Universidade do Minho | lei

Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear EI

exame de recurso **A** — 2 de fevereiro de 2015

nome: ____________________ número: __________

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1~(1.5+1.5+1.5+1.5), 2~2, 3~(1+1+2); em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

   (b) Encontre uma base do núcleo de A.

   (c) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A. Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.

   (d) Verifique se A é diagonalizável e em caso afirmativo diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal).

2. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule A^{-1} **ou** pelo algoritmo de Gauss-Jordan **ou** à custa dos complementos algébricos.

3. Considere a base (ordenada) B_1 de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vectores

$$u = (1,1,1), v = (0,1,1), w = (-1,-1,0)$$

   (por esta ordem), e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(1,0) = (1,1,1),\ T(0,1) = (2,1,2).$$

   (a) Mostre que efectivamente B_1 é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcule $T(1,2)$.

   (c) Calcule a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base B_1 de $\mathbb{R}^3$.

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente **à melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Seja A uma matriz 3×3 triangular superior, e com elementos diagonais $1, 0, -2$. Então
   (a) A é diagonalizável.
   (b) A é invertível.
   (c) $\text{car}(A) = 3$.
   (d) Todas as anteriores.

2. Seja A uma matriz com componentes reais do tipo 3×2. Então necessariamente
   (a) O núcleo de A é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
   (b) $\text{nul}(A) \geq 1$.
   (c) $\text{nul}(A) \leq 1$.
   (d) Nenhuma das anteriores.

3. Seja A uma matriz 3×3 com polinómio característico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$. Então necessariamente
   (a) A é diagonalizável.
   (b) $\det(A) = 0$.
   (c) $\text{car}(A) = 3$.
   (d) Nenhuma das anteriores.

4. Seja A uma matriz 3×3 com valores próprios $\sigma(A) = \{-1, 1, 3\}$. Então necessariamente
   (a) A é diagonalizável.
   (b) $\det(A) = -3$.
   (c) $\text{car}(A) = 3$.
   (d) Todas as anteriores.

5. Dada uma matriz A do tipo 5×5 com $\det(A) = -1$, então necessariamente

   (a) A é invertível e $\det(A^{-1}) = 1$.

   (b) $Ax = b$ é possível determinado, independentemente da escolha de $b \in \mathbb{R}^5$.

   (c) A é diagonalizável.

   (d) Todas as anteriores.

6. Dada uma matriz A do tipo 5×5 com $\text{car}(A) = 3$, então necessariamente

   (a) $\det(A) = 0$.

   (b) $CS(A) = \mathbb{R}^3$, onde $CS(A)$ denota o espaço das colunas de A.

   (c) A não é diagonalizável.

   (d) Todas as anteriores.

7. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vectores $u = (1, 1, 1), v = (0, 2, 1), w = (-4, 2, -1)$.

   (a) u, v, w formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $(-1, -2, -1) \in \langle u, v, w \rangle$.

   (c) $\dim\langle u, v, w \rangle = 2$.

   (d) Nenhuma das anteriores.

8. Dada uma matriz real A do tipo 3×3 com $\text{car}(A) = 2$,

   (a) $CS(A)$ é isomoformo a $\mathbb{R}^2$.

   (b) $CS(A) = \mathbb{R}^2$.

   (c) $Ax = 0$ é possível determinado.

   (d) Nenhuma das anteriores.

`Respostas:`

1. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
2. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
3. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
4. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
5. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
6. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
7. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
8. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