}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} M \cdot v_c^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

等效质量 $m = \frac{3}{2} M$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

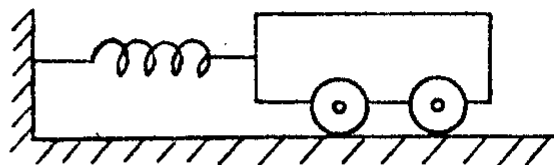
或

$$\begin{cases} -kx - f = Ma_c \\ fR = \frac{MR^2}{2}\beta \\ a_c = \beta R \end{cases}$$

解得

$$a_c = -\left(\frac{2k}{3M}\right)x$$

5.18 如图所示,一辆小车由车身和装在无摩擦的轴上的4个车轮所组成。设车身的质量为 m , 每个轮子可看作半径为 R 、质量为 M 的均匀圆盘。这小车



题 5.18 图

在所系弹簧作用下在水平路面上作来回无滑动的滚动。设弹簧的劲度系数为 k , 求这小车的振动频率。

解

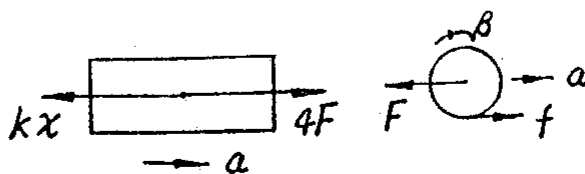
动能定理:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M v^2 \cdot 4$$

$$+ 4 \cdot \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + 2 M v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot v^2 / R^2$$

$$= \frac{1}{2} (m + 6M) v^2$$



$$\begin{cases} 4F - kx = ma \\ f - F = Ma \\ -fR = \frac{MR^2}{2} \beta \\ a = \beta R \end{cases}$$

解得

$$a = -\left(\frac{k}{m+6M}\right)x$$

故

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+6M}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+6M}}$$

5.19 一根劲度系数 k 的弹簧的下端固定, 上端系一轻绳。轻绳绕过定滑轮和质量为 m 的物体连接, 如图所示。这定滑轮可看作是半径为 R 、质量为 M 的圆盘, 它可绕无摩擦的水平轴转动。试求这装置的振动周期。

解 平衡时 $mg = k\lambda$

由机械能守恒,

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} (m + \frac{M}{2}) v^2, \quad m' = m + \frac{M}{2}$$

以 m 的平衡位置为原点, 向下为 x 轴正方向。

则 m 位移 x 时受力图如图

$$mg - \frac{T}{2} = ma$$

$$T R - k(\lambda + x) R = \frac{M R^2}{2} \beta$$

$$a = \beta R$$

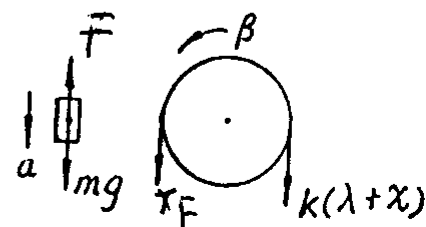
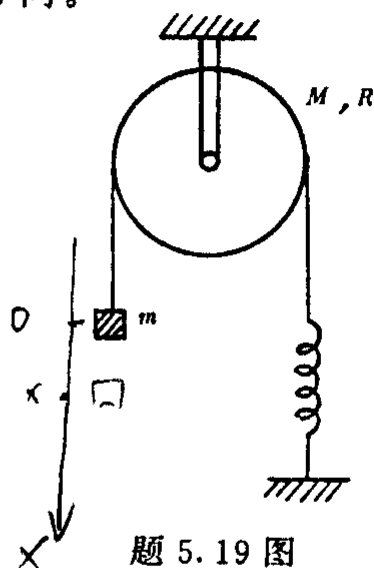
解得

$$a = - \left(\frac{k}{m + \frac{M}{2}} \right) x$$

故

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{2}}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}}$$



