Universidade do Minho

Engenharia Económica

Paula Varandas Ferreira
Departamento de Produção e Sistemas
(paulaf@dps.uminho.pt)

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ As funções diversificadas e abrangentes de um engenheiro requerem que as suas competências vão muito para além dos conhecimentos técnicos específicos de cada especialidade.

⇒ A utilização de recursos monetários escassos de um modo eficiente é um critério essencial na selecção de alternativas de investimento tecnicamente viáveis.

⇒ A análise financeira de custos e benefícios associados a diferentes investimentos, representa assim uma disciplina fundamental para a formação de um profissional de engenharia.

2

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Decisões estratégicas:

- ❑Selecção de equipamento e processos

Devo comprar o sistema de apoio à gestão A ou B? Devo comprar uma frota de transporte própria ou subcontratatar?

- ❑Substituição de equipamentos

Devo substituir um equipamento produtivo ou devo mantê-lo em funcionamento? Durante quanto tempo?

- ❑Novo produto e expansão do produto

Devo investir no lançamento de um novo produto?

- ❑Redução de custos

Devo investir num novo equipamento que permite reduzir custos de produção?

- ❑Melhoria de serviço

Devo investir num novo equipamento que permite melhorar o serviço prestado?

3

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ A tomada de decisão implica o conhecimento de:

- ❑Investimento necessário
- ❑Procura para um produto
- ❑Estimativa de preço de venda
- ❑Estimativa de custos de fabrico
- ❑Estimativa de ciclo de vida do produto

Estudos de apoio: mercado, procura, localização, disponibilidade de matérias-primas, impacto ambiental, tecnologias, custos…

4

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

O valor do dinheiro no tempo

O juro (interesse)

O juro simples e composto

Taxa de juro nominal e efectiva

Pagamentos uniformes

Perpetuidades

5

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ A avaliação de um investimento envolve a análise de custos e benefícios, expressos em valores monetários, que ocorrem em diferentes momentos da vida do projecto.

⇒ De modo a comparar esses fluxos monetários é necessário recorrer ao conceito de **taxa de juro** ou **taxa de interesse** que permite avaliar como o valor do dinheiro varia no tempo.

⇒ 1 € agora vale mais do que 1 € amanhã; 1 € amanhã vale mais do que 1 € depois de amanhã… Quais as razões para isso?

6

1. Conceitos básicos

⇒ Os valores futuros são afectados pela **inflação**; deste modo o poder de compra de 1 € hoje é superior ao de 1 € amanhã.

⇒ Existe **risco e incerteza**. Um rendimento ou despesa que ocorra hoje é um valor certo. O rendimento ou despesa futura pode variar de acordo com o valor antecipado.

⇒ Existe necessidade de retorno. Ao incorrer numa despesa hoje, o investidor espera ser recompensado por um retorno no futuro que compense o **deferimento** do consumo.

1. Conceitos básicos

Será preferivel receber €140.000 de uma só vez ou receber prestações anuais de €24.000 durante 9 anos?

⇒Para fazer estas comparações de fluxos financeiros, temos de saber comparar o valor do dinheiro em diferentes momentos do tempo.

⇒Para fazer isso, temos de desenvolver um método que reduz uma sequência de benefícios e custos a um único ponto no tempo. Então, podemos fazer as comparações nessa base.

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Juro** ou **interesse** é a medida do valor do dinheiro no tempo e permite quantificar a diferença entre o dinheiro inicialmente investido/emprestado e o valor final obtido/devido.

⇒ O capital inicial investido ou emprestado é chamado o **principal**.

Juro = (valor final obtido)$_{t1}$-(principal)$_{t0}$

Taxa de juro (interesse) = $\frac{\text{Interesse no período de tempo t}}{\text{Principal original}} \times 100\ (\%)$

9

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Uma empresa de construção civil investe 10 000 € num novo projecto, obtendo 10 650 € 12 meses depois. Determine:

(a) O juro ou interesse subjacente ao projecto.

(b) A taxa de juro ou interesse sobre o capital investido.

(a) Juro = 10650 – 10000 = 650 €

(b) Taxa de juro = $650/10000 = 6{,}5\%$ ao ano.

10

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Juro simples**: o juro acumulado é directamente proporcional ao principal envolvido. O interesse total acumulado (**I**) ao longo de um determinado período é:

Taxa de interesse

$I = P \times i \times n$ → Período de tempo

Interesse

Principal

Valor futuro

$F = P + I = P + P \times i \times n = P\,[1+(i \times n)]$

11

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Uma empresa pede um empréstimo no valor de 12 000 € por um período de 4 anos e com uma taxa de juro de 5% em regime simples. Quanto deverá pagar ao fim do período do empréstimo?

