notas para a unidade curricular

Tópicos de Matemática Discreta

mestrado integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho   2017/2018

Cláudia Mendes Araújo
Carla Mendes
Suzana Mendes Gonçalves

Capítulo 1

Noções elementares de lógica

1.1 Introdução

A palavra **lógica** tem raíz no grego clássico: *logos* significa *razão*.

A lógica consiste no estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.

Desempenha, pois, um papel fundamental em qualquer área do saber, em particular na Matemática e na Informática.

Na Informática, a lógica é usada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação, na verificação da correção de programas e nos circuitos digitais.

[Exemplo]

> Consideremos as seguintes situações:
>
> situação 1: Todos os coelhos gostam de cenouras. Este animal é um coelho. Então, este animal gosta de cenouras.
>
> situação 2: Todos os que estão nesta sala gostam de Matemática. Tu estás nesta sala. Então, tu gostas de Matemática.
>
> Formalmente, o raciocínio das duas situações é o mesmo: assumindo que todos os elementos x de um dado universo U satisfazem uma dada propriedade p e considerando um elemento x_0 de U, podemos concluir que x_0 satisfaz p. Note-se que é precisamente sobre o raciocínio, e não sobre o contexto em si, que o estudo da lógica vai debruçar-se.

Procurando estruturar raciocínios, podemos encontrar ferramentas eficazes na resolução de problemas, que podem ir de uma simples charada a problemas complexos das mais variadas áreas das ciências e da engenharia.

[Exemplo]

Consideremos o seguinte problema:

Um crime foi cometido por uma e apenas uma pessoa de um grupo de cinco suspeitos: Armando, Bernardo, Carlos, Daniel e Eduardo.

Questionados sobre quem era o culpado, cada um deles respondeu:

Armando: "Sou inocente."
Bernardo: "O Armando disse a verdade."
Carlos: "O Eduardo é o culpado."
Daniel: "O Carlos mentiu."
Eduardo: "O Daniel é o culpado."

Sabendo que apenas um dos suspeitos mentiu e que todos os outros disseram a verdade, quem é o culpado?

A abordagem ao problema é claramente importante na eficiência da sua resolução. Fazendo uma leitura de todos os depoimentos, rapidamente percebemos que os depoimentos de Carlos e de Eduardo não podem ser ambos verdadeiros, uma vez que o crime foi cometido por uma e apenas uma pessoa. Se Carlos não mentiu, tanto Daniel como Eduardo mentiram, o que sabemos não ter acontecido, já que apenas um dos suspeitos mentiu. Sendo assim, Carlos mentiu e todos os outros disseram a verdade. Logo, Daniel é o culpado.

Para exprimir argumentos precisos e rigorosos sobre afirmações é indispensável uma linguagem simples e clara, na qual as afirmações efetuadas não tenham significado ambíguo.

A linguagem corrente não tem estes requisitos e torna-se necessário utilizar uma **linguagem formal**. Nesse sentido, adotamos um **sistema lógico** adequado. Um sistema lógico apresenta as seguintes componentes:

sintaxe - conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou parte dela);

semântica - conjunto de regras que associam um *significado* às fórmulas;

sistema dedutivo - conjunto de fórmulas, designadas por *axiomas*, e de regras, designadas por *regras de inferência*, utilizados na construção de argumentos.

Ao longo dos anos, foram definidos diversos sistemas lógicos. Nesta unidade curricular, estudaremos algumas noções básicas associadas ao **Cálculo Proposicional Clássico** e ao **Cálculo de Predicados Clássico**.

1.2 Cálculo Proposicional Clássico

1.2.1 Sintaxe

Na linguagem natural, podemos encontrar diversos tipos de frase – declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Na construção de um argumento, recorremos apenas a frases declarativas.

As frases podem ser simples ou compostas.

Uma **frase (declarativa) simples** tem, gramaticalmente falando, um sujeito e um predicado.

[Exemplo]

> As seguintes frases são frases simples.
>
> Braga possui 181 954 habitantes no seu concelho.
> O António gosta de Lógica.
> Todo o número inteiro é par.

No Cálculo Proposicional (CP), cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo.

[Definição 1.1] Representaremos as frases simples por $p_0, p_1, ..., p_n, ...$, com $n \in \mathbb{N}_0$. A estes símbolos chamamos **variáveis proposicionais** e denotaremos o conjunto das variáveis proposicionais por $\mathcal{V}^{CP}$.

A partir de frases simples e recorrendo a expressões como "não", "e", "ou", "se... então", "... se e só se...", obtêm-se frases mais complexas, designadas por **frases compostas**.

[Exemplo]

> As seguintes frases são frases compostas.
>
> Braga possui 181 954 habitantes no seu concelho e conta com mais de 2000 anos de história como cidade.
> Se o António gosta de Lógica, então é bom aluno a Tópicos de Matemática Discreta e a Lógica Computacional
> Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.

No Cálculo Proposicional, as frases compostas são representadas usando:

- as variáveis proposicionais;
- os símbolos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais**, e designados, respetivamente, por **absurdo**, **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;
- os parêntesis esquerdo e direito (e), chamados **símbolos de pontuação**.

Representemos por p_n e p_m duas frases declarativas ($n, m \in \mathbb{N}_0$).

A frase "não p_n" designa-se por **negação de** p_n e é representada por $(\neg p_n)$. A $(\neg p_n)$ também podemos associar as leituras "é falso p_n" e "não é verdade p_n".

A frase "p_n e p_m" designa-se por **conjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $(p_n \wedge p_m)$. Nalguns contextos pode aparecer também na forma "p_n mas p_m".

A frase "p_n ou p_m" designa-se por **disjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $(p_n \vee p_m)$.

A frase "Se p_n, então p_m" designa-se por **implicação de** p_n**,** p_m e é representada por $(p_n \to p_m)$. A $(p_n \to p_m)$ também podemos associar as leituras "p_n implica p_m", "p_n é condição suficiente para p_m", "p_m é condição necessária para p_n", "p_m se p_n", "p_m sempre que p_n", "p_n só se p_m" e "p_n somente se p_m". A p_n chamamos **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a p_m chamamos **consequente** ou **conclusão**.

A frase "p_n se e só se p_m", que resulta da conjunção das implicações "Se p_n, então p_m" e "Se p_m, então p_n", designa-se por **equivalência de** p_n **e** p_m e é representada por $(p_n \leftrightarrow p_m)$. A $(p_n \leftrightarrow p_m)$ também se associam as leituras "p_n é equivalente a p_m" e "p_n é necessário e suficiente para p_m".

Ao representarmos frases compostas, podemos recorrer aos símbolos de pontuação (e), de modo a evitar ambiguidades.

[Exemplo]

Consideremos as seguintes frases e as variáveis proposicionais que as representam:

p_0 : Braga possui 181 954 habitantes no seu concelho.
p_1 : Braga conta com mais de 2000 anos de história como cidade.
p_2 : O António gosta de Lógica.
p_3 : O António é bom aluno a Tópicos de Matemática Discreta.
p_4 : O António é bom aluno a Lógica Computacional.
p_5 : Todo o número inteiro é par.
p_6 : 7 é divisível por 2.

As frases compostas referidas no exemplo anterior podem ser representadas, respetivamente, por:

[1] $(p_0 \wedge p_1)$
[2] $(p_2 \to (p_3 \wedge p_4))$
[3] $(p_5 \to p_6)$

Estipulados os símbolos que definem o alfabeto da linguagem do Cálculo Proposicional, podemos, agora, definir as palavras destas linguagem.

[Definição 1.2] O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das **fórmulas do Cálculo Proposicional** é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula do CP;

(F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula do CP;

(F_3) se φ é uma fórmula do CP, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula do CP;

(F_4) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula do CP;

(F_5) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula do CP;

(F_6) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula do CP;

(F_7) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula do CP.

[Exemplo]

[1] A palavra $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:

i. Pela regra (F_2), as variáveis proposicionais p_0, p_1 e p_2 são fórmulas do CP;

ii. Por i. e pela regra (F_3), $(\neg p_0)$ é uma fórmula do CP;

iii. Por i. e pela regra (F_4), $(p_1 \wedge p_2)$ é uma fórmula do CP;

iv. Por ii., iii. e pela regra (F_6), $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ é uma fórmula do CP.

[2] A palavra $((p_0 \vee (\neg\perp)) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ é uma fórmula do Cálculo Proposicional, pois:

i. Pela regra (F_1), $\perp$ é uma fórmula do CP;

ii. Pela regra (F_2), as variáveis proposicionais p_0 e p_1 são fórmulas do CP;

iii. Por i. e pela regra (F_3), $(\neg\perp)$ é uma fórmula do CP;

iv. Por ii., por iii. e pela regra (F_5), $(p_1 \vee (\neg\perp))$ é uma fórmula do CP;

v. Por ii. e pela regra (F_6), $(p_1 \rightarrow p_0)$ é uma fórmula do CP;

v. Por iv., v. e pela regra (F_7), $((p_0 \vee (\neg\perp)) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ é uma fórmula do CP.

[3] A palavra (p_0) não é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que não pode ser obtida a partir de $\perp$ ou de variáveis proposicionais por aplicação de um número finito das operações descritas em $(F3) - (F7)$. De facto, não pode haver ocorrências de parêntesis numa fórmula do Cálculo Proposicional sem haver a ocorrência de pelo menos um dos conetivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$.

[4] A palavra $\neg p_0 \wedge$ não é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que não pode ser obtida a partir de $\perp$ ou de variáveis proposicionais por aplicação de um número finito das operações descritas em $(F3) - (F7)$. Com efeito, não é possível obter uma palavra, por aplicação das referidas operações, cuja última letra seja $\wedge$.

[5] A palavra $(p_0 \vee p_1$ não é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que não pode ser obtida a partir de $\perp$ ou de variáveis proposicionais por aplicação de um número finito das operações descritas em $(F3) - (F7)$. Efetivamente, o número de ocorrências de parêntesis numa fórmula do Cálculo Proposicional é sempre par.

Para que uma palavra seja considerada uma fórmula do Cálculo Proposicional, é necessário que os parêntesis ocorram de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas.

No entanto, os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações são muitas vezes omitidos, por simplificação de escrita. Por exemplo, a palavra

$$(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$$

será utilizada como uma representação da fórmula

$$((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp).$$

Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

[Exemplo]

A fórmula $(((\neg p_0) \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge (\neg p_0)))$ pode ser representada pela palavra $(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0)$.

A palavra $\neg(p_0 \vee \neg p_1)$ é uma representação da fórmula $(\neg(p_0 \vee (\neg p_1)))$, ao passo que $\neg p_0 \vee \neg p_1$ não o é.

A fórmula $(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$ pode ser representada por $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$ mas não pode ser representada por $p_0 \wedge p_1 \vee p_2$.

1.2.2 Semântica

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. De facto, uma fórmula, por si só, não tem qualquer significado – este depende da interpretação associada aos símbolos.

[Exemplo]

Se p_0 representar a afirmação "$2 \times 7 = 14$" e p_1 representar a afirmação "$1 + 2 \times 7 = 15$", então a fórmula $(p_0 \to p_1)$ representa a afirmação "Se $2 \times 7 = 14$, então $1 + 2 \times 7 = 15$", que é verdadeira.

Por outro lado, se p_0 representar a afirmação "$2 \times 7 = 14$" e p_1 representar a afirmação "$1 + 2 \times 7 = 16$", então a fórmula $(p_0 \to p_1)$ representa a afirmação "Se $2 \times 7 = 14$, então $1 + 2 \times 7 = 16$", que é falsa.

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de **valores de verdade** às suas fórmulas.

Em lógica clássica, são considerados dois valores de verdade.

[Definição 1.3] Os valores lógicos (ou valores de verdade) do Cálculo Proposicional são **verdadeiro** (**V** ou **1**) e **falso** (**F** ou **0**).

Interessa-nos considerar frases declarativas sobre as quais se pode decidir acerca do seu valor lógico.

[Definição 1.4] Uma **proposição** é uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (ainda que possamos não ser capazes de, no momento atual, determinar o seu valor lógico).

A afirmação "5 é um número par" é uma proposição (no caso falsa) já que o seu valor lógico não depende do sujeito que o atribui. O mesmo acontece com a afirmação "$x^2 = -1$ não tem soluções reais", sendo esta proposição verdadeira. A afirmação "Existe vida em Marte" é uma proposição. Esta afirmação será verdadeira ou reprefalsa (mas não ambas as coisas), apesar de não sabermos o seu valor lógico. Outras afirmações existem, por seu turno, que por falta de objetividade na atribuição do valor lógico, não podem ser consideradas proposições. A título de exemplo, a afirmação "Os alunos da UM são os melhores alunos universitários do país". A não objetividade da afirmação parece óbvia. Ainda outro exemplo, "Esta proposição é falsa".

Existem, ainda, outras afirmações de índole matemática às quais não é possível aferir o valor lógico. Por exemplo, "$x \geq 6$" tem o seu valor lógico dependente do valor que se atribui a x, pelo que não é uma proposição.

[Exemplo]

Consideremos as seguintes frases:

[1] Lisboa é a capital de Portugal.

[2] $2 + 3 = 6$

[3] Quando é que vamos almoçar?

[4] Toma um café.

[5] 2+x=6

[6] Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

[7] 2 é um número par.

As frases 1, 2, 6 e 7 são proposições: as afirmações 1 e 7 são verdadeiras, enquanto que a afirmação 2 é falsa.

A afirmação 6 é conhecida como a *Conjetura de Goldbach* – até ao momento, não existe uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, mas será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As restantes frases não são proposições: as frases 3 e 4 não são do tipo declarativo e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos; a frase 5 não é nem verdadeira nem falsa, visto que o valor de x é desconhecido.

[Definição 1.5] Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se tratar de uma frase declarativa simples. Diz-se uma **proposição composta** se for uma frase declarativa composta.

A veracidade de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada. Por exemplo, a afirmação "Este livro tem uma capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa.

Também a decisão sobre o valor lógico de uma frase composta pode depender do contexto em que se insere. No entanto, para saber se uma frase composta é verdadeira ou falsa, basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem. A afirmação "Este livro tem uma capa vermelha e está escrito em português." é verdadeira para alguns livros e falsa para outros. Porém, é verdadeira sempre que ambas as frases simples que a compõem forem verdadeiras.

[Exemplo]

Consideremos as seguintes proposições:

[1] 2 é um número par.

[2] Todo o número primo é ímpar.

[3] 2 é um número par e todo o número primo é ímpar.

A proposição 1 é uma proposição simples que assume o valor lógico verdadeiro, enquanto que a proposição 2 é uma proposição simples que assume o valor lógico falso. A proposição 3 é composta: obtém-se a partir da conjunção de duas proposições simples. Como uma das proposições simples que a compõem é falsa, assume também o valor lógico falso.

No Cálculo Proposicional, não se pretende determinar se uma frase simples é ou não verdadeira. O objetivo é estudar a veracidade das proposições compostas a partir da veracidade ou falsidade das frases que as compõem e do significado dos conetivos.

Estudaremos de seguida o significado associado a cada um dos conetivos proposicionais referidos anteriormente. Esse mesmo significado pode ser expresso de forma clara através de tabelas designadas por **tabelas de verdade**.

Por Definição, a fórmula $\perp$ toma sempre o valor lógico 0.

Dada uma proposição arbitrária φ, a sua negação tem um valor lógico contrário ao de φ. A relação entre o valor lógico de φ e o valor lógico de $\neg\varphi$ pode ser representada através da seguinte tabela de verdade:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

[Exemplo]

A proposição "Todo o número primo é ímpar." é falsa. A sua negação, "Nem todo o número primo é ímpar.", é verdadeira: basta considerar o número primo 2.

A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira. A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa, uma vez que $24 = 8 \times 3$.

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. A tabela de verdade associada ao conetivo $\wedge$ é a seguinte:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

[Exemplo]

As proposições "24 é divisível por 8." e "56 é divisível por 8." são verdadeiras. Por outro lado, a proposição "28 é divisível por 8." é falsa.

A proposição "24 e 56 são divisíveis por 8.", que resulta da conjunção das duas primeiras proposições atrás referidas, é verdadeira. A proposição "28 e 56 são divisíveis por 8." é falsa.

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é verdadeira se pelo menos umas das proposições que a compõem é verdadeira. O significado do conetivo $\vee$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

[Exemplo]

A proposição "24 não é divisível por 8 ou 5 não é um número primo." é falsa pois é a disjunção de duas proposições falsas. A proposição "24 não é divisível por 8 ou 100 é divisível por 4." é verdadeira, pois uma das proposições que a compõem é verdadeira.

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \to \psi$ é verdadeira se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. O significado do conetivo $\to$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

[Exemplo]

Consideremos a seguinte afirmação "Se o João tiver 12 valores no teste, então o João passa à disciplina."

Note-se que esta afirmação será falsa se o João tiver 12 valores no teste e não passar à disciplina. Por outro lado, será claramente verdadeira se o João tiver 12 valores no teste e passar à disciplina. A afirmação não descreve o que acontece caso o João não tire 12 valores no teste. Sendo assim, caso o João não tire 12 valores no teste, a afirmação é verdadeira quer o João passe à disciplina quer não passe. Resumindo, a afirmação é falsa se o antecedente da implicação é verdadeiro e o consequente falso, e só nesse caso.

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se ψ e φ são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. O significado do conetivo $\leftrightarrow$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

[Exemplo]

Consideremos as seguintes proposições:

[1] $1 + 3 = 4$ é equivalente a $4 = 1 + 3$.

[2] $1 + 1 = 1$ se e só se chover canivetes.

[3] 10 é múltiplo de 5 se e só se 8 é múltiplo de 5.

A proposição 3 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só **valor lógico**. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionando-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

[Exemplo]

Estudemos o valor lógico da fórmula $\varphi = \neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.
Nesta fórmula ocorrem duas variáveis proposicionais, p_0 e p_1, pelo que se torna necessário considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de p_0 e p_1.

Como cada variável pode assumir um de dois valores lógicos (0 ou 1), existem 2^2 combinações possíveis. Logo, a tabela de verdade terá 4 linhas. Introduzimos uma coluna para cada variável proposicional, uma coluna para φ e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Para cada caso, determinamos primeiro o valor lógico de $\neg p_0$ e de $p_1 \vee p_0$, para podermos, depois, determinar o valor lógico de $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

Da análise da seguinte tabela de verdade

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

podemos concluir que a fórmula φ é verdadeira apenas quando p_0 é falsa e p_1 é verdadeira.

[Exemplo]

Estudemos, agora, o valor lógico da fórmula $\psi = \neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$.

Nesta fórmula ocorrem três variáveis proposicionais distintas, p_0, p_1 e p_2, pelo que existem 2^3 combinações dos valores lógicos de p_0, p_1 e p_2. Logo, a tabela de verdade para a fórmula ψ terá 8 linhas:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$\neg(p_0 \vee p_1) \to p_2$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Analisando a tabela, podemos concluir que a fórmula ψ é falsa apenas quando as três variáveis proposicionais p_0, p_1 e p_2 são todas falsas.

[Observação] Se φ é uma fórmula onde ocorrem n variáveis proposicionais distintas, então existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos dessas variáveis proposicionais. Assim, uma tabela de verdade de φ terá 2^n linhas.

Existem fórmulas que assumem sempre o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

[Definição 1.6] Uma **tautologia** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

[Exemplo]

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, as fórmulas $p_n \vee \neg p_n$ e $p_n \to p_n$ são tautologias.

p_n	$\neg p_n$	$p_n \vee \neg p_n$
1	0	1
0	1	1

p_n	$p_n \to p_n$
1	1
0	1

No resultado que se segue, listam-se tautologias que são utilizadas com frequência.

[Proposição 1.7] Dadas as fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, as seguintes fórmulas são tautologias:

[Modus Ponens] $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$

[Modus Tollens] $((\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi) \to \neg\varphi$

[transitividade] $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$

demonstração Verifiquemos se a fórmula que expressa a transitividade é uma tautologia.

Construindo a tabela de verdade de $\tau : ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$, podemos concluir que esta fórmula é uma tautologia se o seu valor lógico for sempre verdadeiro.

φ	ψ	σ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \sigma$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)$	$\varphi \to \sigma$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

De modo análogo, verifica-se que as outras duas fórmulas que expressam o Modus Tollens e o Modus Ponens são tautologias (exercício). ■

A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso.

[Definição 1.8] Uma **contradição** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

[Exemplo]

As fórmulas $p_n \wedge \neg p_n$ e $p_n \leftrightarrow \neg p_n$ são contradições para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

p_n	$\neg p_n$	$p_n \wedge \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

p_n	$\neg p_n$	$p_n \leftrightarrow \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

[Observações]
(1) Se uma fórmula não é uma tautologia, isso não significa que seja uma contradição. Há, evidentemente, fórmulas que não são nem tautologias nem contradições.
(2) Se φ é uma tautologia (respetivamente, contradição), então $\neg\varphi$ é uma contradição (respetivamente, tautologia).

Existem fórmulas que, embora distintas, assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem. Se φ e ψ forem duas fórmulas nessas condições, facilmente concluímos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

[Definição 1.9] Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Dizemos que φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

[Exemplo]

As fórmulas $\varphi : (p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \to \neg p_1$ e $\psi : \neg(p_0 \wedge p_1)$ são logicamente equivalentes, pois

$$\varphi \leftrightarrow \psi : ((p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \to \neg p_1) \leftrightarrow (\neg(p_0 \wedge p_1))$$

é uma tautologia.

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$	$\neg p_1$	φ	$p_0 \wedge p_1$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Em seguida, listamos algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas.

[Proposição 1.10] Dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

[associatividade]
$((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$
$((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$

[leis de De Morgan]
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

[comutatividade]
$((\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi))$
$((\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi))$

[distributividade]
$((\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$
$((\varphi \vee (\psi \wedge \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma))$

[idempotência]
$(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$
$(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

[dupla negação]
$\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$

[elemento neutro]
$((\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$
$((\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$

[elemento absorvente]
$((\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$
$((\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \vee \neg\psi)$

[lei do contrarrecíproco]
$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

$(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

demonstração: Comecemos por mostrar a equivalência lógica da dupla negação.

Construindo a tabela de verdade de $\neg(\neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	$\neg\varphi$	$\neg(\neg\varphi)$	$\neg(\neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$
1	0	1	1
0	1	0	1

Logo, as fórmulas $\neg(\neg\varphi)$ e φ são logicamente equivalentes.

Verifiquemos, agora, a equivalência lógica

$$((\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)).$$

As restantes provas ficam como exercício.

À semelhança do que foi feito no caso da dupla negação, construindo a tabela de verdade de $\tau : ((\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	ψ	σ	$\psi \vee \sigma$	$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \wedge \sigma$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

■

[Exemplo]

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos mostrar que a fórmula

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)),$$

é logicamente equivalente à fórmula p_0.

