Cap. 1– Funções reais de variável real

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

setembro 2017

Parte II

Limite

Ponto de acumulação de um conjunto

- Um número real $a \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto de acumulação de D e escreve-se $a \in D'$ quando

  para todo o $r > 0$ existe $x \in D$ tal que $0 < |x - a| < r$.

Nota

- Se a é um ponto de acumulação de D não significa que $a \in D$.
- [Ideia intuitiva]: $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D se estiver "rodeado" por pontos de D.

Exemplos

- $D =]-1, 2], \qquad D' =$

- $D = [-1, 5] \backslash \{0, 2\}, \qquad D' =$

- $D = \{-1, 1, 2\}, \qquad D' =$

Limite

Sejam $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de domínio D e $a \in D'$.

- O número real ℓ é o limite segundo Cauchy de $f(x)$, quando x tende para a, e escreve-se

  $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

  quando

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell| < \delta.$$

Observação

- Na definição anterior ℓ pode ser 0 (zero), mas não pode ser ∞ (infinito). Porquê?
- $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell| < \delta$ ler-se-á "dado um número positivo δ, arbitrariamente pequeno,

  existe um número real positivo ε, suficientemente pequeno, tais que, se $x \in D$, $x \neq a$ e a distância de x a a é menor do que ε, então a distância do correspondente $f(x)$ a ℓ é menor do que δ";
- Escrever-se-á

  $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

  sempre que os números $f(x)$ se aproximam de ℓ, desde que x se aproxime de a, percorrendo apenas de D (mas sem nunca atingir o ponto a. Porquê?)

Alguns resultados sobre limites

Teorema (Unicidade do limite)

Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \ell_2 \qquad \text{então} \qquad \ell_1 = \ell_2\,.$$

Teorema

Sejam $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad f \text{ é limitada em } \quad D\setminus\{a\}$$

então

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = 0.$$

Teorema (Enquadramento de limites)

Sejam $f, g, h\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$ tais que

$$\forall x \in D\setminus\{a\}, \qquad h(x) \leq f(x) \leq (x).$$

Se $\lim\limits_{x\longrightarrow a} h(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x) = l,$ então $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = l.$

Teorema (Aritmética dos limites)

Sejam $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Se existirem os seguintes limites

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{e} \quad m = \lim_{x\to a} g(x),$$

então

- $\lim\limits_{x\to a} (f \pm g)(x) = \ell \pm m.$
- $\lim\limits_{x\to a} (f \times g)(x) = \ell m.$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{m}$, desde que $m \neq 0$.

Limites no infinito e limites infinitos

Seja $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- [Limites no infinito] O que acontece se D for ilimitado –à direita ou à esquerda– e se fizer $x \in D$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$?

  Qual o significado de

  $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell \qquad ?$$

- [Limites infinitos] Dado $a \in D'$, qual o significado de

  $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty?$$

Limites no infinito

- [Limites no infinito] Seja $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e D um conjunto não majorado.
  - Diz-se que $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $+\infty$ e escreve-se $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ quando
    $$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x > A) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta.$$
  - Diz-se que $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $-\infty$ e escreve-se $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ quando
    $$\forall \delta > 0, \exists A > 0 : (x \in D \wedge x < -A) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta.$$

Limites infinitos

- [Limites infinitos] Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Diz-se que
  - Diz-se que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a e escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$
    quando
    $\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow f(x) > A.$
  - Diz-se que $f(x)$ tende para $-\infty$ quando x tende para a e escreve-se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$
    quando
    $\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow f(x) < -A.$

Indeterminações

Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad C = -\infty,$$

o que se pode dizer sobre o limite

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]?$$

- Diz-se que $+\infty + (-\infty)$ é uma indeterminação.
- Outras indeterminações são:

$$0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

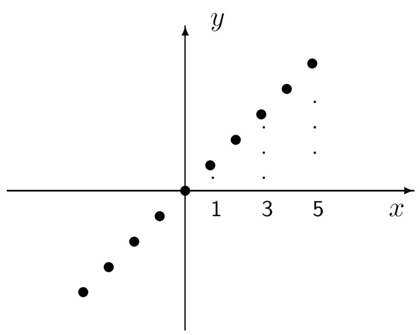
Veremos como tratar algumas destas indeterminações quando estudarmos funções derivadas!