F = 12000[1+(0,05×4)]=14400 €

Ano	Empréstimo	Interesse	Divida acumulada	Divida paga
0	12000			
1		600	12600	
2		600	13200	
3		600	13800	
4		600	14400	14400

12

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Juro composto**: o juro devido em cada período de tempo é calculado sobre o principal mais o juro acumulado em todos os períodos anteriores.

⇒O capital vai aumentando sucessivamente ao longo do tempo.

O interesse (I1) ao fim do primeiro período é:	$I1 = P \times i$
O valor do capital (F1) ao fim do primeiro período é:	$F1 = P + P \times i = P\,(1+i)$
O interesse (I2) ao fim do segundo período é:	$I2 = (P+I1) \times i = F1 \times i$
O valor do capital (F2) ao fim do primeiro período é:	$F2 = P\,(1+i)\,(1+i) = P(1+i)^2$

(…..)

13

2. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Capitalização composta:**

$$\boxed{F = P\,(1+i)^n = P\,F_{PF,i,n}}$$

Factor do juro composto

⇒ **Actualização:**

$$\boxed{P = F\,(1+i)^{-n} = F\,F_{FP,i,n}}$$

Factor do valor actual

⇒**Assume pagamentos ao fim do período.**

14

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Uma empresa pede um empréstimo no valor de 12 000 € por um período de 4 anos e com uma taxa de juro de 5% em regime composto. Quanto deverá pagar ao fim do período do empréstimo?

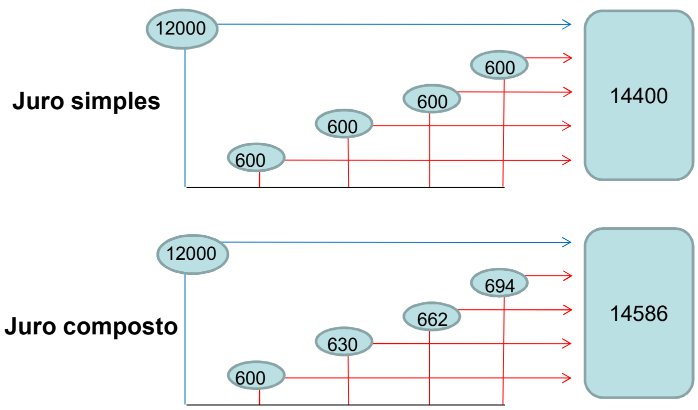
$F = 12000\ (1+0{,}05)^4 = 14586{,}1$ € ou $F = 12000 \times F_{PF,5,4} = 12000 \times 1{,}2155 = 14586$ €

Ano	Empréstimo	Interesse	Divida acumulada	Divida paga
0	12000			
1		600.0	12600,0	
2		630.0	13230,0	
3		661,5	13891,5	
4		694,6	14586,1	14586,1

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Comparação juro simples e juro composto



1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Principio da equivalência:

De acordo com este exemplo 12000 € agora são equivalentes a possuir 14586,1 € dentro de 4 anos ou seja têm o mesmo valor económico.

⇒ Permite que diferentes valores de fluxos monetários que ocorram em diferentes momentos possam ser comparados num instante de tempo comum.

⇒Uma empresa pede um empréstimo no valor de 10 000 € por um período de 5 anos e com uma taxa de juro de 8% ao ano em regime composto. Compare os diferentes planos de pagamento disponíveis:

17

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

Ano	Empréstimo	Plano A	Plano B	Plano C
0	10000			
1		2504,6	0	
2		2504,6	0	5000
3		2504,6	0	
4		2504,6	0	
5		2504,6	14693,3	8394,7
Total	*10000*	*12523*	*14693,3*	*13394,7*

Plano A: $P = 2504{,}6(1+0{,}08)^{-1} + 2504{,}6(1+0{,}08)^{-2} + 2504{,}6(1+0{,}08)^{-3} + 2504{,}6(1+0{,}08)^{-4} + 2504{,}6(1+0{,}08)^{-5} = 10000$ €

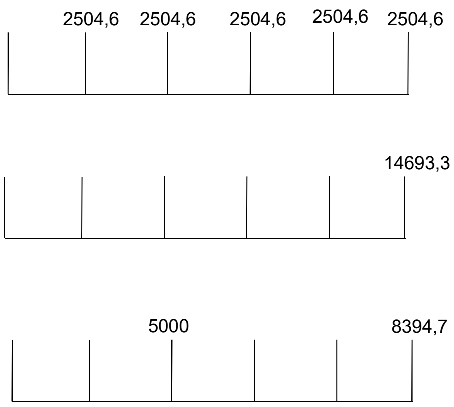
Plano B: $P = 14693{,}3\ (1+0{,}08)^{-5} = 10000$ €

Plano C: $P = 5000\ (1+0{,}08)^{-2} + 8394{,}7\ (1+0{,}08)^{-5} = 10000$ €

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Equivalência Económica



$P = 10000$ €

$F = 14693,3$ €

$F_{n=3} = 12597,1$ €

Equivalentes à taxa de 8%

19

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Equivalência Económica

- ❑ Passo 1: Determinar o período base.
- ❑ Passo 2: Identificar a taxa de juro a utilizar.
- ❑ Passo 3: Calcular o valor equivalente.

