

Álgebra Linear EI

_____ exame de recurso **A** _____ 2 de fevereiro de 2015 _____

nome: _____ número: _____

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1~(1.5+1.5+1.5+1.5), 2~2; em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.
- (b) Encontre uma base do núcleo de A .
- (c) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A . Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.
- (d) Verifique se A é diagonalizável e em caso afirmativo diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal).

2. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule A^{-1} **ou** pelo algoritmo de Gauss-Jordan **ou** à custa dos complementos algébricos.

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente à **melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Seja A uma matriz 3×3 triangular superior, e com elementos diagonais $1, 0, -2$. Então
 - (a) A é diagonalizável. (V)
 - (b) A é invertível.
 - (c) $\text{car}(A) = 3$.
 - (d) Todas as anteriores.
2. Seja A uma matriz com componentes reais do tipo 3×2 . Então necessariamente
 - (a) O núcleo de A é um subespaço de \mathbb{R}^2 . (V)
 - (b) $\text{nul}(A) \geq 1$.
 - (c) $\text{nul}(A) \leq 1$.
 - (d) Nenhuma das anteriores.
3. Seja A uma matriz 3×3 com polinómio característico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$. Então necessariamente
 - (a) A é diagonalizável.
 - (b) $\det(A) = 0$. (V)
 - (c) $\text{car}(A) = 3$.
 - (d) Nenhuma das anteriores.
4. Seja A uma matriz 3×3 com valores próprios $\sigma(A) = \{-1, 1, 3\}$. Então necessariamente
 - (a) A é diagonalizável.
 - (b) $\det(A) = -3$.
 - (c) $\text{car}(A) = 3$.
 - (d) Todas as anteriores. (V)
5. Dada uma matriz A do tipo 5×5 com $\det(A) = -1$, então necessariamente
 - (a) A é invertível e $\det(A^{-1}) = 1$.
 - (b) $Ax = b$ é possível determinado, independentemente da escolha de $b \in \mathbb{R}^5$. (V)
 - (c) A é diagonalizável.
 - (d) Todas as anteriores.
6. Dada uma matriz A do tipo 5×5 com $\text{car}(A) = 3$, então necessariamente
 - (a) $\det(A) = 0$. (V)

(b) $CS(A) = \mathbb{R}^3$, onde $CS(A)$ denota o espaço das colunas de A .

(c) A não é diagonalizável.

(d) Todas as anteriores.

7. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .

(b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .

(c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .

(d) Nenhuma das anteriores.

8. Considere, em \mathbb{R}^3 , os vectores $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (-1, -1, 0)$.

(a) u, v, w formam uma base de \mathbb{R}^3 .

(b) $(-1, -2, -1) \in \langle u, v, w \rangle$.

(c) $\dim \langle u, v, w \rangle = 1$

(d) Nenhuma das anteriores.

9. Dada uma matriz A do tipo 3×3 com $\text{car}(A) = 2$,

(a) 0 é valor próprio de A .

(b) $\dim N(A) = 1$.

(c) A não é invertível.

(d) Todas as anteriores.

10. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(1, 0, 0) = (-1, 0, 1), T(0, 1, 0) = (-1, 2, 1), T(0, 0, 1) = (2, 0, 0).$$

(a) $T(1, 1, 1) = (0, 2, 2)$.

(b) A matriz que representa T em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 e à de \mathbb{R}^3 é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(c) T é um isomorfismo.

(d) Todas as anteriores.

Respostas:

- | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 2. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 3. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 4. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 5. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 6. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 7. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 8. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |