# Programação Linear - dualidade

## Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

22 de outubro de 2019

# Dualidade

## antes

- A programação linear visa seleccionar as actividades que melhor usam os recursos disponíveis.

## Guião

- A um problema de programação linear, podemos associar um problema dual, um problema equivalente, visto de outra perspectiva.
- As variáveis de decisão do problema dual têm um significado económico, relacionado com o valor dos recursos.
- O problema dual visa encontrar o valor dos recursos usados nas actividades.

## depois

- A teoria da dualidade fornece limites para o valor da solução óptima, com utilização, por exemplo, em programação inteira.

# Conteúdo

- Problema dual
- Informação primal e dual num quadro simplex
- Significado económico das variáveis duais
- Relação entre os problemas primal e dual
  - Teorema fraco da dualidade
  - Teorema forte da dualidade
  - Teorema da folga complementar
- Método simplex dual

# Motivação: um limite superior combinando restrições

- Multiplicando as funções lineares das restrições por valores não-negativos, e somando-as, pode obter-se a função objectivo.

Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
\max z = & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & & & \\
 & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 & (y_1) \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & \leq & 150 & (y_2) \\
 & 2x_1 & & 1x_2 & & & \leq & 20 & (y_3) \\
 & -1x_1 & & & & & \leq & 0 & (u_1) \\
 & & & -1x_2 & & & \leq & 0 & (u_2) \\
 & & & & & -1x_3 & \leq & 0 & (u_3) \\
\hline
 & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & \leq & LS &
\end{array}
$$

- Do mesmo modo, do lado direito, obtém-se um limite superior (designado por $LS$) para o valor do óptimo do problema de maximização.

# Exemplos

Exemplo 1: o valor do óptimo não pode exceder 1200:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrr}
\max z = & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & & & \\
 & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 & (30) \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & \leq & 150 & (0) \\
 & 2x_1 & & 1x_2 & & & \leq & 20 & (0) \\
 & -1x_1 & & & & & \leq & 0 & (0) \\
 & & & -1x_2 & & & \leq & 0 & (10) \\
 & & & & & -1x_3 & \leq & 0 & (50) \\
\hline
 & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & \leq & 1200 &
\end{array}
$$

Exemplo 2: ou melhor, o valor do óptimo não pode exceder 500:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrr}
\max z = & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & & & \\
 & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 & (5) \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & \leq & 150 & (0) \\
 & 2x_1 & & 1x_2 & & & \leq & 20 & (15) \\
 & -1x_1 & & & & & \leq & 0 & (5) \\
 & & & -1x_2 & & & \leq & 0 & (0) \\
 & & & & & -1x_3 & \leq & 0 & (0) \\
\hline
 & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & \leq & 500 &
\end{array}
$$

# Qual o modelo para encontrar o menor limite superior?

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max z = & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & & & \\
 & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 & (y_1) \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & \leq & 150 & (y_2) \\
 & 2x_1 & & 1x_2 & & & \leq & 20 & (y_3) \\
 & -1x_1 & & & & & \leq & 0 & (u_1) \\
 & & & -1x_2 & & & \leq & 0 & (u_2) \\
 & & & & & -1x_3 & \leq & 0 & (u_3) \\
\hline
 & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & \leq & LS &
\end{array}
$$

# Qual o modelo para encontrar o menor limite superior?

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max z = & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & & & \\
 & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 & (y_1) \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & \leq & 150 & (y_2) \\
 & 2x_1 & & 1x_2 & & & \leq & 20 & (y_3) \\
 & -1x_1 & & & & & \leq & 0 & (u_1) \\
 & & & -1x_2 & & & \leq & 0 & (u_2) \\
 & & & & & -1x_3 & \leq & 0 & (u_3) \\
\hline
 & 30x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & \leq & LS &
\end{array}
$$

O seguinte problema designa-se por *problema dual*:

$$
\begin{array}{rl}
\min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\
\text{suj. a} & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 30 \\
 & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - u_2 = 20 \\
 & 2y_1 + 1y_2 \qquad\quad - u_3 = 10 \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0
\end{array}
\quad \equiv \quad
\begin{array}{rl}
\min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\
\text{suj. a} & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30 \\
 & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20 \\
 & 2y_1 + 1y_2 \qquad\quad \geq 10 \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{array}
$$

Há relações muito fortes entre o problema dual e o original!