20

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Equivalência Económica

❑ Existe entre fluxos de dinheiro que têm o mesmo efeito económico e podem ser trocados um pelo outro.

❑Mesmo que o montante e o timing dos fluxos seja diferente, uma taxa de juro apropriada torna-os iguais.

❑ Fluxos monetários Equivalentes são equivalentes em qualquer ponto comum do tempo.

21

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Taxa de juro nominal e efectiva**

Taxa Nominal: Taxa de Juro baseada no período anual

Taxa de Juro Efectiva: Juro que é de facto pago ou ganho num ano on noutro período qualquer

Exemplo: Taxa de juro de 18% com capitalização mensal.

Taxa nominal

Período de capitalização

Taxa efectiva

22

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Taxa de juro nominal e efectiva**

⇒ Capitalização:

Por exemplo, se o juro for vencido duas vezes num ano com uma taxa de juro de 6% em cada período de meio ano, a taxa pode ser expressa como 12% ao ano com capitalização semestral.

Taxa anual nominal = 12%
Taxa efectiva semestral = 6%

Exemplo: se um banco oferecer uma taxa de juro nominal de 12% ao ano para um depósito de 1000 €, teremos ao fim de 1 ano:

com capitalização anual $F = 1000\times(1+0{,}12) = 1120$ €
com capitalização semestral $F = 1000\times(1+0{,}06)^2 = 1124$ €

23

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ A utilização de taxas equivalentes torna os cálculos independentes do período de capitalização.

Por exemplo, se um banco oferecer uma taxa de juro efectiva de 12% ao ano para um depósito de 1000 €, teremos ao fim de 1 ano:

$F = 1000\times(1+0{,}12) = 1120$ €

A taxa efectiva semestral associada a esta conta poderia ser calculada por uma relação de equivalência:

$1000\times(1+0{,}12) = 1000\times(1+i_{semestral})^2 \Leftrightarrow i_{semestral} = 5{,}83\%$

$F = 1000\times(1+0{,}0583)^2 = 1120$ €

É fundamental efectuar os cálculos de matemática financeira utilizando sempre as taxas de juro efectivas e não as anunciadas ou nominais.

24

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ A partir de uma taxa nominal é sempre possível calcular a taxa efectiva referente ao período de capitalização sabendo qual a periodicidade dessa capitalização.

⇒ **Relação de proporcionalidade:**

$i_{ef} = i_n / m$, para o período de capitalização m

⇒ Para converter uma taxa de juro efectiva referentes a um período numa taxa efectiva referente a um sub-periodo p, utilizaremos a **relação da equivalência**:

$(1+i) = (1+i_p)^p$,onde p é o numero de sub-periodos dentro do período da taxa.

25

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Considerando a taxa anual nominal de 18% com capitalização semestral, determine a taxa de juro mensal efectiva:

Pela relação de proporcionalidade teremos a taxa semestral efectiva:
$i_s = 18\% / 2 = 9\%$.

Pela relação de equivalência teremos a taxa mensal efectiva,
$(1+0{,}09) = (1+i_m)^6$ $i_m = 1{,}447\%$

⇒ O Sr. Antunes colocou 1000 € num banco durante 5 anos à taxa anual nominal de 16%. Determine o valor acumulado com:

(a) Capitalização anual

$F = 1000 \times (1+0{,}16)^5 = 2100{,}34$ €

26

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

(a) Capitalização mensal

$i_{mês} = 16\% / 12 = 1{,}33\%$

$F = 1000 \times (1+0{,}0133)^{60} = 2209{,}44$ €

Ou

$(1+0{,}0133)^{12} = (1+i_{ano}) \Leftrightarrow i_{ano} = 17{,}18\%$

$F = 1000 \times (1+0{,}1718)^{5} = 2209{,}44$ €

27

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Taxa nominal => Taxa efectiva

- Passo 1: Identificar período de capitalização.
- Passo 2: Converter taxa nominal em efectiva para o período de capitalização .
- Passo 3: Converter taxa efectiva do período de capitalização para o período pretendido.

