3. Gestão de Inventários

Introdução

<u>Definição de inventário (ou *stock*)</u>

Acumulação de matérias-primas, produtos semiacabados e/ou produtos acabados, bem como de sobressalentes necessários à manutenção, num sistema produtivo.

- Em geral, os inventários correspondem a um investimento muito significativo das organizações;

- Este *"empate"* de capital tem motivado uma tendência que aponta no sentido da racionalização dos inventários.

Perspetiva logística

O inventário funciona como um fio condutor entre o fornecedor de matérias-primas e o cliente final:

Fornecedor → Fabricante → Distribuidor → Retalhista → Cliente
(cadeia logística simples)

A gestão de inventários, uma das principais funções da logística, deve ser vista numa *perspetiva integradora* de gestão eficiente da cadeia como um todo (*ex., "Supply Chain Management" – "SCM"*).

Filosofias de gestão da *cadeia logística*:

- Clássica *"push"*: a movimentação dos inventários é desencadeada pelo fabricante;

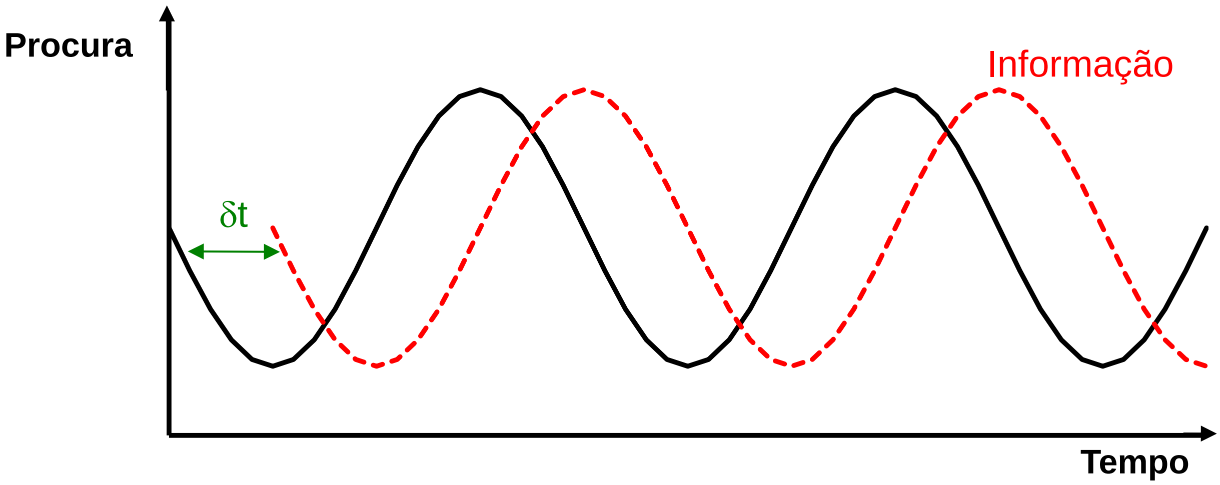
- Mais recente *"pull"*: a movimentação é desencadeada pelo cliente final. Normalmente, permite uma redução significativa nos inventários, tempos de produção e distribuição. Contudo, exige ágeis sistemas de gestão baseados em *sistemas de informação* (*ex., EDI – "Electronic Data Interchange"*), abrangendo toda a cadeia.

Funções dos inventários (1)

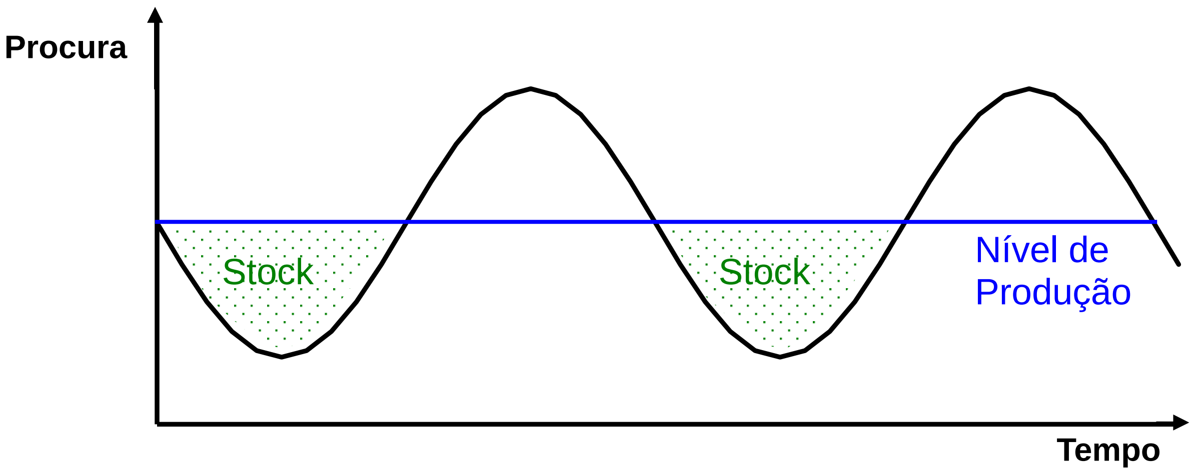
A existência de inventários pode ser justificada com base nas funções seguintes:

a) Ajustamento à procura

- A informação relativa à procura (aleatória) é recebida com atraso; (recorre-se a previsões!)



- O inventário funciona então como um "acumulador", permitindo estabilizar o nível de produção:



Funções dos inventários (2)

b) <u>Cumprimento dos *“prazos de entrega”*</u>

- Com armazenagem de semiacabados, se possível. Porquê?

c) <u>Desacoplamento de funções na empresa</u>

- No Aprovisionamento, a empresa poderá obter um *“desconto de quantidade”* na compra;

- O Departamento de Produção poderá pretender fazer uma *“otimização”* do processo;

- O Departamento de Vendas poderá pretender fazer uma *“otimização”* da distribuição.

d) <u>Incerteza (na procura e/ou no prazo de entrega)</u>

- Ter inventário permite mitigar situações daí recorrentes: *ex.,* uma greve afetando o fornecimento de matérias-primas.

Funções dos inventários (3)

e) Controlo do produto

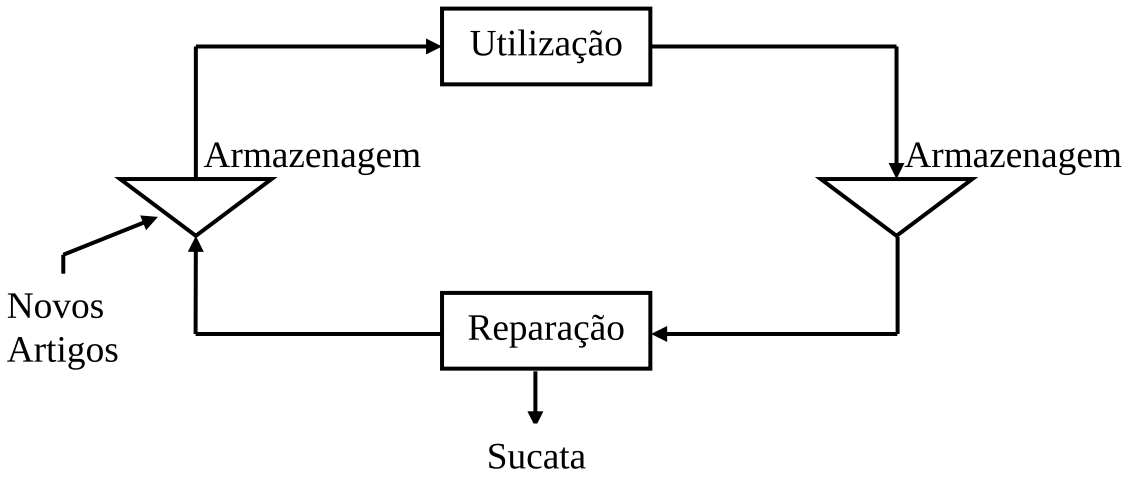
- Permite garantir um determinado nível de qualidade (*ex.*, manter uísque de qualidade superior para misturar com *“standard”* afim de obter o produto comercializado!)

f) Especulação

- Comprar em situações de baixa de preços para venda em situações de alta ⇒ (Alto risco!)

g) Funcionamento do processo e do produto

- Armazenagem de sobressalentes, com taxas de consumo mais baixas; *ex.,* rotativos:



Propriedades dos inventários (1)

a) <u>Esquema uniforme de identificação / referenciação</u>

- Por numeração ou código;
- Deve conter uma descrição do artigo, incluindo a sua natureza física, vida útil, e outras propriedades relevantes;
- Valor do artigo e número de unidades existentes, atualizados.

b) <u>Classificação</u>

Os artigos devem ser classificados quanto à sua importância relativa. As diferenciações mais comuns incluem:

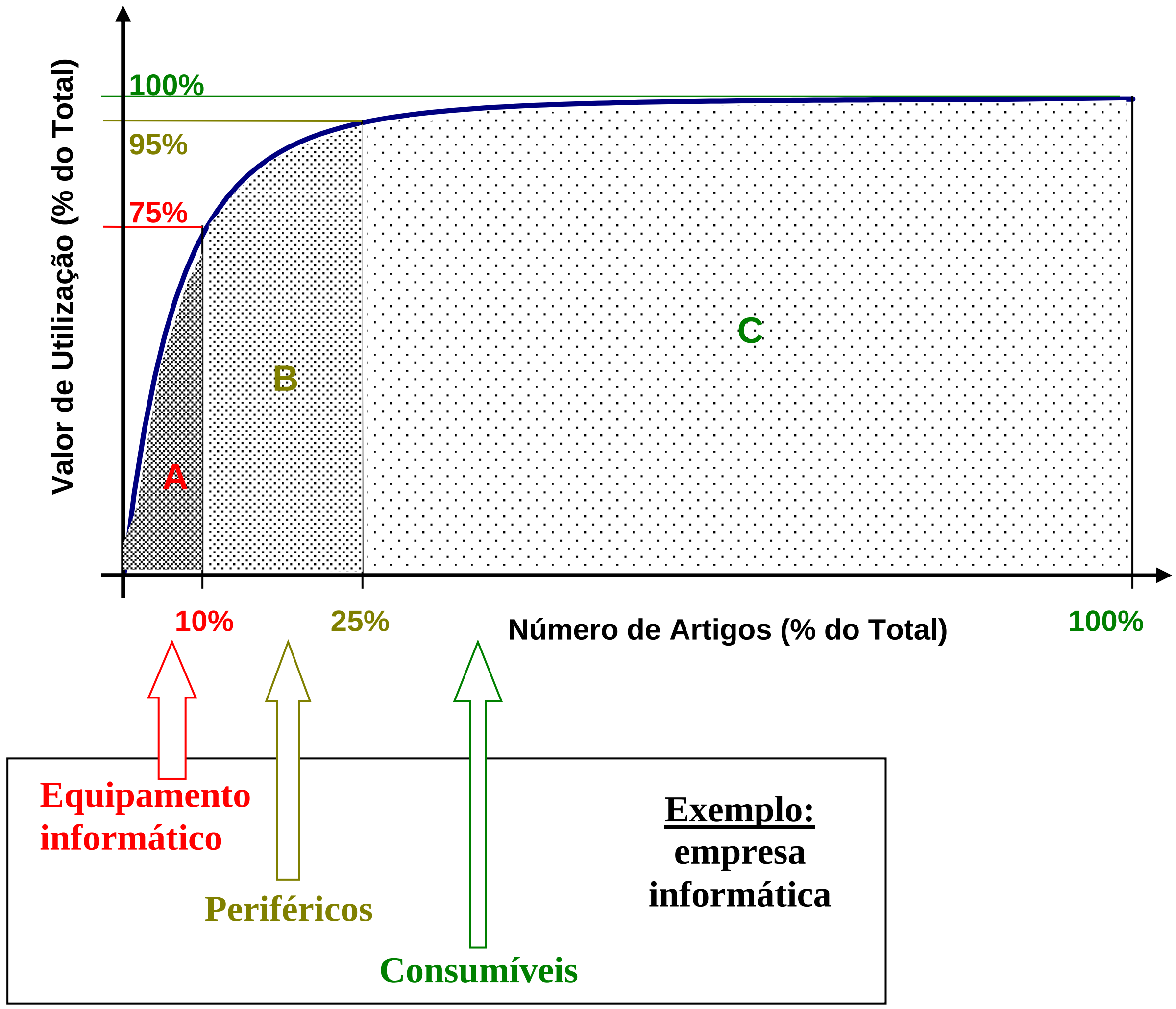
- *"Taxa de utilização"*: nº unidades por unidade de tempo;
- *"Taxa de rotação"*: nº vezes que é renovado por unidade de tempo;

<u>Exemplo:</u> taxa de utilização = 2000 /ano, e
inventário médio = 200
⇔ "*rotação de 10*"

Propriedades dos inventários (2) – classificação...

- *"Valor de utilização"*: utilização anual × valor unitário;

  (Análise ABC ou de *Pareto*)



- *"Prazo de entrega"*: intervalo de tempo entre o instante "*ordem de encomenda"*, e o instante de reaprovisionamento;

- *Fator crítico*: quão crítico para o funcionamento do sistema? *Ex.*, classificação de "*fundamental*".

Propriedades dos inventários (3)

c) Caracterização da procura

- Natureza contínua (“*taxa de procura*”);

  ou

- Natureza discreta (“ocasiões”; *“errática”*?).

...

- Determinística (*ex.*, aproximadamente constante ou *“nível”*);

  ou

- Probabilística ou estocástica (e que tipo de aleatoriedade?)

d) Reaprovisionamento

Caracterizado por:

- Período de revisão;
- Período de reaprovisionamento;
- Volume de encomenda;
- Prazo de entrega;
- Origem do fornecimento.

Classificação dos modelos de gestão de inventários

De acordo com as características do prazo de entrega e da procura:

a) <u>Modelos *determinísticos*</u>

- Prazo de entrega e *procura* aproximadamente constantes;
- Modelos simples com bastante aplicação;
- *Ex,* Quantidade Económica de Encomenda *(QEE)*.

b) <u>Modelos *estocásticos* ou *probabilísticos*</u>

- Prazo de entrega e/ou procura apresentam variabilidade aleatória significativa;
- Necessário criar um *"stock de segurança"*, como amortecedor da variabilidade;
- Quanto maior é o *stock* de segurança, menor será o *risco de "rutura"* (ou *"quebra"*), mas também maior será o investimento necessário!
- *Ex.(s),Políticas Nível de Encomenda* e *Ciclo de Encomenda*.

c) <u>Modelos para *procura dependente*</u>

- Normalmente, em situações de *stocks* hierárquicos e procura irregular;
- *Ex,* qdo a procura depende do plano de produção adotado;
- *Ex,* no contexto do sistema de gestão *"Material Requirements Planning" (MRP)*, ou no sistema *"Just in Time"* (modelos *"pull"*).

