LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho

Dep. Matemática e Aplicações

2017/2018

Notação 14: Normalmente, usaremos CP para abreviar Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

Definição 15: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído

a) pelas *variáveis proposicionais*, que formam um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) pelos *conetivos proposicionais* $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados, respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*;

c) pelos parêntesis esquerdo e direito (,), chamados *símbolos de pontuação*.

Usamos os símbolos $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$) para representar as variáves proposicionais.

Exemplo 16: As sequências de símbolos $\perp p_{20})$ e (p_1) (ambas de comprimento 3) são palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$. A sequência de símbolos p_1 (de comprimento 1) é também uma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$, sendo diferente da palavra (p_1).

Definição 17: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$.

Exemplo 18: A palavra $((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$ é uma fórmula do CP. De facto,

i) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$ por **a)**;

ii) $(\neg \perp) \in \mathcal{F}^{CP}$ por **i)** e por **c)**;

iii) $p_6, p_0 \in \mathcal{F}^{CP}$ por **b)**;

iv) $(p_6 \rightarrow p_0) \in \mathcal{F}^{CP}$ por **iii)** e por **d)**;

v) $((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0)) \in \mathcal{F}^{CP}$ por **ii)**, **iv)** e por **d)**

As palavras $\perp p_{20})$ e (p_1) não são fórmulas do CP. De facto, nenhuma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$ de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Notação 19: Os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações são muitas vezes omitidos. Por exemplo, a palavra

$$(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$$

será utilizada como uma representação da fórmula

$$((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp).$$

Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Teorema 20 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se:

a) $P(\perp)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Basta particularizar o Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva ao caso da definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$. $\square$

Observação 21: Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP*.

Exemplo 22: Mostremos que nenhuma fórmula do CP tem comprimento 0, 2 ou 3, com recurso ao Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade "o comprimento de φ é distinto de 0, de 2 e de 3", para $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) Seja $\psi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}$. Então, ψ é uma palavra de comprimento 1, sendo ψ a sua única letra. Assim, $P(\psi)$ é válida, para todo $\psi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}$.

b) Seja $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $P(\psi)$ é válida, *i.e.*, tal que o seu comprimento é distinto de 0, de 2 e de 3 (HI). Note-se que $(\neg\psi)$ é obtida por cocatenação das palavras (, $\neg$, ψ e). Logo, o comprimento de $(\neg\psi)$ é obtido somando 3 ao comprimento de ψ, que, por HI, é 1 ou maior que 3. Logo, $P((\neg\psi))$ é válida.

c) Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$ são válidas (HI) e seja $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Note-se que $(\psi_1 \square \psi_2)$ é obtida por cancatenação das palavras (, ψ_1, $\square$, ψ_2 e). Assim, o comprimento de $(\psi_1 \square \psi_2)$ é obtido adicionando 3 à soma dos comprimentos de ψ_1 e de ψ_2, sendo esta, por HI, não inferior a 2. Portanto,$P((\psi_1 \square \psi_2))$ é válida.

De **a)**, **b)** e **c)**, pelo Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP, $P(\varphi)$ é válida para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Observação 23: A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é determinista e, por esta razão, admite um princípio de recursão estrutural. Uma aplicação deste princípio para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP*.

Definição 24: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem.

Exemplo 25: $var((p_0 \wedge p_1) \rightarrow (\neg p_0 \vee p_2)) = \{p_0, p_1, p_2\}$

$$var((p_0 \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) = \{p_0\}$$

Observação 26: $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\bot) = \emptyset$;

b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi\Box\psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 27:

$$\begin{array}{rl} & var(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee \bot)) \\ = & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \bot) \\ = & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\bot) \\ = & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\ = & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = & \{p_1, p_2\}. \end{array}$$

Definição 28: Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ é a função que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ.

Exemplo 29: $(\neg p_1 \to (p_2 \land \perp))[p_0 \lor p_1/p_2] = \neg p_1 \to ((p_0 \lor p_1) \land \perp)$

Observação 30: $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \Box \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\Box \in \{\land, \lor, \to, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 31:

a)
$$\begin{array}{rl} & (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1/p_2]) \\ = & \neg p_1 \rightarrow ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp) \end{array}$$

b) Verifique que $(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_0] = (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$. Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue (observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$).

Proposição 32: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) $\square$

Definição 33: A função *subf* : $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $subf(\varphi \Box \psi) = \{\varphi \Box \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Exemplo 34:

$$\begin{aligned} & subf(\neg p_1 \rightarrow p_2) \\ = \; & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\ = \; & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\ = \; & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = \; & \{\neg p_1 \rightarrow p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}. \end{aligned}$$

Proposição 35: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\psi = \varphi$;
b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg\psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1;
c) existe um conetivo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e existem fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1 \square \psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2.

Dem.: Por análise de casos em ψ.
Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$. Então,

$$\varphi \text{ subfórmula de } \psi \text{ sse } \varphi \in \textit{subf}(\psi) \text{ sse } \varphi \in \{\psi\} \text{ sse } \varphi = \psi.$$

Assim, supondo que φ é uma subfórmula de ψ, teremos que a condição **a)** é satisfeita. Reciprocamente, uma vez que $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$, as condições **b)** e **c)** não são satisfeitas, pelo que teremos que ter $\varphi = \psi$, donde, pela sequência de equivalências anterior, segue que φ é uma subfórmula de ψ.
Restantes casos (caso $\psi = \neg\psi_1$, para algum $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, e caso $\psi = \psi_1 \square \psi_2$, para algum $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para alguns $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$): exercício. $\square$