Programação Linear - método simplex: situações particulares

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

3 de outubro de 2019

Prog. Linear - método simplex: situações particulares

antes

- O algoritmo Simplex foi aplicado para resolver um problema de programação linear.

Guião

- Há situações particulares em que é necessário detalhar as regras e estabelecer decisões e operações suplementares:
  - quando há degenerescência (várias bases diferentes correspondem à mesma solução básica);
  - quando o domínio é ilimitado;
  - quando não existe um vértice inicial admissível.

depois

- Analisaremos a implementação do método simplex usando matrizes.

Situações particulares do método simplex:

- Selecção de um vértice admissível inicial
  - Se não existir, **problema é impossível**.
- Repetir
  - Selecção da coluna pivô:
    - Coeficiente mais negativo na linha da função objectivo
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.<0, solução óptima.
  - Selecção da linha pivô:
    - Menor razão (lado direito/coluna pivô) positiva (*i.e.*, coef.col.>0)
    - (em caso de empate, o próximo vértice é **degenerado)**
    - Se não existir coef.col.>0, **solução óptima é ilimitada**.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

- O que é um algoritmo?
- O algoritmo simplex converge?

Ver Mais

Conteúdo

1. Degenerescência

- O que é a degenerescência?
- Como identificá-la no quadro simplex?
- Como escolher a linha pivô quando há empate na menor razão positiva ?

Degenerescência: caracterização

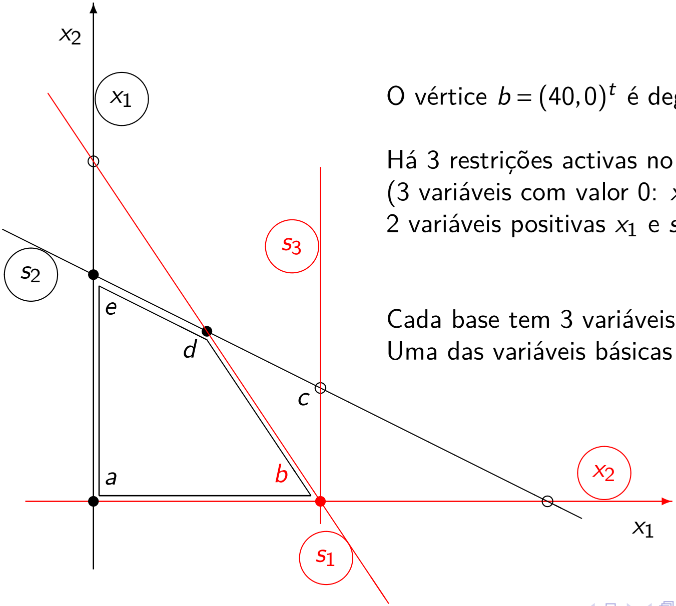
Vértice degenerado: geometria

- Normalmente, o vértice é definido pela intersecção de $(n-m)$ hiperplanos (*i.e.*, há $(n-m)$ restrições activas).
- Um vértice é *degenerado* se o número de hiperplanos for maior.

Vértice degenerado: várias bases, a mesma solução básica

- Uma *base* é um conjunto de variáveis básicas (de vectores linearmente independentes).
- Resolvendo o sistema de equações em ordem às variáveis básicas (da base), obtém-se uma solução básica (vértice).
- Pode haver várias bases (quadros simplex) cuja solução corresponda ao mesmo vértice (solução básica), que é *degenerado*.

Exemplo



O vértice $b = (40, 0)^t$ é degenerado.

Há 3 restrições activas no vértice b (3 variáveis com valor 0: x_2, s_1 e s_3) e 2 variáveis positivas x_1 e s_2.

Cada base tem 3 variáveis básicas.
Uma das variáveis básicas é nula.

Ver mais

Três bases diferentes, o mesmo vértice *(solução básica)*

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	0
s_2	0	0	2	0	1	-1	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z	1	0	-10	0	0	12	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	0
s_2	0	0	0	-1	1	2	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z	1	0	0	5	0	-3	480

Um quadro simplex corresponde a um vértice degenerado se houver uma ou mais variáveis básicas com valor 0.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_2	0	0	4/3	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
z	1	0	-2	4	0	0	480

Solução básica é sempre $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (40, 0, 0, 40, 0)^t$.

