Universidade do Minho Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática Introdução aos Sistemas Dinâmicos 2018/19

Consulte o ficheiro 'Folha3.nb'.

Exercício 1.

- (a) Equação diferencial ordinária de 1ª ordem
- (b) Equação diferencial com derivadas parciais de 2ª ordem
- (c) Equação diferencial ordinária de 2ª ordem

Exercício 2.

(a) Primeiro notemos que f e a sua derivada f' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - 3e^{-x}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(1-3e^{-x})+(x+3e^{-x})=x+1,$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Primeiro notemos que g e as suas derivadas g' e g'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 6e^{3x} - 20e^{4x}$$

е

$$g''(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(18e^{3x} - 80e^{4x}) - 7(6e^{3x} - 20e^{4x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{4x}) = 0,$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) Primeiro notemos que h e as suas derivadas h' e h'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

е

$$g''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$x^2\left(2-\frac{2}{x^3}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{x}\right),$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercício 3. Devemos mostrar que a relação $y^2+x-3=0$ define pelo menos uma função real y no intervalo $]-\infty,3[$ que é solução da equação diferencial. A relação $y^2+x-3=0$ define duas funções reais y_1 e y_2 dadas por

$$y_1(x) = \sqrt{3-x}$$
 e $y_2(x) = -\sqrt{3-x}$,

respetivamente, para todo o $x \in]-\infty,3[$. Averiguemos, por exemplo, se a função y_1 é solução explícita da equação diferencial.

Primeiro notemos que y_1 e a sua derivada y_1' estão definidas para todo $x \in]-\infty,3[$. Temos que, para todo o $x \in]-\infty,3[$,

$$y_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$
.

Substituindo depois y_1 e y_1^\prime na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$\frac{-1}{2\sqrt{3-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}},$$

a qual é válida para todo o $x \in]-\infty,3[$. Consequentemente, a função $y_1(x)=\sqrt{3-x},\ x \in]-\infty,3[$, é uma solução explícita da equação diferencial dada.

Exercício 4. Devemos mostrar que a relação $x^3+3xy^2=1$ define pelo menos uma função real y no intervalo]0,1[que é solução da equação $2xyy'+x^2+y^2=0$. A relação $x^3+3xy^2=1$ define duas funções reais y_1 e y_2 dadas por

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$$
 e $y_2(x) = -\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$,

respetivamente, para todo o $x \in]0,1[$. Averiguemos, por exemplo, se a função y_1 é solução explícita da equação diferencial.

Primeiro notemos que y_1 e a sua derivada y_1' estão definidas para todo $x \in]0,1[$. Temos que, para todo o $x \in]0,1[$,

$$y_1'(x) = \frac{\frac{-2x^3 - 1}{3x^2}}{2\sqrt{\frac{1 - x^3}{3x}}}.$$

Substituindo depois y_1 e y_1' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$2x\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}} \cdot \frac{\frac{-2x^3-1}{3x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}} + x^2 + \frac{1-x^3}{3x} = 0 \iff \frac{-2x^3-1}{3x} + x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} = 0 \iff \frac{-2}{3}x^2 - \frac{1}{3x} + x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} = 0 \iff \frac{-2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 0,$$

a qual é válida para todo o $x \in]0,1[$. Consequentemente, a função $y_1(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$, $x \in]0,1[$, é uma solução explícita da equação diferencial dada.

Exercício 5.

(a) Derivando a relação $y - \log y = x^2 + 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x \iff \frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = 2x \iff \frac{dy}{dx}\left(\frac{y-1}{y}\right) = 2x \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}.$$

(b) Derivando a relação $e^{xy} + y = x - 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$ye^{xy} + xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 \iff xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - ye^{xy} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{1 + xe^{xy}} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}.$$

(c) Derivando a relação $x^2 - \text{sen}\left(x + y\right) = 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$2x - \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y) = 0 \iff -\frac{dy}{dx}\cos(x+y) = -2x + \cos(x+y) \iff$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos(x+y)} - 1 \iff \frac{dy}{dx} = 2x\sec(x+y) - 1.$$

Exercício 6.

