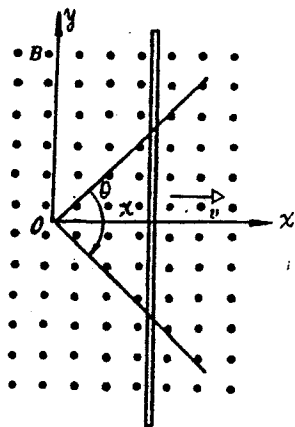


题 14.2 图



解 14.2 图

$$\mathcal{E}_i = Blv = 2Bvxtg \frac{\theta}{2}$$

因 $t=0, x_0=0$, 故 $x=vt$

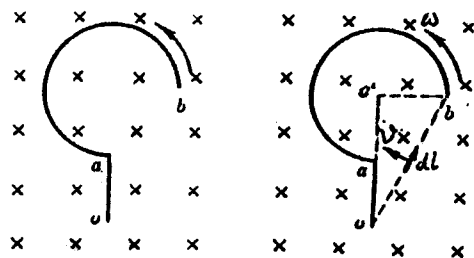
$$\mathcal{E}_i = 2Bv^2tg \frac{\theta}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} t &= \frac{\mathcal{E}_i}{2Bv^2tg \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{56.8}{2 \times 0.352 \times 5.21^2 \times tg 55^\circ} \\ &= 2.08s \approx 2s \end{aligned}$$

14.3 一导体被弯成附图所示的形状, 放在均匀磁场 B 中, ab 为半径 R 的 $3/4$ 圆弧, $oa=R$, 若此导线以角速度 ω 绕通过 o 点并与磁场平行的轴逆时针匀速转动, 求此导线 oab 中的动生电动势。哪一端电势高?

解 作辅助线 ob , 由于闭合回路 $oabo$ 在转动过程中磁通量不变, 所以总电动势为零, 故有



题 14.3 图

解 14.3 图

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega} &= \mathcal{E}_{\omega} = \int_0^{\omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_0^{\omega} B\omega dl = \frac{1}{2} B\omega (ob)^2 \\ &= \frac{5}{2} B\omega R^2 \end{aligned}$$

方向从 $b \rightarrow a \rightarrow o$, 即 o 点电势高。

14.4 在与均匀恒定磁场 B 垂直的平面内, 有一半径为 R 的 $3/4$ 圆弧形导线 abc , 导线沿 x 轴方向以速度 v 向右平动。求导线上的动生电动势。

解 作辅助线 ac , 闭合回路 $abca$ 在运动过程中磁通量不变, $\mathcal{E}_{\text{总}}=0$, 故

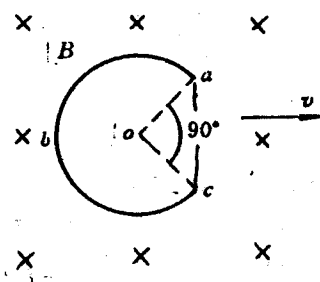
$$\mathcal{E}_{abc} = \mathcal{E}_{ac}$$

$$l_{ac} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R \text{ 且与 } v \text{ 垂直}$$

$$\mathcal{E}_{ac} = Bl_{ac}v = \sqrt{2}BRv$$

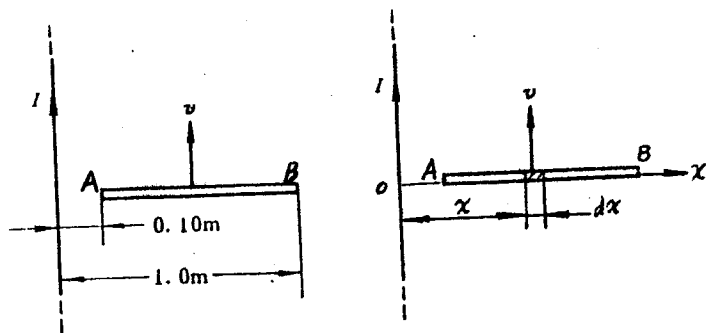
$$\mathcal{E}_{abc} = \sqrt{2}BRv$$

方向 $c \rightarrow b \rightarrow a$, a 点电势高



题 14.4 图

14.5 如图所示,金属杆 AB 以匀速 $v=2.0\text{m/s}$ 平行于一长直导线运动,此导线载有电流 $I=4.0\text{A}$,问 AB 金属杆中感应电动势为若干?哪一端电势高?