De facto,

$$\begin{aligned} (p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)) &\Leftrightarrow p_0 \wedge (p_1 \vee \neg p_1) && \text{[distributividade]} \\ &\Leftrightarrow p_0 && \text{[elemento neutro]} \end{aligned}$$

Poderíamos, também, mostrar que a fórmula $(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))$ é logicamente equivalente a p_0 provando que a fórmula $((p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))) \leftrightarrow p_0$ é uma tautologia.

[Exemplo]

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos provar que as fórmulas $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ e $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$ são logicamente equivalentes.

Pela lei do contrarrecíproco,

$$(p_1 \to p_2) \Leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1),$$

pelo que
$$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \Leftrightarrow (p_0 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)).$$
De novo pela lei do contrarrecíproco, temos
$$(p_0 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0).$$
Assim,
$$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0).$$

1.3 Cálculo de Predicados Clássico

Na secção anterior, referimos que frases como "x é um inteiro par" ou "$x + y = 2$" não são proposições, visto que os seus valores lógicos dependem dos valores de x e de y.

No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objetos genéricos representados por letras, designadas por **variáveis**.

Frases como esta são objeto de estudo de um ramo da lógica denominado Cálculo de Predicados.

Nesta Unidade Curricular, não pretendemos aprofundar o estudo de Cálculo de Predicados, mas iremos estudar algumas noções elementares que permitem a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

Em frases que envolvam variáveis, está implícito um domínio de discurso, designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

[Exemplo]

> Na frase "x é um inteiro par", a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.

A frase "x é um inteiro par" não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, "2 é um inteiro par" e "3 é um inteiro par" são proposições que assumem o valor lógico verdadeiro e falso, respetivamente.

[Definição 1.11] Um **predicado nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$, com $n \in \mathbb{N}$, é uma frase declarativa que faz referência às variáveis $x_1, \ldots, x_n$ cujo valor lógico depende da substituição destas variáveis por valores do seu domínio de variação, tornando-se numa proposição sempre que as variáveis são substituídas por valores do seu universo.

Representamos um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ por uma letra minúscula p, q, r,... (eventualmente com índices) seguida das variáveis que ocorrem nesse predicado colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas.

[Exemplo]

Os predicados "x é um inteiro par" e "x é maior do que y" podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.

Dado um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, se, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i é um valor do domínio de variação de x_i, então representamos por $p(a_1, \ldots, a_n)$ a substituição das variáveis de p por esses valores concretos.

[Exemplo]

Considerando os predicados do exemplo anterior, $p(8)$ representa a proposição "8 é um inteiro par" e $q(\sqrt{2}, 3)$ representa a proposição "$\sqrt{2}$ é maior do que 3".

Os conetivos lógicos que definimos na sintaxe do Cálculo Proposicional Clássico estendem-se ao Cálculo de Predicados de um modo natural.

Assim, se $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

$$(\neg p(x_1, \ldots, x_n)), \qquad (p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots, x_n)), \qquad (p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow q(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\text{e} \qquad (p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots, x_n))$$

são também predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

[Exemplo]

Sejam $p(x)$ o predicado "x é um inteiro par" e $q(x)$ o predicado "x é um número primo". Então, $p(x) \wedge q(x)$ representa o predicado "x é um inteiro par e é um número primo".

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos dos seus domínios de variação não é a única forma de obter uma proposição a partir de um predicado. Também o podemos fazer recorrendo aos chamados **quantificadores**.

[Definição 1.12] Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, a frases tais como "Para todo o x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Qualquer que seja o x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Para cada x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", dá-se a designação de **quantificação universal**. Estas frases podem ser representadas por $\forall_{x_i}\, p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x\, p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **todo** o elemento a do domínio de variação de x, também designado **universo de quantificação de** x.

[Exemplo]

> Se $p(x)$ representar o predicado "$x^2 \geq 0$" e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira, uma vez que a afirmação em causa é verdadeira para qualquer real.

Se existir (pelo menos) um elemento b do domínio de variação de x para o qual $p(b)$ é uma proposição falsa, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é falsa.

[Exemplo]

> Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 > 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ q(x)$ é falsa, pois 0 é um número real e $q(0)$ é falsa.

[Definição 1.13] Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, frases tais como "Existe um x_i tal que $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Para algum x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$." são designadas de **quantificação existencial**.

Estas frases podem ser representadas por $\exists_{x_i}\ p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Ao símbolo $\exists$ chamamos **quantificador existencial** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "existe" ou "para algum".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\exists_x\ p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\exists_x p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **algum** elemento a do universo de quantificação de x.

Por outro lado, se não existir qualquer elemento b do universo de quantificação de x para o qual $p(b)$ seja verdadeira, a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa.

[Exemplo]

> Se $p(x)$ representar o predicado "$x + 3 = 2$" e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números inteiros, a proposição $\exists_x\ p(x)$ é verdadeira, pois $-1 \in \mathbb{Z}$ e $p(-1)$ é verdadeira.
>
> Por outro lado, se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa, uma vez que a equação não tem solução em $\mathbb{N}$.

Se o universo de uma dada quantificação for um certo conjunto U, podemos escrever $\forall_{x \in U}\ p(x)$ e $\exists_{x \in U}\ p(x)$, em vez de $\forall_x\ p(x)$ e $\exists_x\ p(x)$, respetivamente.

[Exemplo]

A frase "Existe um natural x tal que $x + 3 = 2$" pode ser representada por

$$\exists_{x \in \mathbb{N}}\, x + 3 = 2.$$

Relativamente ao predicado $p(x) : x + 3 = 2$, prova-se que o número inteiro -1 é, de facto, o único inteiro a tal que $p(a)$ é uma proposição verdadeira.

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a existência de um único objeto que satisfaça o predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists^1_x\, p(x)$, à qual é usual associar uma das leituras "Existe um e um só x tal que $p(x)$" ou "Existe um único x tal que $p(x)$".

[Exemplo]

A proposição $\exists^1_{x \in \mathbb{Z}}\, x + 3 = 2$ é verdadeira, ao passo que $\exists^1_{x \in \mathbb{Z}}\, x^2 - 1 = 0$ é falsa (tanto 1 como -1 satisfazem o predicado $x^2 - 1 = 0$, contradizendo a unicidade de um objeto que o satisfaça).

Os quantificadores universal e existencial podem ser combinados para quantificar uma mesma condição.

[Exemplo]

Sejam $p(x, y)$ o predicado $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $q(x, y)$ o predicado $x + y = 0$.

Dados dois números reais quaisquer a e b, sabemos que $p(a, b)$ é verdadeira. Logo, a proposição $\forall_{x \in \mathbb{R}}\, \forall_{y \in \mathbb{R}}\, p(x, y)$ é verdadeira.

Todo o número inteiro admite um simétrico em $\mathbb{Z}$, pelo que a proposição $\forall_{x \in \mathbb{Z}}\, \exists_{y \in \mathbb{Z}}\, q(x, y)$ é verdadeira.

No entanto, a proposição $\forall_{x \in \mathbb{N}_0}\, \exists_{y \in \mathbb{N}_0}\, q(x, y)$ é falsa.

[Exemplo]

Consideremos as seguintes proposições.

[a] A equação $x^3 = 27$ tem solução no conjunto dos números naturais.

[b] Todo o número real admite um inverso para a multiplicação.

[c] Todo o inteiro maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

[d] No conjunto dos números reais, existe um elemento absorvente para a multiplicação e este elemento é único.

Todas são quantificações e podemos, sem grande dificuldade, exprimi-las em linguagem formal:

[a] $\exists_{x\in\mathbb{N}}\ x^3 = 27$

[b] $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ xy = 1$

[c] $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (n \geq 4 \rightarrow (\exists_{m,p\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\ (n = m+p \wedge \forall_{k\in\mathbb{N}}\ ((k|m \rightarrow (k = 1 \vee k = m)) \wedge (k|p \rightarrow (k = 1 \vee k = p))))))$

[d] $\exists^1_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ xy = yx = y$

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, a valoração da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

[Exemplo]

Consideremos o predicado $x + y = 5$.

A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\ \exists_{y\in\mathbb{Z}}\ x + y = 5$ é verdadeira. De facto, dado $x \in \mathbb{Z}$, temos que $x + y = 5$ para $y = 5 - x$, que é, claramente, um inteiro.

A proposição $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ \forall_{x\in\mathbb{Z}}\ x + y = 5$ é falsa, já que afirma que existe um inteiro y tal que $x + y = 5$ para todo o $x \in \mathbb{Z}$ (portanto, um mesmo valor de y para todos os valores de x). Ora, para $x = 0$, tal y teria de ser 5, mas para $x = 1$, considerando $y = 5$, teríamos $x + y = 6 \neq 5$.

De notar que, quando as quantificações de todas as variáveis é feita com o mesmo quantificador, a ordem das quantificações não afeta a valoração da proposição e, como tal, é possível simplificar a escrita, usando apenas um quantificador.

[Exemplo]

A proposição (verdadeira) $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ \exists_{y\in\mathbb{Z}}\ x+y = 5$ pode ser escrita como $\exists_{x,y\in\mathbb{Z}}\ x+y = 5$.

A proposição (falsa) $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\ \forall_{y\in\mathbb{Z}}\ x + y = 5$ pode ser escrita como $\forall_{x,y\in\mathbb{Z}}\ x + y = 5$.

Se a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa, então não existe qualquer valor a do domínio de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira. Por outras palavras, $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x. Equivalentemente, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira. Deste modo, provamos a seguinte proposição:

[Proposição 1.14] $\neg(\exists_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\ (\neg p(x))$.

De modo análogo, podemos concluir o resultado que se segue.

[Proposição 1.15] $\neg(\forall_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x\ (\neg p(x))$.

[Exemplo]

Consideremos a proposição “1000000 é o maior número natural.

Usando linguagem simbólica, podemos reescrever a afirmação anterior como $\forall_{x\in\mathbb{N}} \;\; 1000000 > x$.

A negação da proposição é “1000000 não é o maior número natural”. Esta última proposição significa que existe pelo menos um natural que não é menor que 1000000.

Podemos, assim, reescrever a negação da proposição inicial como $\exists_{x\in\mathbb{N}} \;\; x \not< 1000000$ ou, equivalentemente, como $\exists_{x\in\mathbb{N}} \;\; x \geq 1000000$.

1.4 Métodos de Prova

[Definição 1.16] A prova (demonstração) de uma proposição matemática é um argumento logicamente válido (construído com base em princípios - regras e axiomas) que estabelece a veracidade da proposição.

[Exemplo]

Consideremos a proposição “$2 = 1$” e a argumentação que se segue, que lhe conferiria o valor lógico verdadeiro.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a = b \;\; &\Rightarrow \;\; aa = ab \\
&\Rightarrow \;\; a^2 = ab \\
&\Rightarrow \;\; a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
&\Rightarrow \;\; (a+b)(a-b) = b(a-b) \\
&\Rightarrow \;\; a + b = b \\
&\Rightarrow \;\; b + b = b \\
&\Rightarrow \;\; 2b = b \\
&\Rightarrow \;\; 2 = 1
\end{aligned}$$

Sabemos que a proposição “$2 = 1$” é falsa, pelo que o argumento apresentado não pode ser válido. Uma vez que estamos a assumir que $a = b$, facilmente concluímos que $a - b = 0$, pelo que não podemos aplicar a lei do corte no quinto passo da argumentação. O argumento apresentado é, pois, incorreto.

A prova de uma proposição pode ser **direta** ou **indireta**.

Numa prova direta de uma proposição procura-se estabelecer a veracidade da mesma a partir de axiomas ou factos conhecidos e sem assumir pressupostos adicionais.

Porém, em certos casos, a prova direta não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestas situações pode-se optar por um método de prova indireta. Por exemplo, pode-se provar a veracidade de uma proposição mostrando que esta não pode ser falsa.

1.4.1 Prova direta de uma conjunção

Na prova direta de $p \wedge q$, procura-se uma prova de p e uma prova de q.

De facto, sabemos que a proposição $p \wedge q$ é verdadeira se e só se ambas as proposições p e q são verdadeiras.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: $x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem soluções reais e as raízes do polinómio $x^2 - 1$ são -1 e 1.

Esta proposição é a conjunção das proposições

p: $x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem soluções reais.

e

q: As raízes do polinómio $x^2 - 1$ são -1 e 1.

A prova direta da proposição dada consiste de uma prova da proposição p e de uma prova da proposição q:

demonstração: Usando a fórmula resolvente para equações polinomiais de 2.º grau, temos que

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Portanto, $x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem soluções reais. Assim, p é uma proposição verdadeira.
Consideremos agora a equação $x^2 - 1 = 0$. Atendendo a que

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1,$$

podemos afirmar que as raízes do polinómio $x^2 - 1$ são -1 e 1 e, por conseguinte, que q é uma proposição verdadeira. ■

1.4.2 Prova direta de uma disjunção

Na prova direta de $p \vee q$ basta fazer prova de uma das proposições p ou q.

Recorde-se que a proposição $p \vee q$ é verdadeira se e só se pelo menos umas das proposições p ou q é verdadeira. Ao apresentar-se uma prova de p (respetivamente, q), fica provada a veracidade de $p \vee q$, sem ser necessário apresentar uma prova de q (respetivamente, p).

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: A soma de dois números naturais consecutivos é ímpar ou o seu produto é maior do que 3.

Esta proposição é a disjunção das proposições

p: A soma de dois números naturais consecutivos é ímpar.

e

q: O produto de dois números naturais consecutivos é maior do que 3.

A prova direta da proposição dada consiste de uma prova da proposição p ou de uma prova da proposição q. Neste caso, a proposição q é falsa em geral (note-se que 1 e 2 são naturais consecutivos cujo produto é inferior a 3), mas a prova da veracidade de p é suficiente para provar a veracidade de $p \vee q$:

demonstração: Sejam n e m dois números naturais consecutivos, com $n > m$. Então, $n = m + 1$, pelo que

$$n + m = (m + 1) + m = 2m + 1.$$

Assim, $n+m$ é um número ímpar. Logo, a soma de quaisquer dois números naturais consecutivos é ímpar e, portanto, a proposição é verdadeira. $\blacksquare$.

1.4.3 Prova direta de uma implicação

Para demonstrar diretamente uma afirmação do tipo $p \to q$, assume-se a veracidade de p e constrói-se uma prova de q.

Note-se que uma proposição $p \to q$ é verdadeira apenas nos casos em que p é falsa ou em que p e q são ambas verdadeiras. Assim, se p é uma proposição falsa, $p \to q$ é naturalmente verdadeira, independentemente do valor lógico de q. Logo, o único caso que é necessário analisar, para mostrar a veracidade de $p \to q$, é o caso em que p é verdadeira, sendo necessário provar, nesse caso, a veracidade de q.

[Exemplo]

Consideremos a proposição: Todo o inteiro ímpar se escreve como a diferença de dois quadrados perfeitos.

Esta proposição pode ser reescrita do seguinte modo: Se n é um inteiro ímpar, então n é a diferença de dois quadrados perfeitos. Assim, a proposição considerada é da forma $p \to q$, com

p: n é um inteiro ímpar.

e

q: n é a diferença de dois quadrados perfeitos.

Observe-se que, dado um inteiro n, apenas nos interessa considerar, para a prova, o caso em que n é ímpar, ou seja, assumimos que p é verdadeira e procuramos mostrar que também q é verdadeira.

demonstração: Pretendemos mostrar que, se $n \in \mathbb{Z}$ é um número ímpar, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $n = a^2 - b^2$.

Suponhamos, então, que $n \in \mathbb{Z}$ é um número ímpar.

Então, existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

Ora,

$$n = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k+1)^2 - k^2 = a^2 - b^2,$$

com $a = k+1$ e $b = k$ inteiros. Logo, n escreve-se como a diferença de dois quadrados perfeitos. ■

1.4.4 Prova de uma equivalência

Atendendo à equivalência lógica $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$, a prova de uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ pode passar pela prova de duas implicações.

Na prova de $p \leftrightarrow q$, constrói-se uma prova de $p \rightarrow q$ e uma prova de $q \rightarrow p$.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte afirmação sobre $n \in \mathbb{Z}$: n^2 é par se e só se n é par.

Esta proposição pode ser escrita na forma $p \leftrightarrow q$, onde

p: n^2 é par.

e

q: n é par.

Observe-se que, dizer que n^2 é par é equivalente a afirmar que $n^2 = 2k$ para algum inteiro k. Logo, $n = \pm\sqrt{2k}$, o que não nos permite concluir nada sobre a paridade de n. A prova da equivalência dada passa pela prova de $p \rightarrow q$ e de $q \rightarrow p$. Esta última é trivial:

demonstração $[q \to p]$**:** Admitamos a veracidade de q e procuremos provar p. Para tal, admitamos que n é par. Por definição, existe, então, um inteiro k tal que $n = 2k$. Logo, $n^2 = (2k)^2$, donde $n^2 = 2(2k^2)$, ou seja, $n^2 = 2s$, com $s = 2k^2 \in \mathbb{Z}$. Concluímos, deste modo, que n^2 é par, isto é, p é verdadeira. ■

A prova de $p \leftrightarrow q$ só fica completa quando formos capazes de provar a implicação $p \to q$. Veremos essa prova na secção 1.4.8.

1.4.5 Prova de uma negação

Na prova de $\neg p$, assume-se p e procura-se uma contradição.

[Exemplo]

Consideremos a proposição: Não existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$. Facilmente se verifica que esta é a negação da proposição

p: Existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$.

Para provar a veracidade de $\neg p$, mostramos que p não pode, de facto, ser verdadeira:

demonstração: Suponhamos que existem números naturais n e m tais que $2n + 16m = 13$. Então,

$$13 = 2n + 16m = 2(n + 8m),$$

pelo que 13 é divisível por 2, o que contradiz o facto de 13 ser um número ímpar. Assim, não existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$. ■

1.4.6 Prova indireta por contradição ou redução ao absurdo

Para provar uma afirmação p, assume-se $\neg p$ e procura-se uma contradição.

No exemplo que se segue, apresenta-se uma demonstação do resultado enunciado recorrendo a uma prova por redução ao absurdo.

[Exemplo]

Proposição: Existe uma infinidade de números primos.

demonstração: No sentido de provarmos por contradição este resultado, admitamos que existe um número finito de primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Considere-se, agora, o número

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Temos que

$$x = p_1 \times (p_2 \cdots p_n) + 1,$$

pelo que o resto da divisão de x por p_1 é 1 e, por conseguinte, x não é divisível por p_1.

Analogamente,

$$x = p_2 \times (p_1 p_3 \cdots p_n) + 1,$$

donde o resto da divisão de x por p_2 é, também, 1 e, por isso, x não é divisível por p_2.

É óbvio que este raciocínio se pode aplicar com qualquer um dos primos $p_1, \ldots, p_n$ e, portanto, podemos concluir que o número x não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (pois o resto da divisão é sempre 1).

Logo, x é um número primo, o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos, uma vez que x é diferente de qualquer um dos números de entre $p_1, \ldots, p_n$.

Então a hipótese inicial está errada e, portanto, existe um número infinito de primos.
■

1.4.7 Prova de uma implicação por redução ao absurdo

Muitas proposições matemáticas são enunciadas na forma de uma implicação $p \to q$. Para além destas, existem outras proposições que, embora não sendo implicações, a sua prova pode passar pela demonstração de uma afirmação do tipo $p \to q$.

Por estes motivos, é conveniente conhecer e estudar diversos métodos de prova indireta que existem para uma implicação.

A prova de $p \to q$ pode ser feita por contradição. Uma vez que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge \neg q)$, temos que $\neg(p \to q)$ é logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$.

[Exemplo]

Consideremos o seguinte resultado que garante a unicidade da inversa de uma matriz invertível sobre o corpo dos complexos.

[Teorema] Seja A uma matriz quadrada de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, invertível. Então, existe uma única matriz X, também de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, tal que $AX = XA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

O enunciado deste teorema é da forma $p \to q$, onde

p: A é uma matriz quadrada de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, invertível.

e

q: Existe uma única matriz X, de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, tal que $AX = XA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

A prova de $p \to q$ por redução ao absurdo passa por assumir-se $p \wedge \neg q$ e procurar-se uma contradição. Ora, ao assumirmos $p \wedge \neg q$, estamos a assumir p e $\neg q$. Sendo p verdadeira, fica garantida a existência de pelo menos uma matriz X, de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, tal que $AX = XA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Sendo assim, afirmar que $\neg q$ é verdadeira é equivalente a dizer que existe mais do que uma matriz nessas condições e isso leva a uma contradição:

demonstração Sendo A uma matriz invertível, sabemos que existe uma matriz X de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, tal que $AX = XA = I_n$. Admitamos que X não é única, ou seja, que existe uma outra matriz quadrada Y, de ordem n, sobre $\mathbb{C}$, tal que $AY = YA = I_n$. Então,

$$Y = YI_n = Y(AX) = (YA)X = I_nX = X,$$

o que é absurdo. Logo, existe uma só matriz X nas condições referidas. ■.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.

Esta proposição é da forma $p \to q$, onde

$$p\colon\ x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 = 2$$

e

$$q\colon\ x \notin \mathbb{Q}$$

e é equivalente a afirmar que $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são números irracionais.

A seguinte prova da proposição segue por redução absurdo:

demonstração: Suponhamos que $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x^2 = 2$ e $x \in \mathbb{Q}$, e procuremos uma contradição.

Ora, se $x^2 = 2$ temos que $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Consideremos o caso em que $x = \sqrt{2}$ (o outro caso é análogo).

Então, $\sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$, pelo que existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $b \neq 0$, m.d.c.$(a, b) = 1$ e

$$x = \frac{a}{b}.$$

Assim,

$$2 = x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

pelo que $a^2 = 2b^2$.
Logo, a^2 é um número par e, consequentemente, a também o é. Portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k$.
Assim, $(2k)^2 = 2b^2$ ou, equivalentemente,

$$4k^2 = 2b^2,$$

pelo que $b^2 = 2k^2$.
Então, b^2 é par e b também o é.
Como a e b são pares, 2 é divisor de ambos os números, contrariando o facto de m.d.c.$(a, b) = 1$. ■

1.4.8 Prova de uma implicação por contraposição ou por contrarrecíproco

Atendendo a que as fórmulas $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ são logicamente equivalentes, a demonstração de um resultado do primeiro tipo pode ser feita, indiretamente, apresentando uma prova de $\neg q \to \neg p$. A uma tal demonstração chama-se prova por contraposição ou por contrarrecíproco.

Para demonstrar uma afirmação do tipo $p \to q$, assume-se $\neg q$ e encontra-se uma prova de $\neg p$.

[Exemplo]

Consideremos o exemplo apresentado na secção 1.4.4, onde se procurava apresentar uma prova da seguinte afirmação sobre $n \in \mathbb{Z}$: n^2 é par se e só se n é par.