# Problema Dual

- Dado um problema *(primal)* de programação linear:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{cx} \\ \text{suj. a} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

  sendo $\mathbf{A} \in \mathrm{IR}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathrm{IR}^{m \times 1}, \mathbf{c} \in \mathrm{IR}^{1 \times n}, \mathbf{x} \in \mathrm{IR}^{n \times 1}$,

- o *problema dual* é construído associando a cada restrição $i$ do problema (primal), $i = 1, \ldots, m$, uma variável de decisão dual $y_i$ :

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{yb} \\ \text{suj. a} & \mathbf{yA} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

  sendo $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m) \in \mathrm{IR}^{1 \times m}$ um vector de *variáveis duais*.

# Exemplo

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| $\begin{array}{ll} \max & \mathbf{cx} \\ \text{suj. a} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$ | $\begin{array}{ll} \min & \mathbf{yb} \\ \text{suj. a} & \mathbf{yA} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$ |
| $\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj. a} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad\quad \leq 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} \min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\ \text{suj. a} & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20 \\ & 2y_1 + 1y_2 \qquad\quad \geq 10 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{array}$ |

Para construir o problema dual, o problema original deve estar numa das *Formas*:

- Problema de *max* com todas as restrições de $\leq$.
- Problema de *min* com todas as restrições de $\geq$.

- O problema dual do problema dual é o problema primal.

- No que se segue, designa-se o problema de maximização por primal.

# Forma canónica e solução do problema dual

## Transformação na forma canónica

$$\begin{array}{rcl} \min z & = & yb \\ & & yA \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \min z & = & yb \\ & & yA - u = c \\ & & y, u \geq 0 \end{array}$$

sendo $u \in \mathrm{IR}_{+}^{1\times n}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $c \in \mathrm{IR}^{1\times n}$.

## Solução do problema dual é:

- variáveis de decisão do dual: $\mathbf{y} = c_B B^{-1}$,
- variáveis de folga do dual: $\mathbf{u} = c_B B^{-1} A - c \qquad (\mathbf{u} = yA - c)$.
- Valor da função objectivo do dual: $yb = (c_B B^{-1})b$.

- Solução do problema dual é admissível quando $\mathbf{y}, \mathbf{u} \geq 0$.

# Valores das variáveis duais no quadro simplex

**O quadro simplex fornece os valores das:**

- variáveis de decisão do dual: $c_B B^{-1} = \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$,
- variáveis de folga do dual: $c_B B^{-1} A - c = \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0)$,
- e da função objectivo da solução dual: $yb = (c_B B^{-1}) b = 500$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| | **5** | **0** | **0** | **5** | **0** | **15** | 500 |

| Modelo dual | Verificação da solução dual |
|---|---|
| min $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ | min $40(5) + 150(0) + 20(15) = 500$ |
| suj. $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ | suj. $1(5) + 2(0) + 2(15) \geq 30$ (folga $u_1 = 5$) |
| $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ | $1(5) + 2(0) + 1(15) \geq 20$ (folga $u_2 = 0$) |
| $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ | $2(5) + 1(0) \geq 10$ (folga $u_3 = 0$) |
| $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$ | |

# Variáveis duais têm um significado económico

- O valor da variável dual $(c_B B^{-1})_i$ é o *preço-sombra* do recurso $i$.

Quadro Óptimo

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | 0 | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| $z$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

*Preço-sombra*: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso,

medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.

- $(c_B B^{-1})_i = \delta z / \delta(-s_i)$, ou seja,
- o valor da função objectivo aumenta $\delta z / \delta(-s_i)$ unidades por cada unidade adicional do recurso $i$.
- A unidade dimensional de $\delta z / \delta(-s_i)$ é: [unidade da função objectivo / unidade de recurso].

# Preço-sombra dos recursos 1 e 2

Quadro Óptimo

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | 0 | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| $z$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z/\delta(-s_1) = +5$ (o valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).

- O preço-sombra do recurso 2 é $\delta z/\delta(-s_2) = +0$ (variável dual com valor nulo).
- Não há interesse em ter unidades adicionais de recurso 2: o aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo, só aumenta a folga $s_2$.