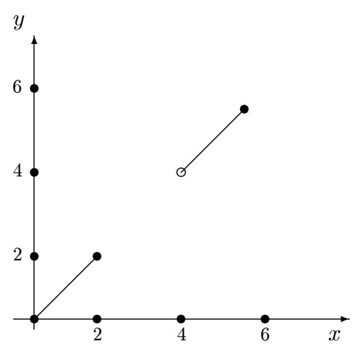
Parte III

Continuidade

- Iremos adotar uma definição de continuidade segundo a qual as funções a seguir são ambas contínuas.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g:[0,2]\cup\,]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$





- Os pontos de $D \subset \mathbb{R}$ que não estão em D' dizem-se pontos isolados, isto é, $x \in D$ é ponto isolados de D se existe $r > 0$ tal que

$$]x-r, x+r[\, \cap D = \{x\}.$$

Função contínua

Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $a\in D$ um ponto do seu domínio.

- A função f é contínua em $a\in D$ quando
  - a é ponto isolado de D
    ou
  - $a\in D'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

  Diz-se que:

  - $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua em a quando $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
  - $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua em b quando $f(b)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$;
  - f é contínua em D quando f é contínua em todo $x\in D$.

Resultados sobre continuidade pontual

- [Aritmética das funções contínuas]

  Sejam $f,\, g : D\longrightarrow\mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a\in D$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ uma constante. Então as funções

  - $f+g$, $\alpha\, f$ e fg são contínuas em a;
  - $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a desde que $g(a)\neq 0$.

- [Continuidade da função composta]

  Sejam $f : D\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g\colon B\longrightarrow\mathbb{R}$ tais que $f(D)\subset B$.
  Se f é contínua em $a\in D$ e g é contínua em $b=f(a)$, então $g\circ f$ é contínua em a.

Exemplo: continuidade da função composta

Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f contínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^3 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 8x^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = 2, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = 5 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. f e g descontínuas, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) \neq 5 \\ 0, & f(x) = 5 \end{cases} = 1, \text{ pois } f(x) \neq 5 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Há contradição com o teorema? Não! Porquê?

- [Continuidade da função inversa]

  Se I e J são intervalos reais e $f : I \longrightarrow J$ é uma função bijetiva e contínua, então f^{-1} existe e é contínua.

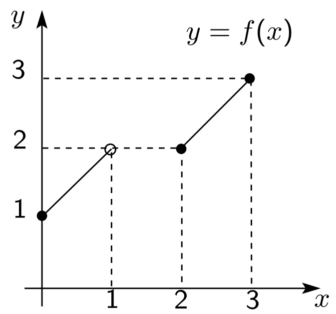
Exemplo Contradição com o teorema?

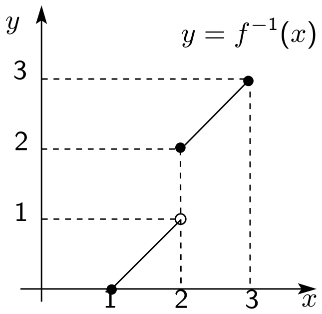
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

f é contínua

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

f^{-1} é descontínua





Descontinuidades

Considere-se função f: $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Diz-se que $a \in D$ é um ponto de descontinuidade de f, ou que f possui uma descontinuidade no ponto $a \in D$, quando se verificar uma das duas condições seguintes:
  - $a \in D'$ e não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
  - $a \in D'$ existe $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\ell \neq f(a)$.

Destacam-se dois tipos particulares de descontinuidade:

(a) descontinuidade removível, quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \ell \neq f(a)\,;$$

(b) descontinuidade de salto, quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2 \quad \wedge \quad \ell_1 \neq \ell_2\,.$$

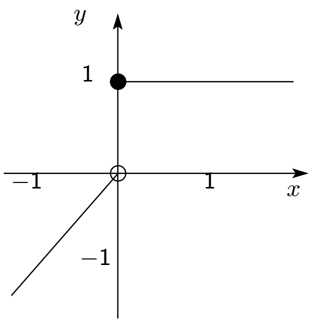
Nota

No caso (a), modificando o valor da função no ponto a, seria possível obter uma função contínua nesse ponto.

Exemplo: descontinuidades

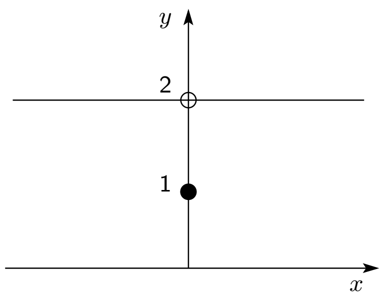
Descontinuidade de salto na origem

$$f(x) = \begin{cases} 1, \; x \geq 0 \\ x, \; x < 0 \end{cases}$$



Descontinuidade removível na origem

$$g(x) = \begin{cases} 2, \; x \neq 0 \\ 1, \; x = 0 \end{cases}$$



Descontinuidade na origem que nem é de salto nem removível

$$h(x) = \begin{cases} |x|, \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -1, \; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$