Como referimos, esta proposição pode ser escrita na forma $p \leftrightarrow q$, onde

$$p\text{: } n^2 \text{ é par.}$$

e

$$q\text{: } n \text{ é par.}$$

A fim de completar a prova desta proposição apresentada nesse exemplo, resta provar a implicação $p \to q$. Note-se que não é possível uma prova direta de tal implicação:

demonstração: Iremos demonstrar este resultado por contraposição. Nesse sentido, suponhamos que n não é par, ou seja, que n é ímpar.

Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k + 1$, pelo que $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Logo, n^2 é ímpar. ■

Observe-se que a prova acima é a demonstração da implicação $\neg q \to \neg p$. Sendo esta proposição equivalente a $p \to q$, a prova acima é também uma demonstração de $p \to q$.

1.4.9 Prova indireta de uma disjunção

Como já referimos anteriormente, a prova de uma disjunção pode também ser feita de um modo indireto.

Uma vez que ambas as fórmulas $\neg p \to q$ e $\neg q \to p$ são logicamente equivalentes a $p \vee q$, a prova da disjunção de p e q pode passar pela prova de $\neg p \to q$ ou de $\neg q \to p$.

Na prova de $p \vee q$, assume-se $\neg p$ e procura-se uma prova de q ou, equivalentemente, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de p.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: Dados dois números reais x e y tais que $xy = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$.

Considerando $\mathbb{R}$ o universo de variação das variáveis, esta proposição pode ser escrita na forma $r \to (p \vee q)$, onde

$$r\text{: } xy = 0,$$

$$p\text{: } x = 0$$

e

$$q\text{: } y = 0.$$

Para provar a proposição dada, assumimos r e procuramos uma prova de $p \vee q$. Será na prova de $p \vee q$ que usaremos o método de prova descrito nesta secção.

demonstração: Pretendemos mostrar que $x = 0$ ou $y = 0$, assumindo que $x, y \in \mathbb{R}$ e $xy = 0$. Iremos demonstrar esta disjunção recorrendo a uma prova indireta. Nesse sentido, começamos por supor que $x \neq 0$ e procuramos concluir que $y = 0$.

Sendo x um número real não nulo, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}.0 \Leftrightarrow (\frac{1}{x}x)y = 0 \Leftrightarrow 1.y = 0 \Leftrightarrow y = 0. \blacksquare$$

1.4.10 Prova por casos

A prova direta de uma afirmação do tipo $(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \to q$ consiste em procurar uma prova de q assumindo $p_1 \vee \cdots \vee p_n$. Para que $p_1 \vee \cdots \vee p_n$ seja verdadeira, é necessário que pelo menos uma das proposições p_i seja verdadeira. Assim, podemos construir a prova estudando cada um dos casos possíveis: (1) p_1 é verdadeira; (2) p_2 é verdadeira; ...; (n) p_n é verdadeira. A uma tal prova dá-se o nome de **prova por casos**.

A prova por casos de uma afirmação do tipo $(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \to q$ consiste em procurar uma prova para cada uma das implicações $p_1 \to q$, ..., $p_n \to q$.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: Se a e b são números reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.

A prova que apresentamos considera dois casos possíveis para a: $a > 0$ e $a = 0$.

demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a < b$. Pretendemos mostrar que $a^2 < b^2$. Uma vez que $0 \leq a$, a prova será feita considerando dois casos: $a > 0$ e $a = 0$.

[i] Se $a > 0$, então $a < b$ implica que $a \times a < a \times b$ ou, equivalentemente, $a^2 < ab$. Como $b > 0$, também $a < b$ implica que $a \times b < b \times b$ ou, equivalentemente, $ab < b^2$. Logo, $a^2 < ab < b^2$.

[ii] Se $a = 0$, então $a^2 = 0^2 = 0$ e $ab = 0 \times b = 0$. Como $b > 0$, de $a < b$ concluímos que $a \times b < b \times b$ ou, equivalentemente, $ab < b^2$. Assim, $a^2 = 0 = ab < b^2$. ■

1.4.11 Prova de uma proposição com quantificador universal

Na prova direta de uma proposição do tipo "$\forall_x\ p(x)$", admitimos que a variável a representa um elemento arbitrário do universo de quantificação U da variável x e mostramos que $p(a)$ é verdadeira.

No caso em que U é um conjunto finito, podemos optar por uma **prova por exaustão**, testanto individualmente, para cada $a \in U$, se $p(a)$ é verdadeira.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte quantificação universal: Dado um número natural n, n^2+n é par.

Sendo o universo de variação de n um conjunto infinito, a argumentação da veracidade da proposição dada não pode passar pela atribuição de valores concretos a n. A ideia é mostrar que $n^2 + n$ é um número par para qualquer valor que n possa tomar.

demonstração: Pretendemos mostrar que $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n^2 + n$ é par. Admitamos que a representa um valor arbitrário em $\mathbb{N}$ e procuremos mostrar que $a^2 + a$ é par.

Se a for par, então a^2 é par. Como a soma de dois números pares é ainda um número par, $a^2 + a$ é par.

Por outro lado, se a for ímpar, então a^2 é ímpar. Ora, a soma de dois números ímpares é um número par, pelo que $a^2 + a$ é par. ■

[Exemplo]

Consideremos a seguinte quantificação universal sobre um universo finito: Todo o elemento de $U = \{4, 16, 49\}$ é um quadrado perfeito.

Pretendemos mostrar que $\forall_{n \in U}\ n$ é um quadrado perfeito. Sendo o universo de variação de n um conjunto finito, a argumentação da veracidade da proposição passa por uma prova por exaustão:

demonstração: Recorde-se que um quadrado perfeito é um inteiro da forma k^2 com $k \in \mathbb{Z}$. Dado que os elementos de U são 4, 16 e 49 e dado que $4 = 2^2$, $16 = 4^2$ e $49 = 7^2$, podemos concluir que todo o elemento de U é um quadrado perfeito. ■

1.4.12 Prova de uma proposição com quantificador existencial

Na prova direta de uma proposição do tipo "$\exists_x\ p(x)$", é necessário exibir um elemento a do universo de quantificação U da variável x tal que $p(a)$ seja verdadeira.

Este tipo de prova diz-se uma **prova construtiva**.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: A equação $x^5 - x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ admite uma solução inteira.

Pretendemos mostrar que $\exists_{x \in \mathbb{Z}}\ x^5 - x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x - 2 = 0$. Numa prova direta, basta apresentar um valor inteiro a tal que $a^5 - a^4 - 2\sqrt{2}a^3 + 2\sqrt{2}a^2 + 2a - 2 = 0$:

demonstração: Consideremos $a = 1 \in \mathbb{Z}$. Então, $a^5 - a^4 - 2\sqrt{2}a^3 + 2\sqrt{2}a^2 + 2a - 2 = 1 - 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 - 2 = 0$, pelo que 1 é solução da equação em causa. ■

Em certos casos, a prova construtiva não é simples ou não é possível, podendo-se optar por uma prova indireta por contradição. Nesta situação, a prova diz-se **não construtiva**.

1.4.13 Prova de existência e unicidade

A prova direta de uma proposição do tipo "$\exists_x^1\ p(x)$" pode ser dividida em duas partes:

[prova de existência] prova-se que existe, pelo menos, um elemento a do universo de quantificação de x tal que $p(a)$ é verdade;

[prova de unicidade] supõe-se que a e b são dois elementos do universo de quantificação de x tais que $p(a)$ e $p(b)$ são verdadeiras e mostra-se que $a = b$.

[Exemplo]

Consideremos a seguinte proposição: Existe um elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{R}$ e esse elemento é único.

Pretendemos mostrar que $\exists^1_{u\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$.

Na prova que apresentamos de seguida, começamos por mostrar que existe pelo menos um elemento u que satisfaz $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$, De seguida, mostramos que esse elemento é único.

[prova de existência] Consideremos $u = 1 \in \mathbb{R}$. Pretendemos mostrar que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$. Ora, dado $x \in \mathbb{R}$, $xu = x \times 1 = x = 1 \times x = ux$.

Logo, $u = 1$ é elemento neutro para a multiplicação.

[prova de unicidade] Suponhamos agora que $u' \in \mathbb{R}$ é elemento neutro para a multiplicação. Então, $1 = 1 \times u'$. Por outro lado, 1 é elemento neutro para a multiplicação e, portanto, $u' = 1 \times u'$. Logo, $u' = 1$. ■

1.4.14 Prova de falsidade de uma quantificação universal por contraexemplo

A prova de falsidade de uma proposição do tipo "$\forall_x\ p(x)$" passa por mostrar que existe um elemento a do universo de quantificação tal que $p(a)$ é falsa.

Neste caso, diz-se que a é um **contraexemplo** para a proposição "$\forall_x\ p(x)$".

[Exemplo]

Consideremos a seguinte quantificação universal: Todo o número real admite inverso para a multiplicação.

É afirmado que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ xy = 1$. Consideremos $a = 0 \in \mathbb{R}$ e mostremos que a proposição "$\exists_{y\in\mathbb{R}}\ ay = 1$" é falsa.

Temos, pois, de mostrar que "$\forall_{y\in\mathbb{R}}\ ay \neq 1$" é verdadeira.

Ora, dado $y \in \mathbb{R}$, $ay = 0 \times y = 0 \neq 1$.

Assim, 0 é um contraexemplo para a proposição considerada. ■

1.5 Exercícios resolvidos

1. **Considere as fórmulas $\varphi : p_1 \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$ e $\psi : (p_1 \rightarrow (\neg p_1 \vee p_2)) \wedge ((p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow \neg p_1)$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.**

   (a) **Se o valor lógico da fórmula φ é 1, então os valores lógicos das variáveis proposicionais p_1 e p_2 são iguais.**

   (b) **As fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.**

resolução:

(a) Sabemos que o valor lógico de φ é 1 se e somente se os valores lógicos de p_1 e de $(\neg p_1 \vee p_2)$ são iguais. Ora, se p_1 é verdadeira, então, para $(\neg p_1 \vee p_2)$ ser verdadeira, p_2 tem de ser verdadeira. Por outro lado, se p_1 é falsa, então $(\neg p_1 \vee p_2)$ é verdadeira, independentemente do valor lógico de p_2. Logo, se p_1 é falsa, o valor lógico de φ é 0. Assim, se o valor lógico de φ é 1, então p_1 e p_2 são ambas verdadeiras e a afirmação é verdadeira.

[observação: esta alínea podia ser resolvida com a análise da tabela de verdade de φ]

(b) Consideremos a tabela de verdade

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \vee p_2$	φ	$p_1 \to (\neg p_1 \vee p_2)$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \wedge \neg p_2) \to \neg p_1$	ψ
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1

Os valores lógicos de φ e de ψ nem sempre são iguais. Logo, as fórmulas não são logicamente equivalentes e a afirmação é falsa.

2. Verifique se a fórmula $\varphi : (p_0 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \to p_1)$ é uma tautologia.

resolução: Consideremos a tabela de verdade de φ:

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \vee \neg p_1$	$\neg p_0 \to p_1$	φ
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0

Como o valor lógico de φ não é sempre 1, podemos concluir que φ não é uma tautologia.

3. Considerando que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, que p representa a proposição $\forall_{y \in A}\ \exists_{x \in A}\ \ y = x^2$ e que q representa a proposição $\exists_{y \in A}\ \forall_{x \in A}\ \ y = x^2$,

(a) Dê exemplo de A para o qual apenas uma das proposições p, q é verdadeira. Justifique.

(b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

resolução:

(a) Para p ser verdadeira, para todo $y \in A$ tem de existir $x \in A$ tal que $y = x^2$, ou seja, para todo $y \in A$, $\sqrt{y} \in A$ ou $-\sqrt{y} \in A$. Note-se que os elementos de A são números inteiros.

Para q ser verdadeira, tem de existir $y \in A$ que seja igual aos quadrados de todos os valores de $x \in A$.

Comecemos por apresentar um conjunto A em que p é falsa e q é verdadeira. Consideremos $A = \{-1, 1\}$. Para $y = -1$ não existe $x \in A$ tal que $y = x^2$. Logo, p é falsa. Note-se que $y = 1$ é tal que $y = (-1)^2$ e $y = 1^2$. Assim, q é verdadeira.

Vejamos, agora, um exemplo de um conjunto A em que p é verdadeira e q é falsa. Seja $A = \{0, 1\}$. Para $y = 0$ existe $x \in A$ tal que $y = x^2$: basta considerar $x = 0$. Para $y = 1$ existe $x \in A$ tal que $y = x^2$: basta considerar $x = 1$. Portanto, p é verdadeira. Como não existe nenhum $y \in A$ que seja igual aos quadrados de todos os elementos de A, q é falsa. Note-se que $0^2 = 0 \neq 1 = 1^2$.

(b) Recorde-se que $\neg \forall_{y \in A} \exists_{x \in A}\ r(x, y) \Leftrightarrow \exists_{y \in A} \forall_{x \in A} \neg r(x, y)$.

Sendo assim,

$$\exists_{y \in A} \forall_{x \in A}\ y \neq x^2$$

é logicamente equivalente a $\neg p$.

4. **Considerando que p representa a proposição**

$$\exists_{y \in A} \forall_{x \in A} (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)),$$

   (a) Justificando, dê exemplo de um universo A não vazio onde:
      (i) a proposição p é verdadeira;
      (ii) a proposição p é falsa.
   (b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

resolução:

(a)(i) Para p ser verdadeira, tem de existir um elemento y em A tal que, para todos os valores de x em A distintos de y, $xy > 0$ ou $x^2 + y = 0$. Tomemos, por exemplo, $A = \{-2, -1, 1\}$ e consideremos $y = -1$.

Para $x = -2$, a proposição $(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)$ é verdadeira, uma vez que $xy = 2 > 0$. Para $x = 1$, a proposição $(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)$ é, também, verdadeira, uma vez que $xy = -1 < 0$ mas $x^2 + y = 1^2 - 1 = 0$. Assim, para $A = \{-2, -1, 1\}$, p é verdadeira .

(ii) Para p ser falsa, para todo o valor de y em A tem de existir pelo menos um valor de x em A, distinto de y, tal que a proposição $(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)$ é falsa, ou seja, tal que $xy \leq 0$ e $x^2 + y \neq 0$.

Tomemos, por exemplo, $A = \{-1, 0\}$. Consideremos $y = -1$.

Para $x = 0$, a proposição $(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)$ é falsa, uma vez que $xy = 0 \not> 0$ e $x^2 + y = -1 \neq 0$. Consideremos, agora, $y = 0$. Para $x = -1$, a proposição $(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)$ é, também, falsa, pois $xy = 0 \not> 0$ e $x^2 + y = 1 \neq 0$. Logo, p é falsa para $A = \{-1, 0\}$.

(b) Recorde-se que $\neg\exists_{y\in A}\forall_{x\in A}\ r(x, y) \Leftrightarrow \forall_{y\in A}\exists_{x\in A}\neg r(x, y)$, que $\neg(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$ e que $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Sendo assim,

$$\forall_{y\in A}\exists_{x\in A}\ (x \neq y \wedge (xy \leq 0 \wedge x^2 + y \neq 0))$$

é logicamente equivalente a $\neg p$.

5. **Sejam p e q proposições. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é ou não verdadeira: Para provar que $p \to q$ é verdadeira, é necessário provar que q é verdadeira.**

resolução: A afirmação é falsa. De facto, $p \to q$ pode ser verdadeira e q ser falsa: de facto, se p e q forem ambas falsas, a implicação $p \to q$ é verdadeira.

Consideremos, por exemplo, a proposição "Se hoje é sábado, amanhã é domingo". Esta proposição é verdadeira. No entanto, a proposição "Amanhã é domingo" não tem de ser verdadeira.

6. **Sejam p e q proposições. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é ou não verdadeira: Para mostrar que $p \wedge q$ é falsa, basta mostrar que se p é verdadeira, então q é falsa.**

resolução: A afirmação é verdadeira. Efetivamente, para $p \wedge q$ ser falsa, pelo menos uma das proposições p ou q tem de ser falsa. Se p for falsa, automaticamente $p \wedge q$ é falsa, independentemente do valor lógico de q. Sendo assim, o único caso que tem de ser analisado é o caso em que p é verdadeira. Nesse caso, para $p \wedge q$ ser falsa, q tem de ser falsa. Assim, para mostrar que $p \wedge q$ é falsa, basta mostrar que se p é verdadeira, então q é falsa.

7. **Prove que se n é um número natural ímpar, então $2n^2 + 4n - 14$ é múltiplo de 8.**

resolução: Admitamos que n é um número natural ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
2n^2 + 4n - 14 &= 2 \times (2k+1)^2 + 4 \times (2k+1) - 14 \\
&= 2 \times (4k^2 + 4k + 1) + (8k + 4) - 14 \\
&= 8k^2 + 8k + 2 + 8k + 4 - 14 \\
&= 8k^2 + 16k - 8 \\
&= 8 \times (k^2 + 2k - 1)
\end{aligned}$$

Note-se que $k^2 + 2k - 1 \in \mathbb{Z}$. Logo, $2n^2 + 4n - 14$ é múltiplo de 8, pois é da forma $8r$ para algum $r \in \mathbb{Z}$.

8. **Prove que se o produto de dois números naturais m e n é ímpar, então m e n têm a mesma paridade.**

resolução: A prova segue por contrarrecíproca. Provaremos, então, que se m e n têm paridades distintas, o produto mn é par. Para tal, admitamos que m e n são números naturais que não têm a mesma paridade. Então um destes números é par e o outro ímpar. Suponhamos que m é par e que n é ímpar (o outro caso é análogo). Nesse caso, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$ e existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2r + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
mn &= (2k) \times (2r+1) \\
&= 4kr + 2k \\
&= 2 \times (2kr + k)
\end{aligned}$$

Como $2kr + k \in \mathbb{N}$, segue-se que mn é par.

9. **Seja n um número natural. Mostre que se $n^2 + 8n - 1$ é divisível por 4, então n é ímpar.**

resolução: A prova segue por contrarrecíproca. Provaremos, então, que se n é par, então $n^2 + 8n - 1$ não é divisível por 4. Admitamos que n é par. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Logo,

$$\begin{aligned}
n^2 + 8n - 1 &= (2k)^2 + 8 \times (2k) - 1 \\
&= 4k^2 + 16k - 1 \\
&= 4k^2 + 16k - 4 + 3 \\
&= 4 \times (k^2 + 4k - 1) + 3
\end{aligned}$$

Como $k^2 + 4k - 1 \in \mathbb{N}$, segue-se que o resto da divisão inteira de $n^2 + 8n - 1$ por 4 é 3 e, portanto, $n^2 + 8n - 1$ não é divisível por 4.

Capítulo 2

Teoria elementar de conjuntos

A noção de conjunto é uma noção fundamental na Matemática. O estudo de conjuntos (designado por **Teoria de Conjuntos**) foi introduzido por Georg Cantor, nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de uma forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se, hoje, essencial não só em muitos campos da matemática, mas também noutras áreas como as ciências da computação.

2.1 Noções básicas

Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

[Definição 2.1] Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados **elementos** ou **membros** do conjunto.

[Exemplo]

São exemplos de conjuntos as coleções de:

i | unidades curriculares do primeiro ano do plano de estudos do MiEInf;

ii | pessoas presentes numa festa;

iii | estações do ano;

iv | todos os números naturais.

Representamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z, eventualmente com índices. Os elementos de um conjunto são habitualmente representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z, também eventualmente com índices.

[Definição 2.2] Sejam A um conjunto e x um objeto. Dizemos que x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A. Caso x não seja um dos objetos de A, dizemos que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

[Exemplo]

Sejam A o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$. Temos, por exemplo, que $3 \in A$ e $1 \in B$. Por outro lado, $1 \notin A$ e $3 \notin B$.

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas. Podemos descrever um conjunto enumerando explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas. Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por extensão**.

[Exemplo]

Se A é o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, então A e B podem ser descritos por extensão do seguinte modo: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ e $B = \{-4, 1\}$

Numa descrição por extensão, nem sempre é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos. Nesse caso, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

[Exemplo]

O conjunto dos números naturais é usualmente representado por extensão utilizando a seguinte notação: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

O conjunto dos números inteiros pode ser escrito por extensão recorrendo à seguinte notação: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Podemos descrever um conjunto indicando um predicado $p(x)$, com domínio de variação U para a variável x, tal que os valores possíveis a em U para os quais $p(a)$ é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto em causa. Neste caso, a condição $p(x)$ caracteriza totalmente os elementos do conjunto e dizemos que o conjunto é descrito **por compreensão**.

[Exemplo]

O conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser descrito, por extensão, por $\{1, 2, 3, 4\}$. Em alternativa, podemos definir esse conjunto por compreensão como se segue: $\{n \in \mathbb{N} : n < 5\}$.

[Exemplo]

Seja $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Consideremos os seguintes conjuntos definidos por compreensão: $A = \{x \in X : x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in X : |x| < 2\}$, $C = \{x \in X : \sqrt{x} \in X\}$, $D = \{x^2 : x \in X\}$ e $E = \{x \in X : x^2 \in X\}$.

Note-se que o conjunto A é o conjunto formado pelos elementos x de X tais que $x \in \mathbb{N}$. Ora, os únicos elementos de X que são números naturais são o 1, o 2 e o 4. Assim, $A = \{1, 2, 4\}$.

O conjunto B é formado pelos elementos x de X tais que $|x| < 2$. Como

$$\begin{array}{ll} |-2| = 2 \not< 2 & |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} < 2 \\ |-1| = 1 < 2 & |0| = 0 < 2 \\ |1| = 1 < 2 & |\sqrt{2}| = \sqrt{2} < 2 \\ |2| = 2 \not< 2 & |4| = 4 \not< 2 \end{array}$$

temos que os elementos de X cujo valor absoluto é inferior a 2 são: $-\sqrt{2}$, -1, 0, 1 e $\sqrt{2}$. Logo, $B = \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$.

Por definição, C é o conjunto formado pelos elementos de X cuja raiz quadrada é, também, um elemento de X. Ora,

$$\begin{array}{ll} \sqrt{-2} \notin X & \sqrt{-\sqrt{2}} \notin X \\ \sqrt{-1} \notin X & \sqrt{0} = 0 \in X \\ \sqrt{1} = 1 \in X & \sqrt{\sqrt{2}} \notin X \\ \sqrt{2} \in X & \sqrt{4} = 2 \in X \end{array}$$

Podemos, então, afirmar que os elementos de X cuja raiz quadrada é, também, um elemento de X são os seguintes: 0, 1, 2 e 4. Portanto, $C = \{0, 1, 2, 4\}$.

O conjunto D é formado pelos valores de x^2 onde $x \in X$. Por outras palavras, D é o conjunto dos quadrados dos elementos de X. Sendo

$$\begin{array}{ll} (-2)^2 = 4 & (-\sqrt{2})^2 = 2 \\ (-1)^2 = 1 & 0^2 = 0 \\ 1^2 = 1 & (\sqrt{2})^2 = 2 \\ 2^2 = 4 & 4^2 = 16 \end{array}$$

segue-se que $D = \{0, 1, 2, 4, 16\}$.