Escolha da linha pivô quando há empate

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	$\boxed{3}$	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	40
z	1	-12	-10	0	0	0	0

$120/3 = 40$
$80/1 = 80$
$40/1 = 40$

- Há empate na menor razão positiva $= 40$ (linhas de s_1 e de s_3).

Desempate:

- perturbar o lado direito, adicionando ϵ, e
- calcular novamente a menor razão positiva.

- Exemplo:
  - Linha de s_1 : $(120+\epsilon)/3 = 40+\epsilon/3$
  - Linha de s_3 : $(40+\epsilon)/1 = 40+\epsilon$
- Linha pivô correcta: a de s_1 (menor razão positiva)

Esta escolha tipicamente reduz o número de iterações. Ver mais

Exemplo: resolução

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	$\boxed{3}$	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	40
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
s_2	0	0	$\boxed{4/3}$	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
z	1	0	-2	4	0	0	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Solução óptima $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (20, 30, 0, 0, 20)^t$.

2. Domínios ilimitados e soluções óptimas ilimitadas

- Quando é que o domínio é ilimitado?
- Como identificar no quadro simplex?
- Se o domínio for ilimitado, a solução óptima é também ilimitada?
- Quando é que a solução óptima é ilimitada?

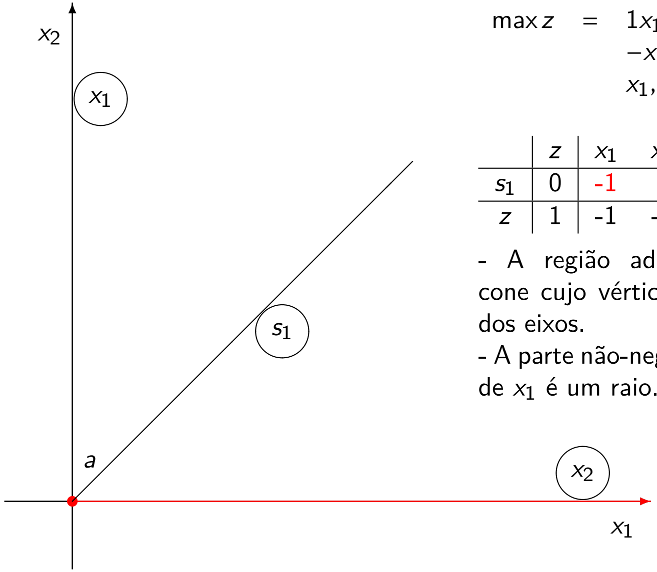
Domínio ilimitado (aberto)

- O domínio é ilimitado quando se pode caminhar ao longo de um raio ($\equiv$ semi-recta) permanecendo no domínio admissível.

Um raio é um conjunto de pontos

- $R = \{ x : x = v + \theta \,.\, d, \ \theta \in \mathrm{IR}_+ \}$,

sendo $v \in \mathrm{IR}^n$ um vértice e $d \in \mathrm{IR}^n$ uma direcção (um vector não-nulo).



$$
\begin{aligned}
\max z &= 1x_1 + 1x_2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

- A região admissível é o cone cujo vértice é a origem dos eixos.
- A parte não-negativa do eixo de x_1 é um raio.

Domínio ilimitado: como identificar no quadro simplex?

Quadro simplex: como identificar um raio?

- Há uma coluna de uma variável não-básica em que os coeficientes das restrições são todos ≤ 0.

- Exemplo:

$$\begin{cases} s_1 = 0 + 1x_1 - 1x_2 \\ z = 0 + 1x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

Ao longo de um raio, todos os pontos são admissíveis, porque:

- há uma **única** variável não-básica que aumenta de valor,
- todas as vars básicas aumentam (coef.<0) ou mantêm o valor (coef.=0),
- sendo portanto $x, s \geq 0$.

Domínio ilimitado: solução óptima ilimitada

- O valor da solução óptima é ilimitado quando, ao caminhar ao longo de um raio, o valor da função objectivo aumenta (prob. de max.).

Quadro simplex: como identificar uma solução óptima ilimitada?