5.20 把一根米尺悬挂起来作为一个复摆。设支点在 75cm 刻度处, 试求小摆幅下的角频率。

解 角位移 θ 时

$$-mg \frac{l}{4} \sin \theta = J \beta$$

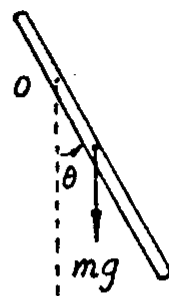
$$J = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2$$

小摆幅时

$$\beta = - \left(\frac{12g}{7l} \right) \sin \theta \approx - \left(\frac{12g}{7l} \right) \theta$$

故角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{7l}} = 4.1 \text{ rad/s}$$



5.21 一半径为 R 的均质细环悬挂在支点 P 处(见图)。当这细环在铅直面内作小幅度摆动, 求其摆动周期。

解 角位移 θ 时

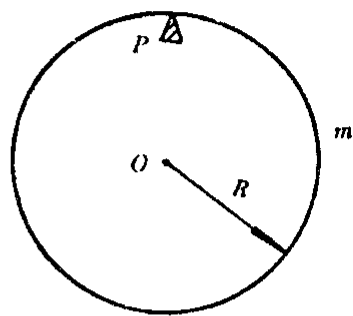
$$-mgR \sin \theta = J \beta$$

$$J = J_c + m h^2 = m R^2 + m R^2$$

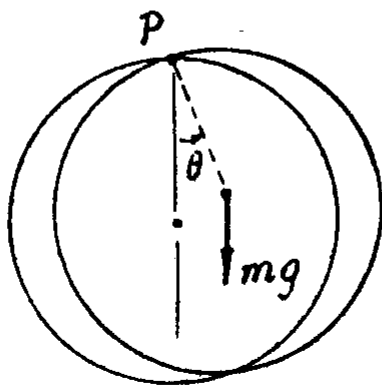
解得 $\beta = -\left(\frac{g}{2R}\right)\sin\theta \approx -\left(\frac{g}{2R}\right)\theta$

故振动角频率 $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$



题 5.21 图



5.22 某物理摆是一个用长为 L 的轻绳悬起的匀质球形重锤。已知该球形锤的质量为 M 、半径为 R 。在微小摆幅下，试求这摆的周期。

解 角位移 θ 时

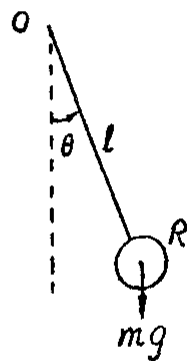
$$-mg(l+R)\sin\theta = J\beta$$

$$J = J_c + mh^2 = \frac{2}{5}mR^2 + m(l+R)^2$$

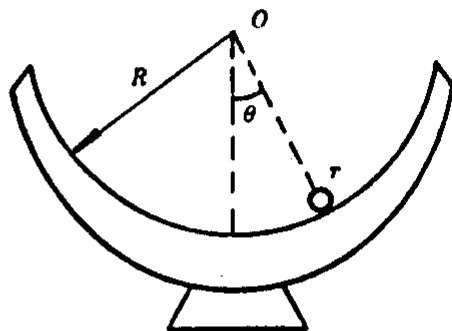
解得 $\beta = -\frac{g(l+R)}{\frac{2}{5}R^2 + (l+R)^2}\theta$

故角频率 $\omega = \sqrt{\frac{g(l+R)}{\frac{2}{5}R^2 + (l+R)^2}}$

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}R^2 + (l+R)^2}{g(l+R)}}$



5.23 如图所示,一个半径为 r 的实心小球在圆弧形碗底附近来回纯滚动。如小球来回运动所对应的角度 θ 很小,求周期。



题 5.23 图

解 角位移 θ 时

$$\begin{cases} f - mg \sin \theta = ma_c \\ -fr = \frac{2mr^2}{5} \frac{a_c}{r} \end{cases}$$

解得 $a_c = -\left(\frac{5g}{7}\right) \sin \theta \approx -\left(\frac{5g}{7}\right) \theta$

小球质心绕球面中心 O 作圆周运动的角加速度 β 为

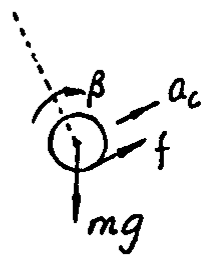
$$\beta = \frac{a_c}{R-r} = -\frac{5g}{7(R-r)} \theta$$

故来回滚动, θ 小时近似谐振动, 角频率 ω 为

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$



5.24 质量为 m 的质点处于一维的势场中, 其势能的表达式为

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

式中 a 与 b 是常量。试求该物体作小振动的周期。

解 稳定平衡位置处, $\frac{dU}{dx} = 0$,

即

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{2a}{x^3} + \frac{b}{x^2} = 0$$

故平衡位置为 $x = \frac{2a}{b}$

若以平衡位置为原点, x 正方向为 ζ 轴正方向, 则:

$$U = \frac{a}{(\zeta + \frac{2a}{b})^2} - \frac{b}{(\zeta + \frac{2a}{b})}$$

当质点离 ζ 轴原点很小时, 质点受回复力为

$$F = -k\zeta = -(\frac{d^2U}{d\zeta^2})_0\zeta$$

故

$$k = (\frac{d^2U}{d\zeta^2})_0 = [\frac{d^2}{d\zeta^2}(\frac{a}{(\zeta - \frac{2a}{b})^2} - \frac{b}{(\zeta + \frac{2a}{b})})]_0$$

$$= (\frac{6a}{(\zeta + \frac{2a}{b})^4} - \frac{2b}{(\zeta + \frac{2a}{b})^3})_0 = \frac{b^4}{8a^3}$$

振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{b^4}{8ma^3}} = \frac{b^2}{2a}\sqrt{\frac{1}{2ma}}$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi a}{b^2}\sqrt{2ma}$$

5.25 某摆钟在地球上走得很准。如果这只摆钟被放在月球上, 在那里, 物体的重量只有地球上的 $1/6$, 试问在实际时间为 1 分钟内, 该摆钟将滴答出多少秒?

解 钟摆在地面上

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J}} = 1\text{Hz}$$

该摆在月球上, 频率为

$$\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m(\frac{g}{6})l}{J}} = \frac{\nu}{\sqrt{6}} = 0.41\text{Hz}$$

即 1 分钟内振动次数为

$$0.41 \times 60 = 24.6$$

5.26 质量 $m = 0.5\text{kg}$ 的物体挂在弹簧上, 并沿竖直方向上下振动。在无阻尼的情况下, 其振动周期为 $T_0 = 0.4\pi\text{s}$; 在阻力与物体

运动速度成正比的某一媒质中,其振动周期为 $T=0.5\pi\text{ s}$ 。求物体在该阻尼媒质中振动速度为 10 cm/s 时所受阻力的。

解
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 5\text{ rad/s}$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = 4\text{ rad/s}$$

因
$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

故阻尼系数为

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega'^2} = 3\text{ rad/s}$$

又因
$$\beta = \frac{b}{2m}$$

故阻力为

$$f = -bv = -2m\beta v = -0.3\text{ N}$$

5.27 弹簧振子作阻尼振动。初始振幅为 120 mm , 经 2.4 min 后, 振幅减至 60 mm 。(1)问在何时, 振幅将减至 30 mm ; (2)试计算阻尼系数 γ 。

解 因
$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$

故
$$\beta = -\frac{\ln(\frac{A_1}{A_0})}{t_1} = 4.8 \times 10^{-3}\text{ rad/s}$$

同理

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$$

$$t_2 = -\frac{\ln(\frac{A_2}{A_0})}{\beta} = \frac{\ln(\frac{A_2}{A_0})}{\ln(\frac{A_1}{A_0})} t_1 = 288\text{ s} = 4.8\text{ min}$$