O conjunto E é o conjunto dos elementos x de X tais que x^2 é, também, um elemento de X. Dado que

$$\begin{array}{ll} (-2)^2 = 4 \in X & (-\sqrt{2})^2 = 2 \in X \\ (-1)^2 = 1 \in X & 0^2 = 0 \in X \\ 1^2 = 1 \in X & (\sqrt{2})^2 = 2 \in X \\ 2^2 = 4 \in X & 4^2 = 16 \notin X \end{array}$$

temos que $E = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2\}$.

[Definição 2.3] Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio**, e representamo-lo por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo, $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 28\} = \{x : x \neq x\}$.

[Definição 2.4] Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, e escreve-se $A = B$, se têm os mesmos elementos, ou seja, se $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Se existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, então A e B dizem-se **diferentes**.

[Exemplo]

> O conjunto de todos os divisores naturais de 4 é igual ao conjunto $A = \{1, 2, 4\}$ e também é igual ao conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$.
>
> Os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$ e $D = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ são diferentes, pois $3 \in C$ e $3 \notin D$.

Quando se pretende provar a igualdade entre dois conjuntos X e Y dos quais não conhecemos uma definição por extensão, o processo passa por mostrar que, para todo o x, $x \in X$ se e só se $x \in Y$ [ex.: ver exercício resolvido 8. deste capítulo].

[Definição 2.5] Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está contido em** B ou que A **é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, ou seja, se $\forall_x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$. Se existir um elemento de A que não é elemento de B, ou seja, se $\exists_{x \in A}\ x \notin B$, diz-se que A **não está contido em** B ou que A **não é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \nsubseteq B$.

[Exemplo]

> $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, uma vez que tanto -1 como 1 são soluções da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
>
> $\{0, -1, 1\} \nsubseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, uma vez que 0 não é solução da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, pelo que 0 pertence ao primeiro conjunto mas não ao segundo.

Quando se pretende provar a inclusão de um conjunto X num conjunto Y dos quais não conhecemos uma definição por extensão, o processo passa por mostrar que, para todo o x, se $x \in X$ então $x \in Y$ [ex.: ver exercício resolvido 7. deste capítulo].

[Definição 2.6] Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está propriamente contido em** B ou que A **é um subconjunto próprio de** B, e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, se

$$\forall_x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists_{x \in B}\ x \notin A.$$

[Exemplo]

$\{-1,1\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, uma vez que, para além de 1 e -1, 2 também é solução da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

[Proposição 2.7] Sejam A, B e C conjuntos. Então,

1 | $\emptyset \subseteq A$;

2 | $A \subseteq A$;

3 | Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;

4 | $A = B$ se e só se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$).

demonstração:

1 | Mostremos, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$. Nesse sentido, assumamos que $\emptyset \not\subseteq A$. Então, existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Ora, $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de supormos que $\emptyset \not\subseteq A$. Logo, $\emptyset \subseteq A$.

2 | Dado um elemento arbitrário a de A, é claro que $a \in A$. Logo, $\forall_x\ (x \in A \to x \in A)$, ou seja, $A \subseteq A$.

3 | Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, ou seja,

$$(*)\ \forall_x\ (x \in A \to x \in B) \qquad \text{e} \qquad (**)\ \forall_x\ (x \in B \to x \in C).$$

Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$, isto é, $\forall_x\ (x \in A \to x \in C)$. Seja $x \in A$. Por $(*)$, podemos concluir que $x \in B$. Logo, de $(**)$, vem que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

4 | Pretendemos mostrar a veracidade da equivalência $A = B$ se e só se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$). Iremos fazê-lo provando as duas implicações.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $A = B$. Então,

$$\forall_x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall_x\ ((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)).$$

Logo, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então, todo o elemento de A é elemento de B e todo o elemento de B é elemento de A. Por outras palavras, A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$. $\blacksquare$

2.2 Operações com conjuntos: união, interseção e complementação

[Definição 2.8] Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (dito o **universo**). Chama-se **união** ou **reunião de A com B**, e representa-se por $A \cup B$, o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B, ou seja,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

Dado $x \in X$, temos que $x \in A \cup B$ se e só se $x \in A \vee x \in B$ e temos que $x \notin A \cup B$ se e só se $x \notin A \wedge x \notin B$.

[Exemplo]

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então, $C \cup D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 10\}$.

[Definição 2.9] Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Chama-se **interseção de A com B**, e representa-se por $A \cap B$, o conjunto cujos elementos pertencem a ambos os conjuntos A e B, ou seja,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Dado $x \in X$, temos que $x \in A \cap B$ se e só se $x \in A \wedge x \in B$ e temos que $x \notin A \cap B$ se e só se $x \notin A \vee x \notin B$.

[Exemplo]

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, $A \cap B = \{3\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então, $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

[Definição 2.10] Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Chama-se **complementar de B em A**, e representa-se por $A \setminus B$, o conjunto cujos elementos pertencem a A mas não pertencem a B, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O complementar de B em A também se designa por **diferença de A com B** e representa-se por $A - B$.

Dado $x \in X$, temos que $x \in A \setminus B$ se e só se $x \in A \wedge x \notin B$ e temos que $x \notin A \setminus B$ se e só se $x \notin A \vee x \in B$.

Quando A é o universo X, o conjunto $A \setminus B = X \setminus B$ diz-se o **complementar de B** e representa-se por $\overline{B}$ ou B'.

[Exemplo]

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, $A \setminus B = \{1, 2\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Então, $C \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \wedge n > 10\}\}$ e $\mathbb{N} \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$.

3 | Dados os subconjuntos $E = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ e $F =]-\infty, 3]$ de $\mathbb{R}$, temos $E \cup F =]-\infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$, $E \cap F = \{-2, 0, 2\}$, $E \setminus F = \{\pi, 7\}$ e $\overline{E \cup F} = [3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$.

Na proposição que se segue, apresentam-se algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

[Proposição 2.11] Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,
1 | $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$;
2 | $A \cup \emptyset = A$;
3 | $A \cup A = A$;
4 | $A \cup X = X$;
5 | $A \cup B = B \cup A$;
6 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
7 | se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$.

demonstração: Iremos demonstrar as propriedades 1, 2, 4, 6 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \subseteq A \cup B$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in A \cup B).$$

Seja $x \in A$. Então, é verdadeira a proposição $x \in A \vee x \in B$, pelo que $x \in A \cup B$. Logo, se $x \in A$ então $x \in A \cup B$ e, portanto, $A \subseteq A \cup B$.

A prova de $B \subseteq A \cup B$ é análoga.

2 | Mostremos que $A \cup \emptyset = A$. Da propriedade 1, vem que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Resta, pois, provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então, $x \in A \vee x \in \emptyset$.

Ora, a proposição $x \in \emptyset$ é falsa, pois $\emptyset$ não tem elementos. Logo, podemos concluir que $x \in A$ e, portanto, se $x \in A \cup \emptyset$, então $x \in A$. Por outras palavras, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Assim, $A \cup \emptyset = A$.

4 | Provemos agora que $A \cup X = X$. Da propriedade 1, vem que $X \subseteq A \cup X$. Basta mostrar que $A \cup X \subseteq X$.

Seja $x \in A \cup X$. Então, $x \in A \vee x \in X$. Pretendemos mostrar que $x \in X$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in X$.

No caso (I), como A é um subconjunto de X, temos que todo o elemento de A é também elemento de X. Portanto, $x \in X$. No caso (II), é imediato que $x \in X$.

Logo, se $x \in A \cup X$, então $x \in X$, donde $A \cup X \subseteq X$ e, assim, $A \cup X = X$.

6 | Mostremos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Por definição de união de conjuntos,

$$x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C.$$

Uma vez que é válida a propriedade associativa para a disjunção (ver proposição 1.10), temos que

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C).$$

Novamente pela definição de união de conjuntos, temos

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C).$$

Logo, $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$, pelo que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Da propriedade 1, vem que $B \subseteq A \cup B$. Falta, pois, provar que $A \cup B \subseteq B$.

Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A \vee x \in B$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in B$.

No caso (I), como A é um subconjunto de B, sabemos que todo o elemento de A é também elemento de B. Portanto, $x \in B$. No caso (II), é imediato que $x \in B$.

Assim, se $x \in A \cup B$, então $x \in B$.

Logo, $A \cup B \subseteq B$, pelo que $A \cup B = B$. ■

Em seguida, apresentamos algumas propriedades relativas à interseção de conjuntos.

[Proposição 2.12] Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,
1 | $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$;
2 | $A \cap \emptyset = \emptyset$;
3 | $A \cap A = A$;
4 | $A \cap X = A$;
5 | $A \cap B = B \cap A$;
6 | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
7 | se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$.

demonstração Iremos demonstrar as propriedades 1, 2 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \cap B \subseteq A$, ou seja, que $\forall_x\ (x \in A \cap B \rightarrow x \in A)$. Seja $x \in A \cap B$. Então, por definição de interseção de conjuntos, $x \in A \wedge x \in B$. Logo, são verdadeiras ambas as

proposições $x \in A$ e $x \in B$. Em particular, $x \in A$ é uma proposição verdadeira. Assim, se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e, portanto, $A \cap B \subseteq A$.

A prova de $A \cap B \subseteq B$ é análoga.

2 | Mostremos que $A \cap \emptyset = \emptyset$. Façamo-lo por redução ao absurdo, admitindo que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Então, existe um objeto x tal que $x \in A \cap \emptyset$.

Logo, $x \in A \wedge x \in \emptyset$. Em particular, $x \in \emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, pelo que temos um absurdo, que resultou de supormos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cap B = A$. Da propriedade 1, vem que $A \cap B \subseteq A$. Falta, pois, provar que $A \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in A$. Então, como $A \subseteq B$, podemos concluir que $x \in B$.

Logo, temos $x \in A \wedge x \in B$. Vimos, portanto, que se $x \in A$, então $x \in A \wedge x \in B$, ou seja, se $x \in A$, então $x \in A \cap B$.

Assim, $A \subseteq A \cap B$. ■

Vejamos algumas propriedades relacionadas com a complementação.

[Proposição 2.13] Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ e $A \cup \overline{A} = X$;
2 | $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus X = \emptyset$;
3 | se $A \subseteq B$, então $A \setminus B = \emptyset$;
4 | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5 | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
6 | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
7 | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8 | $\overline{(\overline{A})} = A$.

demonstração: Iremos provar as propriedades 1, 2 e 5. As restantes ficam como exercício.

1 | Comecemos por mostrar que $A \cap \overline{A} = \emptyset$ por redução ao absurdo. Suponhamos, pois, que existe $x \in A \cap \overline{A}$. Então,

$$x \in A \wedge x \in \overline{A}.$$

Logo, por definição de complementar de um conjunto,

$$x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A).$$

Chegamos, desta forma, a uma contradição, $x \in A \wedge x \notin A$, que resultou de supormos que $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Portanto, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Verifiquemos, agora, que $A \cup \overline{A} = X$.

Dado $x \in A \cup \overline{A}$, temos $x \in A \vee x \in \overline{A}$. Temos, deste modo, dois casos a considerar: (I) $x \in A$; (II) $x \in \overline{A}$. Como A e $\overline{A}$ são subconjuntos de X, os elementos de cada um desses conjuntos são, ainda, elementos de X. Assim, em ambos os casos podemos afirmar que $x \in X$.

Portanto, $A \cup \overline{A} \subseteq X$.

Resta mostrar que $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Nesse sentido, tomemos $x \in X$.

É claro que a proposição $x \in A \vee x \notin A$ é verdadeira. Ora, se $x \in X$ e $x \notin A$, então $x \in \overline{A}$.

Logo,

$$\text{se } x \in X, \text{ então } x \in A \vee x \in \overline{A},$$

ou seja,

$$\text{se } x \in X, \text{ então } x \in A \cup \overline{A}.$$

Portanto, $X \subseteq A \cup \overline{A}$ e a igualdade pretendida segue.

2 | Comecemos por mostrar que $A \setminus \emptyset = A$.

Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a $\emptyset$. Ora, nenhum elemento pertence a $\emptyset$.

Logo, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A, ou seja, $A \setminus \emptyset = A$.

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $A \setminus X = \emptyset$, tomemos $x \in A \setminus X$.

Então, x é tal que $x \in A \wedge x \notin X$.

Como A é um subconjunto de X,

$$\text{se } x \in A, \text{ então } x \in X.$$

Portanto, x é tal que $x \in X \wedge x \notin X$, uma contradição. Assim, $A \setminus X = \emptyset$.

5 | Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Precisamos, pois, de mostrar que $x \in A \setminus (B \cap C)$ se e somente se $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, para todo o objeto x.

Ora, pelas leis de De Morgan e pela propriedade distributiva da operação lógica $\wedge$ em relação à operação $\vee$, temos que, para qualquer objeto x,

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}$$

Logo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. ■

[Observação] Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de um conjunto X. Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

A união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é usualmente notada por $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e a interseção por $\bigcap_{i=1}^n A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}.$$

2.3 Conjunto das partes de um conjunto

[Definição 2.14] Seja A um conjunto. Chamamos **conjunto das partes de** A ou **conjunto potência de** A, que representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

[Exemplo]

Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Usando, no máximo, estes três elementos, que conjuntos podemos formar? O conjunto sem nenhum elemento ($\emptyset$), os conjuntos com apenas um dos três elementos (especificamente, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$), os conjuntos com exatamente dois desses três elementos (concretamente, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$) e o conjunto formado pelos três elementos ($\{1, 2, 3\}$). Note-se que estes são os elementos de $\mathcal{P}(A)$. Com efeito, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

[Exemplo]

Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, \{2\}\}$ e $D = \emptyset$. Então,

1 | $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

2 | $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

3 | $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$

4 | $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

[Proposição 2.15] Sejam A e B dois conjuntos. Então,

1 | $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;

2 | se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

3 | se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

demonstração:

1 | Para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$, pelo que $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

2 | Suponhamos que $A \subseteq B$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou seja,

$$\forall X \ (X \in \mathcal{P}(A) \to X \in \mathcal{P}(B)).$$

Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então, $X \subseteq A$. Pela proposição 2.7, como $X \subseteq A$ e $A \subseteq B$, podemos concluir que $X \subseteq B$.

Logo, $X \in \mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

3 | consultar bibliografia adequada.

2.4 Produto cartesiano de conjuntos

Dados dois objetos a e b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não interessa.

Em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Para tal, recorremos ao conceito de par ordenado.

[Definição 2.16] Dados dois objetos a e b, o **par ordenado de** a **e de** b será denotado por (a, b). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) dizem-se **iguais**, escrevendo-se $(a, b) = (c, d)$, quando $a = c$ e $b = d$.

Note-se que, dados dois objetos a e b, se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Num par ordenado (a, b), o objeto a é designado por **primeira coordenada** (ou **primeira componente**) e o objeto b é designado por **segunda coordenada** (ou **segunda componente**).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

[Definição 2.17] Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o **produto cartesiano de** A **por** B e representa-se por $A \times B$. Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \land b \in B\}.$$

Dado um objeto x, temos que $x \in A \times B$ se e só se existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = (a, b)$. Dado um par (u, v), temos que $(u, v) \in A \times B$ se e só se $u \in A \wedge v \in B$ e temos que $(u, v) \notin A \times B$ se e só se $u \notin A \vee v \notin B$.

[Exemplo]

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então,
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.
É claro que $A \times B \neq B \times A$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Então,
$C \times D = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

3 | Sejam $E = F = \mathbb{R}$. Os elementos de $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podem ser representados geometricamente como pontos de um plano munido de um eixo de coordenadas.

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

[Definição 2.18] Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos ($n \geq 2$). O *produto cartesiano de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto dos n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\big\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A \times A \times \ldots \times A$.

[Observação] Dois n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e ... e $a_n = b_n$.

[Exemplo]

Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{7\}$. Temos que

$$A \times B \times C = \big\{(4, 1, 7), (4, 2, 7), (4, 3, 7), (5, 1, 7), (5, 2, 7), (5, 3, 7)\big\}$$

e

$$A^2 = \big\{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\big\}.$$

Vejamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

Proposição 2.19 Sejam A, B, C e D conjuntos. Então,

1 | $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$;

2 | sendo os conjuntos não vazios, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$;

3a | $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

3b | $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4a | $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

4b | $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

5a | $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

5b | $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

demonstração:

2 | Admitamos que todos os conjuntos são não vazios. Pretendemos mostrar que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ e procuremos provar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a, b) \in A \times B$.

Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$.

Portanto, $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$.

Provámos, assim, que

$$\forall_a \ (a \in A \to a \in C) \quad \text{e} \quad \forall_b \ (b \in B \to b \in D),$$

ou seja, $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, admitamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$.

Por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento de B é elemento de D.

Logo, $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a, b) \in C \times D$. Assim,

$$\forall_{a,b} \ ((a, b) \in A \times B \to (a, b) \in C \times D)$$

e, portanto, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

5a | Pretendemos mostrar que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Dado um par ordenado (x, y),

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) \quad & \Leftrightarrow \quad (x, y) \in C \times A \wedge (x, y) \notin C \times B \\
& \Leftrightarrow \quad (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
& \Leftrightarrow \quad ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \vee \\
& \qquad\ \vee ((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
& \Leftrightarrow \quad (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
& \Leftrightarrow \quad x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
& \Leftrightarrow \quad x \in C \wedge y \in (A \setminus B) \\
& \Leftrightarrow \quad (x, y) \in C \times (A \setminus B)
\end{aligned}$$

A demonstração das restantes propriedades fica como exercício. ■

[Observação] Se os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ têm $p_1, p_2, \ldots, p_n$ elementos, respetivamente, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ tem $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ elementos.

2.5 Exercícios resolvidos

1. **Considere os conjuntos** $A = \{3, \{4\}\}$**,** $B = \{3, 4, 15\}$**,** $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 1 \in B\}$ **e** $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in A \wedge x = 3|y|\}$**.**

   (a) Determine C **e** D**.**

   (b) Verifique se $(A \times B) \setminus \{(3, 4), (4, 3)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$**.**

   (c) Determine $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$**.**

   resolução:

   (a) Temos que $n^2 - 1 \in B$ se e só se $n^2 - 1 = 3$ ou $n^2 - 1 = 4$ ou $n^2 - 1 = 15$. Ora,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 = 3 &\Leftrightarrow n^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow n = \pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 - 1 = 4 &\Leftrightarrow n^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow n = \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 - 1 = 15 &\Leftrightarrow n^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow n = \pm 4 \end{aligned}$$

   Como $\pm 2 \in \mathbb{Z}$, $\pm\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$ e $\pm 4 \in \mathbb{Z}$, $C = \{-4, -2, 2, 4\}$.

   Quanto ao conjunto D, note-se que é formado pelos pares ordenados (x, y) em que $x, y \in \mathbb{Z}$ são tais que $x \in A$ e $x = 3|y|$. Ora, para $x \in \mathbb{Z}$ ser tal que $x \in A$, x tem de ser igual a 3. Assim,

$$\begin{aligned} x = 3|y| &\Leftrightarrow 3 = 3|y| \\ &\Leftrightarrow |y| = 1 \\ &\Leftrightarrow y = \pm 1 \end{aligned}$$

   Como $1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \in \mathbb{Z}$, temos que $D = \{(3, -1), (3, 1)\}$.

   (b) Note-se que a inclusão será válida se e somente se todos os elementos de $(A \times B) \setminus \{(3, 4), (4, 3)\}$ forem elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ou, equivalentemente, se as coordenadas de todos os pares de $(A \times B) \setminus \{(3, 4), (4, 3)\}$ forem números naturais. Ora, $(\{4\}, 3) \in (A \times B)$ e, como $(\{4\}, 3) \notin \{(3, 4), (4, 3)\}$, $(\{4\}, 3) \in (A \times B) \setminus \{(3, 4), (4, 3)\}$. Como a primeira coordenada do par ordenado $(\{4\}, 3)$ não é um número natural, podemos concluir que $(A \times B) \setminus \{(3, 4), (4, 3)\} \not\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) Por definição, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ se e só se $X \in \mathcal{P}(A)$ e $X \in \mathcal{P}(B)$, isto é, se e só se $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$. Ora, os únicos subconjuntos comuns a A e a B são $\emptyset$ e $\{3\}$. Assim, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{3\}\}$.

2. Considere os conjuntos $A = \{\{1,3\},1,4\}$, $B = \{-3,1,3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x|+1 \in B\}$.

(a) Determine $A \setminus B$.

(b) Determine $\mathcal{P}(A \cap C)$.

(c) Verifique se $\{-1,3\} \subseteq C \cup B$.

(d) $\{1,3\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$? Justifique.

resolução:

(a) Temos que $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. Ora, o único elemento de A que também é elemento de B é o 1. Assim, $A \setminus B = \{\{1,3\},4\}$.

(b) Comecemos por determinar C. Temos que $2|x|+1 \in B$ se e somente se $2|x|+1 = -3$ ou $2|x|+1 = 1$ ou $2|x|+1 = 3$. Atendendo a que

$$\begin{aligned}
2|x|+1 = -3 &\Leftrightarrow 2|x| = -4 \\
&\Leftrightarrow |x| = -2 \\
&\Leftrightarrow i(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2|x|+1 = 1 &\Leftrightarrow 2|x| = 0 \\
&\Leftrightarrow |x| = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2|x|+1 = 3 &\Leftrightarrow 2|x| = 2 \\
&\Leftrightarrow |x| = 1 \\
&\Leftrightarrow x = \pm 1,
\end{aligned}$$

podemos concluir que $C = \{-1,0,1\}$. Assim, $A \cap C = \{1\}$ e $\mathcal{P}(A \cap C) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

(c) Por definição de inclusão, $\{-1,3\} \subseteq C \cup B$ se e somente se -1 e 3 são elementos de $C \cup B$. Como $C \cup B = \{x \mid x \in C \vee x \in B\}$ e $-1 \in C$ e $3 \in B$, podemos concluir que $\{-1,3\} \subseteq C \cup B$.

(d) $\{1,3\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$ se e só se $\{1,3\} \in A$ e $\{1,3\} \in \mathcal{P}(A)$. Sabemos que $\{1,3\}$ é um dos elementos de A, pelo que, efetivamente, $\{1,3\} \in A$. Para $\{1,3\}$ ser um dos elementos de $\mathcal{P}(A)$, teríamos de ter $\{1,3\} \subseteq A$, o que não é verdade pois $3 \in \{1,3\}$ mas $3 \notin A$. Logo, $\{1,3\} \notin A \cap \mathcal{P}(A)$.