题 14.5 图

解 14.5 图

解 建立如图坐标系,在金属杆上取一线元 dx

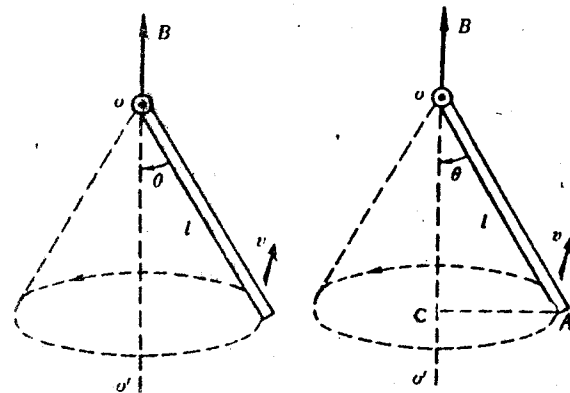
$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_i &= (v \times B) \cdot dl = v \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx \\ \mathcal{E}_i &= \int_{0.10}^{1.0} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \omega \pi U \\ &= \frac{-\mu_0 I v}{2\pi} \ln 10 \\ &= -3.68 \times 10^{-6} \text{V} \end{aligned}$$

左侧 A 端电势高。

14.6 在磁感应强度为 B 的均匀磁场中,有一长为 L 的导体棒以角速度 ω 绕 oo' 轴旋转。 oo' 轴与磁场方向平行,棒与磁场方向夹角为 θ ,求导线棒中的动生电动势。

解 作辅助线 AC , $AC \perp oo'$,显然闭合回路 $ACOA$ 在转动过程中磁通量不变, $\mathcal{E}_B = 0$,而 oo' 边又不动,故 $\mathcal{E}_{AO} = \mathcal{E}_{AC}$

$$\mathcal{E}_{AC} = \frac{1}{2} B \omega \overline{AC}^2 = \frac{1}{2} B \omega L^2 \sin^2 \theta = \mathcal{E}_{AO}$$



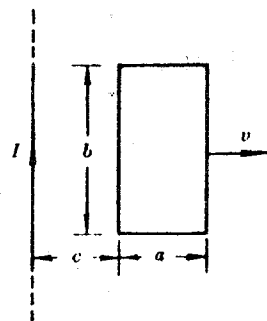
题 14.6 图

解 14.6 图

方向由 $O \rightarrow A$, 下端 A 的电势高。

14.7 如图所示,一长直导线通有电流 $I=5.0\text{A}$,且在其旁有 $N=1000$ 匝矩形线圈,若线圈以速度 $v=0.030\text{m/s}$ 沿垂直于长直导线方向向右匀速离去,求在图示位置的瞬时,线圈中的感应电动势是多少?(设 $c=0.050\text{m}$, $a=0.020\text{m}$, $b=0.040\text{m}$)。

解 矩形线圈在运动过程中,只有与通电导线相平行的两条边在切割磁力线



题 14.7 图

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = NB_1 bv - NB_2 bv \\ &= \frac{Nb v \mu_0 I}{2\pi c} - \frac{Nb v \mu_0 I}{2\pi(c+a)} \\ &= \frac{Nb v \mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{1000 \times 0.04 \times 0.03 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \left(\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.07} \right)}{2\pi} \\ &= 6.86 \times 10^{-6} \text{V} \end{aligned}$$

14.8 若上题中线圈静止在图示位置,而长直导线通以交流电

$I = 10 \sin 100\pi t$, 问线圈中感应电动势为若干?

解 通过矩形线圈的磁通量

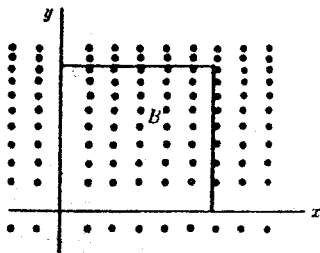
$$\Phi = \int d\Phi = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}$$

故

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{\mu_0 b}{2\pi} \times 10 \times 100\pi \cos 100\pi t \ln \frac{c+a}{c} \\ &\approx -8.4 \times 10^{-3} \cos 100\pi t \text{ V} \end{aligned}$$

14.9 一个非均匀磁场磁感应强度

的变化规律为 $B = 4t^2 y$ (SI), 方向垂直纸面向外。磁场中有一边长为 0.20m 的正方形线框, 其位置如图所示。试确定 $t = 0.25$ s 时线框中感应电动势的大小和方向。



题 14.9 图

解 先计算正方形线框任一时刻的磁通量, 由于 $B = 4t^2 y$, 故在正方形中取平行于 x 轴的小长条 $dS = dy$, 通过此面元的磁通量 $d\Phi = B \cdot dS = 4t^2 y dy$

$$\Phi(t) = \int_0^a 4t^2 y dy = 2t^2 a^3$$

正方形线框任一时刻的感应电动势

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -4a^3 t$$

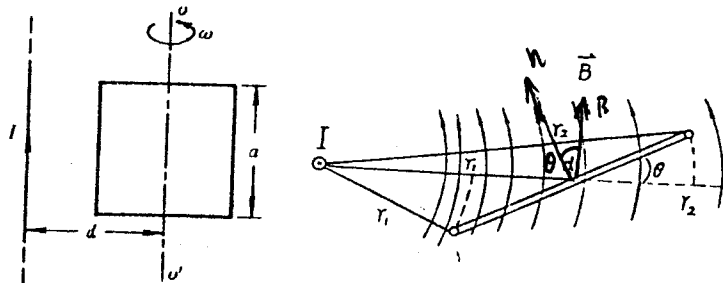
$t = 0.25$ s 时

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -4 \times (0.20)^3 \times 0.25 \\ &= -8.0 \times 10^{-3} \text{ V} \\ &= -8.0 \text{ mV} \end{aligned}$$

负号表示方向与题设方向相反, 即为顺时针方向。

14.10 在长直导线附近, 有一边长为 a 的正方形线圈, 绕其中心线 oo' 以角速度 ω 旋转, 转轴 oo' 与长直导线间的距离为 d , 如导线

中通有电流 I , 求线圈中的感应电动势。



题 14.10 图

解 14.10 图

解 设线圈转过 θ 角, 其俯视图如图所示, 这时穿过线圈回路的磁通量

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cos\theta a dl \\ &= B a dr \\ \cos\theta dl &= dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

其中

$$r_1 = \sqrt{d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2d\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta}$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2d\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta}$$

故

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d a \cos\theta}{d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - d a \cos\theta}}$$

因 $\theta = \omega t$, 于是有

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 a I}{4\pi} \left[\frac{d a \omega \sin \omega t}{d^2 + (\frac{a}{2})^2 + d a \cos \omega t} - \frac{-d a \omega \sin \omega t}{d^2 + (\frac{a}{2})^2 - d a \cos \omega t} \right]$$

$$= -\frac{\mu_0 a^2 d \omega I}{4\pi} \sin \omega t \left[\frac{1}{d^2 + (\frac{a}{2})^2 + d a \cos \omega t} + \frac{1}{d^2 + (\frac{a}{2})^2 - d a \cos \omega t} \right]$$

14.11 设有半径为 a 、高度为 b 的铝圆盘,其电阻率为 ρ ,把圆盘放在均匀磁场中,磁场方向垂直盘面。设磁场随时间变化,且 $\frac{dB}{dt} = k$, k 为一常量。求盘内的感应电流(圆盘内感应电流产生的磁场略去不计)。

解 在圆盘中选取一个半径为 r ,宽度 dr 的同心小圆环,通过小圆环的磁通量 $\Phi = \pi r^2 B$,相应的感应电动势

$$d\mathcal{E}_i = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -k\pi r^2$$

小圆环的电阻为 $R = \rho \frac{2\pi r}{bdr}$

小圆环上的感应电流

$$dI_i = \frac{d\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{kb}{2\rho} r dr$$

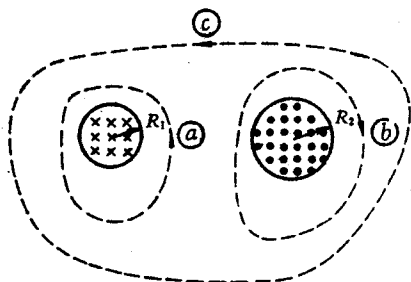
圆盘上的总感应电流

$$I_i = \int dI_i = -\frac{kb}{2\rho} \int_0^a r dr$$

$$= -\frac{kb}{4\rho} a^2$$

14.12 图中两个均匀磁场区域的半径分别为 $R_1 = 21.2\text{cm}$ 和 $R_2 = 32.3\text{cm}$,磁感应强度为 $B_1 = 48.6\text{mT}$ 和 $B_2 = 77.2\text{mT}$,方向如图

所示(忽略边缘效应)。两个磁场正以 8.5mT/S 的变化率减小。试对 a 、 b 、 c 三个回路分别计算积分 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。



题 14.12 图

解 对于回路 a

$$\oint_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_a}{dt} = \pi R_1^2 \frac{dB}{dt}$$

$$= \pi \times (21.2 \times 10^{-2})^2 \times (-8.5 \times 10^{-3})$$

$$= -1.2 \times 10^{-3} \text{V}$$

$$= -1.2 \text{mV}$$

回路 b

$$\oint_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_b}{dt} = \pi R_2^2 \frac{dB}{dt}$$

$$= \pi \times (32.3 \times 10^{-2})^2 \times (-8.5 \times 10^{-3})$$

$$= -2.79 \times 10^{-3} \text{V}$$

$$= -2.79 \text{mV}$$

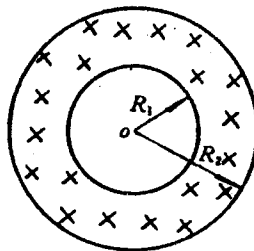
对于回路 c

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_a}{dt} - \frac{d\Phi_b}{dt}$$