- há um raio e
- o respectivo coeficiente na linha da função objectivo é < 0.

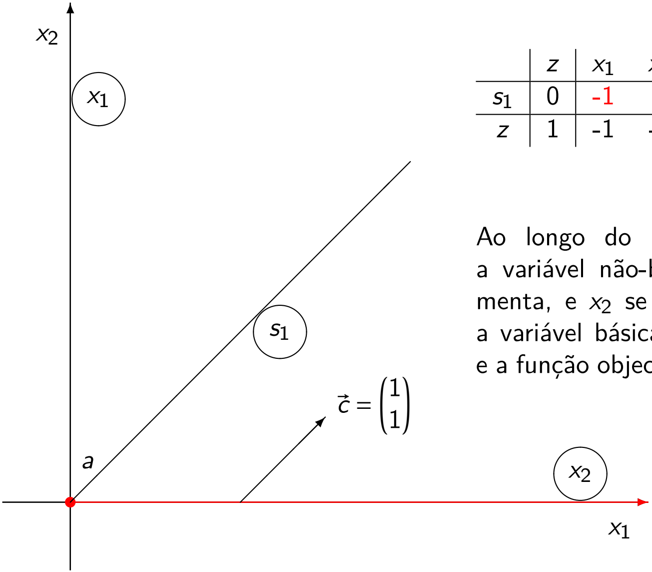
- Exemplo:

$$\begin{cases} s_1 = 0 + 1x_1 - 1x_2 \\ z = 0 + 1x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

- Quando o coeficiente da linha da função objectivo do raio for ≥ 0, o valor da solução óptima pode não ser ilimitado (porquê?).
- Para a solução óptima ser ilimitada, o domínio deve ser ilimitado (porquê?)

Exemplo: domínio ilimitado e solução óptima ilimitada



	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

Ao longo do raio, quando a variável não-básica x_1 aumenta, e x_2 se mantém $=0$, a variável básica s_1 aumenta e a função objectivo também.

3. Vértice admissível inicial

- E se não houver um vértice admissível (quadro simplex) inicial?
- Exemplo: problema com restrições de $\geq$.
- O Método das 2 Fases
  - Fase I: obter um vértice admissível inicial
  - Fase II: aplicar algoritmo simplex

Um problema com restrições de ≥ e de minimização

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

- Há uma relação este problema e o que vimos anteriormente.
- Iremos explorar essa relação depois.

Transformação na forma canónica

$$
\begin{array}{rcl}
\min z & = & cx \\
 & & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
\min z & = & cx \\
 & & Ax - u = b \\
 & & x, u \geq 0
\end{array}
$$

sendo $u \in \mathbb{R}_{+}^{m \times 1}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Transformação Inequações → Equações

- Qualquer inequação do tipo $\geq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.
- Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \geq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1u_1 & = 120 \\ x_1, x_2, u_1 & \geq 0 \end{cases}$$

- O número de unidades produzidas numa solução $(x_1, x_2)^t$ é igual ao valor da função linear: $3x_1 + 2x_2$.
- u_1 (variável de folga) é o número de unidades produzidas em excesso relativamente às necessárias (no exemplo, 120).
- Há autores que designam estas variáveis por *variáveis de excesso*.

Exemplo: transformação na forma canónica

Modelo original

- Variáveis de decisão: y_3, y_4, y_5.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Modelo na forma canónica (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: y_3, y_4, y_5.
- Variáveis de excesso: y_1, y_2.

$$
\begin{array}{lrrcrcrcrl}
\min z = & & & & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & \\
 & -1y_1 & & + & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & = 12 \\
 & & -1y_2 & + & 2y_3 & + & 2y_4 & & & = 10 \\
 & \multicolumn{9}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Não há um vértice admissível inicial, porque ...

- o lado direito é positivo e não há uma matriz identidade no quadro :

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10

Lembrete: antes havia um vértice admissível inicial, porque:

- as restrições eram todas de $\leq$ (havia uma matriz identidade $I_{m\times m}$), e
- os coeficientes do lado direito eram todos ≥ 0.

- Quando não há um vértice admissível inicial, usa-se o:

Método das 2 Fases:

- na Fase I, resolve-se um *problema auxiliar* para tentar encontrar um vértice admissível inicial.
- Se se conseguir encontrar, na Fase II, aplica-se o algoritmo simplex; caso contrário, o problema é impossível.

