

Lógica EI

2.º Teste — 29 de maio de 2017

duração: 2 horas

**Justifique todas as suas respostas.**

1. (a) Mostre que  $(p_0 \wedge \neg p_1) \leftrightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_1)$  não é um teorema em DNP.  
(b) Prove que, para quaisquer  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$  e  $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ , se  $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ , então  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é sintaticamente inconsistente.
2. Considere o tipo de linguagem  $L = Arit$ .  
Sejam  $t_0 = s(x_1 + s(0))$ ,  $\psi = \exists x_0(x_0 < x_0) \vee \exists x_1 \neg(x_0 < x_1)$  e  $\varphi = \forall x_0(x_0 \times 0 = 0)$ .  
Seja  $NATS = (\mathbb{N}_0, \neg)$  a estrutura usual de tipo  $L$ .
  - (a) Indique  $\psi[t_0/x_0]$  e diga se  $x_0$  está livre para  $t_0$  em  $\psi$ .
  - (b) Defina por recursão estrutural a função  $f : \mathcal{T}_L \rightarrow \mathbb{N}_0$  que a cada  $t \in \mathcal{T}_L$  faz corresponder o número de ocorrências do símbolo de função  $+$  em  $t$ .
  - (c) Dê exemplo de um termo  $t$  de tipo  $L$  tal que  $\bar{t}_\alpha = 3$  para toda a atribuição  $\alpha$  em  $NATS$ .
  - (d) Defina uma estrutura de tipo  $L$  com domínio  $\{0, a\}$ .
  - (e) Quantas estruturas de tipo  $L$  existem com domínio  $\{0, a\}$ ?
  - (f) Mostre que a fórmula  $\varphi$  é verdadeira em  $NATS$ .
  - (g) Verifique se  $\models \varphi$ .
3. Seja  $L = Arit$  e sejam  $E_1$  e  $E_2$  as estruturas standard de tipo  $L$  com domínios  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ , respetivamente. Para cada  $i = 1, 2$ , seja  $\Gamma_i = \{\varphi \in \mathcal{F}_L \mid \varphi \text{ é verdadeira em } E_i\}$ . Mostre que  $\Gamma_2 \not\subseteq \Gamma_1$ .

Cotações	1.	2.	3.
	2+2	1+2+2+2+2+2+3	2