$$= -1.2 + 2.79$$

$$= 1.59 \text{mV}$$

14.13 高度为 D 的铜质圆环,内半径为 R_1 ,外半径为 R_2 ,放置在垂直于环面的磁场中。若磁场局限在圆环范围内(见附图),且磁感应强度按 $B = \frac{t}{r}$ 规律变化,式中 t 为时间, r 为环上任一点与圆环中心的距离。已知铜的电阻率为 ρ ,求圆环上的电流。



题 14.13 图

解 在铜质圆环内选取一半径为 r ,宽度为 dr 的细小圆环,由题意,通过该圆环的总磁通量为

$$\Phi = \int_{R_1}^r B \cdot 2\pi r dr = \int_{R_1}^r 2\pi t dr$$

$$= 2\pi t(r - R_1)$$

圆环上的感应电动势的大小为

$$d\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -2\pi(r - R_1)$$

细圆环的电阻为 $R = \rho \frac{2\pi r}{Ddr}$

所以

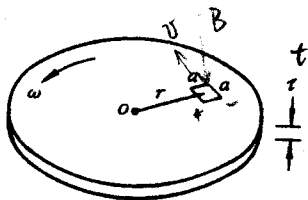
$$dI_i = \frac{d\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{D}{\rho} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) dr$$

$$I_i = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{D}{\rho} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) dr$$

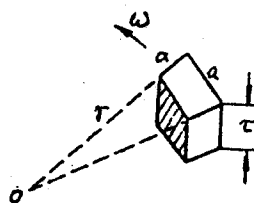
$$= -\frac{D}{\rho} \left[(R_2 - R_1) - R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

负号表示电流流向与题设相反,为顺时针方向。

14.14 一电磁“涡流”制动器由一电导率为 γ 和厚度为 t 的圆盘组成,此盘绕通过其中心的轴旋转,且有一覆盖面积为 a^2 的磁场 B 垂直于圆盘,如图所示,若面积 a^2 在离轴 r 处,当圆盘角速度为 ω 时,试求使圆盘慢下来的转矩的近似表式。



题 14.14 图



解 14.14 图

解 在圆盘上沿径向长度为 a 的线段切割磁力线而产生的感应电动势

$$\mathcal{E}_i = Bva = Br\omega a$$

而小方块 a^2 沿半径方向的电阻

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{a}{a\tau} = \frac{1}{\gamma\tau}$$

相应的感应电流

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = Bar\omega\gamma\tau$$

因此这一小体积在磁场中受到的力为

$$F = iaB$$

方向垂直半径。

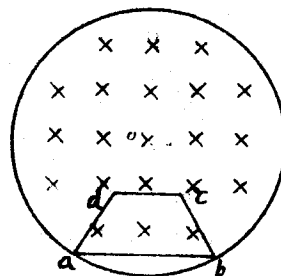
这力对转轴的力矩大小为

$$M = r \cdot F = iaBr$$

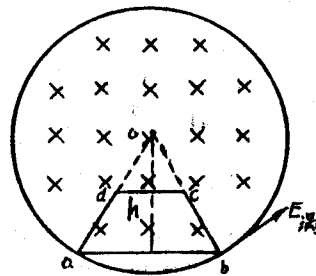
$$= B^2 a^2 r^2 \omega \gamma \tau$$

14.15 如图所示,均匀磁场 B 被限制在半径 R 的无限长圆柱空间中,方向垂直纸面向里。磁场中放置一等腰梯形金属框 $abcd$ 。设此磁场正以 $\frac{dB}{dt}$ 的速率增加,已知 $ab = R, cd = R/2$ 。试求:

- (1) 各边中的感生电动势;
- (2) 线框中的总感应电动势。



题 14.15 图



解 14.15 图

解 由分析可知,在长直圆柱体内外空间的涡旋电场方向均沿切线,且指向逆时针方向,所以

$$\mathcal{E}_{bc} = \mathcal{E}_{da} = 0$$

$$\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}_{\Delta abo} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = S \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} hR \frac{dB}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{dB}{dt}$$

方向由 $a \rightarrow b$ 。

同理

$$\mathcal{E}_{dc} = \mathcal{E}_{\Delta odc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R \frac{dB}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{16} R^2 \frac{dB}{dt}$$