Método das 2 fases: estratégia

Fase I: adicionar variáveis artificiais e minimizar a sua soma

- resolver problema auxiliar ($\mathbf{1}a$ é a soma das variáveis artificiais):

$$\begin{aligned} \min z_a &= \mathbf{1}a \\ & Ax - u + a = b \\ & x, u, a \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $a \in \mathrm{I\!R}_+^{m \times 1}, \mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]$ um vector linha com m elementos.

- Se $(\min z_a = \mathbf{1}a = 0) \Rightarrow a = \tilde{0}$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow$ há um vértice admissível que obedece às restrições originais;
- caso contrário ($\min z_a > 0$), não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

Fase II: optimizar problema original

- Existe um vértice admissível inicial para o algoritmo simplex;
- optimiza-se a função objectivo (original) do problema.

Fase I: adicionar vars artificiais a_1 e a_2, e $\min z_a$

- Função objectivo da Fase I: $\min z_a \; = \; 1a_1 + 1a_2$.
- Equação da linha da função objectivo: $z_a - 1a_1 - 1a_2 = 0$

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	0	0	0	0	0	- 1	- 1	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos. ▸ Validar Quadro
- O quadro seguinte é válido; vamos ▸ minimizar a função auxiliar z_a:

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/3	0	1	1/3	1/3	1/3	0	4
a_2	0	2/3	-1	0	$\boxed{4/3}$	-2/3	-2/3	1	2
z_a	1	2/3	-1	0	4/3	-2/3	-5/3	0	2

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	1/2	-1/4	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	-1/2	3/4	3/2
z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0

- Solução óptima: $\min z_a = 0$.
- Foi encontrado um vértice admissível.

Fase I: conclusão

- O vértice admissível é $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^t = (0, 0, 7/2, 3/2, 0)^t$.
- Variáveis artificiais (a_1, a_2) e função objectivo auxiliar (z_a) não são necessárias na Fase II, e podem ser eliminadas.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3		-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4		1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2

- Na Fase II, iremos optimizar a função objectivo original (z), partindo do vértice admissível encontrado na Fase I.

Fase II: função objectivo original

- Função objectivo da Fase II: min $z = 120y_3 + 80y_4 + 30y_5$.
- Equação da linha da função objectivo: $z - 120y_3 - 80y_4 - 30y_5 = 0$

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	0	0	-120	-80	-30	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos. ▸ Validar Quadro
- O quadro seguinte é válido; vamos optimizar a função original z:

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

- O primeiro vértice admissível encontrado é a solução óptima
- (problema de minimização e nenhum coeficiente na linha da função objectivo é positivo).
- Isto nem sempre acontece!

Conclusão

- Há outros algoritmos para resolver problemas de programação linear, como os métodos de pontos interiores.
- O algoritmo simplex permanece competitivo, embora tenham sido identificados problemas em que os métodos de pontos interiores têm melhor desempenho.

Apêndices

1. Método do Grande M: estratégia

associar uma penalidade muito grande às vars artificiais, para conduzi-las a um valor nulo

- resolver problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \min z_M &= cx + \mathbf{M}a \\ & Ax - u + a = b \\ & x, u, a \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $a \in \mathrm{IR}_+^{m \times 1}, \mathbf{M} = [M, M, \ldots, M]$ um vector linha com m elementos.

- Se M for suficientemente grande, qualquer ponto admissível é melhor do que um ponto em que uma variável artificial seja positiva.
- Se $(a = \tilde{0})$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow \min z_M = cx^*$ e x^* é o vértice admissível óptimo, que obedece às restrições originais.
- caso contrário $(\exists a_i > 0)$, não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

1. Método do Grande M: desvantagens

Se o valor de M for muito grande,

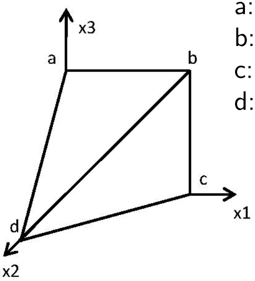
- pode haver perda de informação, resultante da representação dos números em computador.
- Os coeficientes de custo são representados por reais de dupla precisão com um número finito de casas decimais.
- Exemplo:

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & 3,141592653589793 2e+00 \\ M & = & 1,0000000000000000e+40 \\ M+c_1 & = & 1,0000000000000000e+40 \end{array}$$

Se o valor de M for muito pequeno,

- pode não ser suficientemente grande para conduzir todas as variáveis artificiais a 0.