(a) Primeiro notemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$, as funções f e f' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2e^{-3x} - 3(x^3 + c)e^{-3x}.$$

Substituindo depois f e f' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$(3x^2e^{-3x} - 3(x^3 + c)e^{-3x}) + 3(x^3 + c)e^{-3x} = 3x^2e^{-3x},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Temos que f(0) = c. Consequentemente, $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$ e $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$.

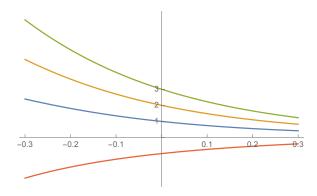


Figura 1: Família de soluções.

Exercício 7. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y'(x) + 2y(x) = 6e^x + 4xe^{-2x}$, no intervalo \mathbb{R} . Primeiro notemos que y e a sua derivada y' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = (4x + 6e^{3x})e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x^2 + 2e^{3x} + 3).$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(4x + 6e^{3x})e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x^2 + 2e^{3x} + 3) + 2((2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}) = 6e^x + 4xe^{-2x} \Leftrightarrow 4xe^{-2x} + 6e^x - 4e^{-2x}x^2 - 4e^x - 6e^{-2x} + 4x^2e^{-2x} + 4e^x + 6e^{-2x} = 6e^x + 4xe^{-2x}.$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz a condição inicial y(0) = 5. Temos que $y(0) = (0 + 2e^0 + 3).e^0 = 5$. Então a função y verifica a condição inicial y(0) = 5.

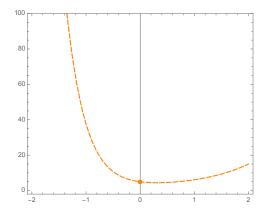


Figura 2: Gráfico da função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$.

Exercício 8. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial y'=2xy(y-1), no intervalo $\mathbb R$. Primeiro notemos que y e a sua derivada y' estão definidas para todo $x\in\mathbb R$. Temos que, para todo o $x\in\mathbb R$,

$$y'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$\frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x \frac{1}{1+e^{x^2}} \left(\frac{1}{1+e^{x^2}} - 1\right) \iff$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x \frac{1}{1+e^{x^2}} \left(\frac{-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\right),$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz a condição inicial $y(0)=\frac{1}{2}$. Temos que $y(0)=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}$. Então a função y verifica a condição inicial $y(0)=\frac{1}{2}$.

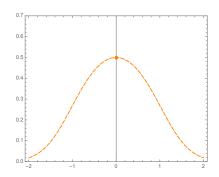


Figura 3: Gráfico da função $y(x) = 1/(1 + e^{x^2})$.

Exercício 9. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial y''=-y, no intervalo $\mathbb R$. Primeiro notemos que y e as suas derivadas y' e y'' estão definidas para todo $x \in \mathbb R$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb R$,

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(1)}$$
 e $y''(x) = -\frac{\sin(x)}{\sin(1)}$.

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)} = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz as condições y(0)=0 e y(1)=1. Temos que $y(0)=\frac{\text{sen }(0)}{\text{sen }(1)}=0$ e $y(1)=\frac{\text{sen }(1)}{\text{sen }(1)}=1$. Então a função y verifica as condições y(0)=0 e y(1)=1.

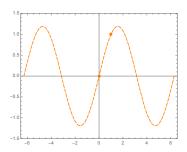


Figura 4: Gráfico da função $y(x) = \operatorname{sen}(x)/\operatorname{sen}(1)$.

Exercício 10. Queremos determinar a solução da forma $y(x) = (x^2 + c)e^{-x}$ que satisfaz y(-1) = e + 3. Substituindo x por -1 e y por e + 3, obtemos

$$e+3 = (1+c)e \Leftrightarrow c = 3e^{-1}.$$

Então, a expressão geral da solução procurada é $y(x)=(x^2+3\,e^{-1})e^{-x}$.

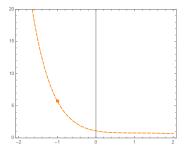


Figura 5: Gráfico da solução do PVI.