3. Considere os conjuntos $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n^3 \leq 40\}$**,** $B = \{1, \{2,4\}\}$**,** $C = \{1,2,4\}$ **e** $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3 \in B\}$**.**

(a) Determine A **e** D**.**

(b) Verifique se $(1, \{2,4\}, 4) \in C \times (B \setminus C) \times C$**. Justifique.**

(c) Verifique se $B \cap \mathcal{P}(C) = \emptyset$**. Justifique.**

resolução:

(a) Temos que, dado $n \in \mathbb{N}$, $n^3 \leq 40$ se e só se $n \in \{1,2,3\}$. Assim, $A = \{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3\} = \{2,4,6\}$.

Definamos, agora, por extensão, o conjunto D.

Temos que, dado $x \in \mathbb{Z}$, $x^2 - 3 \in B$ se e somente se $x^2 - 3 = 1$. Ora,

$$\begin{aligned} x^2 - 3 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 2. \end{aligned}$$

Assim, $D = \{-2, 2\}$.

(b) $(1, \{2,4\}, 4) \in C \times (B \setminus C) \times C$ se e só se $1 \in C$, $\{2,4\} \in B \setminus C$ e $4 \in C$.

Como $1 \in C$, $\{2,4\} \in B$, $\{2,4\} \notin C$ e $4 \in C$, segue-se que $(1, \{2,4\}, 4) \in C \times (B \setminus C) \times C$.

(c) Temos que $B \cap \mathcal{P}(C) = \emptyset$ se nenhum elemento de B pertencer a $\mathcal{P}(C)$.

É óbvio que $1 \notin \mathcal{P}(C)$, mas $\{2,4\} \in B$ e $\{2,4\} \subseteq C$. Logo, $\{2,4\} \in B \cap \mathcal{P}(C)$ e, portanto, $B \cap \mathcal{P}(C) \neq \emptyset$.

4. Dê exemplo de ou justifique que não existem conjuntos A**,** B **e/ou** C **tais que**

(a) $(1,2,1) \in A \times B \times C$**.**

(b) $A \cup B = A \cap B$**.**

(c) $B \subseteq C$ **e** $A \cap \overline{C} \not\subseteq A \cap \overline{B}$**.**

resolução:

(a) Por definição de produto cartesiano, $(1,2,1) \in A \times B \times C$ se e só se $1 \in A$, $2 \in B$ e $1 \in C$. Consideremos, por exemplo, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{1\}$.

(b) Sabemos que $A \cup A = A \cap A = A$, para qualquer conjunto A. Assim, para $A = B = \{1\}$, por exemplo, temos $A \cup B = A \cap B$.

(c) Admitamos que A, B e C são tais que $B \subseteq C$ e $A \cap \overline{C} \nsubseteq A \cap \overline{B}$. Como $A \cap \overline{C} \nsubseteq A \cap \overline{B}$, existe pelo menos um objeto x tal que $x \in A \cap \overline{C}$ e $x \notin A \cap \overline{B}$. Ora,

$$\begin{aligned} x \in A \cap \overline{C} &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{C} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \quad ^{(*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \notin A \cap \overline{B} &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B. \quad ^{(**)} \end{aligned}$$

De $(*)$ sabemos que $x \in A$ e que $x \notin C$. Como $x \in A$, de $(**)$ segue-se que $x \in B$. Assim, x é um objeto tal que $x \in B$ mas $x \notin C$, o que contraria a hipótese de B estar contido em C. Logo, não existem tais conjuntos A, B e C.

5. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira para quaisquer subconjuntos A, B e C não vazios de um conjunto X.

(a) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$.

(b) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \subseteq \overline{B}$.

(c) $(C \setminus A) \cap (A \cup B) = C \setminus B$.

resolução:

(a) Consideremos $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$. Temos que $A \subseteq C$ mas $A \cup B \nsubseteq C$. Logo, a afirmação é falsa.

(b) Admitamos, por redução ao absurdo, que $A \cap B = \emptyset$ e $A \nsubseteq \overline{B}$. De $A \nsubseteq \overline{B}$ segue-se que existe x tal que $x \in A$ e $x \notin \overline{B}$, ou seja, tal que $x \in A$ e $x \in B$. Assim, $x \in A \cap B$, o que contraria o facto $A \cap B = \emptyset$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

(c) Consideremos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$. Temos que

$$(C \setminus A) \cap (A \cup B) = \{3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}$$

e

$$C \setminus B = \emptyset.$$

Assim, a afirmação é falsa.

6. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C.

(a) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq C$.

(b) Se $(A \times C) \setminus (B \times C) = \emptyset$, então $A \subseteq B$.

(c) Se $A \in B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

resolução:

(a) Admitamos que $A \subseteq C$. O caso em que $B \subseteq C$ é análogo. Pretendemos mostrar que todos os elementos de $A \cap B$ são elementos de C. Consideremos um elemento arbitrário x de $A \cap B$. Por definição, $x \in A$ e $x \in B$. Como $A \subseteq C$ e $x \in A$, segue-se que $x \in C$. Assim, se $x \in A \cap B$, então $x \in C$, ou seja, $A \cap B \subseteq C$. A afirmação é, portanto, verdadeira.

(b) Consideremos $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \emptyset$. Temos que

$$(A \times C) \setminus (B \times C) = \emptyset \setminus \emptyset$$

mas

$$A \not\subseteq B.$$

Logo, a afirmação é falsa.

(c) Sejam $A = \{1\}$ e $B = \{\{1\}, 2\}$. Temos que $A \in B$. No entanto, $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ mas $\{1\} \notin \mathcal{P}(B)$. Logo, $\mathcal{P}(A) \not\subseteq \mathcal{P}(B)$. A afirmação é, pois, falsa.

7. Mostremos que, dados quaisquer três conjuntos A, B e C, se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então $(A \cap B) \subseteq C$.

resolução: Pretendemos mostrar que se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então todos os elementos de $A \cap B$ são elementos de C.

Admitamos que $A \subseteq C$ (o caso em que $B \subseteq C$ é análogo). Por definição, sabemos que, para todo o x, se $x \in A$ então $x \in C$. Mostremos que qualquer elemento de $A \cap B$ é, também, elemento de C. Temos que

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \text{ [pela definição de interseção de conjuntos]} \\ &\Rightarrow x \in A \\ &\Rightarrow x \in C \text{ [porque } A \subseteq C\text{]} \end{aligned}$$

Assim, mostramos que $A \cap B \subseteq C$.

8. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que $(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = A \setminus (B \cup C)$.

resolução: Seja x um elemento arbitrário de X. Temos que

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \setminus (C \setminus B) &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin (C \setminus B) \text{ [pela definição de complementação de conjuntos]} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin C \vee x \in B) \text{ [pela definição da complementação de conjuntos]} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge (x \notin C \vee x \in B)) \text{ [pela associatividade da conjunção]} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge ((x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in B)) \text{ [pela distributividade da conjunção} \\
&\qquad \text{em relação à disjunção]} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge ((x \notin B \wedge x \notin C) \vee \perp) \text{ [porque } (x \notin B \wedge x \in B) \Leftrightarrow \perp\text{]} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \text{ [porque } \perp \text{ é o elemento neutro para a disjunção]} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \text{ [pela definição de reunião de conjuntos]} \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \text{ [pela definição de complementação de conjuntos]}
\end{aligned}
$$

Logo, para todo o x, $x \in (A \setminus B) \setminus (C \setminus B)$ se e só se $x \in A \setminus (B \cup C)$. Assim, podemos concluir que os conjuntos são iguais.

Capítulo 3

Indução nos Naturais

[Exemplo]

Consideremos a afirmação "Para qualquer natural n, $n^2 - n + 41$ é primo".

Atribuindo valores a n, podemos verificar a veracidade das proposições correspondentes obtidas a partir do predicado $p(n)$:"o número $n^2 - n + 41$ é primo".

n	1	2	3	4	5	6	...	40	41	...
$n^2 - n + 41$	41	43	47	53	61	71	...	1601	41^2	...

41 é um número primo, pelo que $p(1)$ é verdadeira.
43 é um número primo, pelo que $p(2)$ é verdadeira.
47 é um número primo, pelo que $p(3)$ é verdadeira.
53 é um número primo, pelo que $p(4)$ é verdadeira.
61 é um número primo, pelo que $p(5)$ é verdadeira.
71 é um número primo, pelo que $p(6)$ é verdadeira.
(...)
1601 é um número primo, pelo que $p(40)$ é verdadeira.

Poderemos, assim, concluir que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$?

41^2 não é um número primo, pelo que $p(41)$ é falsa! Portanto, a afirmação "Para qualquer natural n, $n^2 - n + 41$ é primo" é falsa, ao contrário do que poderíamos intuir da veracidade das proposições $p(n)$ com $1 \leq n \leq 40$.

Para provarmos que uma determinada propriedade é válida para todo o número natural, precisamos de um método de prova adequado. Como o exemplo anterior o ilustra, não basta verificar a veracidade da propriedade para um número finito de naturais para podermos concluir a validade da propriedade em $\mathbb{N}$.

A definição indutiva de $\mathbb{N}$ através das seguintes regras

i | $1 \in \mathbb{N}$;

ii | se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$,

justifica a adoção do método de prova que iremos estudar. Comecemos por apresentar o conceito de predicado hereditário.

[Definição 3.1] Um predicado $p(n)$, com $\mathbb{N}$ como universo de variação da variável n, diz-se **hereditário** quando, para todo $k \in \mathbb{N}$, se a proposição $p(k)$ é verdadeira, então a proposição $p(k + 1)$ é verdadeira.

[Exemplos]

1 | "$2n$ é par" é um predicado hereditário pois se $2k$ é par para algum $k \in \mathbb{N}$, então $2(k + 1) = 2k + 2$ também é par (por ser a soma de 2 números pares).

2 | "n é par" não é um predicado hereditário pois se k é par para algum $k \in \mathbb{N}$, então $k + 1$ é ímpar.

3 | "$2n+1$ é par" é um predicado hereditário pois se $2k+1$ é par para algum $k \in \mathbb{N}$, então $2(k + 1) + 1 = 2k + 2 + 1 = (2k + 1) + 2$ também é par (por ser a soma de 2 números pares).

[Observação] Note-se que, sendo $p(n)$ um predicado hereditário, a proposição $p(a)$, com $a \in \mathbb{N}$, não tem de ser verdadeira. De facto, no terceiro exemplo temos um predicado hereditário $p(n)$ tal que $p(a)$ é uma proposição falsa para qualquer $a \in \mathbb{N}$. Já o predicado $q(n)$ do primeiro exemplo é hereditário e $q(a)$ é uma proposição verdadeira para todo $a \in \mathbb{N}$: é claro que $q(1)$ é verdadeira pois $2 \times 1 = 2$ é par; a hereditariedade de $q(n)$ permite-nos induzir que a propriedade é válida para todo o número natural. Por outro lado, a hereditariedade de $p(n)$ não é suficiente para concluir que a propriedade é verdadeira para todo o número natural, uma vez que nos falta um ponto de partida.

No resultado que se segue encontramos um método de prova usado para demonstrar a veracidade de propriedades sobre os números naturais.

[Teorema 3.2 | princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$] Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$. Se

1 | $p(1)$ é verdadeira; e

2 | $p(n)$ é hereditário, ou seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k + 1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

demonstração:

Admitamos que as condições 1 | e 2 | são satisfeitas para o predicado $p(n)$ e mostremos que, para qualquer natural n, $p(n)$ é verdadeira. Nesse sentido, consideremos o conjunto X dos números naturais que não satisfazem $p(n)$, ou seja,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}.$$

Suponhamos, no intuito de uma redução ao absurdo, que $X \neq \emptyset$. Seja m o menor número natural que pertence a X. Por 1 |, $1 \notin X$ e, portanto, $m > 1$. Logo, $m = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que m é o menor natural que pertence a X, sabemos que $m - 1 = (k + 1) - 1 = k$ não pertence a X, isto é, k satisfaz o predicado $p(n)$. Ora, por 2 |, $p(n)$ é hereditário e, portanto, $k + 1$ satisfaz o predicado $p(n)$, ou seja, m satisfaz $p(n)$, o que contradiz o facto de m pertencer a X. Logo, X tem de ser vazio e, assim, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

A condição 1 | do teorema anterior é designada por **base de indução** e a condição 2 | por **passo de indução**.

Na aplicação da condição 2 |, chamamos **hipótese de indução** a "$p(k)$ é verdadeira". É habitual usar a sigla H.I. para denotar a hipótese de indução.

Dado um predicado $p(n)$ sobre $\mathbb{N}$, uma aplicação deste princípio para provar que a proposição $\forall n\ p(n)$ é verdadeira diz-se uma **prova por indução nos naturais**.

[Exemplo]

Mostremos que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n^3 - n$ é divisível por 3".

1 | base de indução | Para $n = 1$, temos $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$.

Como 0 é divisível por 3, $p(1)$ é verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $k^3 - k$ é divisível por 3 (H.I.).

Então, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $k^3 - k = 3q$. Assim,

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
&= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\
&= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\
&= 3q + (3k^2 + 3k) && \text{(pela H.I.)} \\
&= 3(q + k^2 + k).
\end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3 - (k+1) = 3(q + k^2 + k)$, pelo que $p(k + 1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n^3 - n \text{ é divisível por 3.}$$

[Exemplo]

Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $q(n)$ o predicado "$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$".

1 | base de indução | Para $n=1$, temos $1=1^2$, pelo que $q(1)$ é verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $q(k)$ é verdadeira, ou seja, $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ (H.I.). Então,

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= (1+3+5+\cdots+(2k-1))+(2k+1)\\ &= k^2+(2k+1) && \text{(pela H.I.)}\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2,\end{aligned}$$

pelo que $q(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que

$$\forall n\in\mathbb{N}, 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

[Exemplo]

Mostremos que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3},$$

pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $h(n)$ o predicado "$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}$".

1 | base de indução | Para $n=1$, temos $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n=\left(1+\frac{1}{3}\right)^1=1+\frac{1}{3}\geq 1+\frac{1}{3}=1+\frac{n}{3}$, pelo que $h(1)$ é verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $h(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^k \geq 1+\frac{k}{3} \quad (H.I.).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^{(k+1)} &= \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^k\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\\ &\geq \left(1+\tfrac{k}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right) && \text{(pela H.I.)}\\ &= 1+\tfrac{k}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{k}{9}\\ &= 1+\tfrac{k+1}{3}+\tfrac{k}{9}\\ &\geq 1+\tfrac{k+1}{3}.\end{aligned}$$

Assim, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{(k+1)}\geq 1+\frac{k+1}{3}$, pelo que $h(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que para todo $n\in\mathbb{N}, \left(1+\frac{1}{3}\right)^n\geq 1+\frac{n}{3}$.

Como já referimos, é necessário que se verifiquem simultaneamente a base e o passo de indução para que se possa induzir a validade da propriedade em causa para todo o número natural.

Consideremos o predicado $p(n)$: "$n^2 > 2n + 1$".

Facilmente se verifica que $p(1)$ é falsa: $1^2 = 1 \not> 3 = 2 \times 1 + 1$.

No entanto, o passo de indução verifica-se, ou seja, o predicado $p(n)$ é hereditário. Consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k^2 > 2k + 1$ (H.I.),

$$\begin{aligned}(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1\\ &= k^2 + (2k+1)\\ &> (2k+1) + (2k+1) \qquad \text{(pela H.I.)}\\ &= 2k + 2 + 2k\\ &> 2k + 2 + 1\\ &= 2(k+1) + 1.\end{aligned}$$

Na verdade, $p(n)$ é válida para todos os naturais maiores ou iguais a 3.

A prova deste resultado pode ser feita recorrendo a uma variante do Princípio de Indução, considerando para base de indução o elemento de $\mathbb{N}$ a partir do qual se pode provar a validade da propriedade.

[Teorema 3.3 | princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$ de base n_0] Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se

1 | $p(n_0)$ é verdadeira; e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

[Exemplo]

Verifiquemos, então, que para todo $n \geq 3, n^2 > 2n + 1$.

1 | base de indução | Para $n = 3$, temos $n^2 = 3^2 = 9 > 7 = 2 \times 3 + 1$, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

2 | passo de indução | Mostrámos acima que $p(n)$ é hereditário. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$, $p(k+1)$ é verdadeira sempre que $p(k)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 3 e por 1 | e 2 |, podemos concluir que para todo $n \geq 3, n^2 > 2n + 1$.

[Exemplo]

Mostremos que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$, pelo método de indução para $\mathbb{N}$ de base 5.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^n > n^2$".

1 | base de indução | Para $n = 5$, temos $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2$, pelo que $p(5)$ é verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 5$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$. Então,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\ &> 2 \times k^2 && \text{(pela H.I.)} \\ &= k^2 + k^2 \\ &> k^2 + 2k + 1 && \text{(pelo exemplo anterior)} \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 5 e por 1 | e 2 |, podemos concluir que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Na prova de certas propriedades sobre os naturais, a aplicação do Princípio de Indução Simples não é fácil. Nestes casos, torna-se mais conveniente optar por um outro método de prova, o chamado **Princípio de Indução Completa** (ou **Princípio de Indução Forte**).

[Teorema 3.4 | princípio de indução completa para $\mathbb{N}$] Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$. Se

1 | $p(1)$ é verdadeira; e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$, se, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este princípio parece ser mais geral do que o Princípio de Indução Simples, mas prova-se serem equivalentes: toda a prova que possa ser feita pelo Princípio de Indução Simples pode ser feita pelo Princípio de Indução Completa e vice-versa.

À semelhança do que acontece com o Princípio de Indução Simples, podemos enunciar o **Princípio de Indução Completa de base n_0**.

[Teorema 3.5 | princípio de indução completa para $\mathbb{N}$ de base n_0] Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se

1 | $p(n_0)$ é verdadeira; e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se, para todo $j \in \{n_0, \ldots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

[Exemplo]

Recorrendo ao Princípio de Indução Completa de base 2, mostremos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de números primos.

Representemos por $p(n)$ o predicado "n é primo ou n é um produto de primos.".

1 | base de indução | 2 é primo e, portanto, $p(2)$ é verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ e admitamos que $p(j)$ é verdadeira para todo $j \in \{2, \ldots, k\}$ (H.I.).

Se $k+1$ é primo, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Se $k+1$ não é primo, então existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $1 < a, b < k+1$ e $k+1 = ab$.

Pela H.I., como $a, b \in \{2, \ldots, k\}$, sabemos que a é primo ou um produto de primos e b é primo ou um produto de primos.

Logo, $k+1 = ab$ é um produto de primos, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Por 1 | e 2 | e pelo Princípio de Indução Completa de base 2, mostrámos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de primos.

3.1 Exercícios resolvidos

1. Prove, por indução nos naturais, que $2^n \geq 2n$.

resolução: Seja $p(n)$ o predicado $2^n \geq 2n$ sobre $n \in \mathbb{N}$.

1 | base de indução | $2^1 = 2 \geq 2 \times 1$, pelo que $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k \geq 2k$ (H.I.)

Temos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\ &\geq 2 \times 2k && \text{(pela H.I.)} \\ &= 2k + 2k \\ &\geq 2k + 2 && \text{(porque } k \geq 1\text{)} \\ &= 2(k+1), \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é uma proposição verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 2n$

2. Prove, por indução nos naturais, que $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

resolução: Seja $p(n)$ o predicado $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ sobre $n \in \mathbb{N}$.

1 | base de indução | $3 = \frac{3}{2}(3^1 - 1)$, pelo que $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3}{2}(3^k - 1)$ (H.I.).

Assim

$$\begin{aligned} 3+3^2+3^3+\cdots+3^k+3^{k+1} &= \tfrac{3}{2}(3^k-1)+3^{k+1} && \text{(pela H.I.)} \\ &= \tfrac{3}{2}3^k-\tfrac{3}{2}+3\times 3^k \\ &= \tfrac{9}{2}3^k-\tfrac{3}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}(3\times 3^k-1) \\ &= \tfrac{3}{2}(3^{k+1}-1), \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é uma proposição verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que, para todo $n \in \mathbb{N},\ 3+3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3}{2}(3^n-1)$.

3. Mostre que $4^n + 15n - 1$ é múltiplo de 9 para todo o natural n.

resolução: Seja $p(n)$ o predicado "$4^n + 15n - 1$ é múltiplo de 9" sobre $n \in \mathbb{N}$.

1 | base de indução | $4^1 + 15 \times 1 - 1 = 18$, que é múltiplo de 9. Logo, $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, isto é, $4^k + 15k - 1$ é múltiplo de 9. Assim, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $4^k + 15k - 1 = 9q$ (H.I.).
Temos que

$$\begin{aligned} 4^{k+1}+15(k+1)-1 &= 4\times 4^k+15k+15-1 \\ &= (4\times 4^k+4\times 15k-4)-3\times 15k+15+3 \\ &= 4\times(4^k+15k-1)-3\times 15k+18 \\ &= 4\times 9q-9\times 5k+9\times 2 && \text{(pela H.I.)} \\ &= 9\times(4q-5k+2), \end{aligned}$$

que é múltiplo de 9. Portanto, $p(k+1)$ é uma proposição verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - 1$ é múltiplo de 9 .

4. Mostre que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo o natural ímpar n.

resolução: Note-se que mostrar que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo o natural ímpar n é o mesmo que mostrar que $(2m-1)^2 - 1$ é divisível por 8 para todo o natural m, uma vez que um natural n é ímpar se e só se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m - 1$.

Seja $p(m)$ o predicado "$(2m-1)^2 - 1$ é divisível por 8" sobre os naturais m.

1 | base de indução | $(2 \times 1 - 1)^2 - 1 = 0$, que é divisível por 8. Logo, $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, isto é, $(2k-1)^2 - 1$ é divisível por 8. Assim, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $(2k-1)^2 - 1 = 8q$
Temos que

$$\begin{aligned}
(2(k+1)-1)^2 - 1 &= ((2k-1)+2)^2 - 1 \\
&= (2k-1)^2 + 2 \times 2 \times (2k-1) + 2^2 - 1 \\
&= ((2k-1)^2 - 1) + 4(2k-1) + 4 \\
&= 8q + 8k && \text{(pela H.I.)} \\
&= 8 \times (q+k),
\end{aligned}$$

pelo que $(2(k+1)-1)^2 - 1$ é divisível por 8 e, por conseguinte, $p(k+1)$ é uma proposição verdadeira.
Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por 1 | e 2 |, podemos concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(2m-1)^2 - 1$ é divisível por 8. Equivalentemente, podemos concluir que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo o natural ímpar n.

5. Os números de Fibonacci estão definidos de seguinte forma: $f_1 = f_2 = 1$ e, se $n > 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Prove que $2^{n-1} > f_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$ para todo $n \geq 6$.

resolução: Seja $p(n)$ o predicado $2^{n-1} > f_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$ sobre os naturais $n \geq 6$.

1 | base de indução | $2^5 = 32 > 8 = f_6 > \frac{243}{32} = (\frac{3}{2})^5$, pelo que $p(6)$ é uma proposição verdadeira.