Objetivos e restrições dos modelos

Objetivos:

Genericamente pretende-se determinar os parâmetros:

- *Quando* devem as encomendas ser colocadas (lançadas)?
- *Quanto* encomendar de cada vez?

… de forma a *minimizar os custos* de gestão do inventário (objetivo clássico), ou a *garantir um "nível de serviço"* pretendido.

Constrangimentos ou restrições:

Exemplo de restrições comuns que restringem a simples adoção do critério de MINIMIZAÇÃO da função "*Custo_Variável_Total*":

- Limitação de capital;
- Limitação do espaço de armazenagem;
- Limitação do número de encomendas por u. tempo;
- Limitação do tempo de preparação;
- etc…

Custos de funcionamento do sistema de gestão...

(...Nível de inventário: fatores positivos)

Se o objetivo (dos modelos) é a minimização do custo variável total, é do balanceamento dos diversos componentes da função custo que vai depender a decisão de se manter níveis de inventário mais altos ou mais baixos.

Por exemplo, poder-se-á argumentar que interessa:

"...manter inventários tão grandes quanto possível…"

para se conseguir:

…No aprovisionamento (de matérias-primas):

- Descontos de quantidade;
- Redução do nº ($\therefore$custos) de reaprovisionamento.

…No lançamento de lotes de produção:

- Redução dos custos de movimentação.

…Na distribuição (dos produtos):

- Obtenção de economias de escala.

Custos de funcionamento do sistema de gestão...

(...Nível de inventário: fatores negativos)

No outro extremo porém, poder-se-á achar que interessa:

"...manter inventários tão pequenos quanto possível…"

porque geralmente o inventário:

... representa capital imobilizado (custos de oportunidade);

... requer espaço de armazenagem;

... representa um valor que exige seguros;

... requer operações de conservação (custos de conservação e também, muitas vezes, deterioração);

... está sujeito a obsolescência (*ex.*, material informático de rápida evolução tecnológica).

...Custo de existência ou de posse de inventário (C_1)

- $C_1 = i \times b$ (% do valor do artigo)

  i = taxa de juro (interna) de existência

  b = valor unitário do artigo

- [*U.M. / artigo / u. tempo*]

- Exemplo:

Capital………………………………….	10%
Espaço…………………………………	7%
Perdas (seguros, deterioração)....	5%
Controlo (movimentos, registos)....	3%
TOTAL = i =	25%

...Valor unitário ou custo de aquisição do artigo (b)

- Se for variável (*ex.*, no caso de existirem *"descontos de quantidade"*), este custo deverá constituir uma parcela independente da função "custo total" (custo de aquisição + custo de operação), a qual passará a ser o objeto da minimização.

...*Custo de quebra, penúria ou rutura (C_2)*

…Em situações em que a procura não pode ser satisfeita por falta de inventário:

(1) Situação de *“encomenda em atraso”* ou de *“encomenda em carteira”*:

- O cliente está disposto a aguardar...
- Custos pela alteração do planeamento;
- [*U.M. / artigo / u. tempo*].

(2) Situação de *“venda perdida”*:

- O cliente não está disposto a esperar!
- [*U.M. / artigo*].

…*Nível de Serviço* intimamente ligado ao *Custo de Quebra*;

…*Custo de Quebra* é frequentemente de difícil e subjetiva avaliação.

...*Custo de passagem de encomenda* (C_3)

- Custo associado a todos os serviços e trâmites do processo de lançamento da encomenda, como sejam:

…a preparação de documentação (*ex.*, faturas, guias de remessa);

…a atualização de bases de dados;

…a movimentação de inventário;

...etc...

- [*U.M. / encomenda*]

Sistemas de apoio à tomada de decisão (1)

(1) Sistemas de informação

Tendência na Logística: baixar drasticamente os *stocks*, substituindo-os por informação.

Funções de um sistema de informação:

- Fornecer informação; *mas também:*
- Controlar as existências e compras;
- Gerir os inventários.

Informações incluem:

- Identificação dos artigos;
- Localização em armazém;
- Existências (físicas, em carteira, em fase de compra…);
- Fornecedores e tempos de fornecimento;
- Históricos de consumos (procuras);
- *MRL* (*Material Requirements Lists*); etc…

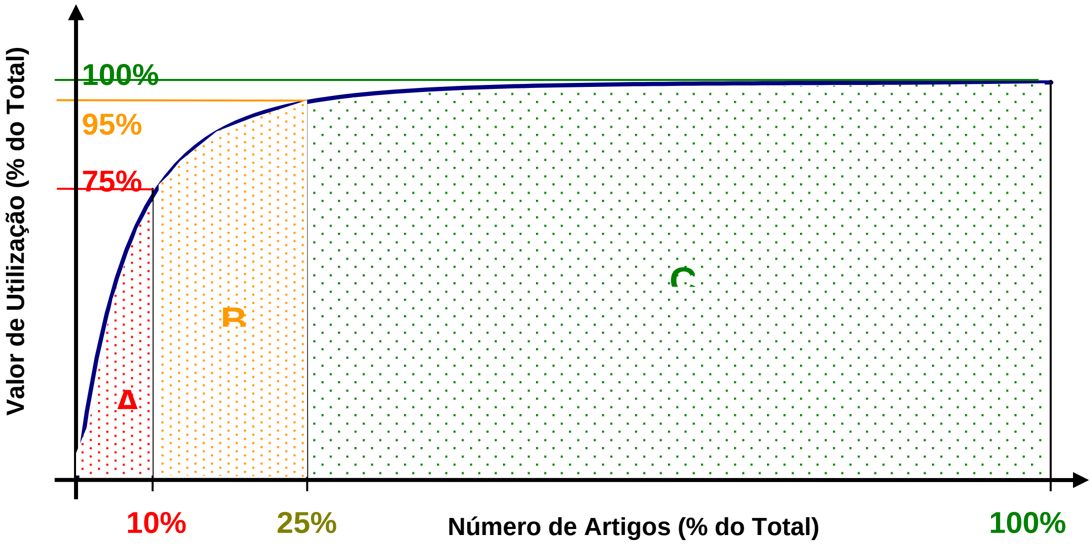
IMPORTANTE:

- A informação deve estar sempre atualizada. *Ex,* as existências e os históricos devem ser atualizados automaticamente nas entradas e saídas (através dos códigos de barras); e

- A informação deve estar disponível, em tempo real, a todos os potenciais interessados no sistema.

Sistemas de apoio à tomada de decisão (2)

(2) Análise ABC ou de *"Pareto" (filósofo italiano, Séc. XIX)*



Artigos tipo A – Mais caros, ou mais usados. Maior cuidado no controlo dos *stocks*, e uma maior sofisticação nas previsões. Normalmente é aconselhável ter um sistema de previsão que rapidamente detete mudanças da procura.

Artigos tipo B – Custos médios, ou utilização moderada. Menor rigor no controlo dos *stocks*. Menor rigor (gastos) com a previsão.

Artigos tipo C – Custos baixos, ou utilização baixa. Geralmente, em grande número e fáceis de obter dos fornecedores (*ex., componentes standard*). Não se justificam gastos com registos de existências e com sistemas de previsões de procura. Por exemplo, implementar simplesmente a *"política dos dois cestos"* (com um nível mais ou menos arbitrário), e um sistema de verificação de existências aleatório.

Sistemas de apoio à tomada de decisão (3)

(3) Sistemas de previsão

Procura dependente – determinada com base em planos de produção, normalmente estabelecidos a partir de previsões da procura dos produtos finais.

Procura independente – determinada tirando partido da informação histórica disponível sobre a qual se realizam análises estatísticas e previsões para os períodos seguintes.

Nos modelos estocásticos tradicionais, a procura (e os prazos de entrega ou tempos de reposição) são considerados aleatórios, mas de médias constantes ao longo do tempo.

Contudo, muitas vezes há tendências (de crescimento ou diminuição), variações sazonais, ou outras. Daí a necessidade de se dispor de *modelos de previsão* que permitam estimar valores médios, variâncias e outras características relevantes.

Modelos determinísticos (tradicionais)

<u>Considerações gerais</u>

- Procura e prazo de entrega determinísticos;
- Taxa de procura (*r*) constante;
- Pedidos de reaprovisionamento com antecedência.

<u>Modelos:</u>

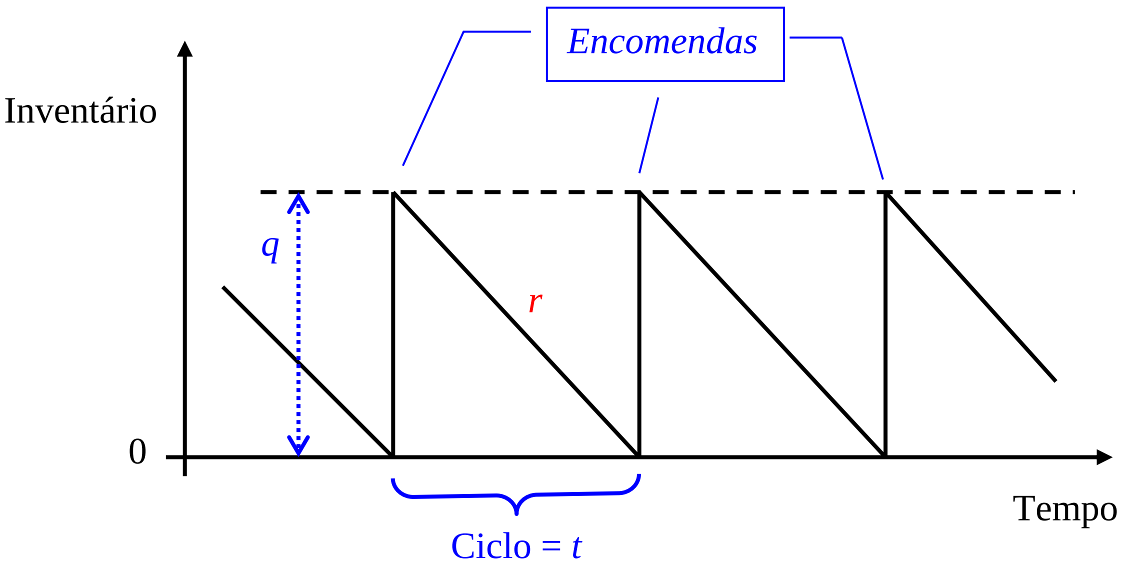
- *Modelo* (C_1, C_3), *QEE*, ou *Nível de Encomenda*;
- *Modelo* (C_1, C_2), ou *Ciclo de Encomenda*;
- *Modelo* (C_1, C_2, C_3).

Sistema (C_1, C_3): <u>Introdução</u>

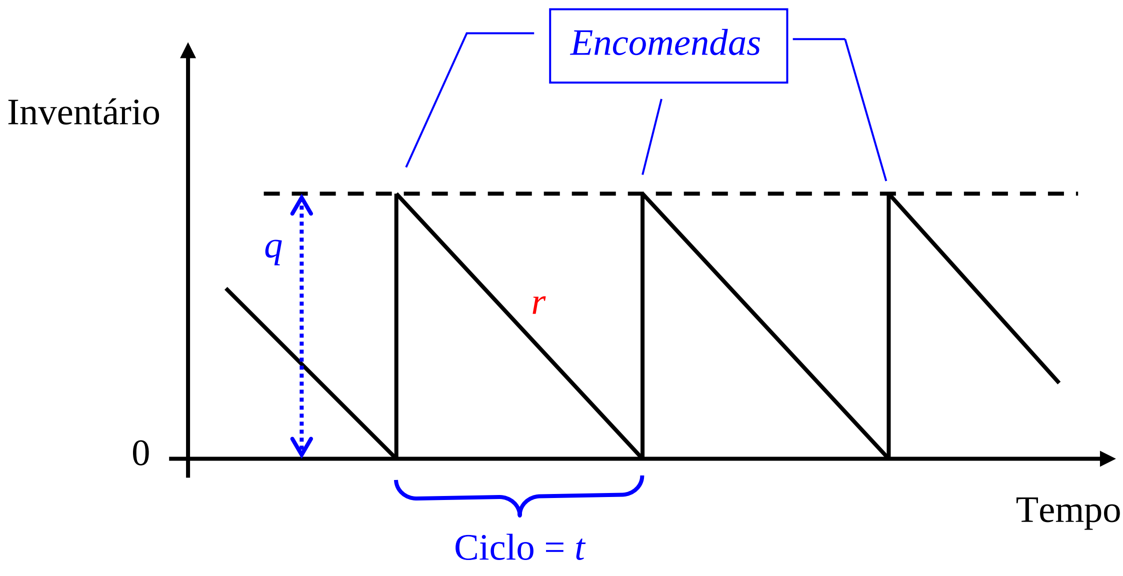
"Modelo de Quantidade Económica de Encomenda" ou "Modelo de Nível de Encomenda"

<u>Pressupostos:</u>

- Não é permitida qualquer rutura de inventário;
- Em todos os ciclos é encomendada a mesma quantidade (*q*);
- Taxa de reaprovisionamento infinita (*i.e.* instantânea); e
- Prazo de entrega nulo ($l = 0$).



Sistema (C_1, C_3): Função objetivo



- Nível médio de inventário = $\dfrac{q}{2}$
- Número de encomendas por u. tempo = $n = \dfrac{r}{q}$
- Período de reaprovisionamento = $t = \dfrac{1}{n} = \dfrac{q}{r}$

$\therefore$ Custo total variável de operação (*a minimizar!*):

$$\boxed{C = C_1 \frac{q}{2} + C_3 \frac{r}{q}}$$

(Custo de existência + Custo de passagem de encomenda)

Sistema (C_1, C_3): **Quantidade económica** (*QEE*, q^*)

A partir da derivação da função custo!

$$\boxed{C = C_1 \frac{q}{2} + C_3 \frac{r}{q}}$$

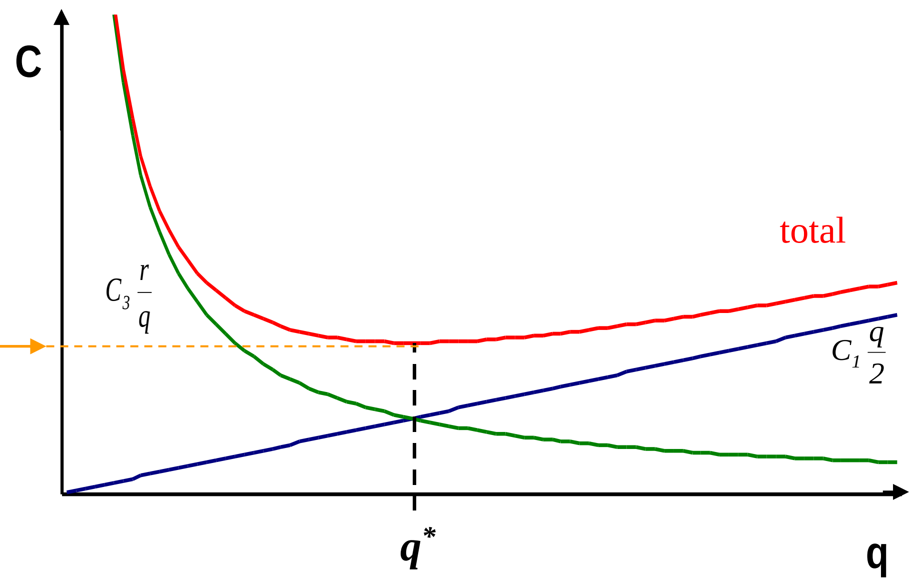
$$\frac{\partial C}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{C_1}{2} - C_3 \frac{r}{q^2} = 0$$

$$\boxed{QEE = q^* = \sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}}}$$

$$C^* = \sqrt{\frac{rC_1C_3}{2}} + \sqrt{\frac{rC_1C_3}{2}}$$

(NB: Custo existência = Custo passagem encomenda)

$$\boxed{C^* = \sqrt{2rC_1C_3}}$$



Sistema (C_1, C_3): Efeito da inflação

Taxa de juro = i % *(ex, 10%)*

Taxa de inflação = I % *(ex, 15%)*

Taxa de juro líquida = $\left[\dfrac{(1+I)}{1+i} - 1\right]$ *($\Leftrightarrow$ ex, 4.5%)*

---

i.e. Taxa de juro efectiva $\Downarrow$

Custo de existência (C_1) $\Downarrow$

$\therefore$ Mínimo do custo variável total de operação corresponde a um nível de inventário (q^*) maior.

i.e. O capital imobilizado "vale menos"!

