

## 2. Exercícios de Filas de Espera

### Exercício 2.1 (M/M/1)

Num supermercado, o modelo de chegadas segue aproximadamente uma distribuição de Poisson com uma taxa média de 10 clientes por hora. O tempo médio que leva a listar e calcular o total das compras do cliente na (única) caixa é 4.5 minutos, e pode dizer-se que esse tempo segue uma distribuição exponencial negativa. Nestas condições, determine:

- A probabilidade de a caixa estar ocupada;
- A probabilidade de se formar uma fila;
- A probabilidade de o número de pessoas na fila exceder cinco;
- O comprimento médio da fila, e o número médio de clientes no sistema;
- O tempo médio de espera de um cliente (na fila), e no sistema (fila+caixa).
- Se, pela aplicação das técnicas de estudo do trabalho, o valor médio do tempo de serviço for reduzido para 4 minutos, quanto tempo deverão, em média, esperar os clientes no sistema, e qual a probabilidade de um cliente ter que esperar mais do que 10 minutos para ser atendido?

### Exercício 2.2 (M/M/1, decisão)

Um operador foi contratado para reparar máquinas que avariaram a uma taxa média de três por hora. As avarias seguem uma distribuição no tempo que pode ser considerada do tipo Poissoniana. O tempo não produtivo em qualquer máquina está avaliado como um custo aproximado de 5 U.M. por hora.

Dispõe-se de dois métodos de reparação. O método A é um método lento que custa 3 U.M./hora e que permite reparar uma máquina num tempo exponencialmente distribuído com média igual a 15 minutos. O método B é semelhante ao anterior mas mais rápido, custa 5 U.M./hora e permite reparar uma máquina num tempo médio de apenas 10 minutos.

Supondo que o operador estará habilitado a usar qualquer um dos dois métodos de reparação, qual deles lhe recomenda que implemente?

### Exercício 2.3 (M/M/1 e M/M/2 equivalente, análise crítica e decisão)

O serviço de urgência dum pequeno hospital tem permanentemente um médico de serviço, o qual despende em média 20 minutos por cada tratamento. A variabilidade do tempo do médico é proporcional a esta média, podendo assumir-se como sendo exponencialmente distribuído. Os doentes chegam ao serviço de urgência a uma taxa média de 2.4 por hora, segundo uma distribuição de Poisson.

- Determine (em médias) que fração do tempo do médico é gasta a prestar serviço de urgência, e quanto tempo tem de esperar um doente antes que seja atendido.

Sabe-se agora que o hospital pretende melhorar o seu nível de serviço nas urgências através da contratação de um segundo médico (sistema  $M/M/2$ ) ou, em alternativa, de um enfermeiro para assistir o médico já existente. No segundo caso, o enfermeiro permitiria formar uma equipa médica ( $M/M/1$ ) capaz de reduzir o tempo médio de atendimento para apenas 10 minutos (ou seja, metade do tempo médio atual).

- b) Para cada uma destas duas alternativas, refaça os cálculos que efetuou na alínea a), e use-os como argumento para sugerir ao diretor do hospital a decisão mais favorável à sua pretensão.
- c) Tente justificar por que motivo o tempo médio de espera no sistema  $M/M/2$  (1ª alternativa) é menor do que o tempo médio de espera no sistema de equipa  $M/M/1$  (2ª alternativa), não obstante as taxas médias de chegada e de serviço serem iguais nos dois casos.

#### **Exercício 2.4 ( $M/M/S$ , análise crítica e decisão)**

Uma moderna estação de correios pretende dimensionar e reorganizar o seu atendimento ao público, pretendendo, no entanto, manter o mesmo esquema de atendimento em que todos os funcionários atendem todo o tipo de clientes, pedidos de informação, reclamações, aquisição de selos, vales postais, etc.

Para isso, recolheu-se informação sobre o número de chegadas de clientes e tempos de atendimento, num intervalo prefixado de 10 minutos. Um tratamento estatístico permitiu concluir que as chegadas são satisfatoriamente representadas por um processo Poissoniano de taxa 15.6 chegadas por período de 10 minutos. Um tratamento idêntico permitiu concluir que os tempos de serviço seguem uma distribuição exponencial negativa com média igual a 66.24 segundos.

- a) Atualmente, a estação funciona com 2 servidores. Nestas condições, analise o desempenho do sistema de espera calculando nomeadamente a intensidade de tráfego, as taxas de atividade e inatividade do sistema, bem como as quatro medidas de desempenho das relações de Little ( $L$ ,  $L_q$ ,  $W$  e  $W_q$ ).
- b) Sabendo que o custo de cada funcionário é de 7.5 €/hora, e supondo que o custo de espera dos utentes é, em média, igual ao custo dos funcionários, que recomendação se pode fazer relativamente ao número ótimo de servidores ( $S^*$ ) no atendimento ao público?
- c) Faça uma análise de sensibilidade da solução indicada na alínea anterior, determinando a gama de valores admissíveis do custo de espera dos utentes para a qual a mesma recomendação prevalece. Teça os comentários que achar oportunos.