2 | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 6$ e $p(6), \ldots, p(k)$ são proposições verdadeiras (H.I.), ou seja, $2^5 > f_6 > (\frac{3}{2})^5, \ldots, 2^{k-2} > f_{k-1} > (\frac{3}{2})^{k-2}, 2^{k-1} > f_k > (\frac{3}{2})^{k-1}$.

Então,

$$\begin{aligned}
f_{k+1} = f_k + f_{k-1} &< 2^{k-1} + 2^{k-2} && \text{(pela H.I.)} \\
&= 2 \times 2^{k-2} + 2^{k-2} \\
&= (2+1) \times 2^{k-2} \\
&= 3 \times 2^{k-2} \\
&< 4 \times 2^{k-2} \\
&= 2^2 \times 2^{k-2} \\
&= 2^k
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f_{k+1} = f_k + f_{k-1} &> (\tfrac{3}{2})^{k-1} + (\tfrac{3}{2})^{k-2} && \text{(pela H.I.)} \\
&> (\tfrac{3}{2})^k,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$
\begin{aligned}
(\tfrac{3}{2})^{k-1} + (\tfrac{3}{2})^{k-2} > (\tfrac{3}{2})^{k} \quad & \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2})^{k-2} + (\tfrac{3}{2})^{k-2} > (\tfrac{3}{2})^{2}(\tfrac{3}{2})^{k-2} \\
& \Leftrightarrow \tfrac{3}{2} + 1 > (\tfrac{3}{2})^{2} \\
& \Leftrightarrow \tfrac{5}{2} > \tfrac{9}{4} \\
& \Leftrightarrow 20 > 18,
\end{aligned}
$$

o que é uma afirmação verdadeira.

Assim, $2^k > f_{k+1} > (\frac{3}{2})^k$, ou seja $p(k+1)$ é uma proposição verdadeira.

Pelo Princípio de Indução Completa para $\mathbb{N}$ de base 6 e por 1 | e 2 |, podemos concluir que $2^{n-1} > f_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$ para todo $n \geq 6$.

Capítulo 4

Funções

4.1 Conceitos báscios

[Definição 4.1] Sejam A e B conjuntos. Uma **função** ou **aplicação** de A em B é uma correspondência de A para B que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

Em geral, representamos as funções por letras minúsculas f, g, h,...

Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B. Para cada objeto $a \in A$, o único elemento b de B que f faz corresponder ao elemento a chama-se **imagem de** a **por** f e representa-se por $f(a)$. Podemos, assim, escrever

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & a \mapsto f(a) \end{aligned}$$

Dada uma função $f : A \to B$, designamos por

1 | **domínio** ou **conjunto de partida** de f o conjunto A;

2 | **codomínio** ou **conjunto de chegada** de f o conjunto B;

3 | **imagem** ou **contradomínio** de f o conjunto $\mathrm{Im}(f)$ das imagens por f de todos os elementos de A, ou seja,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

O conjunto de todas as funções de A para B representa-se por B^A.

Dado um conjunto A, chama-se **aplicação vazia** à aplicação $\emptyset : \emptyset \to A$. Esta é a única aplicação de $\emptyset$ em A e, portanto, $A^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Se A é não vazio, não existem funções de A em $\emptyset$, pelo que $\emptyset^A = \emptyset$.

Se A e B são conjuntos finitos, temos que $\#B^A = (\#B)^{\#A}$.

[Exemplos]

1 | A correspondência de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ que a cada elemento x de $\mathbb{Z}$ faz corresponder o elemento $y = x^2$ é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

2 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e sejam f, g, h e ℓ as correspondências definidas por

$$\begin{array}{rl} f: & A \to A \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}, \quad \begin{array}{rl} g: & A \to A \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 2 \end{array}, \quad \begin{array}{rl} h: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}, \quad \begin{array}{rl} \ell: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}.$$

Então, f e g são funções de A em A. Por outro lado, h não é uma função de A em A uma vez que a 1 faz corresponder duas imagens: 1 e 2. Também ℓ não é uma função de A em A uma vez que a 2 não faz corresponder qualquer imagem.

3 | Sejam A e B conjuntos, com $B \neq \emptyset$. Seja $b \in B$. A correspondência de A em B que a cada elemento de A faz corresponder o elemento b é uma função de A em B.

[Definição 4.2] Sejam A e B conjuntos. Uma função $f : A \to B$ diz-se uma **função constante** se existe $b \in B$ tal que, para todo o $a \in A$, $f(a) = b$.

A função de A em A que a cada elemento $a \in A$ faz corresponder a diz-se a **função identidade de** A e representa-se por id_A, ou seja,

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id}_A: & A \to A \\ & a \mapsto a \end{array}$$

[Exemplo]

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Então,

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id}_A: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id}_B: & B \to B \\ & 4 \mapsto 4 \\ & 5 \mapsto 5 \end{array}$$

e a correspondência

$$\begin{array}{rl} f: & A \to B \\ & 1 \mapsto 4 \\ & 2 \mapsto 4 \\ & 3 \mapsto 4 \end{array}$$

é uma função constante.

[Definição 4.3] Sejam A_1, A_2, B_1, B_2 conjuntos e sejam $f : A_1 \to B_1$, $g : A_2 \to B_2$ funções. Dizemos que as funções f e g são **iguais**, e escrevemos $f = g$, se

1 | $A_1 = A_2$;
2 | $B_1 = B_2$;
3 | para todo o $x \in A_1$, $f(x) = g(x)$.

[Exemplo]

Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ e $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ funções definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Z}, \quad h(x) = k(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Como os domínios de g e de h são distintos, $g \neq h$. De igual modo, $g \neq k$. Como os codomínios de h e de k são distintos, $h \neq k$. Por outro lado, como os domínios e os codomínios de f e g são iguais e $f(x) = g(x)$ para todo o $x \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que $f = g$.

4.2 Conjuntos Imagem e Imagem Inversa

[Definição 4.4] Sejam A, B conjuntos, X um subconjunto de A, Y um subconjunto de B e $f : A \to B$ uma função de A em B. Designamos por

1 | **imagem de** X **por** f o conjunto

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\};$$

2 | **imagem inversa** ou **pré-imagem de** Y **por** f o conjunto

$$f^{\leftarrow}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

[Exemplos]

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = f(2) = 4$ e $f(3) = 5$.

Então, $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{4, 4\} = \{4\}$, $f^{\leftarrow}(\{4, 5\}) = \{1, 2, 3\} = A$ e $f^{\leftarrow}(\{6\}) = \emptyset$.

2 | Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3 - x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$X = \{-4, 0, 1, 2\}$ e $Y = \{-5, 0, 5\}$. Então,

$$f(X) = \{f(-4), f(0), f(1), f(2)\} = \{7, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$$

$$\begin{array}{rl} f^{\leftarrow}(Y) = & \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = -5 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 5\} \\ = & \{x \in \mathbb{Z} : (2x+3 = -5 \wedge x \geq 0) \vee (3 - x = -5 \wedge x < 0) \vee \\ \vee & (2x+3 = 0 \wedge x \geq 0) \vee (3 - x = 0 \wedge x < 0) \vee \\ \vee & (2x+3 = 5 \wedge x \geq 0) \vee (3 - x = 5 \wedge x < 0)\} \\ = & \{1, -2\} \end{array}$$

3 | Consideremos a função

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto |x| \end{array}$$

Então,

i | $f(\{-1,0,1\}) = \{0,1\}$; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$; $f(]-2,3]) = [0,3]$;

ii | $f^{\leftarrow}(\{1\}) = \{-1,1\}$; $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$; $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}/\{0\}$.

[Proposição 4.5] Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Então,

1 | $f(\emptyset) = \emptyset$;

2 | $f(A) \subseteq B$;

3 | se $A_1 \subseteq A_2$, então $f(A_1) \subseteq f(A_2)$;

4 | $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

5 | $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$;

6 | $f^{\leftarrow}(B) = A$;

7 | Se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$;

8 | $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$;

9 | $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$;

demonstração:

Iremos demonstrar as propriedades 1, 3, 4, 7 e 8. As restantes são deixadas como exercício.

1 | Por definição, $f(\emptyset) = \{f(x) : x \in \emptyset\}$. Ora, $\emptyset$ não tem elementos, pelo que $x \in \emptyset$ é uma condição impossível. Portanto, $f(\emptyset) = \emptyset$.

3 | Suponhamos que $A_1 \subseteq A_2$. Então, para todo o objeto x, se $x \in A_1$ então $x \in A_2$.

Pretendemos mostrar que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, ou seja, para todo o objeto y, se $y \in f(A_1)$ então $y \in f(A_2)$).

Seja $y \in f(A_1)$. Então, existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$.

Por hipótese, se $x \in A_1$ então $x \in A_2$. Logo, $x \in A_2$ e, assim, $y = f(x)$ com $x \in A_2$. Portanto, $y \in f(A_2)$.

Vimos, então, que se $y \in f(A_1)$ então $y \in f(A_2)$, pelo que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

4 | Pretendemos mostrar que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\subseteq$) Comecemos por mostrar que $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

Seja $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Então, existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$.

Ora,

$$x \in A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2).$$

Se $x \in A_1$, então $y = f(x) \in f(A_1)$. Se $x \in A_2$, então $y = f(x) \in f(A_2)$.

Logo, $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$ e, portanto, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\supseteq$) Mostremos, agora, que $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.

Seja $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Então, $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$. Se $y \in f(A_1)$, então existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$. Se $y \in f(A_2)$, então existe $x \in A_2$ tal que $y = f(x)$. Em ambos os casos, $x \in A_1 \cup A_2$, pelo que $y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

Logo, $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$ e $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$, pelo que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

7 | Suponhamos que $B_1 \subseteq B_2$, ou seja, para todo o objeto y, se $y \in B_1$ então $y \in B_2$. Queremos mostrar que $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$. Dado $x \in f^{\leftarrow}(B_1)$, sabemos que $x \in A$ e $f(x) \in B_1$, por definição de imagem inversa. Ora, $B_1 \subseteq B_2$, pelo que $f(x) \in B_2$. Assim, $x \in f^{\leftarrow}(B_2)$.

8 | Verifiquemos, agora, que $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$.

Dado $x \in A$,

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{\leftarrow}(B_1) \vee x \in f^{\leftarrow}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2) \end{aligned}$$

Logo, para todo o objeto x, $x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2)$ se e só se $x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2))$, donde segue a igualdade pretendida. ■

4.3 Propriedades das funções

[Definição 4.6] Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **injetiva** quando quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas por f, ou seja, quando $\forall_{x,y \in A}\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$. Equivalentemente, f é injetiva quando

$$\forall_{x,y \in A}\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

[Exemplos]

1 | Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6,7\}$ e seja $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ e $f(3) = 4$. Então, f é injetiva pois não existem objetos distintos com a mesma imagem.

2 | Sejam $C = \{1,2,3,4\}$ e $D = \{5,6,7\}$ e seja $g : C \to D$ a função definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$ e $g(4) = 7$. Então, g não é injetiva pois $3 \neq 4$ e $g(3) = 7 = g(4)$.

3 | Seja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $h(n) = 2n+1$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$. A função h é injetiva pois, dados $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$h(n) = h(m) \Leftrightarrow 2n+1 = 2m+1 \Leftrightarrow 2n = 2m \Leftrightarrow n = m.$$

4 | Seja $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $k(x) = x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. A função k não é injetiva pois $-2 \neq 2$ e $k(-2) = 4 = k(2)$.

[Definição 4.7] Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **sobrejetiva** quando todo o elemento de B é imagem de algum elemento de A, ou seja, quando

$$\forall_{y \in B} \exists_{x \in A}\ f(x) = y.$$

Equivalentemente, f é sobrejetiva se $f(A) = B$, ou seja se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

[Exemplos]

Consideremos as funções definidas no exemplo anterior.

1 | A função $f : \{1,2,3\} \to \{4,5,6,7\}$ definida por $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ e $f(3) = 4$ não é sobrejetiva pois 5 não é imagem de qualquer elemento de A.

2 | A função $g : \{1,2,3,4\} \to \{5,6,7\}$ definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$ e $g(4) = 7$ é sobrejetiva pois todo o elemento de $\{5,6,7\}$ é imagem de algum elemento de A.

3 | A função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $h(n) = 2n+1$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$, não é sobrejetiva pois, dado $m \in \mathbb{Z}$ par, m não é da forma $2n+1$, com $n \in \mathbb{N}$. Por conseguinte, não existe, por exemplo, nenhum objeto que tenha imagem igual a 6.

4 | A função $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $k(x) = x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, não é sobrejetiva pois $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$. Portanto, não existe, por exemplo, nenhum objeto que tenha imagem igual a -1.

[Definição 4.8] Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **bijetiva** quando f é injetiva e sobrejetiva, ou equivalentemente, quando

$$\forall_{y \in B} \exists^1_{x \in A}\ f(x) = y.$$

[Exemplos]

1 | A função $f : \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ definida por $f(1) = 5$, $f(2) = 4$ e $f(3) = 6$ é bijetiva, uma vez que elementos distintos têm imagens distintas e todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de algum objeto do domínio.

2 | A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(n) = n + 1$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$ é bijetiva. De facto, dados $n, m \in \mathbb{Z}$

$$g(n) = g(m) \Leftrightarrow n + 1 = m + 1 \Leftrightarrow n = m.$$

Portanto, g é injetiva. Por outro lado, dado $m \in \mathbb{Z}$, $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ e

$$g(n) = g(m - 1) = (m - 1) + 1 = m,$$

pelo que g é sobrejetiva. Como g é injetiva e sobrejetiva, podemos concluir que é bijetiva.

4.4 Função composta

É possível definir novas funções a partir de funções dadas.

[Proposição 4.9] Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então, a correspondência de A para C que a cada elemento x de A faz corresponder o elemento $g(f(x))$ de C é uma função de A para C.

demonstração

Como f é uma função de A para B, dado $x \in A$, existe um único elemento y em B tal que $f(x) = y$. Por sua vez, como g é uma função de B para C e y é um elemento de B, existe um único elemento z de C tal que $g(y) = z$.

Assim, para cada elemento x de A, existe um único elemento z de C tal que $g(f(x)) = g(y) = z$. Logo, a correspondência em causa é uma função.■

[Definição 4.10] Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Designa-se por **função composta de g com f**, e representa-se por $g \circ f$, a função de A para C que a cada elemento x de A faz corresponder o elemento $g(f(x))$ de C, ou seja, $g \circ f$ é a função

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & A \to C \\ & x \mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

[Exemplos]

1 | Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$ e $C = \{8,9\}$ conjuntos e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ as funções definidas por $f(1) = 4$, $f(2) = 6$ e $f(3) = 7$ e $g(4) = g(6) = 8$, $g(5) = g(7) = 9$. Então, a função $g \circ f : A \to C$ define-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(1) &= g(f(1)) = g(4) = 8\\ (g\circ f)(2) &= g(f(2)) = g(6) = 8\\ (g\circ f)(3) &= g(f(3)) = g(7) = 9\end{aligned}$$

2 | Dadas as funções $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0$ e $g:\mathbb{N}_0\to\mathbb{Z}$ definidas por

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{se } x>0\\ -3x, & \text{se } x\leq 0\end{cases}\quad \text{e}\quad g(x)=-x^2,\ \text{para todo o } x\in\mathbb{N}_0,$$

podemos considerar as funções $g\circ f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ e $f\circ g:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ definidas por

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}-4x^2, & \text{se } x>0\\ -9x^2, & \text{se } x\leq 0\end{cases}\quad \text{e}\ \ (f\circ g)(x)=3x^2,\ \text{para todo o } x\in\mathbb{N}_0.$$

Como podemos verificar no exemplo anterior, a composição de funções não é, em geral, comutativa. Prova-se, no entanto, ser válida a propriedade associativa para a composição de funções.

[Proposição 4.11] Sejam A, B, C, D conjuntos e $f:A\to B$, $g:B\to C$ e $h:C\to D$ funções. Então,

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f).$$

demonstração:

Por definição de função composta, as funções $(h\circ g)\circ f$ e $h\circ(g\circ f)$ têm A como conjunto de partida e D como conjunto de chegada. Além disso, dado $x\in A$,

$$\begin{aligned}((h\circ g)\circ f)(x) &= (h\circ g)(f(x))\\ &= h(g(f(x)))\\ &= h((g\circ f)(x))\\ &= (h\circ(g\circ f))(x).\end{aligned}$$

Podemos, pois, concluir que $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$. ■

A composição de uma função com a função identidade é descrita no resultado que se segue.

[Proposição 4.12] Sejam A, B conjuntos e $f:A\to B$ uma função. Então, $\mathrm{id}_B\circ f = f = f\circ\mathrm{id}_A$.

demonstração:

Por definição de função composta, as funções $\mathrm{id}_B\circ f$, f e $f\circ\mathrm{id}_A$ têm A como conjunto de partida e B como conjunto de chegada. Além disso, dado $x\in A$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_B\circ f)(x) &= \mathrm{id}_B(f(x))\\ &= f(x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(f\circ\mathrm{id}_A)(x) &= f(\mathrm{id}_A(x))\\ &= f(x)\end{aligned}$$

pelo que $(\mathrm{id}_B \circ f)(x) = f(x) = (f \circ \mathrm{id}_A)(x)$.

Assim, podemos afirmar que as funções $\mathrm{id}_B \circ f$, f e $f \circ \mathrm{id}_A$ são iguais. ■

A composição preserva certas propriedades das funções, como podemos comprovar no seguinte resultado.

[Proposição 4.13] Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então,

1 | Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

2 | Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

3 | Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

demonstração:

1 | Suponhamos que f e g são injetivas. Então, dados $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \ &\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) && (g \text{ é injetiva}) \\ &\Rightarrow x = y && (f \text{ é injetiva}). \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é injetiva.

2 | Suponhamos agora que f e g são sobrejetivas. Seja $z \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetiva, existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Ora, $y \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetiva. Logo, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Assim, existe $x \in A$ tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Mostrámos que, para todo o $z \in C$, existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$, ou seja, $g \circ f$ é sobrejetiva.

3 | Suponhamos que f e g são bijetivas. Então, f e g são injetivas e, por 1|, $g \circ f$ também o é. Mais, f e g são sobrejetivas e, por 2|, $g \circ f$ também o é. Logo, $g \circ f$ é bijetiva. ■

4.5 Funções invertíveis

[Teorema 4.14] Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então, f é bijetiva se e só se existe uma única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

demonstração:

Suponhamos que existe uma tal função g e mostremos que f é bijetiva.

Sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então, sendo g uma função, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ou seja, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Ora, $(g \circ f)(x_1) = \mathrm{id}_A(x_1) = x_1$ e $(g \circ f)(x_2) = \mathrm{id}_A(x_2) = x_2$. Logo, $x_1 = x_2$. Provámos, assim, que f é injetiva.

Consideremos, agora, $y \in B$. Temos que $y = \mathrm{id}_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Como g é funcção, $g(y) \in A$. Assim, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$: com efeito, basta tomar $x = g(y)$. Podemos, então, afirmar que f é sobrejetiva.

Sendo f injetiva e sobrejetiva, f é bijetiva.

Reciprocamente, admitamos que f é bijetiva e mostremos que existe uma única função g como descrita no enunciado. Consideremos a correspondência $g : B \to A$ que a cada $b \in B$ faz corresponder o único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Note-se que a existência e unicidade de a são garantidas pelo facto de f ser bijetiva. g é, assim, uma função. Para cada $a \in A$, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a = \mathrm{id}_A(a)$ e, para cada $b \in B$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a)$, onde a é o único elemento de A tal que $f(a) = b$. Assim, pra cada $b \in B$, $(f \circ g)(b) = b = \mathrm{id}_B(b)$. Mostrámos, deste modo, que existe pelo menos uma função g como no enunciado.

Vejamos, agora, que tal função é única. Para tal, consideremos $g, h : B \to A$ funções tais que $g \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$, $h \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ h = \mathrm{id}_B$. Então,

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{id}_A \circ g \\ &= (h \circ f) \circ g \\ &= h \circ (f \circ g) \\ &= h \circ \mathrm{id}_B \\ &= h. \end{aligned}$$

■

[Definição 4.15] Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetiva. À única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$ chamamos **função inversa de** f. Escrevemos $g = f^{-1}$ e dizemos que f **é invertível**.

[Proposição 4.16] Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções bijetivas. Então,

1 | $(f^{-1})^{-1} = f$.

2 | $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

demonstração:

1 | Pelo teorema 4.13, como f é bijetiva, sabemos que f é invertível, ou seja, existe $f^{-1} : B \to A$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Daqui, novamente pelo teorema 4.13 , f^{-1} é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

2 | Pela proposição 4.12, como f e g são bijetivas, também $g \circ f$ o é, sendo $(g \circ f)^{-1}$ uma função de C em A.

Por outro lado, f^{-1} é uma função de B em A e g^{-1} é uma função de C em B, pelo que $f^{-1} \circ g^{-1}$ é também uma função de C em A.

Além disso, dado $x \in C$, atendendo à proposição 4.11,

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ \mathrm{id}_C)(x) \\
&= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (\mathrm{id}_A \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (g \circ f)^{-1}(x).
\end{aligned}$$

Portanto, as funções $f^{-1} \circ g^{-1}$ e $(g \circ f)^{-1}$ são iguais. ■

4.6 Exercícios resolvidos

1. **Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 8$ e x é par$\}$, $f : \mathbb{N} \to A$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to A$ as funções definidas por**

$$f(m) = \begin{cases} m+7 & \textbf{se} \quad m \textbf{ é ímpar} \\ 2m+4 & \textbf{se} \quad m \textbf{ é par} \end{cases}, \qquad h(m) = 2m-1 \quad \textbf{e} \quad g(m) = 2m+6.$$

   (a) Determine $f(\{3,4,5\})$ e $f^{\leftarrow}(\{12,18\})$. Apresente os cálculos que efetuar.

   (b) Diga, justificando, se f é injetiva e se f é sobrejetiva.

   (c) Verifique que $f \circ h = g$.

   (d) Justifique que a função g é invertível e determine a sua inversa.

   (e) Conclua que a afirmação seguinte nem sempre é verdadeira: Se $f_1 : B \to C$ e $f_2 : C \to D$ são funções tais que $f_2 \circ f_1$ é uma função bijetiva, então f_1 e f_2 são funções bijetivas.

resolução:

(a) Por definição, $f(\{3,4,5\}) = \{f(3), f(4), f(5)\}$.

Como 3 e 5 são ímpares,

$$f(3) = 3 + 7 = 10$$

e

$$f(5) = 5 + 7 = 12.$$

Sendo 4 um natural par,

$$f(4) = 2 \times 4 + 4 = 12.$$

Assim, $f(\{3,4,5\}) = \{10, 12\}$.