- No exemplo, há uma *restrição redundante*, que pode ser eliminada sem alterar o domínio.
- Isso não acontece na generalidade.
- Exemplo: as restrições $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0$ são todas necessárias:



a: $x_2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 + x_3 = 1$
b: $x_2 = 0$; $x_2 + x_3 = 1$; $x_1 + x_2 = 1$
c: $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_1 + x_2 = 1$
d: $x_3 = 0$; $x_1 = 0$; $x_1 + x_2 = 1$; $x_2 + x_3 = 1$(há 4 planos)

Voltar

2. Degenescência e bases óptimas

	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	$\boxed{2}$	1	0	-3	0
s_2	0	0	2	0	1	-1	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z'	1	0	-1	0	0	3	120

	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	0
s_2	0	0	0	-1	1	2	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z'	1	0	0	1/2	0	3/2	120

	z'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_2	0	0	4/3	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
z'	1	0	1	1	0	0	120

Se $z' = 3x_1 + 1x_2$, uma das três bases da solução básica óptima não é óptima.

O quadro 1 é uma base que não é óptima: é necessário fazer um pivô degenerado para se comprovar que a solução básica (que não se altera quando se faz o pivô) é uma solução óptima.

- Quando há degenerescência, o algoritmo simplex pode entrar em ciclo:

- O artigo Bland, R. "New finite pivoting rules for the simplex method". Mathematics of Operations Research 2 (2): 103 - 107, 1977. doi:10.1287/moor.2.2.103 mostra que:
  - O uso da regra de seleccionar para coluna pivô a coluna com o coeficiente mais negativo pode levar a que o algoritmo entre em ciclo, percorrendo ciclicamente as diferentes bases correspondentes ao mesmo vértice.
  - O uso da regra de seleccionar para coluna pivô a coluna com coeficiente negativo e **menor índice** garante a convergência do algoritmo.

Voltar

3. Finitude do algoritmo simplex

- Se a função objectivo melhorar em cada pivô, o algoritmo simplex termina num número finito de iterações, porque:

- se o óptimo for finito, porque não pode haver um número de iterações infinito com melhoria de valor (por exemplo, nos problemas de maximização, aumento do valor da função objectivo) em cada pivô.

- Quando há degenerescência (iremos ver), a função objectivo pode não melhorar, mas a regra de Bland assegura a convergência do algoritmo.

Voltar

Algoritmo simplex de minimização

Lembrete: no algoritmo simplex de minimização:

- a coluna pivô é a coluna com o coeficiente mais positivo na linha da função objectivo,
- a solução é óptima se não existir nenhum coeficiente positivo na linha da função objectivo.

NOTA: Em alternativa a usar um algoritmo de minimização, podemos usar um algoritmo simplex de maximização para maximizar a função simétrica da função objectivo. Ver diapositivos sobre Transformações básicas.

Voltar

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	0	0	0	0	0	- 1	- 1	0

- Exprimir a função objectivo z_a em função das variáveis não-básicas y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 usando eliminação de Gauss: somar à linha de z_a as linhas de a_1 e a_2.

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
$(+1)$*linha de z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
$(+1)$*linha de a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
$(+1)$*linha de a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

- O quadro seguinte é válido:

Voltar

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	0	0	-120	-80	-30	0

- Exprimir a função objectivo z em função das variáveis não-básicas y_1, y_2 e y_5 usando eliminação de Gauss: somar à linha de z as linhas de y_3 e y_4 multiplicadas por constantes adequadas.

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
(+1)*linha de z	1	0	0	-120	-80	-30	0
(+120)*linha de y_3	0	-60	30	120	0	60	420
(+80)*linha de y_4	0	40	-60	0	80	-40	120
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

- O quadro seguinte é válido:

Voltar

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

Fim