# Como se forma o valor da solução óptima, $c_B B^{-1} b$?

Perspectiva primal:

**$c_B \ (B^{-1}b) =$ f(valor das vars decisão ($c_{ij}$), nível das vars decisão ($x_{ij}$))**

exemplo:

$$c_B \ (B^{-1}b) \ = \ \boxed{\begin{matrix} 10 & 0 & 20 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

Perspectiva dual:

**$(c_B B^{-1}) \ b =$ f(valor dos recursos ($y_i$), nível dos recursos ($b_i$))**

exemplo:

$$(c_B B^{-1}) \ b \ = \ \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

# Como se forma o valor da solução óptima, $c_B B^{-1} b$?

Perspectiva primal:

**$c_B \ (B^{-1}b) =$ f(valor das vars decisão ($c_{ij}$), nível das vars decisão ($x_{ij}$))**

exemplo:

$$c_B \ (B^{-1}b) \ = \ \boxed{\begin{matrix} 10 & 0 & 20 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

Perspectiva dual:

**$(c_B B^{-1}) \ b=$ f(valor dos recursos ($y_i$), nível dos recursos ($b_i$))**

exemplo:

$$(c_B B^{-1}) \ b \ = \ \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

# Teorema fraco da dualidade

**Teorema**

*Se $\widehat{x}$ for uma solução válida do problema primal (max.) e $\widehat{y}$ for uma solução válida do problema dual (min.), então*

$$c\widehat{x} \leq \widehat{y}b$$

**Prova:**

- Se $\widehat{y}$ é uma solução válida do dual, então $\widehat{y} \geq 0$, e podemos pré-multiplicar por $\widehat{y}$ as restrições $A\widehat{x} \leq b$, obtendo $\widehat{y}A\widehat{x} \leq \widehat{y}b$.
- Se $\widehat{x}$ é uma solução válida do primal, então $\widehat{x} \geq 0$, e podemos pós-multiplicar por $\widehat{x}$ as restrições $\widehat{y}A \geq c$, obtendo $\widehat{y}A\widehat{x} \geq c\widehat{x}$.
- Conjugando as duas relações, obtém-se $c\widehat{x} \leq \widehat{y}b$. $\square$

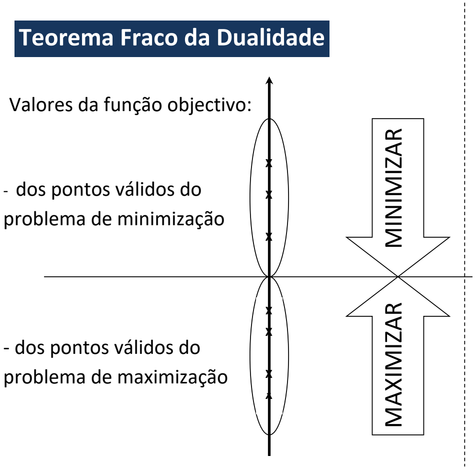
*i.e.*, qualquer solução válida do problema de maximização tem um valor de função objectivo menor do que ou igual a qualquer solução válida do problema de minimização.

# Teorema fraco da dualidade: exemplo

| PRIMAL | | DUAL | |
|---|---|---|---|
| max | $cx$ | min | $yb$ |
| | $Ax \leq b$ | | $yA \geq c$ |
| | $x \geq 0$ | | $y \geq 0$ |
| max | $30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ | min | $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ |
| suj. | $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ | suj. | $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ |
| | $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ | | $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ |
| | $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ | | $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ |
| | $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$ | | $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$ |

- $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)^t = (10, 0, 0)^t$ é um ponto válido do problema primal.
- $(\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3) = (30, 0, 0)$ é um ponto válido do problema dual.
- $cx = 30(10) + 20(0) + 10(0) = \mathbf{300}$
- $yb = 40(30) + 150(0) + 20(0) = \mathbf{1200}$
- este par de pontos verifica o teorema fraco da dualidade: $cx \leq yb$, *i.e.*, $\mathbf{300} \leq \mathbf{1200}$.

# Teorema fraco da dualidade: ilustração gráfica



# Teorema fraco da dualidade: caso valor óptimo ilimitado

**Corolário (do teorema fraco da dualidade)**

*Se o problema primal de maximização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema dual é impossível.*

**Prova:**

- Não pode haver nenhuma solução admissível do problema dual com um valor de função objectivo maior do que o valor da solução óptima ilimitada do problema primal,
- porque os coeficientes da função objectivo do problema dual são finitos.
- Portanto, o domínio do dual é vazio, e o problema dual é impossível.

Usando o mesmo argumento, se o problema dual de minimização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema primal é impossível.

