

第四章 狭义相对论基础

4.1 惯性系 K 和 K' 的坐标轴互相平行, K' 相对 K 以速度 $u=0.60c$ 沿 x 轴正方向运动, $t=t'=0$ 时, 两坐标原点恰好重合。若 K 系中 $t=2.0\times 10^{-8}\text{s}$ 时在 $x=3.0\text{m}$ 、 $y=2.0\text{m}$ 、 $z=1.0\text{m}$ 处发生一个事件, 求该事件在 K' 系中的时空坐标。

解 由洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -0.75 \text{ m}$$

$$y' = y = 2.0 \text{ m}$$

$$z' = z = 1.0 \text{ m}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 1.75 \times 10^{-8} \text{ s}$$

4.2 相对于地球, 飞船 A 的速度为 $2.4\times 10^8\text{m/s}$, 飞船 B 的速度 $1.5\times 10^8\text{m/s}$, 沿同一方向飞行。求: (1) A 相对 B 的速度; (2) B 相对 A 的速度。

解 (1) 以地球为 K 系, B 为 K' 系, 则 $u=1.5\times 10^8\text{m/s}$
 $v_A=2.4\times 10^8\text{m/s}$ 故 A 相对 B 的速度为

$$v_A' = \frac{v_A - u}{1 - uv_A/c^2} = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(2) 以地球为 K 系, A 为 K' 系, 则 $u=2.4\times 10^8\text{m/s}$, $v_B=1.5\times 10^8\text{m/s}$, 故 B 相对 A 的速度为

$$v_B' = \frac{v_B - u}{1 - uv_B/c^2} = -1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

4.3 一原子核以 $0.50c$ 的速度离开观察者, 并以 $0.80c$ 的速度(相对原子核)向前发射一个电子, 又向后发射一个光子。求: (1) 电子相对观察者的速度; (2) 光子相对观察者的速度。

解 (1) 以观察者为 K 系, 原子核为 K' 系, 则 $u=0.50c$, v_x'

$=0.8c$, 故相对观察者, 电子速度为

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} = 0.93c$$

(2) 光子 $v_x' = -c$, $u = 0.5c$, 故光子相对观察者速度为

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} = -c$$

这是光速不变原理的必然结果。

4.4 已知光在静水中的速度为 $\frac{c}{n}$, n 为水的折射率。求在流速为 u 的水中光的速度。

解 以实验室为 K 系, 流水为 K' 系, 则光在 K' 系中速度为 $v_x' = \frac{c}{n}$ (流水相对 K' 系为静水), 实验室观察到光在流速 u 的水中的光速为

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + u(\frac{c}{n})/c^2} = \frac{c + nu}{n + u/c}$$

4.5 相对于地球, 飞船 A 以 $0.80c$ 向正北飞行, 飞船 B 以 $0.60c$ 正西飞行。求飞船 A 相对飞船 B 的速度。

解 以地球为 K 系, B 为 K' 系, 正东为 x 轴正方向, 正北为 y 轴正方向, 则 $u = -0.60c$, A 在 K 系中速度为 $v_x = 0$, $v_y = 0.8c$, $v_z = 0$, A 在 K' 系中的速度为

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = 0.60c$$

$$v_y' = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} = 0.64c$$

$$v_z' = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2} = 0$$

故

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2} = 0.88c$$

ν 方向为东偏北 $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{v_y'}{v_x'} = 46^\circ 51'$

4.6 观察者与米尺之间沿尺长方向有相对运动, 现观察者测得米尺的长度为 0.60m, 求此米尺相对观察者的运动速度。

解 静长 $l_0 = 1.0 \text{ m}$, $l = 0.60 \text{ m}$

因 $l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$

故观察者相对米尺的速度为

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = 0.8c = 2.4 \times 10^8 \text{ m/s}$$

4.7 静长 2.5m 的汽车以 30 m/s 的速度作匀速直线运动按狭义相对论, 地面观察者测得的汽车长度比静长短多少?