(\*) Adaptado de “L. Valadares Tavares et al., *Investigação Operacional*, McGraw-Hill, 1996”.

#### **Exercício 2.5 ( $M/M/S/(N)$ , otimização)**

Numa grande instalação fabril existem 25 máquinas idênticas que avariaram a uma taxa de 2 avarias por hora de funcionamento e máquina. O tempo médio de reparação é de 6 minutos. Pretende-se determinar o número ótimo de mecânicos reparadores, admitindo que o custo de inatividade de uma máquina é 100 € enquanto o custo horário de um mecânico é 10 €.

(\*) Retirado de “L. Valadares Tavares et al., *Investigação Operacional*, McGraw-Hill, 1996”.

**Exercício 2.6 (M/M/1/K, decisão)**

Um porto que recebe navios tem uma única estação de descarga (móvel) a qual permite descarregar, em média, 5 navios por dia. O porto tem um cais que permite a acostagem de apenas 2 navios, pelo que, quando o cais está ocupado, navios adicionais que pretendam acostar são desviados para outro porto, acarretando um custo de 80 mil euros por navio desviado. A imobilização de navios no porto tem um custo de 48 mil euros por navio por dia.

As chegadas de navios podem ser consideradas Poissonianas, com uma taxa de 3 navios/dia, sendo os tempos de descarga exponenciais negativos.

- a) Qual a probabilidade de um navio ter que ser desviado para outro porto?
- b) Avalie a viabilidade económica de ampliar o cais de modo a poder receber 3 navios, considerando que a essa ampliação corresponde um encargo adicional de 5 mil euros por dia.

(\*) Retirado de “L. Valadares Tavares et al., *Investigação Operacional, McGraw-Hill, 1996*”.

**Exercício 2.7 (Método analítico vs. Simulação de filas)**

Um porto tem um cais capaz de servir navios de carga. Os navios chegam ao cais segundo uma distribuição de média 12 horas e desvio padrão de 8 horas.

Se um tempo médio de descarga de  $\bar{x}$  horas for mantido, o custo semanal de operação do equipamento de descarga é de  $(113400/\bar{x})$  U.M..

O tempo atual de descarga é de 10 horas, com um desvio padrão de 5 horas, e pensa-se que a variabilidade do tempo de descarga é proporcional ao tempo médio de descarga.

São pagas indemnizações pelas autoridades portuárias aos armadores, se os barcos forem mantidos à espera antes da carga, a uma taxa de 100 U.M. por barco por hora de espera.

Determine o tempo ótimo de descarga, considerando cada uma das seguintes aproximações:

- a)  $M/M/1$ ;
- b)  $D/M/1$ ;
- c)  $M/D/1$ ;
- d)  $D/D/1$ ;
- e)  $Vários E_k/E_l/1$ .
- f) Compare os resultados obtidos para os diferentes sistemas admitidos.

**Exercício 2.8 (Rede de filas Poissonianas)**

Considere um serviço composto por uma a três tarefas distintas (1, 2 e 3), representado pela figura em baixo. Cada tarefa pode ser realizada por um ou mais servidores (estatisticamente iguais).

Os pedidos mais frequentes ( $\gamma_1=1.5$  pedidos/u.tempo) requerem a realização da tarefa 1 uma única vez, da tarefa 2 pelo menos uma vez, e, eventualmente, da tarefa 3 uma ou mais vezes.

Os pedidos menos frequentes ( $\gamma_3=0.5$  pedidos/u.tempo) requerem a realização da tarefa 3 pelo menos uma vez, e eventualmente da tarefa 2 uma ou mais vezes.

As eventualidades das transições estão representadas pelos valores das respectivas probabilidades, entre parênteses.

O tempo médio de execução de cada um dos servidores das tarefas 1, 2 e 3 é de 0.5, 0.5 e 1.25 unidades de tempo, respetivamente. Considere que todos estes tempos são exponencialmente distribuídos. Considere também que as taxas dos pedidos são Poissonianas.

- Determine a taxa líquida de pedidos de cada tarefa.
- Dimensione o sistema em termos do número mínimo de servidores necessários para realizar cada uma das tarefas, de forma a não ter, em cada caso, taxas de ocupação superiores a 85%.
- Considerando esses números mínimos de servidores, estime os tempos globais médios de espera e atendimento de cada um dos tipos de pedidos (mais frequentes e menos frequentes).