5.28 质量为 2.5 kg 的物体在劲度系数为 1250 N/m 的弹簧上而构成一个弹簧振子。在 $t=0$, 这物体从离平衡位置 2.8 cm 处由静止开始释放, 然后作弱阻尼的振动。已知式(5.27)的比例系数 $b=50\text{ kg/s}$ 。试求(1)阻尼振动的角频率 ω ; (2)阻尼振动表达式, 即式(5.29)中的初始振幅 A 和初相 φ [提示: $\varphi \neq 0$]; (3)在 $t=\frac{\pi}{10}\text{ s}$ 时的位

移和速度。

解 (1) 弱阻尼振动表达式一般形式

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

阻尼系数 $\beta = \frac{b}{2m} = 10 \text{ rad/s}$

固有角频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{500} \text{ rad/s}$

故阻尼振动频率 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 20 \text{ rad/s}$

(2) 阻尼振动速度 v 为

$$v = \frac{dx}{dt} = -A_0 \beta e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi) - A_0 e^{-\beta t} \omega' \sin(\omega' t + \varphi)$$

代入初始条件:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A_0 \cos \varphi = 2.8 \times 10^{-2} \text{ m} \\ v_0 &= -A_0 \beta \cos \varphi - A_0 \omega' \sin \varphi = 0 \end{aligned} \right\} A_0 \sin \varphi = \frac{-\beta x_0}{\omega'}$$

故 $A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(-\frac{\beta x_0}{\omega'}\right)^2} = 3.13 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A_0}\right) = \begin{cases} +26.565^\circ (\text{删去}) \\ -26.565^\circ \end{cases}$$

因 $A_0 \sin \varphi = -\frac{\beta x_0}{\omega'} < 0$, 故 $\varphi = -26.6^\circ$

阻尼振动表达式 $x = 3.13 \times 10^{-2} e^{-10t} \cos(20t - 26.6^\circ) \quad (\text{SI})$

(3) $t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$ 时

$$x = 1.21 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v = 4.65 \times 10^{-9} \text{ m/s} \approx 0$$

5.29 在上题中, 如作用于这物体的驱动力为 $F = 12 \cos 25t$ (SI 制), 试求 (1) 达稳态后的受迫振动的振幅、初相; (2) 在共振 ($\omega = \omega_0$) 时的振幅。

解 (1) 由上题知: $\beta = 10 \text{ rad/s}$ $\omega_0 = \sqrt{500} \text{ rad/s}$ $m = 2.5 \text{ kg}$

稳态受迫振动振幅 $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = 9.31 \times 10^{-3} \text{m}$

初相 $\varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) = 76^\circ$

即 $x = 9.31 \times 10^{-3} \cos(25t + 76^\circ)$

(2) 当 $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时共振, 代入 $A(\Omega)$ 式, 得

$$A_{\max} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 0.012 \text{m} = 1.2 \times 10^{-2} \text{m}$$

5.30 某小孩在荡秋千时, 发现 8 个周期内其摆幅降到初值的 $1/e$, 求这系统的 Q 值。

解 $A = A_0 e^{-\beta t}$

按题意 $A = A_0 e^{-\beta(8T)} = \frac{A_0}{e}$

故 $\beta T = \frac{1}{8}$

而品质因素 $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\pi}{\beta T} = 8\pi = 25.1$

5.31 试证: 在共振 ($\Omega = \omega_0$) 时, 阻尼弹簧振子的受迫振动的振幅和最大速率分别为

$$A_{\max} = F_0/b\Omega$$

$$v_{\max} = F_0/b$$

解 受迫振动

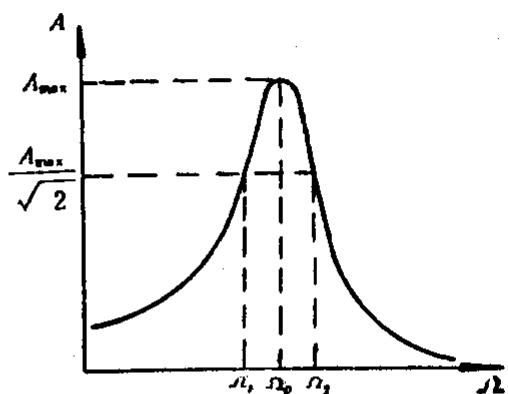
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$\Omega = \omega_0$ 时

