



Exercício 3.1 Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2y$, calcule, usando a definição:

- a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$; c) $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$;
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$; d) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Exercício 3.2 Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções seguintes, nos pontos possíveis:

- a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$; g) $f(x, y) = x \cos x \cos y$;
b) $f(x, y) = \sin(x^2 - 3xy)$; h) $f(x, y) = \arctg(x^2y^3)$;
c) $f(x, y) = x^2y^2e^{2xy}$; i) $f(x, y) = x + y^2x + \ln(\sin(x^2 + y))$;
d) $f(x, y) = e^x \ln(xy)$; j) $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$;
e) $f(x, y) = e^{\sin(x\sqrt{y})}$; k) $f(x, y, z) = \ln(e^x + z^y)$;
f) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$; l) $f(x, y, z) = \frac{xy^3 + e^z}{x^3y - e^z}$.

Exercício 3.3 Para cada uma das funções seguintes, calcule, se existirem, $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \pi & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Exercício 3.4 Mostre que:

- a) se $f(x, y) = e^{xy}$, então $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$;
b) se $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + xy)$, então $xf_x + yf_y = 2$;
c) se $f(x, y, z) = x + \frac{x-y}{y-z}$, então $f_x + f_y + f_z = 1$.

Exercício 3.5 Determine a derivada direcional de cada uma das funções, no ponto P e na direção do vetor v indicados.

- a) $f(x, y) = x^2y + x$, $P = (1, 0)$ e $v = (1, 1)$;
b) $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$, $P = (1, \frac{\pi}{2})$ e $v = (3, -4)$;
c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P = (1, 2, 3)$ e $v = (1, 1, 1)$.

Exercício 3.6 Calcule o gradiente das seguintes funções:

- a) $f(x, y) = xe^{-x+y}$; d) $f(x, y, z) = xe^{-x^2-y^2-z^2}$;
b) $f(r, \theta) = r \sin \theta$; e) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$;
c) $f(r, h) = \pi r^2 h$; f) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$.

Exercício 3.7 Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^3$ no ponto de coordenadas $(3, 1)$.

Exercício 3.8 Mostre que os gráficos das funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0, 0)$.

Exercício 3.9 Considere a função $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$.

- Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$ com o eixo dos zz .
- Usando uma aproximação linear de f em $(1, 1)$, calcular uma estimativa para $f(1.02, 0.90)$.

Exercício 3.10 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Verifique que f possui derivadas parciais em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .
- Verifique que f não é contínua na origem e conclua que f não é diferenciável na origem.
- Mostre que existe $Df((0, 0); (\alpha, \beta))$ com $\alpha\beta = 0$, mas não existe $Df((0, 0); (\alpha, \beta))$ com $\alpha\beta \neq 0$.

Exercício 3.11 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Mostre que existe derivada direcional em $(0, 0)$ segundo qualquer vetor de \mathbb{R}^2 .
- Verifique que f não é diferenciável.

Exercício 3.12 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Mostre que existe $Df(\mathbf{a}; \mathbf{u}), \forall \mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$
- Verifique se f é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 3.13 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e verifique que não são contínuas em $(0, 0)$.
- Verifique que f é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 3.14 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Mostre que:

- f é contínua;
- $Df((0, 0); (a, b)) = f(a, b), \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.