Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

novembro de 2017

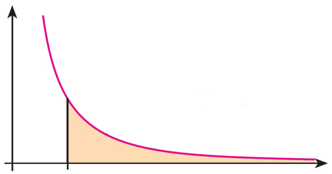
2.4 – Integrais impróprios

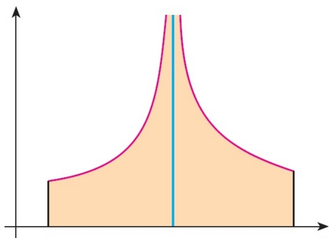
Integrais em intervalos ilimitados

Integrais de funções ilimitadas

Motivação

- Qual a área limitada pela curva definida por $y = \dfrac{1}{x^2}$, quando $x \geq 1$?





- Qual a área limitada pela curva definida por $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, quando $1 \leq x \leq 3$?

Integrais impróprios

- [Tipo 1] Integrais em intervalos ilimitados: sendo $a, b \in \mathbb{R}$

$$]-\infty, a] \quad \text{ou} \quad [b, +\infty[\quad \text{ou} \quad]-\infty, +\infty[$$

- [Tipo 2] Integrais de funções ilimitadas em algum ponto do intervalo de integração. Por exemplo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx.$$

[Tipo 1] Integrais em intervalos ilimitados

- Seja f definida em $[a, +\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ com $[a, b] \subset [a, +\infty[$.
  Define-se o integral impróprio de f em $[a, +\infty[$ por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

  - Se o limite não existir, diz-se que o integral impróprio é divergente.
  - Se o limite existir, diz-se que o integral impróprio é convergente e/ou que f é integrável em sentido impróprio.

- Seja f definida em $]-\infty, b]$ e integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ com $[a, b] \subset]-\infty, b]$.
  Define-se o integral impróprio de f em $]-\infty, b]$ por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

  - Se o limite não existir, diz-se que o integral impróprio é divergente.
  - Se o limite existir (for finito), diz-se que o integral impróprio é convergente e/ou que f é integrável em sentido impróprio.

- Seja f definida em $\mathbb{R}$ e integrável em em qualquer intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Define-se o integral impróprio de f em $\mathbb{R}$ por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

  com $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, desde que os integrais do 2.º membro sejam convergentes.

Exemplo

- É divergente o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx.$$

  De facto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[\ln x\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty.$$

- É convergente o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

  De facto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (-\frac{1}{t} + 1) = 1.$$

- [Critério de comparação]

  Sejam f e g contínuas em $[a, +\infty[$

  - Quando $|f(x)| \le g(x)$ para todo o $x \ge a$ tem-se

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

  - Quando $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo o $x \ge a$ tem-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{diverge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \text{diverge.}$$

Nota: Existem resultados análogos para os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Exemplos

- Os seguintes integrais são úteis na aplicação do critério de comparação:

  - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } r > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } r \leq 1. \end{cases}$

  - $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } r > 0 \\ \text{diverge} & \text{se } r \leq 0. \end{cases}$

[Tipo 2] Integrais de funções ilimitadas

- Seja $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, c]$ com $[a, c] \subset [a, b[$ e ilimitada quando $x \to b$. Define-se o integral impróprio de f em $[a, b[$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

- Seja $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[c, b]$ com $[c, b] \subset]a, b]$ ilimitada quando $x \to a$. Define-se o integral impróprio de f em $]a, b]$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

  - Se o limite não existir, diz-se que o integral impróprio é divergente.
  - Se o limite existir (for finito), diz-se que o integral impróprio é convergente.

Exemplo

- Determine, se possível, o valor de

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx.$$

  - A função integranda está definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
  - Assim, há que escrever

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

    e estudar separadamente cada um dos integrais impróprios do tipo 2.
  - Mas

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{t \to 1^-} \Big[-\frac{1}{1-x} \Big|_{x=0}^{t} = \lim_{t \to 1^-} [-1 + \frac{1}{1-t}]$$

    Como o limite não existe, este integral é divergente.
  - Uma vez que um dos integrais do 2.º membro é divergente, o integral dado é divergente.

Observação

- Para os integrais impróprios mantêm-se válidas as propriedades de linearidade e aditividade.
- Para os integrais do tipo 2 tem lugar um “Critério de comparação” análogo ao critério para integrais do tipo 1.
- Pode-se falar em integrais impróprios do tipo 3 quando são simultaneamente do tipo 1 e do tipo 2.
  - É do tipo 3 o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x}. \qquad \text{Porquê?}$$