Sistema (C_1, C_3): Análise de sensibilidade

Referência: $(QEE = q^* = \sqrt{\dfrac{2rC_3}{C_1}}) \Leftrightarrow (C^* = \sqrt{2rC_1C_3})$

Em análise:

Uma nova quantidade de encomenda = $(q^e = \alpha \cdot q^*)$

Substituíndo na expressão geral do custo, $C = C_1 \dfrac{q}{2} + C_3 \dfrac{r}{q}$, e tomando a razão dos custos, resulta:

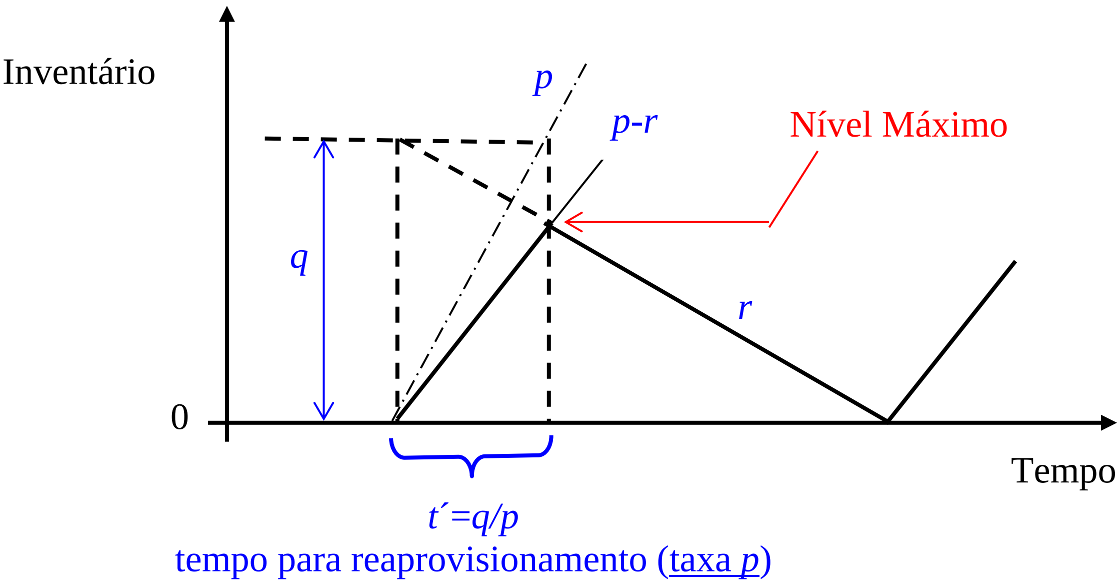
$$\boxed{\frac{C^e}{C^*} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}}$$

Exemplo:

α	0.80	1.00	1.20
C^e / C^*	1.025	1.000	1.017

$\therefore$ Pouca sensibilidade do custo para pequenas variações da *QEE*! Isto permite ajustar a frequência do reabastecimento, aumentando ou diminuindo a *QEE* para um valor mais conveniente (ex., múltiplo do lote de encomenda permitido).

Sistema (C_1, C_3): <u>Taxa de reaprovisionamento finita</u>



- O inventário cresce a uma taxa (<u>*p-r*</u>), sendo *p>r !*
- Nível máximo = $t'(p-r) = q\left(1 - \frac{r}{p}\right)$
- Nível médio = $\frac{q}{2}\left(1 - \frac{r}{p}\right)$

$\therefore$ Quantidade Ótima de Encomenda = $\sqrt{\frac{2C_3 r}{C_1(1 - \frac{r}{p})}}$

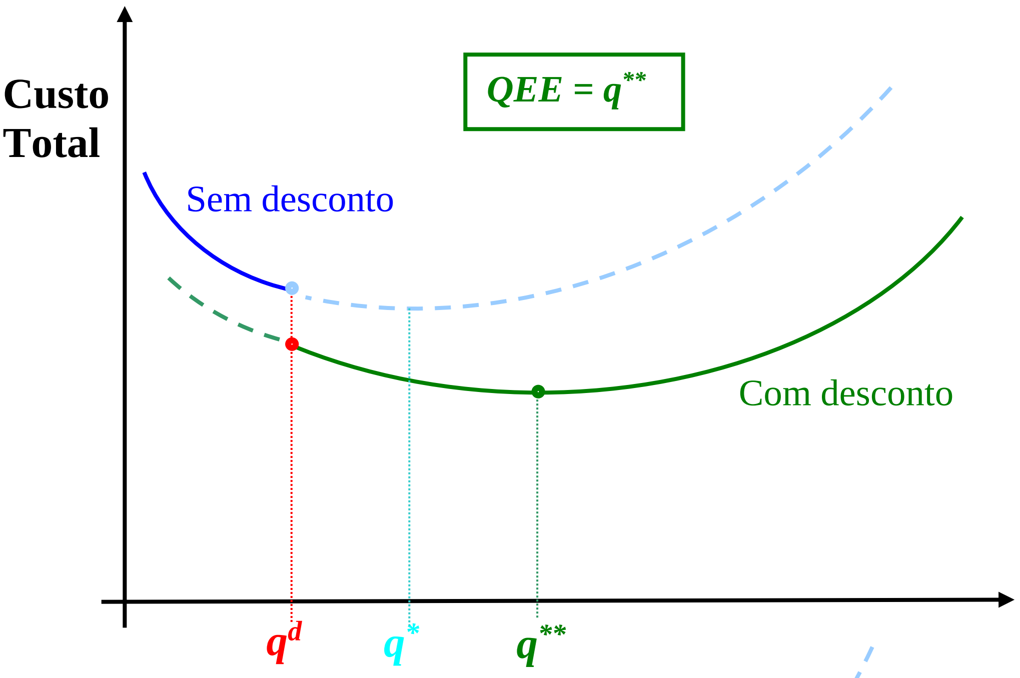
N.B. (1): *p*$\rightarrow\infty$, a expressão para *QEE* vem simplificada...

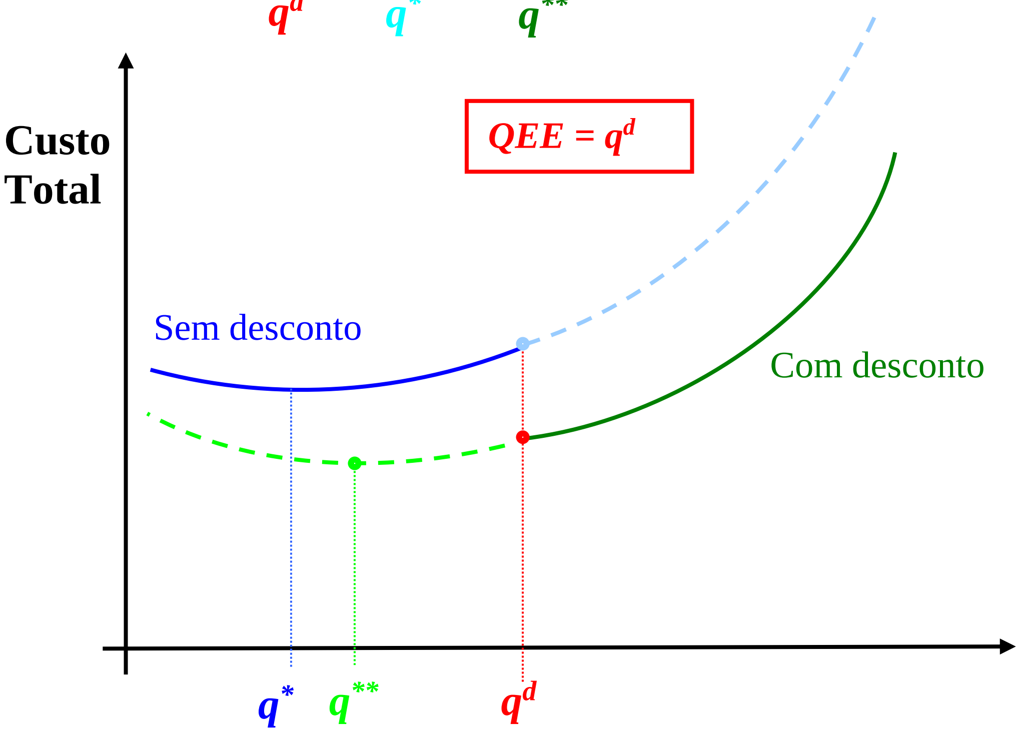
N.B. (2): Taxa de reaprovisionamento finita é mais vantajosa; ideal seria *p=r*, *i.e.* ter um nível médio de *stock* nulo!

Sistema (C_1, C_3): Descontos de quantidade

$$C = br + C_1 \frac{q}{2} + C_3 \frac{r}{q}$$

Várias situações são possíveis, por exemplo:



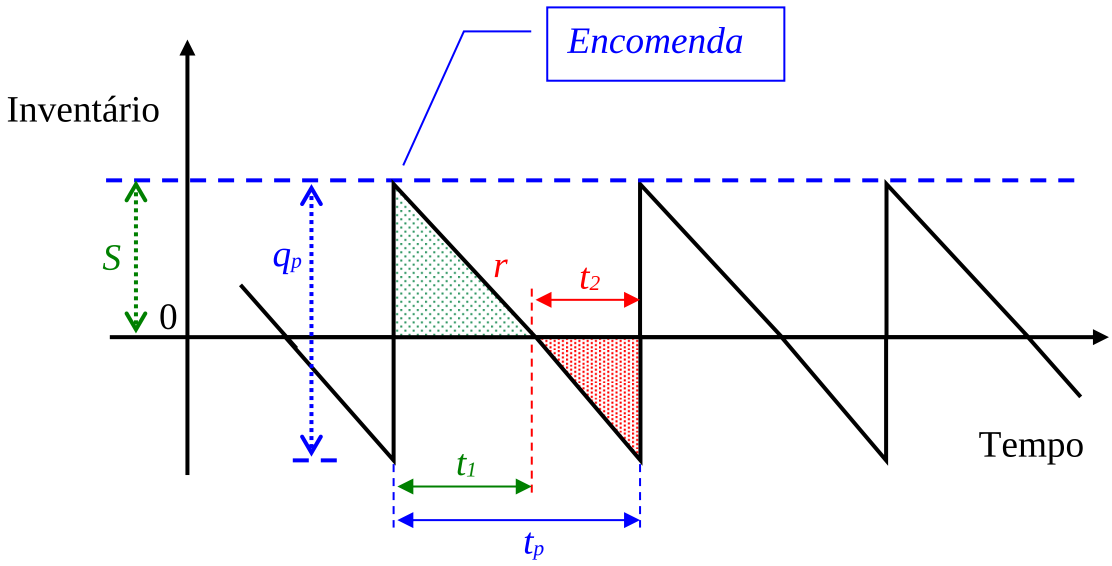


Sistema (C_1, C_2): Introdução

"*Sistema Ciclo de Encomenda*"

Pressupostos:

- Custo de passagem de encomenda desprezado;
- Período de reaprovisionamento fixo (t_p);
- Encomenda = $q_p = rt_p$ (procura = r = constante);
- Prazo de entrega nulo;
- São permitidas *"quebras" (ou "ruturas") de inventário*!



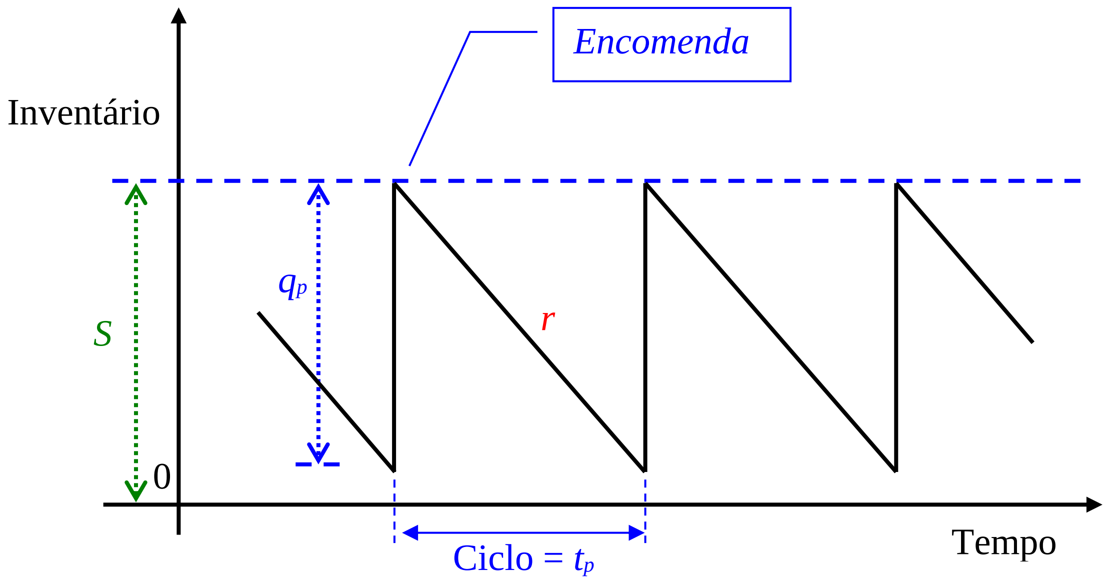
S = *Nível máximo de inventário*

Sistema (C_1, C_2): (1) <u>Modelo de encomendas em atraso</u>

"*O cliente aceita aguardar pela encomenda*"

"A encomenda fica em *carteira*, a aguardar que estejam reunidas as condições para que possa ser entregue."