# Teorema forte da dualidade

**Teorema (Teorema Forte da Dualidade)**

*Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, i.e.,*

$$cx^* = y^* b$$

sendo

- $x^*$ : solução óptima do problema primal
- $y^*$ : solução óptima do problema dual

**Prova:** O quadro simplex óptimo apresenta soluções válidas para o problema primal e para o problema dual com o mesmo valor <u>finito</u> de função objectivo:

$$y^* b = (c_B B^{-1}) b = c_B (B^{-1} b) = cx^*.$$

# Teorema forte da dualidade: quadro óptimo

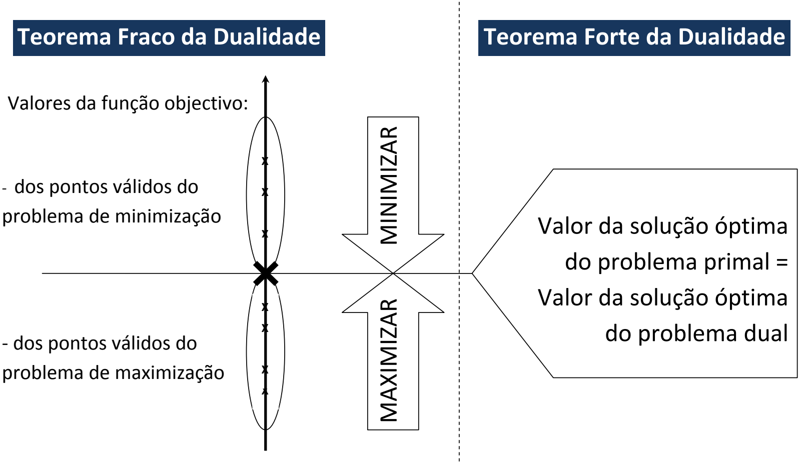
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

- Solução é válida para o problema primal se:
  - variáveis de decisão e de folga do primal: $B^{-1}b \geq 0$,
  - ou seja, todos os elementos do lado direito do quadro simplex não-negativos.
- Solução é válida para o problema dual se:
  - variáveis de decisão do dual: $y = c_B B^{-1} \geq 0$
  - variáveis de folga do dual: $u = c_B B^{-1} A - c \geq 0$,
  - ou seja, todos os elementos da linha da função objectivo do quadro simplex não-negativos.

- No quadro óptimo, há pontos válidos dos problemas primal e do dual que têm o mesmo valor de função objectivo.

$\therefore$ São as soluções óptimas dos problemas respectivos.

# Teorema forte da dualidade: ilustração gráfica



# Teorema forte da dualidade: exemplo

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| $\max \quad cx$ <br> $Ax \leq b$ <br> $x \geq 0$ | $\min \quad yb$ <br> $yA \geq c$ <br> $y \geq 0$ |
| max $\quad 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ <br> suj. $\quad 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ <br> $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ <br> $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ <br> $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$ | min $\quad 40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ <br> suj. $\quad 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ <br> $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ <br> $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ <br> $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$ |

- $x^* = (x_1, x_2, x_3)^t = (0, 20, 10)^t$ é o ponto óptimo do problema primal.
- $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$ é o ponto óptimo do problema dual.
- $cx^* = 30(0) + 20(20) + 10(10) = \mathbf{500}$
- $y^* b = 40(5) + 150(0) + 20(15) = \mathbf{500}$
- o óptimo é finito, e verifica o teorema forte da dualidade: $cx^* = y^* b = \mathbf{500}$.

# Teorema da folga complementar

**Teorema**

*No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.*

(ver no diapositivo seguinte a correspondência entre variáveis primais e duais)

**Prova:**

- No óptimo, $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$. Há duas equações:

$$\begin{cases} y^*Ax^* & = & y^*b \\ cx^* & = & y^*Ax^* \end{cases} \quad \begin{cases} y^*(b-Ax^*) & = & 0 \\ (y^*A-c)x^* & = & 0 \end{cases}$$

- Na primeira equação, $(b-Ax^*) = s^*$ é o vector das variáveis de folga do problema primal.
- Para o produto escalar $y^*s^* = 0$, como $y^* \geq 0$ e $s^* \geq 0$,
- se $y_i^* > 0 \Rightarrow s_i^* = 0$; se $s_i^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

O mesmo resultado aplica-se à segunda equação $(y^*A-c)x^* = 0$.

# Correspondência entre variáveis primais e duais

**Regra de correspondência:**

(var. folga de uma restrição) $\Leftrightarrow$ (var. decisão dual associada à restrição).