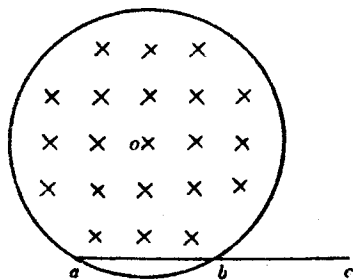
方向由 $d \rightarrow c$ 。

(2) 线框内的总电动势为

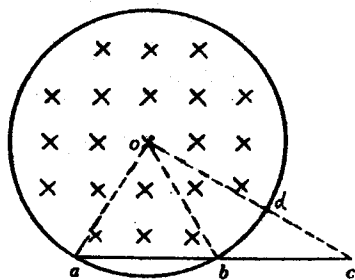
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ab} - \mathcal{E}_{dc} = \frac{3\sqrt{3}}{16} R^2 \frac{dB}{dt}$$

方向沿逆时针方向。

14.16 在 14.15 题所述的磁场中放置长为 $2R$ 的金属棒, 如图所示, 若 $ab=bc=R$, 求棒中的感生电动势。



题 14.16 图



解 14.16 图

解 作连接 oa 、 ob 、 oc 的辅助线, 由于 $E_{\text{感}}$ 方向始终沿圆周切线, 在径向线段上不产生感生电动势, 故

$$\mathcal{E}_{ac} = \mathcal{E}_{\Delta aco}$$

在 Δaco 中有磁通量的面积为 Δabo 和扇形 bdo , 即

$$S = \frac{1}{2} R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R + \frac{\pi}{6} \cdot \pi R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{\pi R^2}{12}$$

感应电动势的大小为

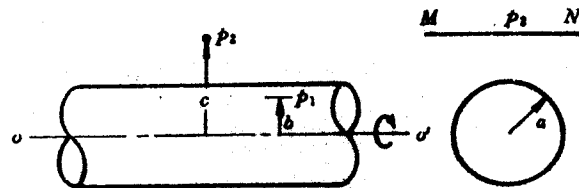
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ac} &= \mathcal{E}_{\Delta aco} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = S \frac{dB}{dt} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{\pi R^2}{12} \right) \frac{dB}{dt} \\ &= \frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} R^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

方向由 $a \rightarrow c$ 。

14.17 一半径为 a 的无限长均匀带电圆筒面, 单位长度上的电荷为 λ , 圆筒绕 oo' 以匀角加速度 β 转动, 试求:

(1) 圆筒内与轴相距为 b 的 P_1 点的电场强度;

(2) 若有一长为 l 的金属棒 MN 与圆筒轴线相垂直, P_2 点在金属棒正上方, 且已知垂直距离 $oP_2=c$, 求金属棒 MN 两端的电势差。



题 14.17 图

解 (1) 旋转的带电圆筒等效于载流长直螺线管。取长为 L 的一段圆筒, 带电量 $q = \lambda L$, 转动时形成的电流

$$I = nq = \frac{\omega}{2\pi} \lambda L \quad \beta = \omega$$

单位长度上的电流

$$j = \frac{I}{L} = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\lambda \beta t}{2\pi}$$

圆筒内的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{L} = \mu_0 j = \frac{\mu_0 \lambda \beta t}{2\pi}$$

方向沿轴向右。

再过 P_1 点作一同轴圆周回路, 则有

$$\begin{aligned}\oint E \cdot dl &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ E_{P_1} \cdot 2\pi b &= -\frac{d}{dt}(\pi b^2 \cdot B) \\ &= -\frac{d}{dt}(\pi b^2 \cdot \frac{\mu_0 \lambda \beta t}{2\pi}) \\ E_{P_1} &= -\frac{\mu_0 \lambda \beta b}{4\pi}\end{aligned}$$

负号表示涡旋电场的方向阻碍磁场的变化, 左视为顺时针方向。

(2) 作辅助线 OM 、 ON , 由于 $E_{\text{涡}}$ 沿圆周切向, 所以

$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{E}_{\Delta OMN}$$

三角形 OMN 中只有扇形 OAB 中有磁通量存在, 且 $\theta = \arctg \frac{l}{2c}$ 。穿过回路面积的磁通量为

$$\Phi = \frac{2\theta}{2\pi} \cdot \pi a^2 \cdot B = a^2 \theta B = \frac{\mu_0 \lambda \beta t}{2\pi} a^2 \theta$$

则有

$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{E}_{\Delta OMN} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 \lambda \beta a^2}{2\pi} \arctg \frac{l}{2c}$$

方向由 $M \rightarrow N$, N 端电势高。

14.18 电子在电子感应加速器中, 沿半径为 0.4m 的轨道作圆周运动。如果每转一周它的动能增加 160eV , 试求: (1) 轨道内磁感应强度 B 的平均变化率; (2) 欲使电子获得 16MeV 的能量需转多少周? 共走多长路程?