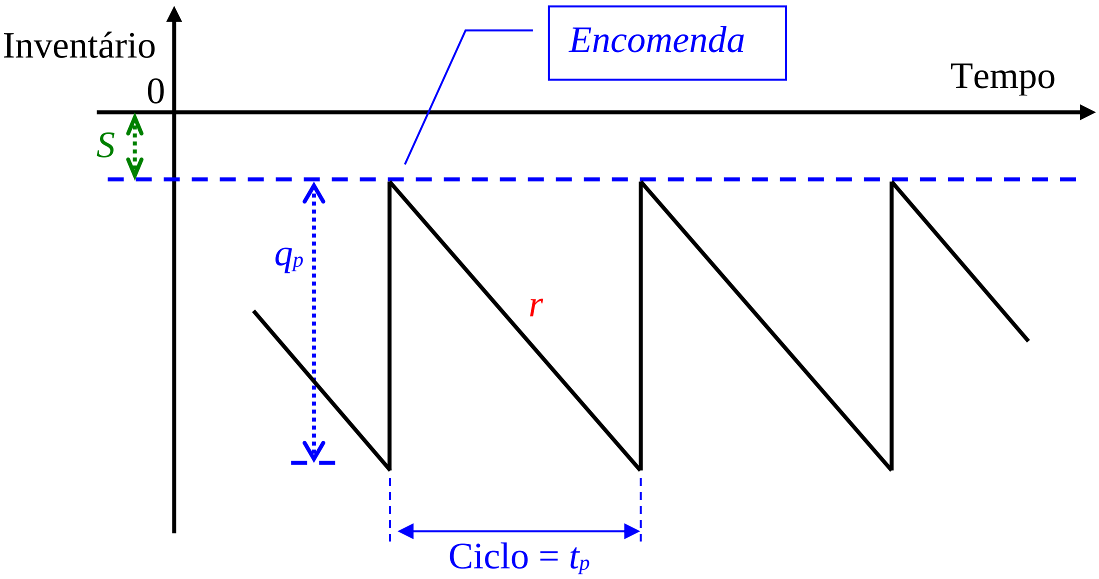
$\Rightarrow$ *1º caso extremo:* $S \geq q_p$ *(não há ruptura)*



- $C_T = C_1\left[\left(S - q_p\right) + \dfrac{q_p}{2}\right]$
- Mínimo para $S = q_p$
- $\therefore\ C_{\min} = C_1 \dfrac{q_p}{2}$

Sistema (C_1, C_2): (1) Modelo de encomendas em atraso

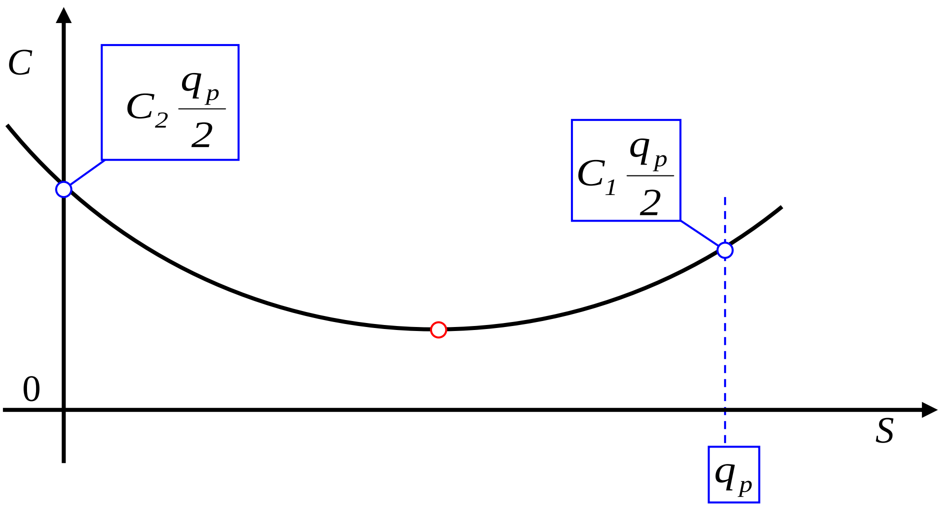
$\Rightarrow$ *2º caso extremo:* $S \le 0$ *(não há inventário)*



$$C_T = C_2\left[S + \frac{q_p}{2}\right],\ \text{Mínimo para } S = 0,\ \therefore\ C_{\min} = C_2\frac{q_p}{2}$$

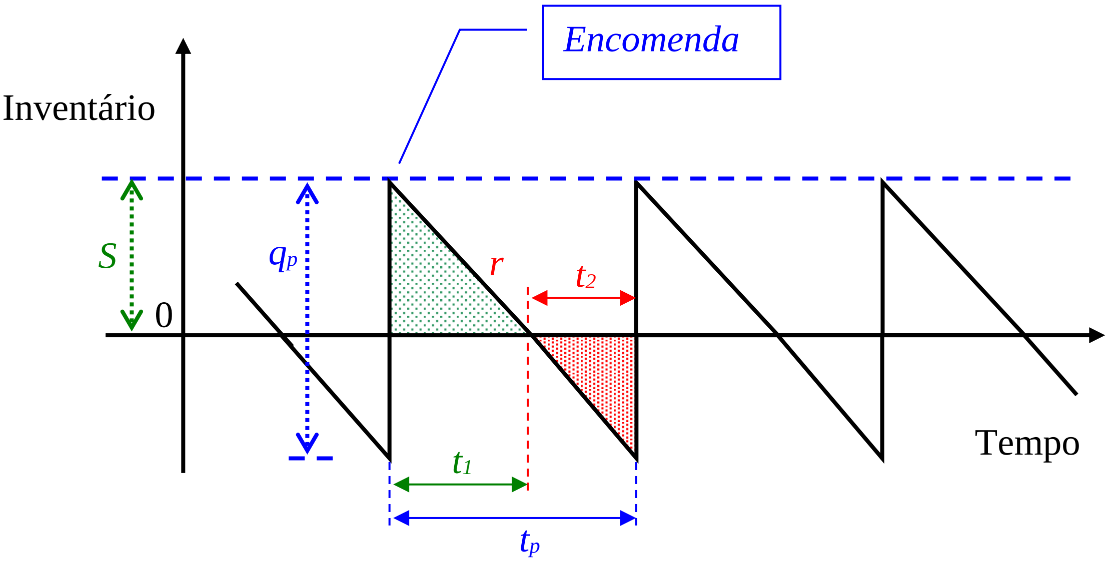
Evolução do custo:

O custo mínimo corresponde à situação em que ocorre normalmente *existência e rutura de inventário* em cada ciclo, *i.e.* $0 \le S \le q_p$:



Sistema (C_1, C_2): (1) Modelo de encomendas em atraso

Nível máximo de inventário: $0 \le S \le q_p$

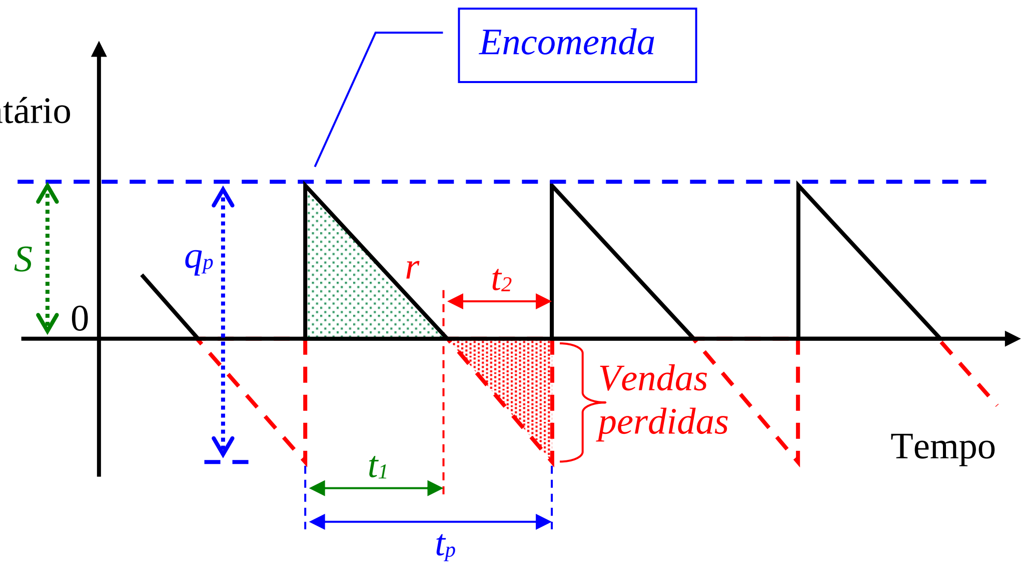


Custo total variável, $C = C_1 \dfrac{S^2}{2q_p} + C_2 \dfrac{(q_p - S)^2}{2q_p}$

- Ótimo: $S^* = q_p\left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$
- Ótimo: $C^* = \dfrac{q_p}{2}\left(\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)$

Sistema (C_1, C_2): (2) <u>Modelo de perda de vendas</u>

$S \geq 0$!



Vendas perdidas num ciclo = $(q_p - S)$

Custo total variável, $C = C_1 \dfrac{S^2}{2q_p} + C_2 \dfrac{(q_p - S)}{t_p}$

- Ótimo: $S^* = q_p \left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$
- Ótimo: $C^* = C_2 r - \dfrac{C_2^2 r}{2C_1 t_p}$

Sistema misto (C_1, C_2, C_3)

"Sistema Quantidade de Encomenda / Ciclo de Encomenda"

(1) Modelo de encomendas em atraso

Custo total variável, $C = C_1 \frac{S^2}{2q} + C_2 \frac{(q-S)^2}{2q} + C_3 \frac{r}{q}$

Os valores ótimos obtêm-se de: $\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial S} = 0 \\ \dfrac{\partial C}{\partial q} = 0 \end{cases}$

- QEE, $q^* = \sqrt{2rC_3}\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}}$
- Máx, $S^* = \sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$
- Custo, $C^* = \sqrt{2rC_2}\sqrt{\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2}}$

N.B. Fazendo $C_2 \to \infty$ obtém-se o Modelo (C_1, C_3)!

Sistema (C_1, C_2, C_3): (2) Modelo de perda de vendas

Custo total variável, $$C = C_1 \frac{S^2}{2q} + C_2 \frac{(q-S)}{t} + C_3 \frac{r}{q}$$

$$(0 \leq S \leq q \text{ e } t = \frac{q}{r})$$

Fazendo $K = \frac{S}{q}$ $(0 \leq K \leq 1)$, e derivando, obtém-se:

- $q^* = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}}$
- $C^* = K\left(\sqrt{2rC_1C_3} - C_2 r\right) + C_2 r$

(a) Se $\left(\sqrt{2rC_1C_3} - C_2 r\right) > 0$, *i.e.* C_2 *"pequeno"* $\left(C_2 < \sqrt{\frac{2C_1C_3}{r}}\right)$

vem $K = 0 \Rightarrow q^* = \infty$ e $S^* = 0$, então $C^* = C_2 r$ (*não deve ser mantido inventário*, se $C_1, C_3 >> C_2$);

(b) Se $\left(\sqrt{2rC_1C_3} - C_2 r\right) < 0$, *i.e.* C_2 *"grande"* $\left(C_2 > \sqrt{\frac{2C_1C_3}{r}}\right)$

vem $K = 1 \Rightarrow S = q$, então $C^* = \sqrt{2rC_1C_3}$

(*usar o Modelo de QEE* !)

Sistemas (C_1,C_3) e (C_1,C_2): Exemplo

Um fabricante deve fornecer a um cliente 24 mil unidades por ano de um seu produto. Esta procura é conhecida e fixa.

Atendendo a que o cliente não dispõe de armazém e que as unidades do artigo são utilizadas pelo cliente numa operação de uma linha de montagem, o fabricante deve entregar diariamente o fornecimento necessário a cada dia.

O custo de existência de inventário é de 10 U.M. por unidade e por mês, e o custo de preparação da produção é de 35 mil U.M. por ciclo produtivo.

a) Se o custo de quebra de inventário for considerado infinito, que quantidade de encomenda e que período devem ser utilizados? Qual o custo variável mínimo de operação?

b) Se o custo de quebra for assumido igual a 20 U.M. por artigo e por mês, calcule os mesmos parâmetros da alínea anterior, e determine o nível ótimo de inventário após reaprovisionamento.

Limitação no valor de inventário (1)

(1) Método Aproximado (método heurístico: rateio simples)

- Valor médio total de inventário (condicionado): V^C
- Valor médio total (não-condicionado):

$$V^* = \sum V_j^* = \frac{b_1 q_1}{2} + \frac{b_2 q_2}{2} + \ldots + \frac{b_n q_n}{2}$$

- Se $\alpha = \dfrac{V^C}{V^*} < 1$
- Então: $\alpha V^* = V^C = \sum V_j^C = \dfrac{b_1 \alpha q_1}{2} + \dfrac{b_2 \alpha q_2}{2} + \ldots + \dfrac{b_n \alpha q_n}{2}$
- $\boxed{q_j^C = \alpha q_j^*}$

Artigo j	b_j	A_j	q_j^* (QEE)	$\frac{(q_j^* b_j)}{2}$	C_{Tj}^*	q_j^C (αq_j^*)	$\frac{(q_j^* b_j)}{2}$	C_{Tj}^C
1	3.5	1400	400	700	336	308	538	347
2	2.0	5000	1000	1000	480	769	769	496
3	1.0	2500	1000	500	240	769	385	248
4	2.0	800	400	400	192	308	308	199
Σ				2600	1248		2000	1290

- $\Rightarrow$ Aumento nos custos variáveis de operação!

Limitação no valor de inventário (2)

(2) Método dos Multiplicadores de Lagrange (método exato)

$$\min C = \sum_j i \frac{b_j q_j}{2} + \sum_j C_{3j} \frac{A_j}{q_j}$$

$$s.a. \quad \sum_j q_j b_j \le V_{\max} \quad \text{(valor total máximo de inventário)}$$

$$q_j \ge 0$$

A função de Lagrange respetiva é:

$$L = \frac{i}{2} \sum_j b_j q_j + \sum_j C_{3j} \frac{A_j}{q_j} + \lambda \left(V_{\max} - \sum_j q_j b_j \right)$$

Estacionaridade para: $\dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{ib_j}{2} - C_{3j} \dfrac{A_j}{q_j^2} - \lambda b_j = 0$

e $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow V_{\max} - \sum_j q_j b_j = 0$

…obtém-se então a:

Quantidade Ótima de Encomenda = $\boxed{q_j^C = \sqrt{\dfrac{2 A_j C_{3j}}{b_j (i - 2\lambda)}}}$

Limitação no valor de inventário: *Exemplo 1*

- 3 produtos com taxa de juro de existência = i = 20%
- Valor máximo total de inventário = 14000 U.M.