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| $\max\ 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ | $\min\ 40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ |
| suj. $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40$ | suj. $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 30$ |
| $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150$ | $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - u_2 = 20$ |
| $2x_1 + 1x_2 + s_3 = 20$ | $2y_1 + 1y_2 - u_3 = 10$ |
| $x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0$ | $y_1,\ y_2,\ y_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0$ |

| Correspondência entre Variáveis | | |
|---|---|---|
| PRIMAL | | DUAL |
| var. folga | $\left\{ \begin{array}{c} s_1 \Leftrightarrow y_1 \\ s_2 \Leftrightarrow y_2 \\ s_3 \Leftrightarrow y_3 \end{array} \right\}$ | var. decisão |
| var. decisão | $\left\{ \begin{array}{c} x_1 \Leftrightarrow u_1 \\ x_2 \Leftrightarrow u_2 \\ x_3 \Leftrightarrow u_3 \end{array} \right\}$ | var. folga |

# Teorema da folga complementar: exemplo

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

Folga complementar no quadro simplex óptimo:

- Para uma variável básica do problema primal $\geq 0 \Rightarrow$ coeficiente da linha da função objectivo (variável dual correspondente) é nulo.
- Exemplo: $x_2 = 20, u_2 = 0$, e $x_2 u_2 = 0$.
- Para um coeficiente da linha da função objectivo (variável do problema dual) $\geq 0 \Rightarrow$ variável não-básica primal correspondente é nula.
- Exemplo: $y_3 = 15, s_3 = 0$, e $y_3 s_3 = 0$.

# Quadro de Síntese

Relação entre os valores dos óptimos do primal e do dual

| Primal | | Dual |
|---|---|---|
| óptimo finito | $\Leftrightarrow$ | óptimo finito |
| óptimo ilimitado | $\Rightarrow$ | problema impossível |
| problema impossível | $\Rightarrow$ | óptimo ilimitado<br>problema impossível |

# Método simplex dual

- Estratégia
- Algoritmo
- Exemplo

# Método simplex dual: estratégia

**Teorema: um quadro simplex é óptimo se a solução:**

- for admissível para o problema primal,
- for admissível para o problema dual, e
- obedecer ao teorema da folga complementar.

**ou seja: um quadro simplex é óptimo se:**

- os coeficientes do lado direito forem todos $\geq 0$,
- os coeficientes da linha da função objectivo forem
  - todos $\leq 0$ num problema de minimização, ou
  - todos $\geq 0$ num problema de maximização,
- a matriz identidade existir.

**Estratégia:**

- Quando existe uma solução admissível para o problema dual, o *algoritmo simplex dual* mantém a solução admissível para o dual, e procura encontrar uma solução admissível para o primal.

# Método simplex dual: como começar?

**Para obter a matriz $I_{m\times m}$ no quadro simplex:**

- dado um problema de minimização em que $c \geq \widetilde{0}$:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & Ax - u = b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

- resolver:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & -Ax + u = -b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

**O quadro simplex irá apresentar:**

- uma *solução (primal)* não-admissível, porque pode haver elementos do lado direito com valores $< 0$.
- uma *solução dual* admissível.

# Exemplo

- Dado o quadro simplex sem uma matriz identidade ($I_{m\times m}$) e em que os elementos da linha da função objectivo são não-negativos:

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 12 |
| | 0 | 0 | -1 | 2 | 2 | 0 | 10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

- obtém-se a $I_{m\times m}$ multiplicando as equações das restrições por (-1):

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | -3 | -1 | -1 | -12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

**A selecção do elemento pivô no método simplex dual destina-se a:**

- manter os elementos da linha da função objectivo com valor $\leq 0$ (*i.e.*, manter a *solução dual* admissível).
- procurar tornar os valores dos elementos do lado direito $\geq 0$ (*i.e.*, procurar obter uma *solução (primal)* admissível).

# Algoritmo simplex dual (problema de minimização):

- Vértice dual admissível inicial (<u>todos</u> os coeficientes da função objectivo são não-negativos, *i.e.*, $c \geq \tilde{0}$) $^{(*)}$
- Repetir
  - Selecção da linha pivô:
    - Coeficiente mais negativo do lado direito
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.$<0$, solução óptima.
  - Selecção da coluna pivô:
    - Menor valor de razão (f.objectivo/linha pivô) **negativa** (coef.linha$<0$)
    - Se não existir coef.linha $<0$, problema é impossível.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

- nota: o elemento pivô tem sempre valor **negativo**.

(*) ou seja, todos os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex são $\leq 0$.

▸ Método Simplex Dual ou 2 Fases?