解 (1) 半径 R 的圆周上的感应电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \pi R^2 \cdot \frac{dB}{dt} \\ e\mathcal{E}_i &= \Delta E = 160\text{eV}\end{aligned}$$

故有

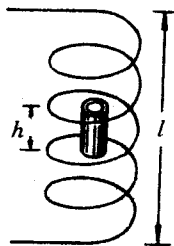
$$\frac{dB}{dt} = \frac{160}{\pi R^2} = \frac{160}{\pi \times 0.4^2} = 318\text{T/s}$$

$$(2) N = \frac{E}{e\mathcal{E}_i} = \frac{16 \times 10^6}{160} = 10^5 \text{ 周}$$

经过的路程

$$\begin{aligned}l &= N \cdot 2\pi R = 2\pi \times 0.4 \times 10^5 \\ &= 251 \times 10^3\text{m} \\ &= 251\text{km}\end{aligned}$$

14.19 为了排除真空器件中金属部件上附着的气体, 通常是将部件放在高频感应炉工作线圈的磁场中, 用感应电流使其加热以脱除气体。设工作线圈共 30 匝, 长 0.20m , 工作电流 $I = I_0 \sin 2\pi f t$, 其中 $I_0 = 25\text{A}$, $f = 1.0 \times 10^5\text{Hz}$, 被加热工件是一个半径 $r = 4.0 \times 10^{-3}\text{m}$ 的薄壁金属圆筒, 高度 $h \leq l$, 其电阻 $R = 5.0 \times 10^{-3}\Omega$, 工作线圈中心处的磁场可用长直螺线管的磁场公式计算, 且不计感应电流的磁场, 求:



题 14.19 图

- (1) 被加热工件中的感应电流的最大值;
- (2) 工件中每秒产生的热量;
- (3) 当频率 f 增加一倍时, 热量增加几倍?

解 (1) 线圈中磁感应强度

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I_0 \sin 2\pi f t$$

通过被加热金属部件的磁通量为

$$\Phi = B \cdot S = \pi r^2 B$$

则

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2\pi^2 r^2 \mu_0 N I_0 f}{R l} \cos 2\pi f t$$

$$I_m = \frac{2\pi^2 r^2 \mu_0 N I_0 f}{Rl}$$

$$= \frac{2\pi^2 \times (4.0 \times 10^{-3})^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 30 \times 25 \times 1.0 \times 10^5}{5 \times 10^{-3} \times 0.2}$$

$$= 29.8 \text{ A}$$

$$(2) \quad Q = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} I_m^2 R \int_0^T \cos^2 2\pi f t \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2} I_m^2 R$$

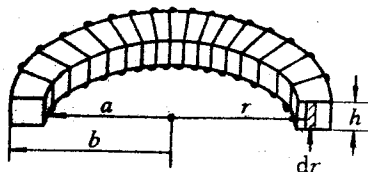
$$= 2.2 \text{ W}$$

(3) 因为 $Q \propto I_m^2$, 而 $I_m \propto f$, 所以 $Q \propto f^2 a$
当 $f' = 2f$ 时

$$Q' = 4Q$$

热量增加为原来的 4 倍。

14.20 横截面为矩形的环形螺线管, 共绕有线圈 1000 匝, 内半径 $a = 0.050 \text{ m}$, 外半径 $b = 0.10 \text{ m}$, 厚度 $h = 0.010 \text{ m}$, 求其自感系数。



题 14.20 图

解 由安培环培定理

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

通过横截面的磁通量

$$\Phi = \int B \cdot dS = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot h dr$$

$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

因此自感系数

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{4\pi \times 10^{-7} \times (10^3)^2 \times 0.01 \ln \frac{0.1}{0.05}}{2\pi}$$

$$= 1.4 \times 10^{-3} \text{ H}$$

14.21 有一半半径 0.2 m 共 100 匝的大线圈, 在线圈中心放一小铜丝环, 环面积为 $5.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, 两线圈在同一平面内。求:

(1) 当大线圈的电流在 $t = 0.010 \text{ s}$ 内, 由 20 安培减少到零, 小铜丝环中产生的平均感应电动势;

(2) 它们的互感系数。

解 (1) 由题意可知, 小铜丝环处磁场可视为均匀, 为

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

穿过小铜丝环的磁通量 $\Phi_M = B_0 \cdot S$, 则

$$\bar{\mathcal{E}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{0 - \frac{\mu_0 N I}{2R} S}{\Delta t} = \frac{\mu_0 N I S}{2R \Delta t}$$

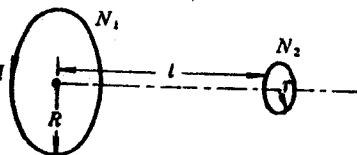
$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 20 \times 5 \times 10^{-4}}{2 \times 0.2 \times 0.01}$$

$$= 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$(2) M = \frac{\Phi_M}{I} = \frac{\mu_0 N I \cdot S}{2R I} = \frac{\mu_0 N S}{2R} = 1.57 \times 10^{-7} \text{ H}$$