Caso não-condicionado:

Artigo j	b_j	A_j	C_{3j}	q_j^* (QEE)	$q_j^* b_j$
1	20	1000	50	158	3160
2	100	500	75	61	6100
3	50	2000	100	200	10000
Σ					19260

N.B. Não cumpre a restrição de valor máximo, 19260>14000 UM!

$$\boxed{q_j^C = \sqrt{\frac{2A_j C_{3j}}{b_j(i-2\lambda)}}}$$

Resolvendo $V^C = \sum_j q_j^C b_j$ = 14000, tira-se que λ = -0.08977.

Caso condicionado: Custos (comparação):

Artigo j	q_j^C	$q_j^C b_j$	C_T^C		C_T^*
1	114.8	2295.5	665.1		632.5
2	44.4	4445.3	1288.2		1224.7
3	145.2	7259.1	2103.5		2000.0
Σ		14000	4056.8	>	3857.2

Qual o significado do Multiplicador de Lagrange (λ)?

No caso do exemplo anterior, é possível provar que:

$$|\lambda| \cong \frac{C^C - C^*}{\sum_j b_j q_j^*}$$

Interpretação possível:

O mutiplicador representa (aproximadamente) a variação no Custo Variável de Operação por unidade de Capital Investido em inventário.

Limitação no valor de inventário: *Exemplo 2*

No quadro seguinte apresentam-se os dados tidos como relevantes para uma situação de duplo inventário.

Artigo	Procura anual A_j	Custo unitário b_j	Custo de passagem de encomenda, C_{3j}
1	5000	0.5	10
2	500	5.0	10

Recorrendo à otimização condicionada com base em *Multiplicadores de Lagrange*, determine as quantidades de encomenda para cada um dos artigos que minimizem o custo variável total, cumprindo, no entanto, uma limitação de 400 U.M. no valor médio total de *stock*.

(Considere que a taxa de juro interna da empresa é de 20% ao ano.)

Limitação no número total de encomendas: *Exemplo*

Considere um sistema de inventário determinístico $\left(C_1, C_3\right)$ de vários artigos, com prazo de entrega nulo e taxa de reaprovisionamento infinita.

a) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, deduza as expressões que lhe permitem obter o ótimo condicionado, para uma situação em que o número de passagens de encomenda é limitado a um máximo *N*.

b) Para o sistema numérico seguinte, determine as quantidades de encomenda para cada um dos artigos, se o número de passagens de encomenda estiver limitado a um máximo de 150.

Artigo j	Procura anual r_j	Custo posse anual C_{1j}	Custo de passagem de encomenda C_{3j}
1	40 mil	1.4	12
2	55 mil	1.6	12
3	30 mil	2.5	12

Modelos estocásticos (tradicionais)

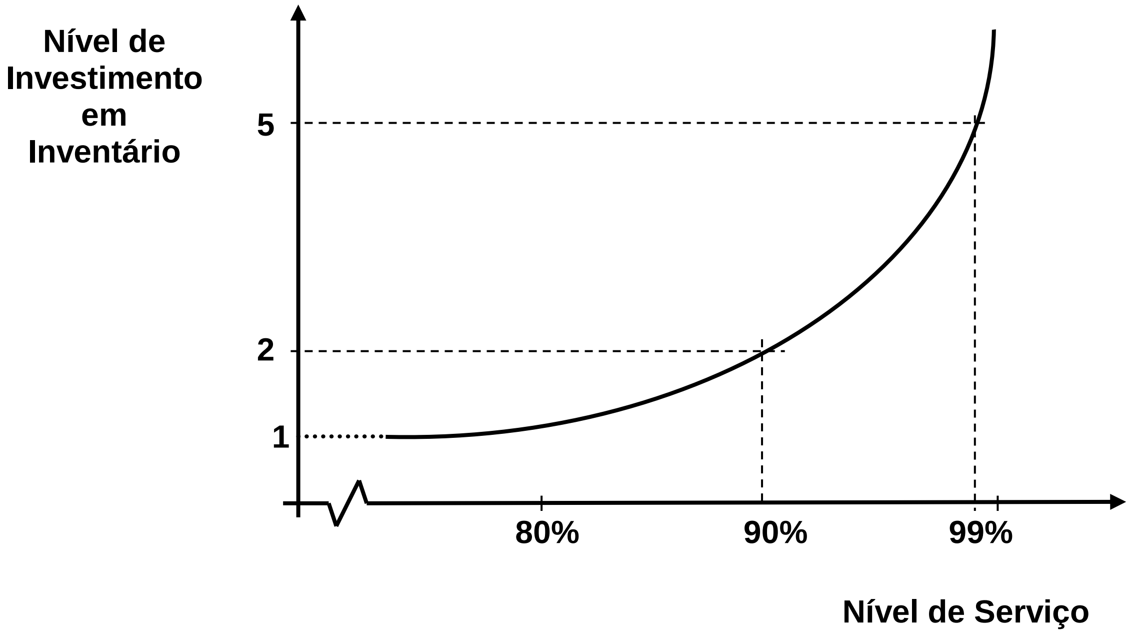
Incerteza nos modelos estocásticos (ou probabilísticos)

- no *prazo de entrega* (tempo de reposição); *e/ou*
- na *procura*.

Medidas de *“nível de serviço”*

- **Probabilidade de ocorrência de quebra (de inventário):**
  - ***(i)*** **Frequência de situações de quebra (rutura ou penúria) por nº de reaprovisionamentos; *ou***
  - ***(ii)*** **Frequência de situações de quebra por unidade de tempo;**
- Número de artigos em quebra;
- Duração da situação de quebra;
- (…)

Nível de investimento *versus* Nível de serviço



<u>Interpretação do nível de serviço</u>

Exemplo 1.

Um nível de serviço de 75% poderá significar que, em média, em 3 de cada 4 intervalos entre reaprovisionamentos não se verificará qualquer situação de quebra.

Exemplo 2.

Um mesmo nível de serviço poderá significar, no entanto, que em 75% das ocasiões de quebra, em média, esta não excederá, por exemplo, 2 dias.

Política Nível ou Ponto de Encomenda

A política consiste em:

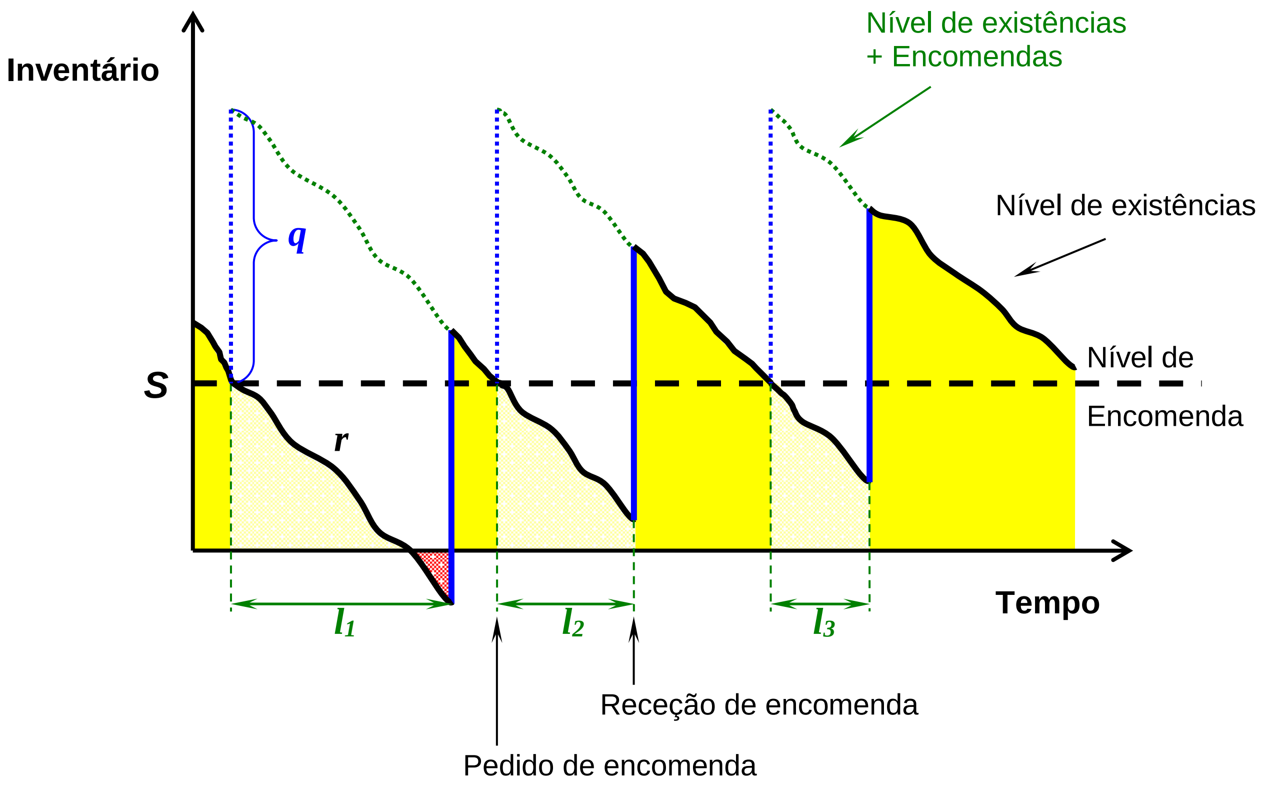
- Lançar uma *"ordem de encomenda"* (ou pedido de reaprovisionamento) sempre que o nível de inventário desce abaixo de um nível pré-especificado, S;
- Encomendar sempre a mesma quantidade pré-definida, q.

Pressupõe-se então que:

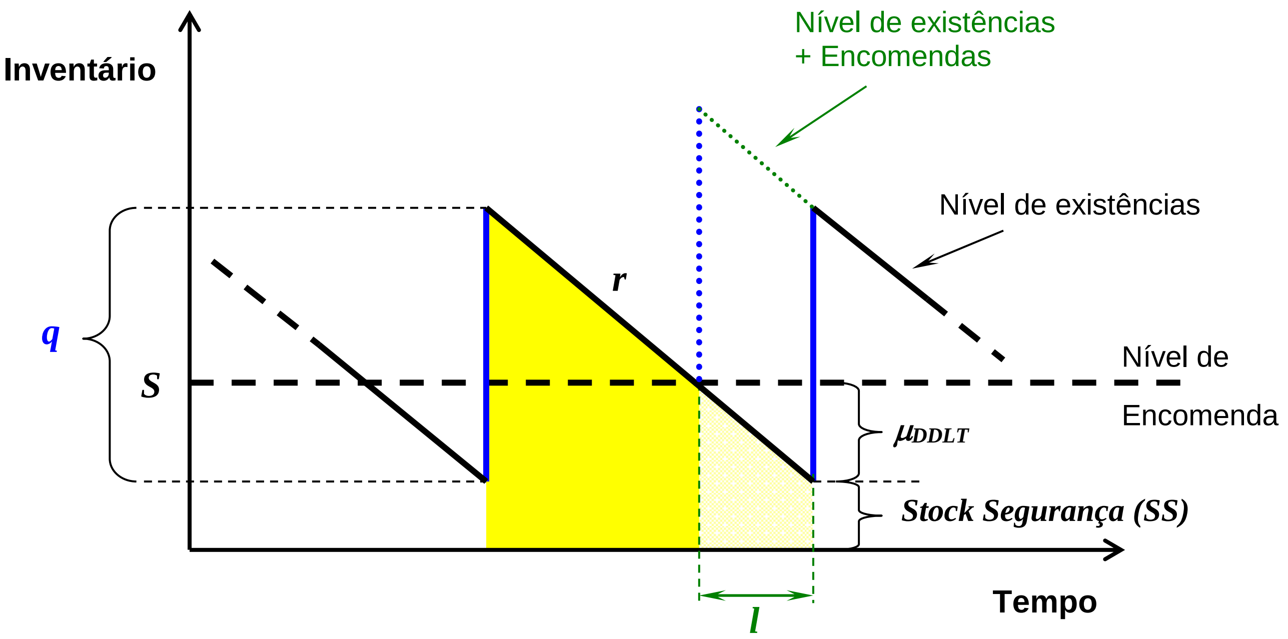
- Quando um pedido de reaprovisionamento é lançado, o nível de inventário é exatamente conhecido (S), exigindo, pois, que o sistema seja de monitorização/revisão contínua;
- O reaprovisionamento ocorre l unidades de tempo após o pedido, sendo este *"prazo de entrega"* variável ou não; em qualquer caso, porém, *pressupõe-se que:*
- Há incerteza no volume da procura verificada durante esse prazo de entrega (*ex.,* procura na u. tempo = c^{te}, mas l variável). A respetiva variável, *"Procura Durante o Prazo de Entrega"*, é representada por $DDLT$ (esperança/média: μ_{DDLT}).

N.B. Para garantir um determinado *nível de serviço* (*ou proteção*), torna-se necessário manter um inventário adicional (*"Stock de Segurança"*), que servirá para proteger o sistema contra eventuais situações de procura e/ou prazo de entrega superiores ao normal.

Evolução típica do nível de inventário numa política *Nível de Encomenda*



Evolução típica do nível de inventário numa política *Nível de Encomenda (valores médios)*



Procura durante o prazo de entrega (*DDLT*)

Na política nível de encomenda, os fatores de incerteza que interessa ter em conta no sistema vão resumir-se apenas ao intervalo que medeia o pedido e o recebimento da encomenda, ou seja, ao prazo de entrega (*l* ou *LT*).

Para a determinação do *stock* de segurança, ótimo em termos de minimização dos custos, ou ajustado a qualquer nível de serviço ou proteção pretendido, é, pois, indispensável conhecer a natureza estatística da esperança da procura durante o prazo de entrega (*DDLT*) das encomendas.

Por exemplo, o modelo clássico de minimização dos custos de operação irá basear-se no balanceamento dos custos de existência desse *stock* de segurança e da esperança do custo de quebra.