解: 观察者测得车长

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} \approx l_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right)$$

汽车缩短为

$$l_0 - l = \frac{l_0}{2} \frac{u^2}{c^2} = 1.25 \times 10^{-14} \text{ m}$$

4.8 与铁道平行有一块长 2.0m、高 1.2m 的竖直广告牌, 若在以 $0.80c$ 的速度沿铁道运动的高速列车上测量, 此广告牌长多少? 高多少?

解 长为

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = 1.2 \text{ m}$$

高为

$$h = 1.2 \text{ m}$$

4.9 惯性系 K 和 K' 的坐标轴互相平行。一根米尺在 K' 系中静止, 与 ox' 轴成 30° 角, 而在 K 系中该米尺与 ox 轴成 45° 角, 求: (1) K' 系相对于 K 系的运动速度; (2) 在 K 系中, 该米尺长多少?

解 (1) K' 中, 尺静长 $l_0 = 1.0 \text{ m}$

$$l_{0x} = l_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

$$l_{oy} = l_0 \sin 30^\circ = 0.50 \text{ m}$$

在 K 系中

$$l_y = l_{oy} = 0.50 \text{ m}$$

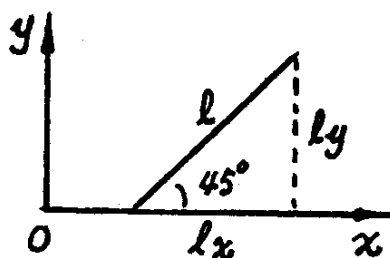
$$\begin{aligned} l_x &= l_{ox} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{aligned}$$

由图知, $l_x = l_y \cot 45^\circ = 0.50 \text{ m}$

故 $u = \sqrt{\frac{2}{3}} c = 0.816 c$

(2) K 系中米尺长为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 0.71 \text{ m}$$



解 4.9 图

4.10 一天体正以 $0.80 c$ 的速度离开地球,地球上测得该天体

闪光的周期为 120h ,在与此天体相对静止的参照系中测量,该天体的闪光周期为多少?

解 与天体相对静止的参照系中测得为原时 Δt_0 。

因
$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

故
$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2} = 72 \text{ h}$$

4.11 在实验室中,一粒子以 $0.80 c$ 的速度飞行 3.0 m 后衰变掉。求:(1)在实验室参照系中,此粒子的寿命;(2)在与此粒子相对静止的参照系中,此粒子的寿命。

解 (1)实验室中粒子寿命为

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = 1.25 \times 10^{-8} \text{ s}$$

(2)在与粒子相对静止的参照系中为原时 Δt_0 ,故

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.75 \times 10^{-8} \text{ s}$$

4.12 μ 子的平均寿命原时为 $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。由于宇宙射线与大气作用,在 $1.00 \times 10^4 \text{ m}$ 的高空产生了速度(相对地面)为 $0.998c$ 的 μ 子,问这些 μ 子是否可能到达地面?

解 μ 子在地面参照系中寿命为

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 3.48 \times 10^{-5} \text{ s}$$

能飞行距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= v_x \Delta t = u \Delta t = (0.998 \times 3 \times 10^8 \times 3.48 \times 10^{-5}) \text{ m} \\ &= 1.04 \times 10^4 \text{ m} > 1.00 \times 10^4 \text{ m} \end{aligned}$$

故能到达地面。

4.13 地球上某地先后受到两个雷击,时间间隔 1 s 。在相对地球沿两雷击连线方向作匀速直线运动的飞船中测量,这两个雷击相隔 2 s 。求这两个雷击在飞船参照系中的空间间隔。是否存在一个惯性系,这两个雷击的时间隔为 0.9 s ?

