Tópicos de Matemática Discreta

folha 9

4. Funções

4.1. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$.

(a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.

(b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A?

4.2. Considere as funções:

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 2x - 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Determine:

(a) $g(\{-1,0,1\})$; (b) $g(]-\infty,0])$; (c) $g(\mathbb{R})$;

(d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$; (e) $g^{\leftarrow}(]-\infty,0])$; (f) $f(\{4,6,9\})$;

(g) $f(\{x \in \mathbb{N} \,|\, \exists_{y\in\mathbb{N}}\ x = 3y\})$; (h) $f^{\leftarrow}(\{2\})$; (i) $f^{\leftarrow}(\{3,4,5\})$.

4.3. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}_0$ para $\mathbb{N}_0$ definidas por:

$$f(n) = n+1; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

(a) $f \circ f$; (b) $f \circ g$; (c) $g \circ f$; (d) $g \circ h$;

(e) $f \circ g \circ h$; (f) $h \circ f$; (g)$h \circ g$; (h) $h \circ f \circ g$.

4.4. Dê exemplos de:

(a) duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.

(b) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

4.5. Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Mostre que $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

4.6. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja: (a) não injetiva; (b) injetiva; (c) sobrejetiva; (d) não sobrejetiva.

4.7. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_1(x) = 2x$; $\qquad f_2 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$;

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty[$, $f_3(x) = x^2$; $\qquad f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_4(x) = |x| + 2$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 10

4.8. Considere as seguintes funções

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & x^3, \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3, \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Verifique que f, g e h são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

4.9. Sejam A e B conjuntos não vazios. Considere a função $f : A \times B \to B \times A$ definida por $f(a,b) = (b,a)$, para todo $(a,b) \in A \times B$.

(a) Mostre que f é bijetiva.

(b) Determine f^{-1}.

4.10. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x+2 & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

(a) Determine $f(\{-2,2\})$ e $f\big(]-2,4]\big)$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2,0,1,2\})$.

(c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

4.11. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \{3, 10\}$ definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in]-\infty, 4[\cup]20, 30] \\ \\ 10 & \text{se } x \in [4, 20] \cup]30, +\infty[\end{cases}.$$

e a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) = 2 - \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Determine $g\big(\{1,2,3,4\}\big)$ e $g^{\leftarrow}\big(\{1,5\}\big)$.

(b) Determine $f\big(\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 16 = 0\}\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{10\})$.

(c) Mostre que $f \circ g$ é uma função constante.

(d) Indique se alguma das funções f ou g é injetiva.