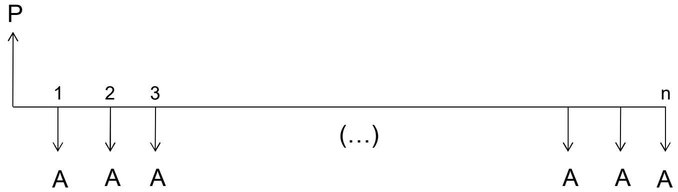
28

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Pagamentos uniformes**

⇒Frequentemente os projectos/investimentos requerem pagamentos ou recebimentos uniformes, caracterizados por um valor A constante e pago no final de cada sub-periodo durante um período de tempo n.



1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

$P = A\,(1+i)^{-1} + A\,(1+i)^{-2} + A\,(1+i)^{-3} + \ldots + A\,(1+i)^{-n}$

$P = A\,(1+i)^{-1}[1+ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n+1}]$ (X)

Multiplicando por $(1+i)^{-1}$:

$P\,(1+i)^{-1} = A\,(1+i)^{-1}\,[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}]$ (Y)

(Y)-(X):

$P\,[(1+i)^{-1}-1] = A\,(1+i)^{-1}\,[\,(1+i)^{-n}-1]$

$$P= A\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}(1+i)^{-1} \Leftrightarrow P= A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

$$P = A\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A\,F_{AP,i,n}$$

Factor da anuidade - valor presente

$$A = P\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P\,F_{PA,i,n}$$

Factor de recuperação do capital

$$F = A\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = AF_{AF,i,n}$$

Factor da anuidade-valor futuro

31

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Qual o valor do investimento a realizar hoje num fundo que rende 10% ao ano, de modo a poder retirar 200 € no final de cada ano durante os próximos 4 anos, esgotando por completo o fundo no final desse período?

$$P = 200\,\frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1(1+0,1)^4} = 200\,F_{AP,10\%,4} = 200 \times 3,170 = 634\ €$$

32

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ São feitos depósitos no valor de 110 € no final de cada ano num fundo de investimento que rende 8% ao ano. Quanto estará acumulado no fundo ao fim de 12 anos?

$$F = 110 \frac{(1+0{,}08)^{12}-1}{0{,}08} = 110\, F_{AF,8\%,12} = 110 \times 18{,}977 = 2087{,}48\ €$$

33

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Perpetuidades**

⇒ Um projecto pode ter uma sequência infinita de recebimentos ou pagamentos.

⇒O custo capitalizado representa o valor presente dos custos e benefícios uniformes de um projecto com tempo de vida infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/(1+i)^n}{i} = \frac{1}{i}$$

34

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ **Perpetuidades**

⇒ Um projecto pode ter uma sequência infinita de recebimentos ou pagamentos.

⇒O custo capitalizado representa o valor presente dos custos e benefícios uniformes de um projecto com tempo de vida infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/(1+i)^n}{i}=\frac{1}{i}$$

$$\boxed{P_\infty = A\ \frac{1}{i}}$$

35

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

⇒ Uma fundação pretende criar um fundo de investimento que lhe permita distribuir anualmente 80000 € para um período de tempo infinito. Se a taxa de interesse do fundo for de 7,75% quanto deverá ser investido hoje?

$$P_\infty = 80000\ \frac{1}{0{,}0775}\ = 1032258\ €$$

36

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

$$F = P\,(1+i)^n \quad = P\,F_{PF,i,n}$$

$$P = F\,(1+i)^{-n} \quad = P\,F_{FP,i,n}$$

$$A = P\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} \quad = P\,F_{PA,i,n}$$

$$P = A\,\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} \quad = P\,F_{AP,i,n}$$

$$F = A\,\frac{(1+i)^n-1}{i} \quad = A\,F_{AF,i,n}$$

$$P_\infty = A\,\frac{1}{i}$$

Estas relações assumem que o valor presente (P) ocorre no princípio do período em análise, as anuidades (A) e o valor futuro (F) ocorrem no fim do período em análise.

Conhecidos os métodos de valorização do dinheiro no tempo é agora possível avaliar um projecto ou um conjunto de projectos.

37

1. Conceitos básicos

Universidade do Minho

Será preferivel receber €140.000 de uma só vez ou receber prestações anuais de €24.000 durante 9 anos?

Depende da taxa de juro!

Se i= 10% P=24000 $F_{AP,10,9}$ = 138216 €

Se i=5% P=24000 $F_{AP,5,9}$ = 170588 €

Qual a taxa de juro que torna indeferente a escolha?

i = 9,68%

38