解 以地球为 K 系,飞船为 K' 系。在 K 系中,两雷击时间间隔为原时 $\Delta t_0 = 1 \text{ s}$,飞船中测出 $\Delta t' = 2 \text{ s}$,因

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

故飞船速度为

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t'}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

因地面系中,两雷击发生于同一地点,按洛伦兹变换

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{(x_2' - x_1') + u(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 0 \end{aligned}$$

故这两雷击在飞船参照系中的空间间隔为

$$x_2' - x_1' = -u(t_2' - t_1') = -u\Delta t' = -5.20 \times 10^8 \text{ m}$$

4.14 实验室中,速度为 $0.9c$ 的 π 介子在衰变前前进了 55 m ,求 π 介子在相对静止的参照系中的寿命。

解 实验室参照系中, π 介子寿命

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = 1.85 \times 10^{-7} \text{ s}$$

π 介子在相对静止参照系中的寿命为原时 Δt_0 ,故

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2} = 2.61 \times 10^{-8} \text{ s}$$

4.15 地面上,一运动员以 10 m/s 的速度沿 100 m 直线跑道从起点跑到终点。求在相对地面以 $0.80c$ 的速度沿跑道方向飞行的飞船上测量,运动员跑了多远距离,用了多少时间?

解 以地面为 K 系,飞船为 K' 系,设起跑和到达终点这两个事件的时空坐标在 K 系中为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) ,在 K' 系中为 (x'_1, t'_1) 和 (x'_2, t'_2) ,则已知 $u=0.80c$, $x_2-x_1=100\text{ m}$, $v_x=10\text{ m/s}$ 。地面系中所需时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v_x} = 10 \text{ s}$$

K' 系中跑的距离为

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -4.0 \times 10^9 \text{ m} \end{aligned}$$

所用时间为

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{t_2 - ux_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{t_1 - ux_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{(t_2 - t_1) - u(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= 16.7 \text{ s} \end{aligned}$$

4.16 惯性系 K 与 K' 的坐标轴互相平行, K' 系相对 K 系沿 x 轴正方向作匀速直线运动。在 K 系中的 x 轴上发生两个同时事

件,空间间隔 1.0 m。在 K' 系中,这两个事件的空间间隔为 2.0 m。求在 K' 系中,这两个事件的时间间隔。

解 两事件的空间间隔为 $x_2 - x_1 = 1.0$ m, 和 $x_2' - x_1' = 2.0$ m, 在 K 系中同时,故 $t_2 = t_1$ 。由洛伦兹变换

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

故

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2' - x_1'}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

在 K' 系中两事件的时间间隔为

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - ux_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{t_1 - ux_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= -5.77 \times 10^{-9} \text{ s} \end{aligned}$$

4.17 一列静长为 120 m 的列车以 30 m/s 的速度在地面上作匀速直线运动。列车上的观察者测得两个雷同时击中车头和车尾。求地面观察者测得这两个雷击的时间间隔,车头先击中还是车尾先击中?

解 以地为 K 系,车为 K' 系,车前进方向为 x 轴正方向。设在两参照系中,车头雷击事件的时空坐标为 (x_1, t_1) 和 (x_1', t_1') , 车尾雷击事件的时空坐标为 (x_2, t_2) 和 (x_2', t_2') 。由洛伦兹变换

$$t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + u(x_2' - x_1')/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

已知 $t_2' = t_1'$, $x_2' - x_1' = -l_0$

故

$$t_2 - t_1 = \frac{u(-l_0)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -4.0 \times 10^{-14} \text{ s}$$

尾先击中。

4.18 静长 100 m 的飞船以 1.8×10^8 m/s 的速度相对地面作

匀速直线运动。宇航员测得一粒子从船尾发射后,经过 4.0×10^{-7} s 击中船头靶子。求:(1)粒子相对飞船的速度;(2)粒子相对地面的速度;(3)在地面参照系中,粒子从发射到中靶所经过的空间距离;(4)在地面参照系中,粒子从发射到中靶所经过的时间。

解 以地面为 K 系,飞船为 K' 系, x 轴正方向沿飞船前进方向。

(1)粒子相对飞船的速度

$$v_x' = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{l_0}{\Delta t'} = \frac{100}{4 \times 10^{-7}} = 2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(2)粒子相对地面的速度

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} = 2.87 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(3)地面参照系中,中靶与发射的空间间隔为

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + u(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 215 \text{ m}$$

(4)地面参照系中,从发射到中靶的时间间隔

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v_x} = 7.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

或按洛伦兹变换求。

4.19 在地面上观测,飞船和慧星分别以 $0.60c$ 和 $0.80c$ 的速度相向而行,再经 5 s 两者将相撞,求:(1)慧星相对飞船的速度;(2)在飞船上观测,再经多少时间相撞?