Determinemos, agora, $f^{\leftarrow}(\{12,18\})$. Por definição,

$$f^{\leftarrow}(\{12,18\}) = \{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = 12 \vee f(m) = 18\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} f(m)=12 \quad &\Leftrightarrow (m+7=12 \wedge m \text{ é ímpar}) \\ &\vee\ (2m+4=12 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow (m=5 \wedge m \text{ é ímpar}) \\ &\vee\ (m=4 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow m=5 \vee m=4 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(m)=18 \quad &\Leftrightarrow (m+7=18 \wedge m \text{ é ímpar}) \\ &\vee\ (2m+4=18 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow (m=11 \wedge m \text{ é ímpar}) \\ &\vee\ (m=7 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow m=11. \end{aligned}$$

Assim, $f^{\leftarrow}(\{12,18\}) = \{4,5,11\}$

(b) Da alínea anterior sabemos que $f(4) = f(5) = 12$. Logo, f não é injetiva.

Vejamos se f é sobrejetiva. Para tal, consideremos $x \in A$. Temos que $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 8$ e x é par. Consideremos $m = x - 7$. É óbvio que m é um natural ímpar. Além disso, $f(m) = f(x-7) = (x-7)+7 = x$. Provámos, deste modo, que para todos $x \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = x$. Assim, f é sobrejetiva.

(c) O domínio de $f \circ h$ é $\mathbb{N}$ e o conjunto de chegada é A. Também o domínio de g é $\mathbb{N}$ e o conjunto de chegada A. Para concluir que $f \circ h$ é g resta-nos mostrar que $(f \circ h)(m) = g(m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (f \circ h)(m) \quad &= f(h(m)) \\ &= f(2m-1) \\ &= (2m-1)+7, \end{aligned}$$

uma vez que $2m-1$ é ímpar. Assim, parar todo $m \in \mathbb{N}$, $(f \circ h)(m) = 2m+6 = g(m)$. Podemos, pois, concluir que $f \circ h = g$.

(d) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $g(n) = g(m) \Longrightarrow 2n+6 = 2m+6 \Longrightarrow n = m$. Portanto, g é injetiva. Mais ainda, dado $x \in A$, temos que $m = \frac{x-6}{2}$ é um natural tal que $g(m) = x$. De facto, sendo x par não inferior a 8, $x-6$ é um natural par e, portanto, $m = \frac{x-6}{2} \in \mathbb{N}$, sendo $g(m) = 2 \times (\frac{x-6}{2}) + 6 = x$. Logo, g é sobrejetiva. Sendo injetiva e sobrejetiva, g é bijetiva e, por isso, invertível. A sua inversa é a função $g^{-1} : A \to \mathbb{N}$ definida por $g^{-1}(x) = \frac{x-6}{2}$ para todo $x \in A$.

(e) A afirmação é falsa. Com efeito, basta considerar $f_1 = f$ e $f_2 = h$. Por (c) e (d) sabemos que $f_1 \circ f_2$ é bijetiva. No entanto, de (b) sabemos que f_1 não é bijetiva.

2. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} 2n+3 & \textbf{se} \quad -3 \leq n \leq 1 \\ 3n-1 & \textbf{se} \quad n < -3 \textbf{ ou } n > 1 \end{cases}.$$

(a) Determine $f\big(\{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 2\}\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{-5, 3\})$.

(b) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou injetiva.

resolução:

(a) Por definição,

$$f\big(\{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 2\}\big) = f\big(\{-1, 0, 1, 2\}\big) = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\}.$$

Ora, $f(-1) = 2 \times (-1) + 3 = 1$, $f(0) = 2 \times 0 + 3 = 3$, $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$ e $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$. Logo, $f\big(\{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 2\}\big) = \{1, 3, 5\}$.

Por definição, $f^{\leftarrow}(\{-5, 3\}) = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = -5 \vee f(n) = 3\}$. Temos que

$$\begin{aligned} f(n) = -5 \quad & \Leftrightarrow (2n + 3 = -5 \wedge -3 \leq n \leq 1) \\ & \vee (3n - 1 = -5 \wedge (n < -3 \vee n > 1)) \\ & \Leftrightarrow (n = -4 \wedge -3 \leq n \leq 1) \\ & \vee (3n = -4 \wedge (n < -3 \vee n > 1)), \end{aligned}$$

o que é um condição impossível em $\mathbb{Z}$. Assim, não existe nenhum inteiro n cuja imagem, por f, seja -5. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(n) = 3 \quad & \Leftrightarrow (2n + 3 = 3 \wedge -3 \leq n \leq 1) \\ & \vee (3n - 1 = 3 \wedge (n < -3 \vee n > 1)) \\ & \Leftrightarrow (n = 0 \wedge -3 \leq n \leq 1) \\ & \vee (3n = 4 \wedge (n < -3 \vee n > 1)) \\ & \Leftrightarrow n = 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe um só $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = 3$, $n = 0$. Portanto, $f^{\leftarrow}(\{-5, 3\}) = \{0\}$.

(b) Da alínea anterior, sabemos que $f(1) = f(2) = 5$, pelo que f é não injetiva, e que não existe nenhum $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = -5$, donde f é não sobrejetiva.

3. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \textbf{se} \quad x \leq -2 \\ x+2 & \textbf{se} \quad x > -2 \end{cases}.$$

(a) Determine $f(\{-2, 2\})$ e $f\big(]-2, 4]\big)$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\})$.

(c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

resolução:

(a) Temos que $f(-2) = |-2| + 2 = 4$ e $f(2) = |2| + 2 = 4$. Assim, $f(\{-2, 2\}) = \{f(-2), f(2)\} = \{4\}$.

Por definição, $f\big(]-2, 4]\big) = \{f(x) \mid x \in]-2, 4]\}$. f é uma função estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Temos que $f(-2) = 4$, $f(0) = 2$ e $f(4) = 6$. Além disso, todo o elemento y entre 2 e 6 é imagem, por f, de $x = y - 2 \in \mathbb{R}$. Portanto, $f\big(]-2, 4]\big) = [2, 6]$.

(b) Por definição, $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 1 \vee f(x) = 2\}$. Temos que

$$\begin{aligned} f(x) = -2 \quad &\Leftrightarrow |x| + 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow |x| = -4 \\ &\Leftrightarrow i(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow |x| + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x| = -2 \\ &\Leftrightarrow i(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow |x| + 2 = 1 \\ &\Leftrightarrow |x| = -1 \\ &\Leftrightarrow i(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow |x| + 2 = 2 \\ &\Leftrightarrow |x| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Assim, $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\}) = \{0\}$

(c) Note-se que $f(x) \geq 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 2 = |x| + 4$. Dado que $(g \circ f)(-1) = (g \circ f)(1) = 5$, $g \circ f$ não é injetiva. Além disso, $(g \circ f)(x) \geq 4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = 0$ e $g \circ f$ não é sobrejetiva.

Capítulo 5

Relações binárias

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b.

[Definição 5.1] Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos **relação binária de A em B** a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Quando $A = B$, dizemos que R é uma **relação binária em A**.

Se $(a, b) \in R$, então dizemos que a **está relacionado com b por R** e escrevemos $a\,R\,b$.

Se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R\, b$ e dizemos que a **não está relacionado com b por R**.

[Exemplos]

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. São exemplos de relações binárias de A em B os conjuntos

i. $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7)\}$;

ii. $S = \{(2, 3)\}$;

iii. $\emptyset$;

iv. $A \times B$.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$. Então, $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ é uma relação binária de A em B que pode ser definida por

$$a\,R\,b \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 \quad (a \in A, b \in B).$$

3 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Então,

i. $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ não é uma relação binária de A em B, visto que $S \not\subseteq A \times B$.

4 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 9, 10\}$.

Se R é a relação binária de A em B definida por $a\,R\,b$ se e só se $a|b$ (ou seja, a divide b), então

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9)\}$$

Facilmente verificamos que $2 \not R\, 9$, pois $2 \nmid 9$. No entanto, $(2, 9) \in A \times B$.
Por outro lado, apesar de $5|10$, temos que $5 \not R\, 10$, pois $(5, 10) \notin A \times B$.

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

Se os conjuntos A e B forem finitos e tiverem n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $n\times m$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A\times B)$ tem $2^{n\times m}$ elementos. Assim, **existem $2^{n\times m}$ relações binárias de A em B.**

Os conjuntos $\emptyset$ e $A \times B$ são relações binárias de A em B, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

[Definição 5.2] Seja A um conjunto não vazio. Então,

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\} \quad \text{e} \quad \omega_A = A^2 = \{(x, y) : x, y \in A\}$$

são relações binárias em A. A id_A chamamos **relação identidade em A** e a ω_A chamamos **relação universal em A.**

[Definição 5.3] Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chamamos **domínio de R** ao conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists_{b\in B}\ (a, b) \in R\};$$

Chamamos **imagem** ou **contradomínio de R** ao conjunto

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists_{a\in A}\ (a, b) \in R\}.$$

[Exemplo]

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Então,
i. $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$;
ii. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\}$;
iii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$.

[Definição 5.4] Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são **iguais** quando os conjuntos R e S são iguais. Em particular, $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$, como podemos comprovar no exemplo que se segue.

[Exemplo]

Consideremos os conjuntos $A = \{2,4,5\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$. Seja R a relação de A em B definida por $(a,b) \in R$ se e só se $a < b$ e seja $S = \{(2,3),(2,4),(4,5)\}$. Então,
i. $\mathrm{Dom}(R) = \{2,4\} = \mathrm{Dom}(S)$;
ii. $\mathrm{Im}(R) = \{3,4,5\} = \mathrm{Im}(S)$;
iii. $(2,5) \in R$ mas $(2,5) \notin S$, pelo que $R \neq S$.

De seguida, estudamos alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar, em particular, os processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se R e S são relações binárias de A em B, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de $A \times B$.

[Exemplo]

Consideremos os conjuntos $A = \{2,4,5\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$ e as relações $R = \{(2,3),(2,4),(2,5),(4,5)\}$ e $S = \{(2,3),(2,4),(4,5)\}$. Então,

i. $R \cup S = \{(2,3),(2,4),(2,5),(4,5)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $R \cap S = \{(2,3),(2,4),(4,5)\}$ é uma relação binária de A em B;

iii. $R \setminus S = \{(2,5)\}$ é uma relação binária de A em B.

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações.

[Definição 5.5] Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chama-se **relação inversa de** R, e representa-se por R^{-1}, a relação de B em A definida por

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}.$$

[Exemplo]

Consideremos, de novo, os conjuntos $A = \{2,4,5\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a,b) \in R$ se e só se $a < b$. Uma vez que $R = \{(2,3),(2,4),(2,5),(4,5)\}$ tem-se

$$R^{-1} = \{(3,2),(4,2),(5,2),(5,4)\}.$$

[Proposição 5.6] Sejam A, B conjuntos e R e S relações binárias de A em B. Então,
1 | $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ e $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.
2 | $(R^{-1})^{-1} = R$.

3 | Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

demonstração:

1 | Por definição de domínio de uma relação binária, $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \{b \in B \mid \exists_{a\in A}\, (b,a) \in R^{-1}\}$. Assim, $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \{b \in B \mid \exists_{a\in A}\ (a,b) \in R\}$, ou seja, $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$. Por outro lado, por definição de contradomínio de uma relação binária, $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \{a \in A \mid \exists_{b\in B}\ (b,a) \in R^{-1}\}$. Logo, $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \{a \in A \mid \exists_{b\in B}\ (a,b) \in R\}$, isto é, $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

2 | Por definição de inversa de uma relação binária,

$$\begin{aligned}(R^{-1})^{-1} &= \{(a,b) \in A \times B \mid (b,a) \in R^{-1}\}\\ &= \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \in R\}\\ &= R.\end{aligned}$$

3 | Admitamos que $R \subseteq S$. Seja $(b,a) \in R^{-1}$. Então, por definição de inversa de uma relação binária, $(a,b) \in R$. Como $R \subseteq S$, segue-se que $(a,b) \in S$. Logo, $(b,a) \in S^{-1}$. Assim, mostrámos que todo o elemento de R^{-1} é elemento de S^{-1}, ou seja, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$. ■

Vejamos, de seguida, a definição de relação composta de duas relações binárias.

[Definição 5.7] Sejam A, B, C, D conjuntos, R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D. Chama-se **relação composta de S com R**, e representa-se por $S \circ R$, a relação binária de A em D definida por

$$S \circ R = \{(x,y) \in A \times D \mid \exists_{z\in B\cap C}\ \ ((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S)\}.$$

É de notar que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, então $S \circ R = \emptyset$.

[Exemplo]

Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{0,2,3,4\}$ e $D = \{0,1,3,5\}$. Consideremos as relações binárias

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,4)\} \subseteq A \times B$$

e

$$S = \{(0,1),(3,0),(3,3),(3,5),(4,0)\} \subseteq C \times D.$$

Repare-se que, uma vez que $(1,3) \in R$ e $(3,0) \in S$, $(1,0) \in S \circ R$. Temos, também, que $(0,1) \in S$ e $(1,2) \in R$, pelo que $(0,2) \in R \circ S$. Uma análise cuidada, seguindo este tipo de raciocínios, permite-nos concluir que

$$S \circ R = \{(1,0),(1,3),(1,5),(2,0)\}$$

e

$$R \circ S = \{(0,2),(0,3)\}.$$

Do exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa: dadas duas relações binárias R e S, nem sempre $R \circ S = S \circ R$.

[Proposição 5.8] Sejam R, S e T relações binárias. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

3 | $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

demonstração:

1 | Comecemos por mostrar que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$. Dado $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Por definição de relação composta, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$ para algum z. Em particular, $(x, z) \in R$, pelo que $x \in \mathrm{Dom}(R)$. De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$ para algum z. De $(z, y) \in T \circ S$ segue que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$ para algum w. Ora, como $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, temos que $(x, w) \in S \circ R$. Assim, $(x, w) \in S \circ R$ e $(w, y) \in T$, pelo que $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$. De modo análogo se prova que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

3 | Para todo o objeto (x, y),

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ ((y, z) \in R \wedge (z, x) \in S) \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ ((z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}) \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ ((x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo, $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. ■

[Observações]

1 | Dados A, B conjuntos, uma relação binária R de A em B **total** (ou seja, $Dom(R) = A$) e **unívoca** (ou seja, para quaisquer $a \in A, b_1, b_2 \in B$, se $(a, b_1) \in R$ e $(a, b_2) \in R$, então $b_1 = b_2$) determina uma função $\mathcal{F}_R$ de A em B tal que, para todo $a \in A$, $\mathcal{F}_R(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in R$.

2 | Reciprocamente, dados A, B conjuntos, uma função $f : A \to B$ determina uma relação binária de A em B, designada por **gráfico de f**, notada por $\mathcal{G}_f$ e dada por $\mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$, que é total e unívoca.

3 | Estes dois processos são inversos e, para R e f nas condições anteriores, tem-se

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}_R} = R \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{G}_f} = f.$$

4 | Na verdade, no âmbito da Teoria de Conjuntos, o conceito de função não é primitivo: o conceito de função surge do conceito de relação como indicado em 1.

Em seguida, referimos certas propriedades que permitem caraterizar algumas classes especiais de relações binárias.

[Definiição 5.9] Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Dizemos que

1 | R é **reflexiva** quando $\forall_{a\in A}\, (a,a) \in R$;

2 | R é **simétrica** quando $\forall_{a,b\in A}\, ((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$;

3 | R é **antissimétrica** quando $\forall_{a,b\in A}\, (((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \Rightarrow a = b)$;

4 | R é **transitiva** quando $\forall_{a,b,c\in A}\, (((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R)$.

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b\in A}\, (((a,b) \in R \wedge a \neq b) \Rightarrow (b,a) \notin R).$$

[Exemplos]

Seja A um conjunto.

1 | A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A.

2 | A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.

3 | A relação $\emptyset$ é simétrica, transitiva e antissimétrica em A. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.

4 | Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}$, então:

i. uma vez que $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R$, a relação R é reflexiva;

ii. o par $(1,2)$ é elemento de R, mas $(2,1) \notin R$, pelo que R não é simétrica;

iii. como não existem elementos distintos $a,b \in A$ tais que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, podemos afirmar que a relação R é antissimétrica;

iv. R é transitiva, visto que

$$\begin{gathered}
((1,1) \in R \wedge (1,1) \in R) \Rightarrow (1,1) \in R\\
((1,1) \in R \wedge (1,2) \in R) \Rightarrow (1,2) \in R\\
((1,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \Rightarrow (1,3) \in R\\
((1,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \Rightarrow (1,2) \in R\\
((1,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \Rightarrow (1,3) \in R\\
((1,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \Rightarrow (1,3) \in R\\
((2,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \Rightarrow (2,2) \in R\\
((2,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \Rightarrow (2,3) \in R\\
((2,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \Rightarrow (2,3) \in R\\
((3,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \Rightarrow (3,3) \in R\\
((4,4) \in R \wedge (4,4) \in R) \Rightarrow (4,4) \in R
\end{gathered}$$

e o antecedente da implicação $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$ é falso para as restantes combinações de valores para a, b e c.

[Proposição 5.10] Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então

1 | R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;

2 | R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;

3 | R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;

4 | R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$.

demonstração:

1 | R é reflexiva se e só se $(x, x) \in R$, para todo o $x \in A$, ou equivalentemente, todo o elemento de id_A é elemento de R.

2 | Admitamos que R é simétrica. Então, para quaisquer $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$. Dado $(x, y) \in R^{-1}$, sabemos, por definição de relação inversa, que $(y, x) \in R$. Como R é simétrica, segue-se que $(x, y) \in R$. Logo, $R^{-1} \subseteq R$. Dado $(x, y) \in R$, sabemos, porque R é simétrica, que $(y, x) \in R$. Assim, pela definição de relação inversa, $(x, y) \in R^{-1}$. Portanto, $R \subseteq R^{-1}$ e, consequentemente, $R^{-1} = R$.

Reciprocamente, admitamos que $R^{-1} = R$ e mostremos que R é simétrica. Sejam $x, y \in A$ tais que $(x, y) \in R$. Como $R^{-1} = R$, $(x, y) \in R^{-1}$. Por definição de relação inversa, $(y, x) \in R$. Portanto, para quaisquer $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$, ou seja, R é simétrica.

3 | Admitamos que R é transitiva. Dado $(x, y) \in R \circ R$, sabemos que existe, pela definição da relação composta, $z \in R$ tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in R$. Sendo R transitiva, como $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in R$, segue-se que $(x, y) \in R$. Portanto, todo o elemento de $R \circ R$ é elemento de R, isto é $R \circ R \subseteq R$.

Suponhamos, agora, que $R \circ R \subseteq R$ e mostremos que R é transitiva. Para tal, consideremos $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$. Então, por definição da relação composta $R \circ R$, $(x, z) \in R \circ R$. Como $R \circ R \subseteq R$, todo o elemento de $R \circ R$ é também elemento de R. Portanto, $(x, z) \in R$. Provámos, assim, que para quaisquer $x, y, z \in A$ tais que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, temos $(x, z) \in R$, pelo que R é transitiva.

4 | Admitamos que R é antissimétrica e suponhamos que $R \cap R^{-1} \nsubseteq id_A$. Então, existem $x, y \in A$ tais que $x \neq y$ e $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Portanto, $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{-1}$. Logo, $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, o que contraria o facto de R ser antissimétrica. A contradição resultou de supormos que $R \cap R^{-1} \nsubseteq \text{id}_A$. Portanto, $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$.

Reciprocamente, admitamos que $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$ e mostremos que R é antissimétrica. Se $x, y \in A$ são tais que $x \neq y$ e $(x, y) \in R$, então $(y, x) \notin R$. De facto, se $(y, x) \in R$, então $(x, y) \in R^{-1}$. Assim, teríamos $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Mas, como $x \neq y$, $(x, y) \notin \text{id}_A$, o que contrariaria a hipótese $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$. ■

5.1 Relações de equivalência

[Definição 5.11] Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de equivalência em** A quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

[Exemplos]

1 | Dado um conjunto A não vazio, as relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Então,
i. S é reflexiva uma vez que

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq S;$$

ii. S é simétrica pois

$$S^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = S;$$

iii. S é transitiva porque

$$S \circ S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq S.$$

Por i.-iii., S é uma relação de equivalência em A.

3 | Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x \, R_f \, y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto,

i. R_f é reflexiva: $\forall_{x\in A} \; f(x) = f(x)$;

ii. R_f é simétrica: $\forall_{x,y\in A} \; (f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x))$;

iii. R_f é transitiva: $\forall_{x,y,z\in A} \; ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z))$.

4 | Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a \, R \, b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \text{ é divisível por } 3.$$

Facilmente verificamos que R é uma relação de equivalência. Com efeito,

i. para todo o $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por 3, pelo que $a \, R \, a$. Portanto, R é reflexiva;

ii. para todos os $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \, R \, b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pelo que $b - a = -(a - b) = -(3k) = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$. Logo, $b \, R \, a$ e, assim, R é simétrica;

iii. para todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \, R \, b$ e $b \, R \, c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a \, R \, c$. Logo, R é transitiva.

Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} 1\,R\,a & \Leftrightarrow & 1 - a = 3k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & a = 3k + 1, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{array}$$

De modo análogo se prova que $2\,R\,a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e $0\,R\,a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e R é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{l} X_0 = \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ X_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+1\} \\ X_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+2\} \end{array}$$

[Definição 5.12] Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama-se **classe de equivalência de x módulo R** ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de x**, ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x\,R\,y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de A módulo R** e representamo-lo por A/R, ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

[Exemplos]

1 | Consideremos a relação de equivalência R definida no exemplo anterior. Então,

$$\begin{array}{l} [0]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ [1]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+1\} \\ [2]_R = \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+2\} \end{array}$$

e $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

2 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência id_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\mathrm{id}_A} = \{y \in A \mid y\,\mathrm{id}_A\,x\} = \{y \in A \mid y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}.$$

3 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência ω_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \mid y\,\omega_A\,x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4 | Seja $A = \{1,2,3,4\}$. Consideremos a relação de equivalência $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1,2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$.

Em todos os casos do exemplo anterior, as classes de equivalência são não vazias, são disjuntas duas a duas e a sua união é o conjunto A.

[Definição 5.13] Sejam A um conjunto e $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$. Diz-se que Π é uma **partição do conjunto** A se:

1 | para todo $X \in \Pi$, $X \neq \emptyset$;

2 | para todos $X, Y \in \Pi$, $(X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$;

3 | para todo $a \in A$, existe $X \in \Pi$ tal que $a \in X$.

[Exemplo]

Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e

$$\begin{array}{ll} \Pi_1 = \{\{1,2\},\{\},\{3,4,5\}\}, & \Pi_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\}, \\ \Pi_3 = \{\{1,2\},\{4,5\}\}, & \Pi_4 = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}. \end{array}$$

Nenhum dos conjuntos Π_1, Π_2, Π_3 é uma partição de A. Com efeito,

[Π_1] $\emptyset \in \Pi_1$ e, portanto, o conjunto Π_1 não verifica a condição 1 | da definição anterior.