Nível de Encomenda em sistemas de procura discreta

Exemplo

Considere-se um caso de procura na unidade de tempo (r ou D), definida pelo seguinte histograma:

Unidades / dia	Probabilidade
0	0.40
1	0.30
2	0.20
3	0.10
Média, r, $E[D]$	*1.0 unidade / dia*

A duração do prazo de entrega (LT) é:

Dias	Probabilidade
1	0.25
2	0.50
3	0.25
Média, $E[LT]$	*2.0 dias*

Convolução da procura no prazo de entrega (1)

(Caso de procuras discretas)

Em referência ao caso do exemplo enunciado atrás, o volume máximo que a procura durante o prazo de entrega ($DDLT$) pode assumir é de 9 unidades (LT = 3 dias e D = 3 unidades / dia), com probabilidade:

$$P[DDLT=9] = P[LT=3] * (P[D=3] * P[D=3] * P[D=3])$$
$$= 0.25 * (0.10 * 0.10 * 0.10) = 0.00025$$

Para o cálculo de $P[DDLT=8]$, devem considerar-se:

Procura no	Volume da procura		
1º dia	3	3	2
2º dia	3	2	3
3º dia	2	3	3
Total, *DDLT*	8	8	8

$$\therefore \quad P[DDLT=8] = 0.25 * (0.1 * 0.1 * 0.2 + 0.1 * 0.2 * 0.1 + 0.2 * 0.1 * 0.1)$$
$$= 0.0015$$

Pelo mesmo processo:

$$P[DDLT=7] = (0.1 * 0.1 * 0.3 * 0.25) *3 + (0.2 * 0.2 * 0.1 * 0.25) * 3$$
$$= 0.00525$$

…etc…

Convolução da procura no prazo de entrega (2)

(Caso de procuras discretas)

Um método alternativo para determinar a convolução em análise, é o método experimental (por simulação) descrito a seguir:

(1) Gerar um número aleatório (nº dias) a partir do histograma representativo do prazo de entrega;

(2) Para cada um desses dias, gerar um valor aleatório a partir do histograma que representa o volume da procura por dia;

(3) Acumular o valor das procuras geradas; o total acumulado representará uma possível ocorrência de um volume de procura durante o prazo de entrega;

(4) Repetir o processo anterior um número suficientemente elevado de vezes, e calcular a frequência relativa com que ocorreu cada um dos valores possíveis para a procura no prazo de entrega.

Esperança do volume em quebra durante o prazo de entrega

Para um nível de encomenda S (pré-definido), a esperança do volume de quebra durante o prazo de entrega, $E[DDLT > S]$, pode ser obtida pela relação de recorrência:

$$E[DDLT > S] = P[DDLT > S] + E[DDLT > S + 1]$$

na qual $P[DDLT > S]$ representa o histograma cumulativo da procura durante o prazo de entrega.

N.B. $E[DDLT > S]$
$$= 1 * P[DDLT = S + 1] + 2 * P[DDLT = S + 2] + \ldots$$
$$= P[DDLT = S + 1] + P[DDLT = S + 2] + \ldots +$$
$$+ 1 * P[DDLT = S + 2] + 2 * P[DDLT = S + 3] + \ldots$$
$$= P[DDLT > S] + E[DDLT > S + 1]$$

No nosso caso, como $P[DDLT > 9] = 0$, podemos inicializar o processo de cálculo fazendo $E[DDLT > 9] = 0$:

S	*P[DDLT=S]*	*P[DDLT>S]*	*E[DDLT>S]*
0	0.1960	0.8040	2.0004
1	0.2310	0.5730	1.1964
2	0.2260	0.3470	0.6234
3	0.1797	0.1673	0.2764
4	0.0935	0.0738	0.1091
5	0.0477	0.0261	0.0353
6	0.0190	0.0071	0.0092
7	0.0053	0.0018	0.0021
8	0.0015	0.0003	0.0003
9	0.0003	0.0000	0.0000
Total	1.0000	-	-

Nível de Encomenda (procura discreta) – *Exemplo...*

Considere-se um artigo caracterizado por uma procura na unidade de tempo que segue uma *Distribuição de Poisson*(*), de média 6 artigos por semana. Considere-se ainda que se tem:

Custo de existência	C_1 = 3 UM / artigo / ano
Custo de quebra	C_2 = 4 UM / artigo
Custo de passagem	C_3 = 2 UM / encomenda
Prazo de entrega	l = 1 semana (constante)
1 ano	= 50 semanas úteis

Pretende-se gerir o sistema com uma política do tipo *Nível de Encomenda*. Neste contexto, determinar os respetivos parâmetros:

a) Quantidade (fixa) a encomendar, q, e

b) Nível de encomenda, S.

Resposta a):

Vamos admitir como razoável uma quantidade de encomenda calculada a partir da QEE:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AC_3}{C_1}} = \sqrt{\frac{2*6*50*2}{3}} = 20 \text{ unidades}$$ (*cont.*)

(*) *Ver descrição em página mais à frente.*

Nível de Encomenda (procura discreta) – *...Exemplo*

<u>Resposta b):</u>

Para uma procura na unidade de tempo constante e igual ao seu valor médio, teríamos uma procura no prazo de entrega, $S = r * l$ = 6 unidades. Nestas condições, S não deveria nunca ser inferior a 6 unidades, e qualquer diferença de nível, acima deste, constituiria o inventário ou *stock* de segurança:

S	*Stock Segu-rança*	*P[DDLT=S]*	*P[DDLT>S]*	*E[DDLT>S]*
6	0	0.16	0.39	0.94
7	1	0.14	0.25	0.55
8	2	0.10	0.15	0.30
9	3	0.07	0.08	0.15
10	4	0.04	0.04 ⇐	0.07
11	5	0.02	0.02	0.03
12	6	0.01	0.01	0.01
13	7	0.01	0.00	0.00
Total	-	0.55	-	-

<u>Análise marginal de custos (ou de custo-benefício)</u>

Supondo que se tem já S unidades, mais 1 unidade de artigo em inventário traduz-se em:

- *Mais um custo marginal de* C_1 *UM / ano; e*
- *Menos um custo marginal de* $C_2 * \mathrm{P}[DDLT > S] * (r/q)$ *UM/ano.*

Haverá equilíbrio entre estes custos marginais quando:

$$C_2 * \mathrm{P}[DDLT > S] * (r/q) = C_1$$

$\therefore$ Risco ótimo de quebra: $\mathrm{P}[DDLT > S] = \dfrac{C_1 q}{C_2 r}$

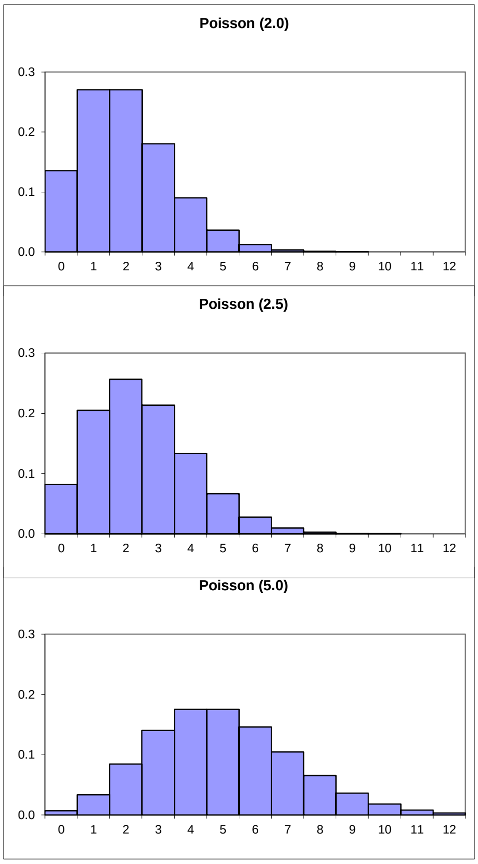
No nosso caso, $\mathrm{P}[DDLT > S]$=0.05 $\Rightarrow$ escolha de <u>*S=10*</u>. <u>(+ próximo inferior)</u>

[Distribuição de Poisson]

Aplicações: (como *variáveis discretas*)

Número de acontecimentos isolados que ocorrem numa determinada unidade de tempo, como sejam o número de clientes que se juntam a uma fila de espera, ou o número de acidentes viários ocorridos por ano numa dada zona.

Em sistemas de inventários, pode explicar razoavelmente algumas situações de procura discreta, *ex.,* ao nível do retalhista.



Densidade: $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Distribuição: $F(x) = e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}$

Parâmetro: média $\lambda > 0$

Domínio: $x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

Variância: igual à média, λ

Moda: bimodal λ e $\lambda - 1$, se λ é inteiro; $\lfloor \lambda \rfloor$, caso contrário.

Nível de Encomenda em sistemas de procura contínua

O desenvolvimento deste modelo é análogo ao efetuado para a situação de procura discreta, mas agora as distribuições estatísticas são baseadas em *funções densidade*, e não em histogramas de frequências.

Função densidade de probabilidade: $p(x)$

Probabilidade de quebra durante o prazo de entrega:

$$\mathrm{P}[DDLT > S] = \int_S^\infty p(x)dx = \mathrm{P}(S)$$

em que $P(S)$ designa a *função cumulativa de probabilidade*.

Esperança de quebra no prazo de entrega:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[DDLT > S] \quad &= \int_S^\infty (x - S)p(x)dx \\ &= \int_S^\infty xp(x)dx - S\int_S^\infty p(x)dx \\ &= \int_S^\infty x \cdot p(x)dx - S \cdot \mathrm{P}[DDLT > S] \end{aligned}$$

O desenvolvimento mais alargado destas expressões dependerá obviamente da lei de distribuição admitida para $p(x)$, *i.e.*, em última instância, da variável resultante da convolução da procura no prazo de entrega (*DDLT*).

Objetivo: MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS

A partir da visualização do gráfico atrás, tira-se que:

- *Stock* de segurança $= S - \mu_{DDLT}$

- Nível médio de inventário $= \frac{q}{2} + S - \mu_{DDLT}$

Número de reaprovisionamentos na unidade de tempo $= \frac{r}{q}$

Esperança de quebra por unidade de tempo $= \frac{r}{q} E[DDLT > S]$

O custo total variável de operação na unidade de tempo será:

$$C = C_1\left(\frac{q}{2} + S - \mu_{DDLT}\right) + C_2\frac{r}{q}\mathrm{E}[DDLT > S] + C_3\frac{r}{q}$$

Ou seja: $$C = C_1\left(\frac{q}{2} + S - \mu_{DDLT}\right)$$

$$+ C_2\frac{r}{q}\left(\int_S^\infty xp(x)dx - S\mathrm{P}[DDLT > S]\right) + C_3\frac{r}{q}$$

Diferenciando em ordem a q e a S, igualando a zero, e desenvolvendo estas condições de estacionaridade, obtém-se:

<u>Quantidade ótima de encomenda</u>: $$\boxed{q^* = \sqrt{\frac{2r\left(C_2\mathrm{E}[DDLT > S] + C_3\right)}{C_1}}}$$

<u>Risco ótimo de quebra</u>: $$\boxed{\mathrm{P}^*[DDLT > S] = \frac{C_1 q^*}{C_2 r}}$$

Convolução da procura no prazo de entrega

(Caso de procuras contínuas)

Variáveis aleatórias

Procura na unidade de tempo: (média r, desvio padrão σ_r)

Prazo de entrega: (média l, desvio padrão σ_l)

É possível demonstrar que a média e a variância da *procura durante o prazo de entrega* ($DDLT$) são dadas pelas equações:

$$\mu_{DDLT} = rl$$

$$\sigma^2_{DDLT} = l\sigma_r^2 + r^2\sigma_l^2$$

N.B. Estas relações são válidas, quaisquer que sejam as distribuições da procura e do prazo de entrega.

- Os modelos clássicos assumem leis *Normais* para r e l. Neste caso, $DDLT$ resulta também numa lei *Normal*.

- Muitas vezes são usadas, em alternativa, outras distribuições (mais realísticas): *ex.,* lei *Gama(α, β)*, com média $\alpha.\beta$ e variância $\alpha.\beta^2$.

- Se o prazo de entrega é suficientemente longo, e/ou a procura na unidade de tempo representa níveis suficientemente elevados, poder-se-á invocar o *Teorema do Limite Central,* assumindo-se então como válida uma *lei Normal para DDLT*.

Procura durante o prazo de entrega (lei Normal)

Assumindo $DDLT \approx Normal(\mu_{DDLT}, \sigma_{DDLT})$, podemos determinar o nível de encomenda a partir da redução deste parâmetro à correspondente variável (Z) da distribuição *Normal Standard*, $Normal(0,1)$:

$$\frac{S - \mu_{DDLT}}{\sigma_{DDLT}} = Z$$

obtida a partir da consulta da *Tabela da Normal*(*), para um dado valor de probabilidade de quebra de inventário.

$\therefore$ Nível de encomenda: $\boxed{S = \mu_{DDLT} + Z\sigma_{DDLT}}$

onde Z é denominado *"fator de segurança", ou de proteção* contra a possibilidade de quebra.

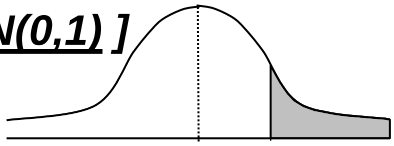
$\therefore$ Stock de segurança: $SS = Z\sigma_{DDLT}$

N.B.

Fórmula equivalente derivada anteriormente: $S = \mu_{DDLT} + SS$

(*) *Nas tabelas seguintes (NORMAL STANDARD), o "1º integral" (ou a área da distribuição) representa tipicamente a probabilidade de quebra* $P[DDLT > S]$*, ao passo que o "2º integral" representa a correspondente esperança de quebra por unidade de desvio, i.e.* $E[DDLT > S] = (2^{o}\ integral) \times \sigma_{DDLT}$.

[Área da Distribuição Normal Standard, N(0,1)]



(ou “1º integral”)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.00135									
3.5	0.000233									
4.0	0.0000317									
4.5	0.00000340									
5.0	0.000000287									

[Função de Densidade Normal Standard, N(0,1)]

Aproximações do primeiro e segundo integrais, a partir da média mais 3N/100 múltiplos do desvio padrão.

N.B. Considera-se zero o integral para a direita de 3xdesvio padrão.

