Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2018/19

Método da variação das constantes

O método dos coeficientes indeterminados tem a desvantagem de se aplicar a uma classe restrita de equações. Por exemplo, não se aplica à equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{tg}\,(x),$$

porque a função tangente não é uma função CI.

Vamos descrever um método para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e f são funções definidas no aberto U e $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in U$, o qual se aplica a todas as situações em que conheçamos a solução geral da equação homogénea associada.

Vamos exemplificar o método considerando as equações diferenciais lineares de ordem 2. Consideremos a equação diferencial linear de ordem 2

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (*)$$

em que a_0, a_1, a_2 e f são funções definidas no aberto U e $a_2(x) \neq 0$, $\forall x \in U$.

Suponhamos que conhecemos um par, y_1 e y_2, de soluções linearmente independentes da equação homogénea associada

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

O método consistem em encontrar funções $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ tais que a função

$$y_p(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x)$$

seja solução da equação $(*)$. Derivando $y_p(x)$ obtemos

$$y_p'(x) = \alpha_1(x)y_1'(x) + \alpha_2(x)y_2'(x) + \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x). \tag{1}$$

Ora, estamos com dois graus de liberdade! Impomos a condição

$$\alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0\,.$$

Com esta condição, (1) reduz-se a

$$y_p'(x) = \alpha_1(x)y_1'(x) + \alpha_2(x)y_2'(x). \tag{2}$$

Derivando $y_p'(x)$ obtemos

$$y_p''(x) = \alpha_1(x)y_1''(x) + \alpha_2(x)y_2''(x) + \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x). \tag{3}$$

Como queremos que y_p seja solução da equação $(*)$, substituímos y_p, y_p' e y_p'' na equação $(*)$ e usando o facto que y_1 e y_2 são soluções da equação homogénea associada obtemos

$$\alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

Podemos assim concluir que as funções procuradas α_1 e α_2 deverão satisfazer o seguinte sistema

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0 \\ \\ \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{cases}$$

O determinante dos coeficientes do sistema é precisamente

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Porque y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da correspondente equação homogénea, temos que o determinante não se anula. Consequentemente, o sistem tem uma única solução. Resolvendo o sistema pela "regra de Cramer" obtemos

$$\alpha_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{f(x)\, y_2(x)}{a_2(x)\, W(y_1(x), y_2(x))},$$

$$\alpha_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ \\ y_1'(x) & \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{f(x)\, y_1(x)}{a_2(x)\, W(y_1(x), y_2(x))}.$$

Integrando, obtemos as funções α_1 e α_2. Consequentemente, uma solução particular da equação diferencial $(*)$ é definida por

$$y_p(x) = \alpha_1(x)\, y_1(x) + \alpha_2(x)\, y_2(x),$$

onde α_1 e α_2 são calculadas como descrito anteriormente.

Exemplo: Consideremos a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{tg}\, x.$$

É fácil concluir que a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \,\text{sen}\, x.$$

Queremos determinar uma solução particular, y_p, da equação que seja da forma

$$y_p = \alpha_1(x) \cos x + \alpha_2(x)\, \text{sen}\, x.$$

Temos que

$$y_p' = -\alpha_1(x)\text{sen}\, x + \alpha_2(x) \cos x + \alpha_1'(x) \cos x + \alpha_2'(x)\, \text{sen}\, x.$$

Impondo a condição

$$\alpha_1'(x) \cos x + \alpha_2'(x)\text{sen}\, x = 0,$$

vem que

$$y_p' = -\alpha_1(x)\text{sen}\, x + \alpha_2(x) \cos x,$$

e, portanto,

$$y_p'' = -\alpha_1(x) \cos x - \alpha_2(x)\text{sen}\, x - \alpha_1'(x)\text{sen}\, x + \alpha_2'(x) \cos x.$$

Uma vez que queremos que y_p seja solução da equação, resulta que

$$-\alpha_1(x) \cos x - \alpha_2(x)\text{sen}\, x - \alpha_1'(x)\text{sen}\, x + \alpha_2'(x) \cos x + \alpha_1(x) \cos x + \alpha_2(x)\text{sen}\, x = \text{tg}\, x,$$

isto é,

$$-\alpha_1'(x)\text{sen}\, x + \alpha_2'(x) \cos x = \text{tg}\, x.$$

Portanto, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} \alpha_1'(x) \cos x + \alpha_2'(x)\text{sen}\, x = 0 \\[2ex] -\alpha_1'(x)\text{sen}\, x + \alpha_2'(x) \cos x = \text{tg}\, x \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$\alpha_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \text{sen}\, x \\[2ex] \text{tg}\, x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\[2ex] -\text{sen}\, x & \cos x \end{vmatrix}} = -\text{tg}\, x \,\text{sen}\, x, \quad \alpha_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\[2ex] -\text{sen}\, x & \text{tg}\, x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\[2ex] -\text{sen}\, x & \cos x \end{vmatrix}} = \text{sen}\, x,$$

isto é,

$$\begin{cases} \alpha_1'(x) = \cos x - \sec x \\ \\ \alpha_2'(x) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Integrando $\alpha_1'(x)$ e $\alpha_2'(x)$ obtemos,

$$\begin{cases} \alpha_1(x) = \operatorname{sen} x - \log|\sec x + \operatorname{tg} x| \\ \\ \alpha_2(x) = -\cos x, \end{cases}$$

pelo que uma solução particular da equação é

$$y_p = (\operatorname{sen} x - \log|\sec x + \operatorname{tg} x|)\cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -\log|\sec x + \operatorname{tg} x| \cos x.$$

A solução geral da equação dada é

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \log|\sec x + \operatorname{tg} x| \cos x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$