$$A_{\max} = \frac{F_0/m}{\sqrt{4(\frac{b}{2m})^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{b\Omega}$$

$$v_{\max} = \Omega A_{\max} = \frac{F_0}{b}$$

5.32 某受迫振动系统的共振曲线如图所示。当驱动力频率为 Ω_1 和 Ω_2 时,相应 $A = A_{\max}/\sqrt{2}$ 。可以证明,驱动力的平均功率 P 与振幅平方成正比。所以在 Ω 轴上这两点,即 $\Omega = \Omega_1$ 和 $\Omega = \Omega_2$,相应的功率 $P = P_{\max}/2$,故这两点称为半功率点。试证:两半功率点之间的宽度,即 $\Delta\Omega = (\Omega_2 - \Omega_1)$ 与 Q 值有如下近似关系: $\Delta\Omega = \omega_0/Q$ 。这说明 Q 值越大,共振峰越尖锐。



题 5.32 图

解 受迫振动振幅为

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

共振时振幅为

$$A_{\max} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

半功率点

$$\frac{A^2}{A_{\max}^2} = \frac{(\omega_0^2 - \beta^2)\Omega^2}{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{4\beta^2\Omega^2} + 1} = \frac{1}{2}$$

因 $\Delta\Omega$ 很小, $\Omega \approx \omega_0$, β^2/Ω^2 可忽略,故

$$\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{4\beta^2\Omega^2} = 1$$

或

$$(\Omega^2 + 2\beta\Omega - \omega_0^2)(\Omega^2 - 2\beta\Omega - \omega_0^2) = 0$$

删去负根,得

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2} - \beta$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2} + \beta$$

故

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\beta$$

而

$$Q = \frac{\omega'}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

因此

$$\Delta\Omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$$

5.33 同方向两谐振动

$$x_1 = 4\cos(4\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$x_2 = 2\cos(4\pi t + \frac{5\pi}{6})$$

写出这两谐振动合成的谐振动表达式

解 设合振动为 $x = A\cos(4\pi t + \varphi)$

则
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\pi}{3}$$

故

$$x = 2\sqrt{3}\cos(4\pi t + \frac{\pi}{3}) \quad (\text{SI})$$

5.34 两个同方向同频率的谐振动 $x_1 = 0.4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{6})\text{m}$, $x_2 = 0.2\cos(2\pi t + \varphi_2)\text{m}$, 试问: (1) φ_2 为何值时合振动的振幅最大? 并求出此振幅值; (2) φ_2 为何值时合振动的振幅最小? 并求出此振幅值。

解 (1) $\varphi_2 = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \quad (n=0, \pm 1, \dots)$

$$A_{\max} = A_1 + A_2 = 0.6\text{m}$$

(2) $\varphi_2 = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6} \quad (n=0, \pm 1, \dots)$

$$A_{\min} = |A_1 - A_2| = 0.2\text{m}$$

5.35 若日光灯电路中灯管两端电压和镇流器两端的电压分别为

$$u_1 = 90\sqrt{2}\cos 100\pi t \quad \text{V}$$

$$u_2 = 200\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{V}$$

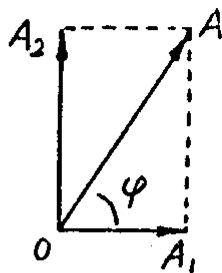
试求日光灯电路两端的总电压 $U = u_1 + u_2$ 的表达式。

解 由旋转矢量图知,

合振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 310\text{V}$

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 65.8^\circ$$

合振动 $u = u_1 + u_2 = 310\cos(100\pi t + 65.8^\circ) \quad (\text{V})$



5.36 两个同方向的谐振动、周期相同, 振幅为 $A_1 = 0.05\text{m}$, $A_2 = 0.07\text{m}$, 组成一个振幅为 $A = 0.09\text{m}$ 的谐振动。求两个分振动的相位差。