N	1º integral	2º integral	N	1º integral	2º integral
1	0.486684	*0.379760*	51	0.061658	*0.025002*
2	0.474728	*0.365339*	52	0.058030	*0.023207*
3	0.462794	*0.351276*	53	0.054567	*0.021518*
4	0.450892	*0.337570*	54	0.051266	*0.019931*
5	0.439032	*0.324222*	55	0.048121	*0.018440*
6	0.427226	*0.311228*	56	0.045129	*0.017041*
7	0.415484	*0.298587*	57	0.042283	*0.015730*
8	0.403815	*0.286298*	58	0.039580	*0.014502*
9	0.392230	*0.274357*	59	0.037014	*0.013353*
10	0.380739	*0.262762*	60	0.034580	*0.012279*
11	0.369350	*0.251511*	61	0.032275	*0.011276*
12	0.358074	*0.240600*	62	0.030093	*0.010341*
13	0.346918	*0.230025*	63	0.028029	*0.009469*
14	0.335893	*0.219783*	64	0.026079	*0.008657*
15	0.325005	*0.209869*	65	0.024238	*0.007903*
16	0.314264	*0.200280*	66	0.022502	*0.007201*
17	0.303676	*0.191011*	67	0.020866	*0.006551*
18	0.293249	*0.182057*	68	0.019325	*0.005948*
19	0.282989	*0.173414*	69	0.017876	*0.005390*
20	0.272903	*0.165075*	70	0.016514	*0.004874*
21	0.262997	*0.157037*	71	0.015236	*0.004398*
22	0.253277	*0.149293*	72	0.014036	*0.003959*
23	0.243747	*0.141837*	73	0.012912	*0.003555*
24	0.234412	*0.134665*	74	0.011859	*0.003183*
25	0.225277	*0.127770*	75	0.010874	*0.002842*
26	0.216345	*0.121145*	76	0.009954	*0.002530*
27	0.207620	*0.114786*	77	0.009094	*0.002244*
28	0.199104	*0.108685*	78	0.008292	*0.001983*
29	0.190800	*0.102836*	79	0.007544	*0.001746*
30	0.182710	*0.097234*	80	0.006848	*0.001530*
31	0.174836	*0.091871*	81	0.006199	*0.001334*
32	0.167178	*0.086740*	82	0.005597	*0.001157*
33	0.159737	*0.081837*	83	0.005037	*0.000998*
34	0.152514	*0.077153*	84	0.004518	*0.000854*
35	0.145509	*0.072683*	85	0.004036	*0.000726*
36	0.138721	*0.068419*	86	0.003590	*0.000611*
37	0.132150	*0.064356*	87	0.003177	*0.000510*
38	0.125793	*0.060487*	88	0.002795	*0.000420*
39	0.119651	*0.056805*	89	0.002443	*0.000342*
40	0.113720	*0.053305*	90	0.002117	*0.000273*
41	0.107999	*0.049979*	91	0.001817	*0.000214*
42	0.102485	*0.046822*	92	0.001540	*0.000164*
43	0.097175	*0.043827*	93	0.001285	*0.000122*
44	0.092068	*0.040988*	94	0.001051	*0.000087*
45	0.087158	*0.038300*	95	0.000836	*0.000058*
46	0.082443	*0.035756*	96	0.000638	*0.000036*
47	0.077920	*0.033350*	97	0.000457	*0.000020*
48	0.073584	*0.031078*	98	0.000291	*0.000009*
49	0.069431	*0.028932*	99	0.000139	*0.000002*
50	0.065457	*0.026909*	100	0.000000	*0.000000*

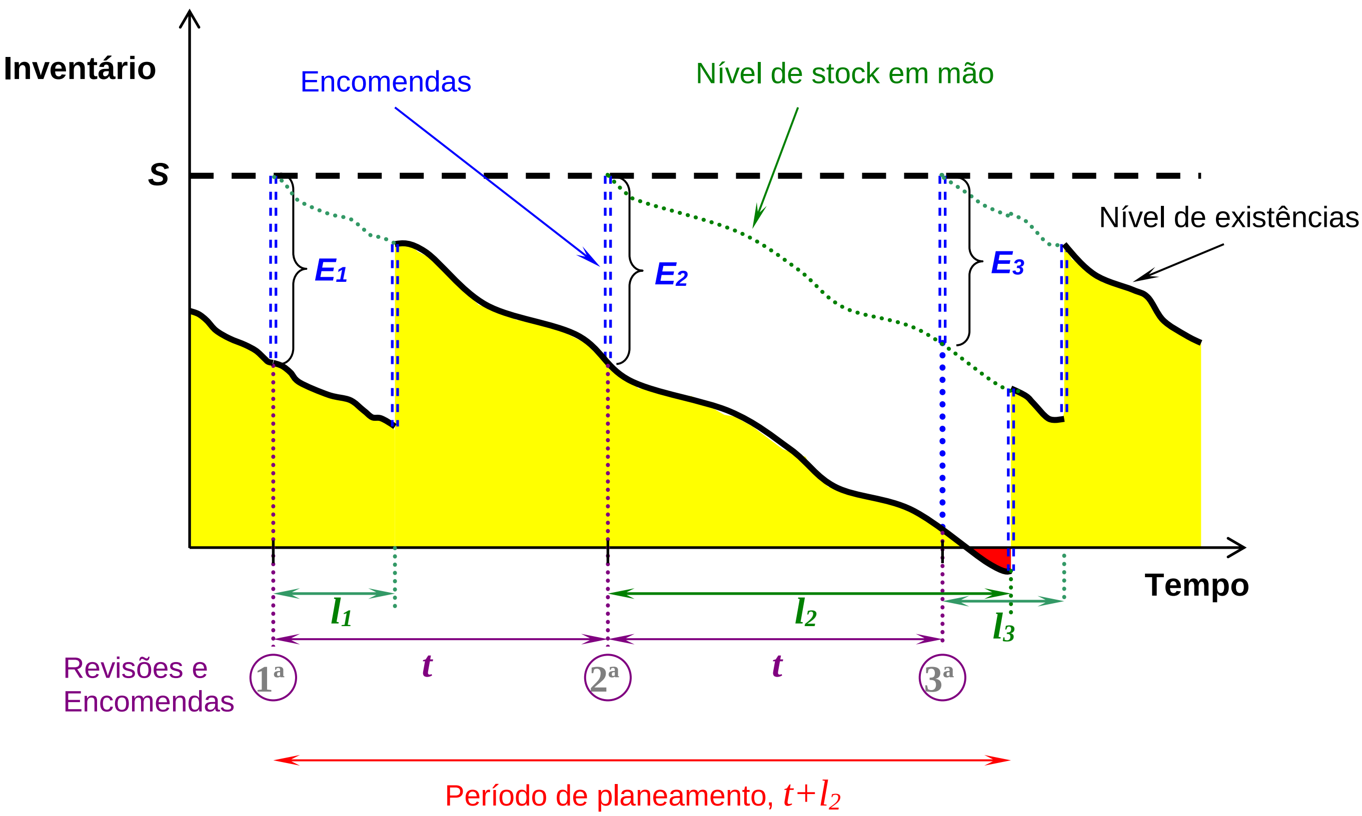
N.B. Correspondência com a tabela anterior: $Z = {}^{3N}\!/_{100}$

Política Ciclo de Encomenda

- Revisões (e encomendas) a intervalos regulares (***"período"*** t);

- Encomendas de quantidade variável e igual à diferença entre o *"stock em mão"* (existências físicas + carteira de encomendas) e um ***"nível de referência"*** máximo **(S)** pré-definido.

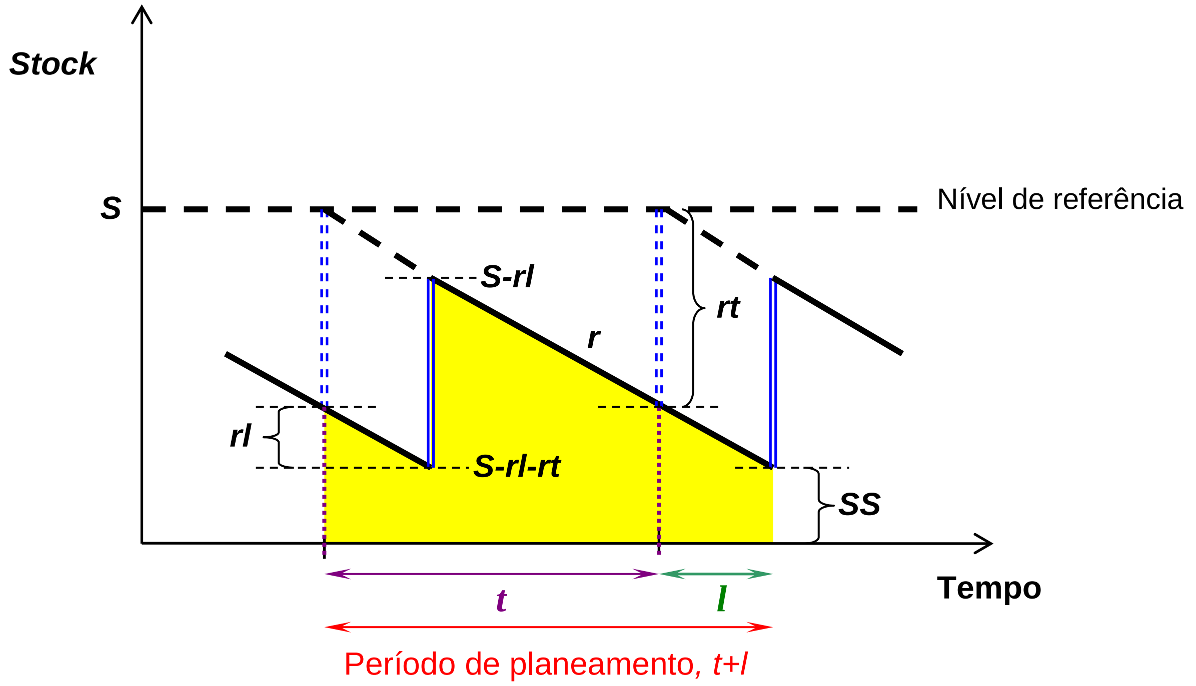
<u>Evolução típica do nível de inventário numa política *Ciclo de Encomenda*</u>



Neste caso, a incerteza estende-se por um período de tempo que compreende um período de revisão (t) e um prazo de entrega (l). A variável aleatória neste período designa-se por **<u>Procura Durante o Período de Planeamento (*DDPP*</u>**, *"Demand During Planning Period"*).

Ciclo de Encomenda: função custo de operação

Evolução típica do nível de inventário numa política *Ciclo de Encomenda (valores médios)*



- Nível mínimo de *stock* (*Stock de Segurança*, SS):

$S - rl - rt$ Nível de referência (máx)

– Consumo durante o período de revisão

– Consumo durante o prazo de entrega

- Nível de *stock* médio = $S - rl - rt/2$
- Esperança de quebra na unidade tempo = $(1/t)E[DDPP > S]$
- Custos de encomenda (incl. revisão) = C_3
- Função de custo variável total (de operação):

$$C = C_1(S - rl - rt/2) + C_2(1/t)E[DDPP > S] + C_3(1/t)$$

Ciclo de encomenda: parâmetros "ótimos"

Objetivo:

Minimização da função custo variável total:

$$C = C_1(S - rl - rt/2) + C_2(1/t)E[DDPP > S] + C_3(1/t)$$

Procedimentos alternativos:

- Diferenciação em ordem a S e a t; ou (dada a complexidade)
- (Simples aprox.) Tabulação de C em função de t; ou
- (Simples aprox.) Fixação de um valor para t, e diferenciação em ordem a S.

Período ou ciclo de revisão (aprox.): $t^* = \sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1 r}}$

Diferenciando a função custo e igualando a zero:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + \frac{C_2}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial S} E[DDPP > S] = 0$$

$$C_1 - \frac{C_2}{t} \cdot P[DDPP > S] = 0$$

Obtém-se o *risco ótimo de quebra*:

$$P^*[DDPP > S] = \frac{C_1 t}{C_2}$$

Políticas Nível *versus* Ciclo de Encomenda

(Comparação dos níveis de *stock* de segurança)

Nível de Encomenda

Incerteza: procura durante o prazo de entrega

$\mu_{DDLT} = rl$

$\sigma^2_{DDLT} = l\sigma^2_r + r^2\sigma^2_l$

Ciclo de Encomenda

Incerteza: procura durante o período de planeamento

$\mu_{DDPP} = r(t+l)$

$\sigma^2_{DDPP} = (t+l)\sigma^2_r + r^2\sigma^2_l$

N.B. Incerteza maior exigirá nível de segurança maior!

Diferença de variâncias = $\Delta\sigma^2 = t\sigma^2_r$.

Por exemplo,

Se $r \approx Normal \quad \Rightarrow$ *Stock de segurança*, $SS = Z\sigma$,

e, claramente, o *stock* de segurança para o caso da política Ciclo de Encomenda deverá ser maior (para igual risco de quebra).

Síntese da política *Nível de Encomenda*

- ***Quando encomendar?*** R: Sempre que o nível de *stock* desce abaixo de um nível pré-especificado de encomenda, S;

- ***Quanto encomendar?*** R: Quantidade constante, q;

- Exige que o sistema seja continuamente monitorizado;

- Implementação corresponde à *"política dos dois cestos"*;

- *N.B.1* Implementação quase limitada a artigos de pequeno volume (*ex.,* parafusos, anilhas, *etc...*);

- *N.B.2* Artigos deterioráveis exigem uma implementação com disciplina *FIFO* (ao contrário do esquema normal anterior, *LIFO*), o que pode levantar dificuldades operacionais; *certo?*

- *N.B.3* Política impraticável para muitos artigos de grande dimensão (*ex.,* peças de fundição, sub-montagens, *etc...*), que não podem ser agrupados.

Síntese da política *Ciclo de Encomenda*

- ***Quando encomendar?*** R: A intervalos de tempo regulares, t;

- ***Quanto encomendar?*** R: Quantidade variável; a quantidade que, se não houvesse prazo de entrega, reporia o *stock-em-mão* no nível de referência máximo, S;

- Exige apenas revisões pontuais do *stock-em-mão*.

Outras condições (pressupostos) de aplicação do modelo:

- Um reaprovisionamento é suficiente para cobrir quaisquer encomendas em atraso;

- Quando o prazo de entrega é variável, as encomendas são contudo recebidas pela mesma ordem pela qual são lançadas;

- O custo de revisão é considerado independente de S e de t;

- O custo unitário é considerado constante e independente da quantidade encomendada.

Algumas políticas de gestão de *stocks* mistas (1)

Política Nível de Encomenda com Revisões Periódicas

Consiste em:

- Revisões a intervalos regulares, t;
- Só se encomenda se o *stock* em mão desce abaixo do nível de encomenda, S;
- As quantidades encomendadas são sempre iguais, q.

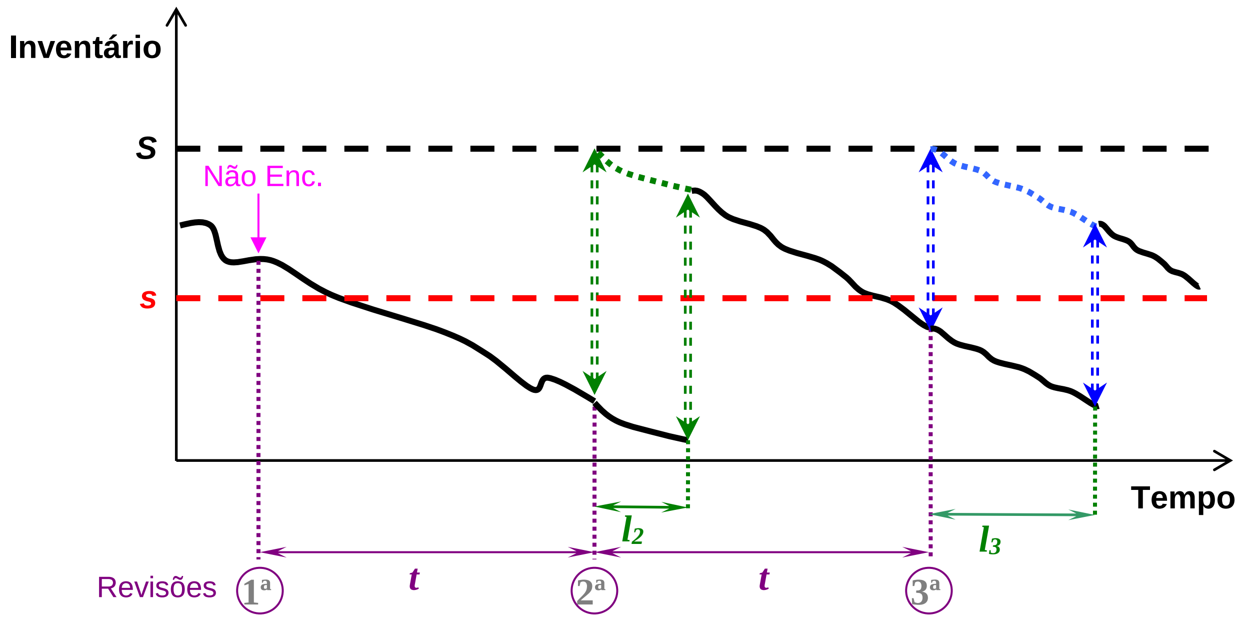
Algumas políticas de gestão de *stocks* mistas (2)...