14.22 两个共轴线圈, 半径

分别为 R 和 r , 匝数分别为 N_1 和 N_2 , 相距 l 。设 r 很小, 则小线圈所 I 在处的磁场可以视为均匀。求线圈的互感系数。



解 设在大线圈中通过电流

I_1 , 则在小线圈处产生的磁感应

题 14.22 图

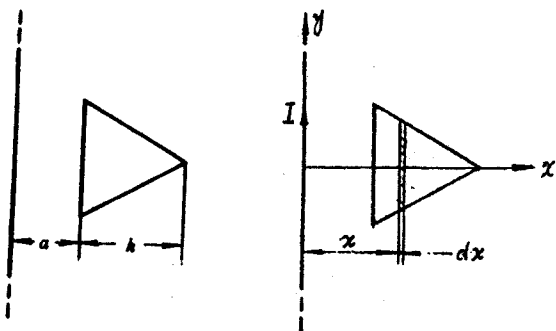
强度沿轴向, 大小为

$$B_{21} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 R^2}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

通过小线圈的磁通链为

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= N_2 BS \\ &= \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2 r^2 I_1}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} \\ M &= \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2 r^2}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

14.23 在无限长直导线近旁放置一等边三角形平面线圈,线圈的一边与导线平行(见附图),求其互感系数 M 。



题 14.23 图

解 14.23 图

解 建立如图坐标系,设在无限长直导线中通上电流 I ,则其磁场分布为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

在等边三角形中取一平行于直导线的细长条面元 dS , 面积为

$$dS = 2ydx = 2(a+h-x)\tan 30^\circ \cdot dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(a+h-x)dx$$

穿过 dS 的磁通

$$d\Phi_M = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi} \left(\frac{a+h}{x} - 1 \right) dx$$

在三角形中的总磁通量

则有

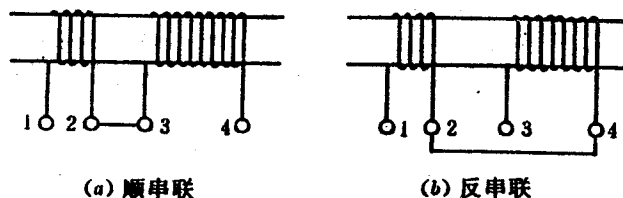
$$\begin{aligned}\Phi_M &= \int_a^{a+h} \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi} \left(\frac{a+h}{x} - 1 \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi} \left[(a+h) \ln \frac{a+h}{a} - h \right]\end{aligned}$$

$$M = \frac{\Phi_M}{I} = \frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi} \left[(a+h) \ln \frac{a+h}{a} - h \right]$$

14.24 两线圈的自感分别为 L_1 和 L_2 , 它们之间的互感为 M 。

(1) 将两线圈顺串联如附图(a)所示, 求 1 和 4 端之间的等效自感;

(2) 将两线圈反串联如(b)图, 求 1 和 3 端之间的等效自感。



题 14.24 图

解 如图所示, 通过线圈 12 的磁通量将全部通过线圈 34, 反之也一样。

(1) 当两线圈顺串联时, 设两线圈通有电流 I , 两线圈所产生的磁场在两线圈内部是相互加强的, 于是线圈 12 中的电流分别在其本身和线圈 34 中产生的磁通链为

$$\Psi_1 = L_1 I, \quad \Psi_{21} = MI$$

反过来线圈 34 在其本身和线圈 12 中产生的磁通链为

$$\Psi_2 = L_2 I, \quad \Psi_{12} = MI$$

则 1、4 间的总磁通链数为

$$\Psi_{14} = \Psi_1 + \Psi_{21} + \Psi_2 + \Psi_{12}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M)I = LI$$

$$L_{\text{原}} = L_1 + L_2 + 2M$$

(2) 反接串联时, 两线圈所产生的磁场相互减弱, 则 Ψ_{21} 与 Ψ_{12} 应取负值, 则 1、3 间的总磁通链数为

$$\Psi_{\text{总}} = \Psi_1 - \Psi_{21} + \Psi_2 - \Psi_{12}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)I = LI$$

$$L_{\text{原}} = L_1 + L_2 - 2M$$

14.25 一无限长直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$, 有一绝缘的矩形线框与直导线共面, 如图所示。试求:

(1) 直导线与线框的互感系数;

(2) 线框的互感电动势。

解 (1) 在线框上取一平行于长直导线的细长条面元 dS , $dS = a dx$, 通过 dS 的磁通量

$$d\Phi_M = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx$$

题 14.25 图

由于矩形线框在导线左右两侧的磁通量部分抵消, 只需计算导线右侧 $\frac{a}{2}$ 到 $\frac{3a}{2}$ 的磁通量, 这也就是通过整个矩形线框的总磁通量

$$\Phi_M = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3$$

故互感系数

$$M = \frac{\Phi_M}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3$$

(2) 线框中的互感电动势

$$\mathcal{E}_M = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3 \cdot I_0 \omega \cos \omega t$$

$$= -\frac{\mu_0 a I_0 \omega}{2\pi} \cos \omega t \cdot \ln 3$$

14.26 一矩形截面螺绕环 ($\mu_r = 1$), 由细导线均匀密绕而成, 内半径为 R_1 , 外半径为 R_2 , 高为 h , 共 N 匝。在螺绕环的轴线上, 另有一无限长直导线 oo' , 如图所示, 在螺线环内通以交变电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 求当 $\omega t = \pi/4$ 时, 在无限长直导线中的感应电动势 \mathcal{E}_i 。

已知 $R_1 = 8 \times 10^{-2} \text{ m}$, $R_2 = 2.4 \times 10^{-1} \text{ m}$, $b = 6 \times 10^{-2} \text{ m}$, $N = 1000$ 匝, $I_0 = 5 \text{ A}$, $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$ 。

解 先求互感系数。设在无限长直导线中通上电流 I_1 , 则在螺绕环中产生的磁通链数为

$$\begin{aligned} \Psi_M &= N \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot b dr \\ &= \frac{\mu_0 N I_1 b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

互感系数

$$M_{21} = \frac{\Psi_M}{I_1} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

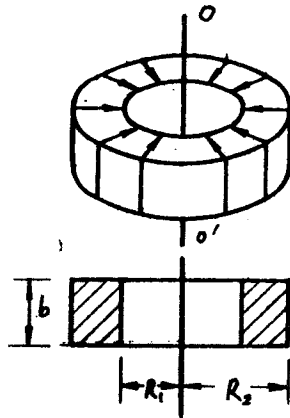
因为

$$M_{12} = M_{21} = M$$

故当在螺绕环中通以交变电流 $I = I_0 \cos \omega t$ 时, 在长直导线中的感应电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M &= -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \cdot I_0 (-\omega) \sin \omega t \\ &= \frac{\mu_0 N b I_0 \omega}{2\pi} \sin \omega t \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

当 $\omega t = \frac{\pi}{4}$ 时, 代入已知数据



题 14.26 图

$$\mathcal{E}_M = 1.47 \times 10^{-2} \text{V}$$

14.27 在玻尔氢原子模型中,电子绕原子核作圆周运动,圆轨道半径为 $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$,频率 $f = 6.8 \times 10^{15} \text{1/s}$,问这轨道中心的磁场能量密度有多大?

解 电子作圆周运动时等效于圆电流

$$I = q \cdot n = ef$$

在圆心处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 6.8 \times 10^{15}}{2 \times 5.3 \times 10^{-11}} \\ = 12.9 \text{T}$$

磁能密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{12.9^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 6.62 \times 10^7 \text{J/m}^3$$

14.28 (1)地磁场的磁感应强度为 $5.0 \times 10^{-5} \text{T}$ 。试问它的磁场能量密度有多大?

(2)假设在比地球半径小得多的距离中,磁感应强度较为恒定并且忽略地磁极附近的磁场变化。试问,从地球表面到表面上空 16km 之间的球壳中贮藏了多大的磁场能量? ($R_E = 6.3 \times 10^6 \text{m}$)。

$$\text{解 (1)} \quad w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(5 \times 10^{-5})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{J/m}^3$$

(2)近似认为在上述范围内 w_m 为恒值

$$W_m = \frac{4}{3}\pi[(R+h)^3 - R^3]w_m \approx 4\pi R^2 h \cdot w_m \\ = 4\pi \times (6.3 \times 10^6)^2 \times 16 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-3} \\ = 7.98 \times 10^{15} \text{J}$$

14.29 利用高磁导率的铁磁体,能在实验室产生 $B = 5000 \text{Gs}$ 的磁场。

(1)求这磁场的能量密度 w_m 。

(2)若要产生能量密度等于该值的电场,问电场强度 E 的值应为多少?这在实验上容易做到吗?

$$\text{解 (1)} \quad w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{0.5^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 1.0 \times 10^5 \text{J/m}^3$$

$$(2) \quad w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = w_m$$

$$E = \sqrt{\frac{2w_m}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.0 \times 10^5}{8.85 \times 10^{-12}}} = 1.5 \times 10^8 \text{V/m}$$

显然,如此强的电场在实验上是很难实现的。