解 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

故 $\varphi_2 - \varphi_1 = \cos^{-1} \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = 84.3^\circ$

5.37 设 3 个谐振动的表达式分别为

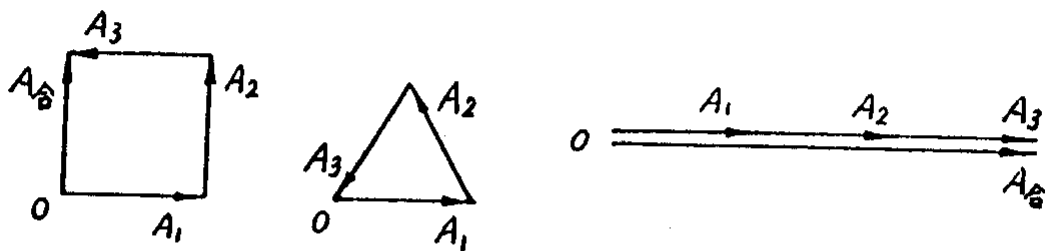
$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$x_3 = A\cos(\omega t + 2\delta)$$

试用旋转矢量法分别求出 $\delta = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, 2\pi$ 时的合振动振幅。

解



5.38 三个同方向、同频率的谐振动为

$$x_1 = 0.04\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_2 = 0.04\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_3 = 0.04\cos\left(120\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

试求合振动的表达式。

解 同方向同频率谐振动合成,合振动为谐振动。设合振动为

$$x = A \cos(120\pi t + \varphi)$$

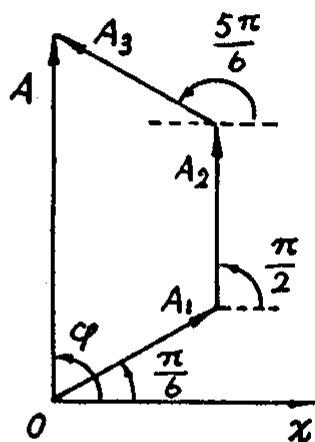
由振幅矢量图知,合振动振幅和初位相分别为

$$A = 2 \times 0.04\text{m} = 0.08\text{m}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

故

$$x = 0.08 \cos(120\pi t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{SI})$$



5.39 质点分别参与下列三组相互垂直的谐振动(位移单位为厘米)

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2 \cos(8\pi t + \frac{\pi}{6}) \\ y = 2 \cos(8\pi t - \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2 \cos(8\pi t + \frac{\pi}{6}) \\ y = 2 \cos(8\pi t - \frac{5\pi}{6}) \end{cases}$$

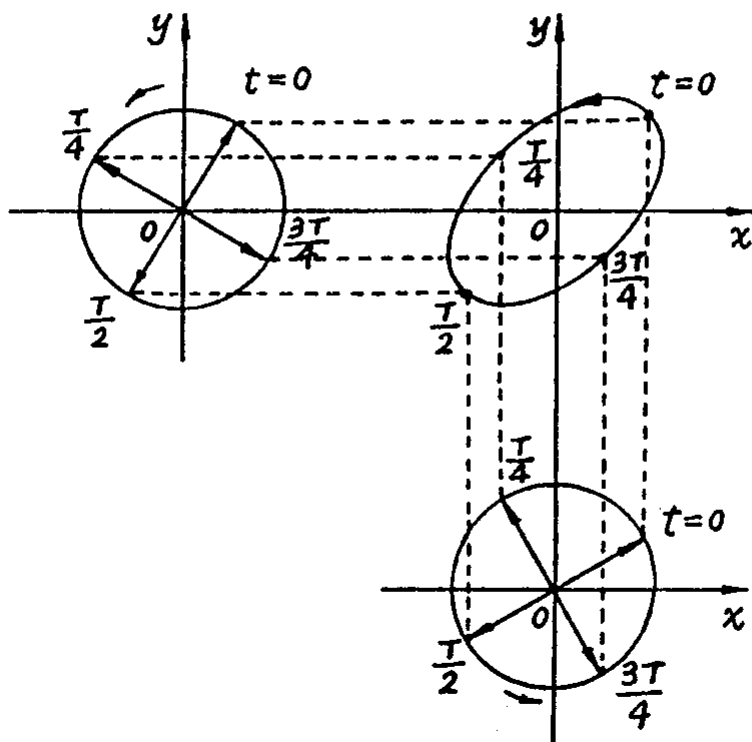
$$(3) \quad \begin{cases} x = 2 \cos(8\pi t + \frac{\pi}{6}) \\ y = 2 \cos(8\pi t + \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