# Exemplo: primeira iteração do método simplex dual

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | -3 | -1 | $\boxed{-1}$ | -12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

- Linha pivô: linha de $y_1$ (coeficiente mais negativo é -12).
- Coluna pivô: coluna de $y_5$ (menor valor das razões negativas é 30):
  - coluna de $y_3$ : -120/-3 = 40
  - coluna de $y_4$ : -80/-1 = 80
  - coluna de $y_5$ : -30/-1 = 30

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_5$ | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | -30 | 0 | -30 | -50 | 0 | 360 |

# Exemplo: restantes iterações do método simplex dual

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_5$ | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | $\boxed{-2}$ | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | -30 | 0 | -30 | -50 | 0 | 360 |

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_5$ | 0 | -1 | 3/2 | 0 | $\boxed{-2}$ | 1 | -3 |
| $y_3$ | 0 | 0 | -1/2 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| $z_D$ | 1 | -30 | -15 | 0 | -20 | 0 | 510 |

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 0 | 1/2 | -3/4 | 0 | 1 | -1/2 | 3/2 |
| $y_3$ | 0 | -1/2 | 1/4 | 1 | 0 | 1/2 | 7/2 |
| $z_D$ | 1 | -20 | -30 | 0 | 0 | -10 | 540 |

- Solução óptima.

# Método simplex dual: problema impossível

**Um problema (primal) é impossível se existir:**

- uma linha com um coeficiente negativo do lado direito e com todos os coeficientes das variáveis não-básicas não-negativos ($\geq 0$).

- Exemplo:

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | -12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

- Nota: na linha de $y_1$, os coeficientes das variáveis $y_3, y_4$ e $y_5$ são $\geq 0$ (não há um elemento pivô **negativo**).
- O problema é impossível, porque nenhum conjunto $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ satisfaz a restrição: $y_1 + 3y_3 + y_4 + y_5 = -12$.

- Neste caso, o problema dual tem uma solução óptima ilimitada ($\Rightarrow$ problema primal impossível, da teoria da dualidade).

# Conclusão

- As variáveis duais traduzem o valor dos recursos, e explicam como se forma o valor de uma actividade.
- As actividades seleccionadas são aquelas que atribuem um maior valor aos recursos.
- O problema do produtor de rações é o problema dual do problema da dieta (ver Quiz sobre dualidade), e os dois problemas mostram duas perspectivas diferentes da mesma realidade.
- Há muitos outros exemplos de pares de problemas primal-dual.

# Apêndice

# Método Simplex Dual ou 2 Fases?

- O método simplex dual só pode ser usado se os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex tiverem todos o sinal que devem ter na solução óptima, ou seja, se forem:
  - todos não-positivos ($\leq 0$) num problema de minimização, ou
  - todos não-negativos ($\geq 0$) num problema de maximização.
- Caso haja algum coeficiente da linha da função objectivo que não tenha o sinal devido, o Método Simplex Dual não pode ser usado, e é necessário recorrer ao Método das 2 Fases, ou seja, usar a primeira fase para obter uma solução admissível inicial para o problema primal, e depois usar o método simplex (primal).

Voltar

# O que significa o valor $c_B B^{-1} A_j - c_j$ da actividade $j$?

$$c_B B^{-1} A_j = \sum_{i=1}^{m} (c_B B^{-1})_i \times a_{ij}, \quad \forall j,$$

- $(c_B B^{-1})_i$ é o valor para o decisor de uma unidade de recurso $i$,
- $a_{ij}$ é a quantidade de recurso $i$ usado numa unidade da actividade $j$.
- Portanto, $c_B B^{-1} A_j$ é o valor dos recursos usados numa unidade da actividade $j$.

- $c_j$ é o valor de venda de uma unidade da actividade $j$.

**Na solução óptima de um problema de maximização,**

- se $c_B B^{-1} A_j - c_j > 0$, o valor dos recursos usados é maior do que o valor da venda; é melhor não fazer esta actividade (variável não-básica); há outras actividades que usam melhor os recursos,
- se $c_B B^{-1} A_j - c_j = 0$, o valor de venda iguala o valor dos recursos usados; esta actividade (variável básica) dá o maior valor possível aos recursos.

# Exemplo

Quadro Inicial

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40 |
| $s_2$ | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 |
| $s_3$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| $z$ | 1 | -30 | -20 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Quadro Óptimo

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | 0 | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| $z$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

Actividade 1: $c_B B^{-1} A_1 - c_1 = \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}} - 30 = 5$

Actividade 2: $c_B B^{-1} A_2 - c_2 = \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} - 20 = 0$

# Fim