<u>Política (s, S) – definição</u>

<u>Consiste em:</u>

- Revisões a intervalos regulares, $\underline{t}$;
- Só se encomenda se o *stock* em mão desce abaixo do *nível de encomenda*, $\underline{s}$;
- A quantidade a encomendar é variável, igual ao *nível de referência* ($\underline{S}$) menos o *stock-em-mão*.

<u>Evolução típica:</u>



Algumas políticas de gestão de *stocks* mistas (2)...

Política (s, S) – Aproximação e Simulação

Volume médio de uma encomenda (*simplificação*):

$$q = S - s + rt/2$$

i.e. igual à diferença entre o nível de referência e o nível de encomenda mais metade da esperança da procura durante o período de revisão.

Outra aproximação possível consiste em usar a *QEE*:

$$q = \sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}}$$

…e, igualando as duas expressões anteriores, usar a relação:

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{2rC_3}{C_1}} + s - \frac{rt}{2}}$$

N.B. Fixando um valor para o período t, os parâmetros s e S ficam diretamente relacionados por esta aproximação.

Metodologia mais comum para o estudo de uma política (s, S):

Simulação, em conjunto com as aproximações anteriores, as quais facilitam a definição dos domínios de s e S.

Modelo estático de decisão (*“Newsboy Problem”*)
(*Problemas de decisão única*)

Descrição do *”problema do vendedor de jornais”*:

- Os jornais não vendidos num dia não são vendáveis no dia seguinte $\Rightarrow$ **Problema de decisão única**: ***Quantos jornais devem ser aprovisionados?***

- A **procura** diária de jornais **pode ser considerada uma variável aleatória**, previsível apenas em parte, em função de fatores diversos (*ex.,* dia da semana, importância dos principais títulos,..)

Notação:

b	Valor de compra do artigo
v	Valor de venda do artigo
u	Valor de desperdício do artigo
$p(X)$	Função densidade de probabilidade da procura, X
q	Quantidade de encomenda

***Newsboy Problem*: função lucro e otimização**

Sejam: $P_0 = v - b$ (lucro)

$L_0 = b - u$ (perda)

A função lucro é definida como sendo:

$$V = \begin{cases} P_0 X - L_0(q - X) & se \ X < q \\ P_0 q & se \ X \geq q \end{cases}$$

A respetiva esperança de valor é:

$$E[V] = \int_0^q [P_0 X - L_0(q - X)] p(X) dX + \int_q^\infty P_0 q p(X) dX$$

$$\frac{\partial E[V]}{\partial q} = -L_0 \underbrace{\int_0^q p(X) dX}_{1 - P[X > q]} + P_0 \underbrace{\int_q^\infty p(X) dX}_{P[X > q]} = 0$$

$\therefore$ Risco ótimo de quebra:

$$\boxed{P^*[X > q] = \frac{L_0}{L_0 + P_0}}$$

Newsboy Problem: análise de custo-benefício

Supondo que se tem já uma quantidade q, mais 1 unidade em inventário implicará:

- Uma perda (adicional) de L_0, se $X \leq q$, e
- Um ganho adicional de P_0, se $X > q$.

Então, haverá vantagem em adicionar mais uma unidade de artigo ao inventário, se a esperança do custo associado a ter mais uma unidade for inferior à esperança do lucro associado a uma venda adicional:

Esperança do Custo Adicional	$<$	**Esperança do Ganho Adicional**

$$L_0 P[X < q] \quad < \quad P_0 P[X > q]$$

$$L_0 (1 - P[X > q]) \quad < \quad P_0 P[X > q]$$

$$P[X > q] \quad > \quad \frac{L_0}{L_0 + P_0}$$

De acordo com esta última condição, o valor máximo de q será o valor correspondente ao risco ótimo de quebra dado pela igualdade:

$$\boxed{P^*[X > q] = \frac{L_0}{L_0 + P_0}}$$

a que já tínhamos chegado anteriormente.

Simulação de sistemas de inventários (1)

Vamos considerar a simulação de duas políticas alternativas, executadas por um período de tempo equivalente a um ano de funcionamento (*48 semanas*).

Política Nível de Encomenda

Nível de Encomenda	= 100 unidades;
Quantidade de Encomenda	= 250 unidades.

Política Ciclo de Encomenda:

Período de Revisão	= 12 semanas;
Nível de Referência	= 300 unidades.

Em ambos os casos, consideramos:

- Sistema de perda de vendas (encomendas em atraso interditas);

- Nível de *stock* inicial de 150 unidades.

Simulação de sistemas de inventários (2)

Tabela I: Caracterização da procura.

Procura semanal	Ponto médio da classe	Probabilidade de ocorrência (%)	Domínio nºs aleatórios atribuídos
0-9	4.5	10	1-100
10-19	14.5	30	101-400
20-29	24.5	30	401-700
30-39	34.5	20	701-900
40-50	44.5	5	901-950
≥ 50	54.5	5	951-1000

Tabela II: Caracterização do prazo de entrega.

Prazo entrega (semanas)	Probabilidade de ocorrência (%)	Domínio nºs aleatórios atribuídos
1	5	1-50
2	5	51-100
3	30	101-400
4	45	401-850
5	10	851-950
≥ 5	5	951-1000

N.B. Vamos usar um gerador de números aleatórios ~U(0,1000).

Resultados da simulação (Nível de Encomenda)

Semana	RANDOM	Procura	Encomenda	RANDOM	Prazo Entrega	Stock Actual	Nº Encomendas	Nº Semanas Quebra
1		--	--	--	--	150	0	0
2	201	14.5				135.5	0	0
3	744	34.5				101	0	0
4	947	44.5	Enc. 250	442	4	56.5	1	0
5	221	14.5	Aguarda		3	42	1	0
6	932	44.5	Aguarda		2	0	1	1
7	450	24.5	Aguarda		1	0	1	2
8	449	24.5	Rec. 250		0	225.5	1	2
9	162	14.5				211	1	2
10	45	4.5				206.5	1	2
11	327	14.5				192	1	2
12	36	4.5				187.5	1	2
13	624	24.5				163	1	2
14	610	24.5				138.5	1	2
15	890	34.5				104	1	2
16	17	4.5	Enc. 250	56	2	99.5	2	2
17	275	14.5	Aguarda		1	85	2	2
18	490	24.5	Rec. 250		0	310.5	2	2
19	497	24.5				286	2	2
20	202	14.5				271.5	2	2
21	488	24.5				247	2	2
22	87	4.5				242.5	2	2
23	959	54.5				188	2	2
24	379	14.5				173.5	2	2
25	57	4.5				169	2	2
26	558	24.5				144.5	2	2
27	672	24.5				120	2	2
28	858	34.5	Enc. 250	640	4	85.5	3	2
29	401	24.5	Aguarda		3	61	3	2
30	945	44.5	Aguarda		2	16.5	3	2
31	116	14.5	Aguarda		1	2	3	2
32	640	24.5	Rec. 250		0	227.5	3	2
33	509	24.5				203	3	2
34	669	24.5				178.5	3	2
35	335	14.5				164	3	2
36	524	24.5				139.5	3	2
37	749	34.5				105	3	2
38	502	24.5	enc. 250	171	3	80.5	4	2
39	494	24.5	aguarda		2	56	4	2
40	196	14.5	aguarda		1	41.5	4	2
41	641	24.5	rec. 250		0	267	4	2
42	184	14.5				252.5	4	2
43	655	24.5				228	4	2
44	799	34.5				193.5	4	2
45	72	4.5				189	4	2
46	900	34.5				154.5	4	2
47	538	24.5				130	4	2
48	981	54.5				75.5	4	2
					Total=	7100.5		
					Média=	147.927 0833		

Resultados da simulação (Ciclo de Encomenda)

Semana	RAN	Procura	Encomenda	RAN	Prazo Residual	Período Revisão Residual	Nível Corrente Stock	Total Encomendas	Semanas em Quebra
1	--	--	--	--	--	5	150	0	0
2	21	4.5			--	4	145.5	0	0
3	115	14.5			--	3	131	0	0
4	408	24.5			--	2	106.5	0	0
5	151	14.5			--	1	92	0	0
6	505	24.5	enc. 232.5	153	3	0	67.5	1	0
7	698	24.5	aguarda		2	11	43	1	0
8	67	4.5	aguarda		1	10	38.5	1	0
9	278	14.5	rec. 232.5		0	9	256.5	1	0
10	550	24.5			--	8	232	1	0
11	227	14.5			--	7	217.5	1	0
12	208	14.5			--	6	203	1	0
13	190	14.5			--	5	188.5	1	0
14	510	24.5			--	4	164	1	0
15	604	24.5			--	3	139.5	1	0
16	892	34.5			--	2	105	1	0
17	911	44.5			--	1	60.5	1	0
18	202	14.5	enc. 254	862	5	0	46	2	0
19	12	4.5	aguarda		4	11	41.5	2	0
20	476	24.5	aguarda		3	10	17	2	0
21	221	14.5	aguarda		2	9	2.5	2	0
22	52	4.5	aguarda		1	8	0	2	1
23	462	24.5	rec. 254		0	7	229.5	2	1
24	243	14.5			--	6	215	2	1
25	234	14.5			--	5	200.5	2	1
26	413	24.5			--	4	176	2	1
27	492	24.5			--	3	151.5	2	1
28	738	34.5			--	2	117	2	1
29	582	24.5			--	1	92.5	2	1
30	874	34.5	enc. 242	66	2	0	58	3	1
31	290	14.5	aguarda		1	11	43.5	3	1
32	684	24.5	rec. 242		0	10	261	3	1
33	884	34.5			--	9	226.5	3	1
34	758	34.5			--	8	192	3	1
35	796	34.5			--	7	157.5	3	1
36	394	14.5			--	6	143	3	1
37	20	4.5			--	5	138.5	3	1
38	455	24.5			--	4	114	3	1
39	698	24.5			--	3	89.5	3	1
40	193	14.5			--	2	75	3	1
41	360	14.5			--	1	60.5	3	1
42	140	14.5	enc. 254	450	4	0	46	4	1
43	18	4.5	aguarda		3	11	41.5	4	1
44	668	24.5	aguarda		2	10	17	4	1
45	431	24.5	aguarda		1	9	0	4	2
46	204	14.5	rec. 254		0	8	239.5	4	2
47	331	14.5			--	7	225	4	2
48	728	34.5			--	6	190.5	4	2
						total=	5948		
						media=	123.9167		

Simulação de sistemas de inventários

<u>Breve análise comparativa dos resultados anteriores</u>

- Foram passadas 4 encomendas durante o ano, nos dois casos;

- Houve situações de quebra em apenas 2 semanas, nos dois casos;

- O nível médio de inventário foi maior no caso da política *Nível de Encomenda* (*148* unidades), do que no caso da política *Ciclo de Encomenda* (*124* unidades).

∴ *Sem outros estudos, poderia admitir-se que a política mais favorável seria a de <u>Ciclo de Encomenda</u>, neste caso particular.*

Porém, não esquecer que esta conclusão é debilmente sustentada pelo resultado de uma simples "*run*" de curta duração, carecendo por isso de um estudo mais cuidado.

Questões como as seguintes devem ser ponderadas e analisadas:

(1) Que duração deve ter cada "*run*"?

(2) Que acurácia nos resultados se pretende ou é possível obter-se?

Simulação de sistemas de inventários

Que duração deve ter uma simulação?

Problema:

Determinar qual a duração da simulação, para que o valor das variáveis do sistema sejam estimadas com uma determinada acurácia, verificando um dado grau de confiança estatística.

Procedimento normalmente proposto:

1) Executar algumas simulações curtas, utilizando diferentes séries de números aleatórios (*ex.*, partindo de diferentes sementes);

2) Estimar a média e a variância da variável que se pretende medir (*ex.*, o nível médio de stock, o número médio de quebras,…), e admitir para esta variável uma lei de distribuição Normal;

3) Sabendo que o desvio padrão dessa variável varia inversamente com a raiz quadrada da duração da simulação, calcular que duração deve ter uma experiência de simulação, para obter uma dada acurácia com um dado grau de confiança estatística.

Simulação de sistemas de inventários

<u>Que duração deve ter uma simulação?</u> *(Exemplo)*

Valor médio

(obtido com curtas simulações de 10 anos) = *120* unidades

Desvio padrão = *40* unidades

Qual a duração mínima de uma simulação ("*run*"), para que o nível médio de inventário de *120* possa ser especificado com uma acurácia de $\pm$*5* unidades, com uma confiança estatística de *90%*?

<u>Resposta:</u>

Admitindo uma lei Normal: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow \sigma_N = \frac{X-\mu}{Z_{90\%}}$

tira-se que o desvio padrão a obter deve ser de:

$$\sigma_N = \frac{5}{1.6449} = 3.04 \text{ unidades.}$$

Fazendo então a proporcionalidade inversa: $\frac{\sigma_N}{40} = \sqrt{\frac{10}{N}}$

Obtém-se que a simulação deve corresponder a, pelo menos:

$$N = \frac{10 * 40^2}{(3.04)^2} = 1732 \text{ anos}$$

Simulação de sistemas de inventários

Que acurácia se consegue obter com uma simulação?

Exemplo:

No caso do exemplo anterior, se se executasse um simples "run" de duração equivalente a 1000 anos, qual seria a acurácia da estimativa obtida com um grau de confiança de 90%?

Resposta:

O desvio padrão seria, proporcionalmente, de $\sigma_N = 40\sqrt{\frac{10}{1000}}$ = *4* unidades.

Logo, a acurácia conseguida na estimativa do valor médio da variável, com uma confiança estatística de *90%*, seria de apenas $\pm$*4 * 1.6449* (aproximadamente $\pm$ *6.6* unidades).