Mestrado Integrado em Engenharia Informática Introdução aos Sistemas Dinâmicos 2018/19

dinâmica na natureza —

Exercício 1. Resolva o problema colocado por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci) no seu Liber Abaci em 1202:

"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Exercício 2. Em 1860, Thomas Austin introduziu 24 coelhos Europeus na Austrália. Determine a população de coelhos na Austrália em 1870 e em 1880, usando o modelo de Fibonacci.

Exercício 3. O outro efeito borboleta. Determine a população de mariposas beija-flor nos próximos anos na Costa Rica, supondo que existem atualmente  $P_0$  mariposas beija-flor e que a taxa relativa de crescimento anual é 1.06.

Exercício 4. Competição: o modelo logístico. $^2$  Dada uma população inicial de borboletas  $P_0$ , designemos por  $P_n$  a população de borboletas no ano n. Suponhamos que a evolução da população de borboletas é dada por uma lei do tipo

$$P_{n+1} = \lambda P_n (1 - P_n), \quad \lambda \in [0, 4].$$

- 1. Moste que o caso  $\lambda = 1$  conduz à extinção da população de borboletas.
- 2. Atribua valores a  $P_0$  e a  $\lambda$  e observe o comportamento da trajetória de  $P_0$ . Consegue fazer previsões sobre o comportamento assimptótico de  $P_n$ ?

Exercício 5. **Esforços heróicos com raízes babilónicas.** Um problema prático, natural nas sociedades baseadas na agricultura, como os Babilónios ou os Egípcios, é:

construir um quadrado dada a sua área.

"Construir" um quadrado quer dizer determinar a medida do seu lado. Assim, se A denota a área do quadrado, o lado  $\ell$  será o comprimento tal que  $\ell \times \ell = A$ , ou seja, a raiz quadrada de A.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Esta é uma referência à afirmação de Edward Lorenz de que o bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas.

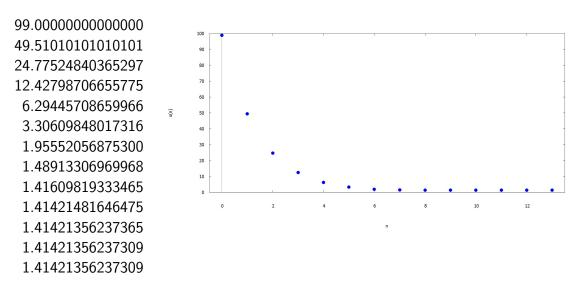
<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Foi introduzido em 1845 pelo matemático belga Pierre François Verhulst. Foi tornado popular por Robert May no seu famoso artigo *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261 (1976) 459-467.

Provavelmente o algoritmo mais antigo de que há registo histórico é o algoritmo babilónico ( $\sim$  2000 a.C.) para calcular raízes quadradas: se desejamos encontrar a raiz quadrada de um número positivo A, começamos com alguma aproximação  $x_0 > 0$  e definimos recursivamente

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{A}{x_n} \right). \tag{1}$$

Este é um algoritmo muito eficiente que converge de modo extremamente rápido. Aproxime  $\sqrt{2}$  usando o "algoritmo" dos Babilónios.

**Experiências**. Suponhamos que queremos encontrar a raiz quadrada de 2 e que começamos com uma aproximação verdadeiramente "ingénua"  $x_0 = 99$ . Aplicando o "algoritmo" dos Babilónios, poucas iterações são suficientes para que o resultado estabilize:



"Algoritmo" dos Babilónios. A tábua YBC 7289, da Coleção da Babilónia de Yale (New Heaven) (Figura 1), é uma das tábuas matemáticas dos Babilónios (1700 a.C.) mais conhecidas. O valor 1; 24, 51, 10 (em notação sexagesimal) aparece nessa tábua como aproximação para a raiz quadrada de 2. É possível que os Babilónios tenham usado o seguinte procedimento iterativo. Uma primeira aproximação é 3/2=1; 30. Porque este número é superior ao valor desejado e é, portanto, inferior a 2/(1;30)=1;20, uma segunda aproximação será a média entre estes dois valores, ou seja, 1; 25. Repetindo o processo, uma terceira e melhor aproximação será a média entre 1; 25 e 2/(1;25)=1;24,42,21, ou seja, 1; 24,51,10.

Interpretação geométrica e algoritmo. Se  $b_1$  é uma primeira conjetura para o lado do quadrado, construimos o retângulo de base  $b_1$  e área A. A sua altura deve ser  $a_1 = A/b_1$ . Se  $b_1$  é diferente de  $a_1$ , o retângulo não é um quadrado!, e somos obrigados a melhorar a nossa estimativa. Uma segunda e melhor conjetura pode ser uma base  $b_2$  igual à média aritmética  $(b_1 + a_1)/2$ . A nova altura será então  $a_2 = A/b_2$ . Acontece que também estes dois números,  $b_2$  e  $a_2$ , são diferentes, e de facto aproximam o valor desejado por excesso e por defeito, respetivamente. Iterando o procedimento, a sequência de estimativas para a base procurada é definida pela equação recursiva

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \left( b_n + \frac{A}{b_n} \right)$$

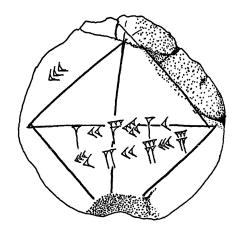


Figura 1: Tábua Babilónica YBC 7289

que supostamente fornece aproximações cada vez melhores do lado do quadrado.

O **Método de Newton** é uma generalização do "algoritmo" dos Babilónios para estimar os zeros de uma função P, e que se reduz a (1) quando  $P(x) = x^2 - A$ . É dado pela equação recursiva

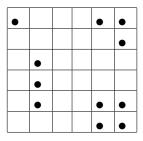
$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}. (2)$$

Se tomarmos  $P(x) = x^2 - A$  então P'(x) = 2x e a expressão do lado direito de (2) é

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

e, portanto, (2) reduz-se a (1).

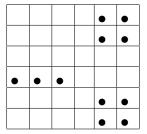
Exercício 6. [**O Jogo da Vida.**] O Jogo da Vida, inventado pelo matemático John Conway no final dos anos setenta (ver www.math.com/students/wonders/life/life.html) pretende modelar uma dada população que viva em localizações fixas. Cada organismo da população é um ponto de uma rede de dimensão  $n \times n$ , e pode ter vários estados de vida. Na versão mais simples cada organismo só pode ter dois estados: "presente" ou "ausente". Codificamos os estados com cores: branco para ausente, preto para presente.



A regra do jogo é que a população muda em estados de tempo discretos de uma forma particular. Por exemplo a regra do jogo pode ser a seguinte.

- 1. Uma célula morta com exatamente três vizinhos vivos torna-se uma célula viva (nascimento).
- 2. Uma célula viva com dois ou três vizinhos vivos permanece viva (sobrevivência).
- 3. Em todos os outros casos, uma célula morre ou permanece morta (solidão ou excesso de população).

Consequentemente o próximo estado é o seguinte:



Jogo da Vida, estado seguinte

- 1. Jogue o próximo movimento no Jogo da Vida.
- 2. Num tabuleiro de dimensão  $6 \times 6$ , escolha um estado inicial para o Jogo da Vida, e jogue alguns movimentos. Que conclusões consegue tirar?
- 3. Efetue experiências com pequenas configurações de células vivas no Jogo da Vida. Descreve o tipo de comportamento assimptótico encontrado.

Referência para um applet: www.bitstorm.org/gameoflife/