解 以地面为 K 系,飞船为 K' 系,则 $u=0.60c$,慧星在 K 系中速度 $v_x = -0.80c$

(1) K' 系中慧星速度

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = 0.946c$$

(2)飞船测得为原时 Δt_0 ,地面测得为 Δt ,故

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - u^2/c^2} = 4.0 \text{ s}$$

或按洛伦兹变换求 $\Delta t_0 = t_2' - t_1' = 4.0 \text{ s}$ 。

4.20 当粒子的速度多大时,它的质量等于静止质量的 3 倍?

解
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3m_0$$

故

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0.94 c$$

4.21 静长为 l_0 、静止质量为 m_0 的细杆相对地面以速度 v 运动,求在地面参照系中此杆的质量线密度。细杆运动方向分别为:

(1)沿杆长方向;(2)沿垂直杆长的方向。

解 (1)沿杆长方向运动

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

故

$$\rho = \frac{m}{l} = \frac{m_0}{l_0(1 - v^2/c^2)}$$

(2)沿垂直杆方向运动

$$l = l_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

故

$$\rho = \frac{m}{l} = \frac{m_0}{l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

4.22 速度为 $1.8 \times 10^8 \text{ m/s}$ 的电子,其动能和动量各多大?
(已知电子的静止质量为 $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$)

解 电子动能

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$= 2.05 \times 10^{-14} \text{ J}$$

动量为

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2.05 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

4.23 若使粒子的速度由原来的 $0.40c$ 增大为原来的 2 倍, 则粒子的动量增大为原来的几倍?

解 已知初速度 $v = 0.40c$, 末速度 $v' = 2v = 0.80c$, 故末动量 p' 与初动量 p 之比为

$$\frac{p'}{p} = \frac{m_0 v' / \sqrt{1 - v'^2/c^2}}{m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3.06$$

4.24 一个粒子的动量是按经典动量公式计算所得数值的 2 倍, 此粒子的速度多大?

解 按题意

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2m_0 v$$

故

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866c$$

4.25 把电子的速度由静止加速到 $v_1 = 0.60c$, 外界需对它做功多少? 把电子速度由 $v_1 = 0.60c$ 加速到 $v_2 = 0.80c$, 外界需对它做功多少?

解 (1) 按动能定理

$$\begin{aligned} A &= E_{k1} - E_{k0} = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - m_0 c^2 \right) - 0 \\ &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - 1 \right) = 2.05 \times 10^{-14} \text{ J} \end{aligned}$$

(2)

$$A = E_{k2} - E_{k1}$$

$$\begin{aligned}
&= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - 1 \right) - m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - 1 \right) \\
&= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right) \\
&= 3.41 \times 10^{-14} \text{ J}
\end{aligned}$$

4.26 2 g 氢与 16 g 氧燃烧生成水, 在这个化学反应过程中放出热量 $2.5 \times 10^5 \text{ J}$ 。问反应前后静止质量减少了多少?

解 放出能量所对应的质量为

$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E}{c^2} = 2.78 \times 10^{-12} \text{ kg}$$

静质量亏损极其微小。

4.27 太阳因辐射能量, 静止质量每秒钟减少 $4.0 \times 10^9 \text{ kg}$, 求太阳的辐射功率。

解 每秒钟放出的能量

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 3.6 \times 10^{26} \text{ J}$$

辐射功率为

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 3.6 \times 10^{26} \text{ W}$$