试判断质点运动的轨迹,并画出其草图。如是圆运动,并指出是顺时针或逆时针运动。

解(1)相互垂直同频率谐振动合成, $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$ 。合运动轨道为斜椭圆。逆时针方向绕行($-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 0$)。

(2)因

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi$$

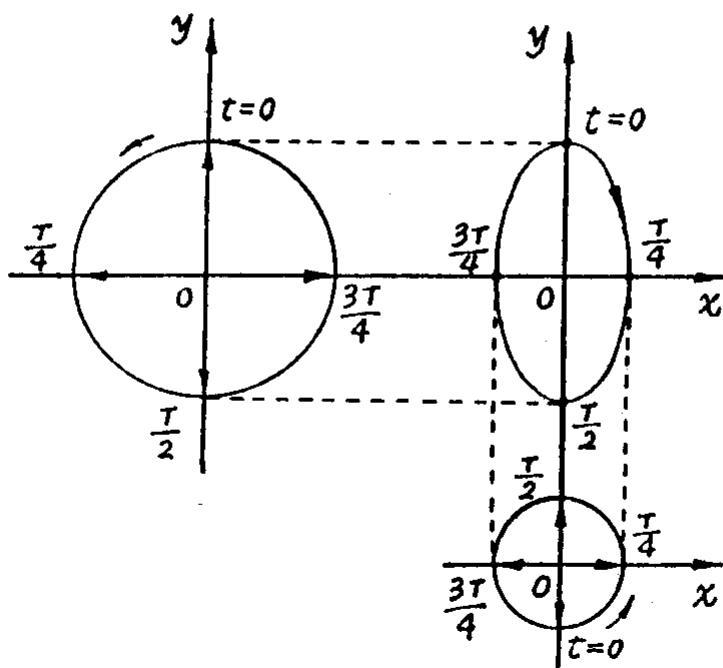


合运动为直线

$$(3) \quad 0 < \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} < \pi, A_1 = A_2,$$

故合运动轨道为圆, 绕行方向顺时针。

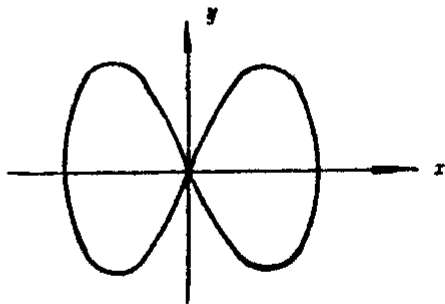
5.40 已知某质点参与如下相互垂直的谐振动: $x = A \cos(\omega t -$



$\frac{\pi}{2}$) 和 $y=2A\cos\omega t$ 。试在 xy 平面上画出这质点运动轨迹的草图。并指出是逆时针还是顺时针绕向。

解 $A_y=2A_x, \varphi_2-\varphi_1=+\frac{\pi}{2}$, 故是正椭圆, y 方向长半轴为 x 方向的 2 倍, 顺时针方向绕行。

5.41 某质点参与相互垂直的谐振动。设 $x=A_x\cos\omega_x t$ 和 $y=A_y\cos(\omega_y t+\varphi_y)$ 。其合运动的轨迹如图所示。试求 (1) A_x/A_y ; (2) ω_x/ω_y 和 (3) φ_y 之值。



题 5.41

解 由图知:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{1.35}{1.15} = 0.85 \quad \varphi_y = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}$$