[Π_2] o conjunto Π_2 não satisfaz a condição 2 | : $X = \{1,2\} \in \Pi_2$, $Y = \{2,3\} \in \Pi_2$, $X \neq Y$ e $X \cap Y \neq \emptyset$.

[Π_3] no caso do conjunto Π_3 falha a condição 3 | : $3 \in A$ e não existe $X \in \Pi_3$ tal que $3 \in X$.

No que diz respeito ao conjunto Π_4, é simples verificar que qualquer uma das condições 1 |-3 | da definição anterior é satisfeita e, portanto, Π_4 é uma partição de A.

[Exemplos]

1 | O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$, onde R é a relação de equivalência definida por $a\,R\,b \leftrightarrow a - b$ é divisível por 3, é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$. É claro que A/id_A é uma partição de A.

3 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\omega_A = \{A\}$ e $\{A\}$ é uma partição de A.

4 | Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$, então $A/R = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$. Facilmente se verifica que A/R é uma partição de $A = \{1,2,3,4\}$.

Tal como se estabelece no resultado seguinte, a cada relação de equivalência definida num conjunto A está associada uma partição de A.

[Proposição 5.14] Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então, A/R é uma partição de A.

demonstração:

Note-se que $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$. Logo, A/R é formado por subconjuntos de A. Além disso, para qualquer $x \in A$, $x \in [x]_R$, pelo que todo o elemento de A/R é um conjunto não vazio e todo o elemento de A pertence a algum elemento de A/R. Mais ainda, se x e y são elementos de A tais que $[x]_R \neq [y]_R$, etnão $x \not R y$ e $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. ■

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

[Proposição 5.15] Sejam A um conjunto, Π uma partição de A e $\mathcal{R}_\Pi$ a relação binária em A definida por

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \text{se e só se} \quad \text{existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então, $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A.

demonstração:

Dado $x \in A$, sabemos que existe $X \in \Pi$ tal que $x \in X$. Logo, $x \, \mathcal{R}_\Pi \, x$. Portanto, $\mathcal{R}_\Pi$ é reflexiva.

Sejam $x, y \in A$ tais que $x \, \mathcal{R}_\Pi \, y$. Então, por definição, existe $X \in \Pi$ tal que $x, y \in X$. É óbvio que X é tal que $y, x \in X$. Portanto, $y \, \mathcal{R}_\Pi \, x$. Logo, $\mathcal{R}_\Pi$ é simétrica.

Sejam $x, y, z \in A$ tais que $x \, \mathcal{R}_\Pi \, y$ e $y \, \mathcal{R}_\Pi \, z$. Então, por definição, existe $X \in \Pi$ tal que $x, y \in X$ e existe $X' \in \Pi$ tal que $y, z \in X'$. Temos que $y \in X \cap X'$. Portanto, $X \cap X' \neq \emptyset$, donde $X = X'$ e $x, z \in X$. Podemos, então concluir que $x \, \mathcal{R}_\Pi \, z$. $\mathcal{R}_\Pi$ é, pois, transitiva. ■

[Exemplos]

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ uma partição de A. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Pi = \quad & \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), \\ & (4,4), (6,6), (4,6), (6,4), (5,5)\}. \end{aligned}$$

2 | Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_1 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_2 = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \leftrightarrow \quad x - y \text{ é divisível por } 3.$$

[Observações] Sejam A um conjunto, R uma relação de equivalência em A e Π uma partição de A. Então, 1 | A/R é uma partição de A e

$$\mathcal{R}_{A/R} = R.$$

2 | $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A e

$$A/(\mathcal{R}_\Pi) = \Pi.$$

5.2 Relações de de ordem parcial

[Definição 5.16] Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de ordem parcial em** A quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, ao par (A, R) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

[Exemplos]

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

1 | (A, id_A), onde A é um conjunto e $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para todos $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, pelo que $\leq$ é transitiva).

3 | $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$.

4 | $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto A por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(A, \leq)$.

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escrevemos

$a \leq b$ e lemos "a é menor ou igual a b" ou "a precede b" para representar $(a, b) \in \leq$;

$a \not\leq b$ e lemos "a não é menor ou igual a b" se $(a, b) \notin \leq$;

$a < b$ e lemos "a é menor do que b" ou "a precede propriamente b" se $a \leq b$ e $a \neq b$;

$a << b$ e lemos "b é sucessor de a" ou "a é sucedido por b" ou "b cobre a" ou "a é coberto por b" se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ (a < c \wedge c < b))$.

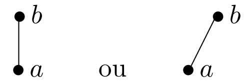
[Definição 5.17] Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, dizemos que a, b são **comparáveis** quando $a \leq b$ ou $b \leq a$. Por outro lado, quando $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, dizemos que a e b são **incomparáveis** e escrevemos $a||b$.

Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

1 | cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

$\bullet a$

2 | se a e b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a; além disso, se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

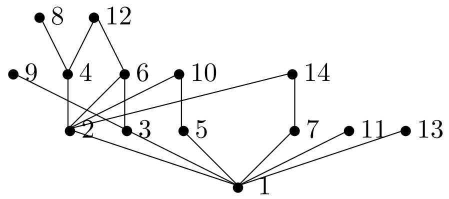


[Exemplos]

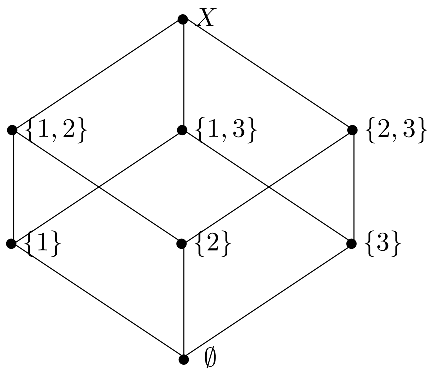
1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $|$ a ordem parcial definida por

$$x|y \quad \Leftrightarrow \quad \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx.$$

O c.p.o. $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



2 | Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e X um suconjunto de A, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X.

[Definição 5.18] Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:

1 | um **elemento maximal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$;

2 | um **elemento minimal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$;

3 | **majorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ x \leq m$;

4 | **minorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ m \leq x$;

5 | **supremo de** X quando m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X;

6 | **ínfimo de** X quando m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X;

7 | **máximo de** X quando m é majorante de X e $m \in X$;

8 | **mínimo de** X quando m é minorante de X e $m \in X$.

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$, respetivamente.

Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ (resp.: $\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

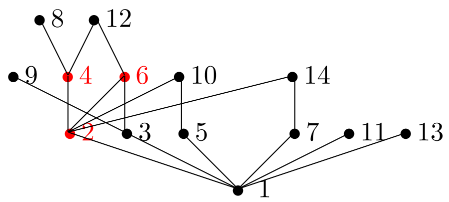
Note-se que, em particular, A tem um máximo se existir $m \in A$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in A$; A tem elemento mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$.

[Exemplo]

Consideremos, de novo, o c.p.o. $(A, |)$ do exemplo anterior
Os elementos maximais de A são o 8, o 9, o 10, o 11, o 12, o 13 e o 14; 1 é o único elemento minimal de A. Além disso,

$\mathrm{Min}(A) = \{1\}$,	$\mathrm{Maj}(A) = \emptyset$,	$\inf(A) = 1$,
$\min(A) = 1$,	$\sup(A)$ não existe,	$\max(A)$ não existe.

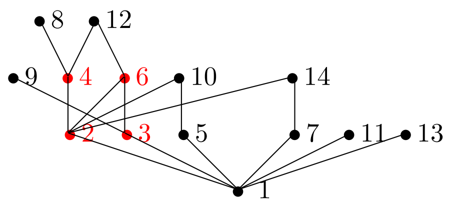
Consideremos o subconjunto $X = \{2, 4, 6\}$ de A.



Os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de X. Além disso,

$\mathrm{Min}(X) = \{1, 2\}$,	$\mathrm{Maj}(X) = \{12\}$,	$\inf(X) = 2$,
$\min(X) = 2$,	$\sup(X) = 12$,	$\max(X)$ não existe.

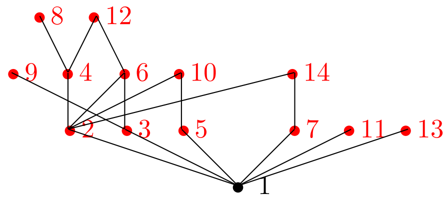
Consideremos, agora, o subconjunto $Y = \{2, 3, 4, 6\}$ de A.



Os elementos maximais de Y são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de Y. Além disso,

Min(Y)= $\{1\}$,	Maj(Y)= $\{12\}$,	inf(Y)= 1,
min(Y) não existe,	sup(Y)= 12,	max(Y) não existe.

Consideremos, agora, o subconjunto $Z = A \setminus \{1\}$ de A



Os elementos maximais de Z são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de Z são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

Min(Z)= $\{1\}$,	Maj(Z)= $\emptyset$,	inf(Z)= 1,
min(Z) não existe,	sup(Z) não existe,	max(Z) não existe.

[Proposição 5.19] Num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$:

1 | $a \leq b$;

2 | $\sup\{a, b\} = b$;

3 | $\inf\{a, b\} = a$.

demonstração:

$1 \Rightarrow 2$: Se $a \leq b$, como também $b \leq b$, é imediato que $\sup\{a, b\} = b$.

$2 \Rightarrow 3$: Se $\sup\{a, b\} = b$, então $a \leq b$. Dado que também $a \leq a$, segue-se que $\inf\{a, b\} = a$.

$3 \Rightarrow 1$: Se $\inf\{a, b\} = b$, então $a \leq b$. ■

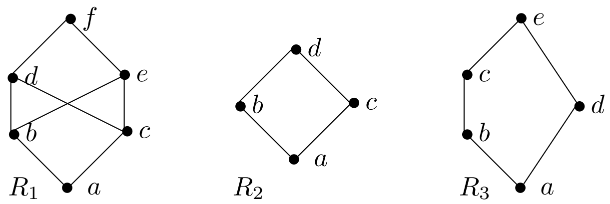
Em seguida, consideramos algumas classes especiais de c.p.o.'s.

[Definição 5.20] Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer $x, y \in A$, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

Note-que que, num c.p.o. arbitrário $(A, \leq)$, dados x, y comparáveis, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$ (ver proposição anterior). No entanto, se x e y são elementos incomparáveis, já não é garantida a existência de $\sup\{x, y\}$ ou de $\inf\{x, y\}$. Assim, para verificar se um c.p.o. é um reticulado, basta averiguar a existência de $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ para todos os elementos x, y incomparáveis.

[Exemplo]

Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



Os c.p.o.'s R_2 e R_3 são reticulados, mas o c.p.o. R_1 não é um reticulado:

R_1 | Os únicos pares de elementos incomparáveis são: b, c e d, e. Temos que $\text{Maj}(\{b,c\}) = \{d, e, f\}$. Sendo d e e incomparáveis, não existe supremo de $\{b, c\}$.

R_2 | O único par de elementos incomparáveis é b, c. Temos que $\text{Maj}(\{b,c\}) = \{d\}$ e $\text{Min}(\{b,c\}) = \{a\}$. Logo, $\sup\{b,c\} = d$ e $\inf\{b,c\} = a$.

R_3 | Os únicos pares de elementos incomparáveis são: b, d e c, d. Temos que $\text{Maj}(\{b,d\}) = \{e\}$, $\text{Min}(\{b,d\}) = \{a\}$, $\text{Maj}(\{c,d\}) = \{e\}$ e $\text{Min}(\{c,d\}) = \{a\}$. Assim, $\sup\{b,d\} = e$, $\inf\{b,d\} = a$, $\sup\{c,d\} = e$ e $\inf\{c,d\} = a$.

[Definição 5.20] Uma ordem parcial $\leq$ num conjunto A diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** quando quaisquer elementos a e b de A são comparáveis. Neste caso, $(A, \leq)$ diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**. Um subconjunto X de A diz-se uma **cadeia em** $(A, \leq)$ ou um **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ quando, para quaisquer $x, y \in X$, x e y são comparáveis.

[Exemplos]

1 | $\{3, 6, 12\}$ e $\{2, 4\}$ são cadeias em $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 são incomparáveis.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

[Observação] Toda a cadeia é um reticulado, mas o recíproco não se verifica. De facto, numa cadeia quaisquer dois elementos x, y são comparáveis. Logo, existem $\sup\{x,y\}$ e $\inf\{x,y\}$, pelo que qualquer cadeia é um reticulado. O reticulado R_2 do exemplo anterior não é uma cadeia, uma vez que os elementos b e c são incomparáveis.

5.3 Exercícios resolvidos

1. **Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Considere as relações binárias R, de A em B, e S, de B em A:**

$$R = \{(1, x), (1, z), (2, z)\}$$

$$S = \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (z, 2)\}.$$

   (a) **Indique o domínio e a imagem de R.**

   (b) **Determine R^{-1}, S^{-1}, $R \cup S^{-1}$, $R^{-1} \cap S$, $S \circ R$ e $R \circ S$.**

   (c) **Dê um exemplo de uma relação binária T, de B em A, tal que $T \circ R = \{(1, 1), (1, 2)\}$.**

   (d) **Indique quantas relações binárias de A em B existem.**

   (e) **Indique todas as relações binárias de A em B cujo domínio é $\{1, 2\}$ e cuja imagem é $\{x, y\}$.**

resolução:

(a) Temos que $\mathrm{Dom}(R) = \{1, 2\}$ e $\mathrm{Im}(R) = \{x, z\}$.

(b)

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \{(x,1),(z,1),(z,2)\} \\[1ex]
S^{-1} &= \{(1,x),(3,x),(2,y),(2,z)\} \\[1ex]
R \cup S^{-1} &= \{(1,x),(1,z),(2,z)\} \cup \{(1,x),(3,x),(2,y),(2,z)\} \\
&= \{(1,x),(1,z),(2,z),(3,x),(2,y)\} \\[1ex]
R^{-1} \cap S &= \{(x,1),(z,1),(z,2)\} \cap \{(x,1),(x,3),(y,2),(z,2)\} \\
&= \{(x,1),(z,2)\} \\[1ex]
S \circ R &= \{(1,1),(1,3),(1,2),(2,2)\} \\[1ex]
R \circ S &= \{(x,x),(x,z),(y,z),(z,z)\}
\end{aligned}$$

(c) Para que $(1,1)$ seja elemento de $T \circ R$, como os únicos pares de R cuja primeira componente é 1 são $(1,x)$ e $(1,z)$, pelo menos um dos elementos $(x,1)$ ou $(z,1)$ tem de pertencer a T. Como $(2,z) \in R$, se $(z,1)$ pertencesse a T teríamos $(2,1) \in T \circ R$, o que não acontece. Logo, $(z,1) \notin T$, pelo que $(x,1) \in T$. De modo semelhante, para que $(1,2)$ seja elemento de $T \circ R$, pelo menos um dos elementos $(x,2)$ ou $(z,2)$ tem de pertencer a T. Como $(2,z) \in R$, se $(z,2)$ pertencesse a T teríamos $(2,2) \in T \circ R$. Portanto, $(z,2) \notin T$, donde $(x,2) \in T$. Note-se que, se $T = \{(x,1),(x,2)\}$, então $T \circ R = \{(1,1),(1,2)\}$. No entanto, esta não é a única resposta possível: por exemplo, $T = \{(x,1),(x,2),(y,1)\}$ também satisfaz $T \circ R = \{(1,1),(1,2)\}$.

(d) As relações binárias de A em B são os subconjuntos de $A \times B$. Como A e B têm 3 elementos cada, $A \times B$ tem 9 elementos. Logo, existem 2^9 subconjuntos de $A \times B$, ou seja, existem 2^9 relações binárias de A em B.

(e) Para que o domínio de uma relação binária R, de A em B, seja $\{1,2\}$, tem de existir pelo menos um elemento b_1 de B tal que $(1,b_1) \in R$ e tem de existir pelo menos um elemento b_2 de B tal que $(2,b_2) \in R$. Além disso, não pode haver, em R, nenhum par da forma $(3,b)$, com $b \in B$.

Analogamente, para que a imagem de uma relação binária R, de A em B, seja $\{x,y\}$, tem de existir pelo menos um elemento a_1 de A tal que $(a_1,x) \in R$ e tem de existir pelo menos um elemento a_2 de A tal que $(a_2,y) \in R$. Além disso, não pode haver, em R, nenhum par da forma (a,z), com $a \in A$.

Conjugando estas condições, podemos concluir que os elementos de uma tal relação binária podem ser $(1,x)$, $(1,y)$, $(2,x)$ ou $(2,y)$, tendo que existir na relação pelo menos um destes pares cuja primeira componente é 1, pelo menos um cuja primeira componente é 2, pelo menos um vuja segunda componente é x e pelo menos um cuja segunda componente é y.

Assim, as relações binária de A em B nas condições do enunciado são

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,x),(2,y)\} \\
R_2 &= \{(1,y),(2,x)\} \\
R_3 &= \{(1,x),(1,y),(2,y)\} \\
R_4 &= \{(1,x),(2,x),(2,y)\} \\
R_5 &= \{(1,x),(1,y),(2,x)\} \\
R_6 &= \{(1,y),(2,x),(2,y)\} \\
R_7 &= \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y)\}.
\end{aligned}$$

2. Considere o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e a relação binária

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

em A. Indique se R é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva.

resolução:

Como $(1,1),(2,2),(3,3) \in R$, temos que, para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$. Logo, R é reflexiva.

Dado que $R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,2)(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\} = R$, R é simétrica (note-se que para quaisquer $x, y \in A$, se $(x,y) \in R$ então $(y,x) \in R$).

Dado que $(1,2),(2,1) \in R$, R não é antissimétrica (note-se que $R \cap R^{-1} = R \not\subseteq \mathrm{id}_A$).

Temos que $(1,2) \in R$ e $(2,3) \in R$. No entanto, $(1,3) \notin R$. Logo, R não é transitiva (note-se que $R \circ R = \omega_A \not\subseteq R$).

3. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Determine a menor relação binária R em A que seja simétrica, transitiva e que contenha os pares $(1,2)$ e $(2,4)$.

resolução:

Como $(1,2) \in R$ e $(2,4) \in R$, para que R seja transitiva, temos de ter $(1,4) \in R$. Para que R seja simétrica, como $(1,2),(2,4),(1,4) \in R$, temos de ter $(2,1),(4,2),(4,1) \in R$. Assim, $(1,2),(2,1) \in R$, donde, para que R seja transitiva, $(1,1),(2,2)$ têm de ser elementos de R. Temos também que $(4,1),(1,4) \in R$, pelo que $(4,4)$ tem de pertencer a R. Note-se que $R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}$ é simétrica, transitiva e contem os pares $(1,2)$ e $(2,4)$ e é a menor relação binária em A que satisfaz estas condições.

4. Seja $A = \{1,2,5,7,8,9,15,27\}$ e considere a relação de equivalência R em A definida por $x \; R \; y$ se e só se x e y têm o mesmo número de divisores naturais. Determine $[9]_R$ e determine o conjunto quociente A/R.

resolução:

O único divisor natural de 1 é o 1. Os divisores naturais de 2 são o 1 e o 2. Os divisores naturais de 5 são o 1 e o 5. Os divisores naturais de 8 são o 1, o 2, o 4 e o 8. Os divisores naturais de 9 são o 1, o 3 e o 9. Os divisores naturais de 15 são o 1, o 3, o 5 e o 15. Os divisores naturais de 27 são o 1, o 3, o 9 e o 27. Assim, o 1 tem um divisor natural, o 2 e o 5 têm dois divisores naturais, o 9 tem três divisores naturais e o 8, o 15 e o 27 têm quatro divisores naturais.

Assim,

$$\begin{aligned} [9]_R &= \{x \in A \mid x \; R \; 9\} \\ &= \{x \in A \mid x \text{ e } 9 \text{ têm o mesmo número de divisores naturais}\} \\ &= \{x \in A \mid x \text{ tem três divisores naturais}\} \\ &= \{9\}, \end{aligned}$$

uma vez que 9 é o único elemento de A que tem três divisores naturais.

Note-se que 2 e 5 têm o mesmo número de divisores naturais, pelo que $[2]_R = [5]_R$. Porque 8, 15 e 27 têm o mesmo número de divisores naturais, $[8]_R = [15]_R = [27]_R$. Temos que

$$\begin{aligned} A/R &= \{[x]_R \mid x \in A\} = \{[1]_R, [2]_R, [8]_R, [9]_R\} \\ &= \{\{1\}, \{2,5\}, \{8,15,27\}, \{9\}\}. \end{aligned}$$

5. Seja $A = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$, ou seja, A é o conjunto das palavras de comprimento 3 sobre o alfabeto $\{0,1\}$. Considere a relação binária R em A definida por $x\ R\ y$ se e só se x tem o mesmo número de 1's que y.

(a) Mostre que R é uma relação de equivalência em A.

(b) Determine $[101]_R$.

(c) Determine A/R.

resolução:

(a) Dado $x \in A$, é óbvio que x tem o mesmo número de 1's que x. Logo, $x\ R\ x$, para todo $x \in A$ e R é reflexiva.

Admitamos, agora, que $x, y \in A$ são tais que $x\ R\ y$. Então, x tem o mesmo número de 1's que y, pelo que é claro que y tem o mesmo número de 1's que x, isto é, $y\ R\ x$. Portanto, R é simétrica.

Dados $x, y, z \in A$ tais que $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$, temos que x tem o mesmo número de 1's que y e y tem o mesmo número de 1's que z. Logo, x, y e z têm o mesmo número de 1's. Em particular, x tem o mesmo número de 1's que z , donde se segue que $x\ R\ z$. Assim, R é transitiva.

Sendo reflexiva, simétrica e transitiva, R é uma relação de equivalência.

(b) Por definição,

$$\begin{aligned} [101]_R &= \{x \in A \mid x\ R\ 101\} \\ &= \{x \in A \mid x \text{ tem o mesmo número de 1's que } 101\} \\ &= \{x \in A \mid x \text{ tem dois 1's}\} \\ &= \{011, 101, 110\}. \end{aligned}$$

(c) Note-se que 000 tem zero 1's, 001, 010 e 100 têm um 1, 011, 101 e 110 têm dois 1's e 111 tem três 1's. Assim, $[001]_R = [010]_R = [100]_R$ e $[011]_R = [101]_R = [110]_R$. Temos que

$$\begin{aligned} A/R &= \{[x]_R \mid x \in A\} = \{[000]_R, [001]_R, [011]_R, [111]_R\} \\ &= \{\{000\}, \{001, 010, 100\}, \{011, 101, 110\}, \{111\}\}. \end{aligned}$$

6. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e S a relação de equivalência em A tal que $A/S = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{5\}\}$. Determine S.

resolução:

Temos que $[1]_S = [3]_S = \{1, 3\}$, $[2]_S = [4]_S = [6]_S = \{2, 4, 6\}$ e $[5]_S = \{5\}$. Logo,

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (2,6), (6,2), (4,6), (6,4)\}.$$