4.28 两个小球的静止质量均为 m_0 。若其中一个以 $0.60c$ 的速度与另一个静止的发生完全非弹性正碰撞。求碰后粘合体的运动速度和静止质量。

解 碰撞前后总能量和总动量守恒

$$mc^2 + m_0 c^2 = M c^2$$

$$mv = MV$$

而

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

解得

$$M = \frac{9}{4} m_0$$

$$V = \frac{m}{M}v = \frac{1}{3}c = 0.33c$$

$$\hookrightarrow M_0 = M \sqrt{1 - V^2/c^2} = 2.12m_0$$

4.29 两个氘核结合成氦核。求氦的结合能。已知氘核和氦核的静止质量分别为 $m_D = 2.01355u$, $m_{He} = 4.00151u$ 。

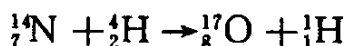
解 核反应中能量守恒

$$2m_D c^2 = m_{He} c^2 + \Delta E$$

故结合能为

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2m_D - m_{He})c^2 \\ &= (2 \times 2.01355 - 4.00151) \times 1.66 \times 10^{-27} \times (3.0 \times 10^8)^2 \\ &= 3.82 \times 10^{-12} \text{J} \end{aligned}$$

4.30 动能多大的 α 粒子(${}^4_2\text{H}$)轰击 ${}^{14}_7\text{N}$, 可实现下列核反应:



已知 ${}^{14}_7\text{N}$ 、 ${}^4_2\text{H}$ 、 ${}^{17}_8\text{O}$ 和 ${}^1_1\text{H}$ 的静止质量分别为 $m_1 = 13.99922u$ 、 $m_2 = 4.00151u$ 、 $m_3 = 16.99476u$ 和 $m_4 = 1.00728u$ 。

解 按能量守恒定律

$$(m_1 + m_2)c^2 + E_k = (m_3 + m_4)c^2$$

因此, α 粒子的动能至少为

$$\begin{aligned} E_k &= [(m_3 + m_4) - (m_1 + m_2)]c^2 \\ &= 1.96 \times 10^{-13} \text{J} \end{aligned}$$

4.31 静止的 π^+ 介子衰变为 μ^+ 子和 ν 子(中微子), 三者静止质量分别为 m_π 、 m_μ 和 0。求 μ^+ 子和 ν 子的动能。

解

$$\pi \rightarrow \mu^+ + \nu$$

能量守恒

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2$$

能动关系

$$E_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4$$

$$E_\nu = p_\nu c$$

动量守恒

$$p_\mu - p_\nu = 0$$

解得

$$E_{k\mu} = E_{\mu} - m_{\mu}c^2 = \frac{(m_{\pi} - m_{\mu})^2 c^2}{2m_{\pi}}$$

$$E_{k\nu} = E_{\nu} = \frac{(m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)c^2}{2m_{\pi}}$$

4.32 实验室中, 能量为 E 的 γ 光子射向静止的质子。求:
(1) 在实验室参照系中, γ 光子的动量; (2) 在实验室参照系中, 系统的质心速度。

解 (1) 能量与动量关系

$$E_{\gamma} = p_{\gamma}c$$

故

$$p_{\gamma} = \frac{E}{c}$$

(2) 质心速度为

$$V_c = \frac{m_{\gamma}v_{\gamma} + m_p v_p}{m_{\gamma} + m_p}$$

因

$$m_{\gamma}v_{\gamma} = p_{\gamma} = \frac{E}{c}$$

$$m_{\gamma} = \frac{E}{c^2}$$

$$v_p = 0$$

故得

$$V_c = \frac{Ec}{E + m_p c^2} = \frac{c}{1 + m_p c^2/E}$$

4.33 在实验室中, 质子 A 以 $0.60c$ 的速度向东运动, 质子 B 以 $0.5c$ 的速度向西运动, 求: (1) 在实验室参照系中, 质子 A 的动能和动量的大小; (2) 在与质子 B 相对静止的参照系中, 质子 A 的动能和动量的大小。

解 (1) 以实验室为 K 系, x 轴指向正东方, 则 K 系中质子 A 速度为 $v = v_x = 0.60c$, 动量为

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0.75m_0 c$$

动能为

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \\ &= 0.25 m_0c^2 \end{aligned}$$

(2)以 B 为 K' 系,则 $u = -0.50c$, 质子 A 在与 B 相对静止的参照系中速度为

$$v' = v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = 0.846c$$

动量为

$$p' = m'v' = \frac{m_0v'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = 1.59 m_0c$$

动能为

$$\begin{aligned} E_k' &= m'c^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} - 1 \right) \\ &= 0.876 m_0c^2 \end{aligned}$$