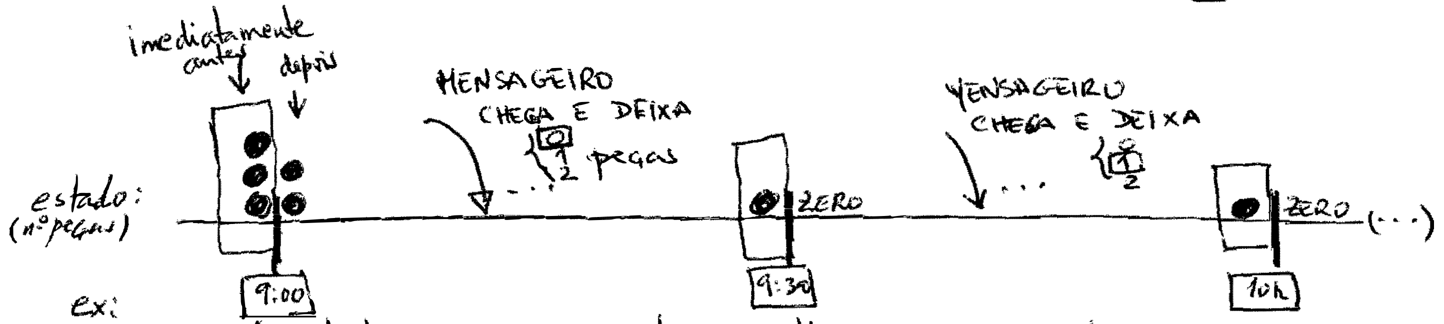
1.4 Problema da costureira

PROCESSO ESTOCÁSTICO CARACTERIZADO POR:

<u>ESTÁGIOS</u>: instante <u>imediatamente anterior</u> ao instante em que a costureira retira (eventualmente) uma nova peça inacabada para costurar
(n) (instantes intervalados de 1/2 em 1/2 hora)

<u>ESTADOS</u>: (i, j) nº de peças inacabadas acumuladas na mesa da costureira $\rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$



ex: (instantes em que a costureira tira uma peça da mesa...)

PRÓXIMO ESTADO = ESTADO ANTERIOR − Nº PEÇAS RETIRADAS PELA COSTUREIRA $\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ + Nº PEÇAS DEIXADAS P/ MENSAGEIRO $\left\{\begin{matrix}0\ (0.3)\\1\ (0.5)\\2\ (0.2)\end{matrix}\right.$

Ex: $0 - 0 + \left\{\begin{matrix}0 & (0.3)\\1 & (0.5)\\2 & (0.2)\end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix}0 & (0.3)\\1 & (0.5)\\2 & (0.2)\end{matrix}\right.$

$1 - 1 + \left\{\begin{matrix}0 & (0.3)\\1 & (0.5)\\2 & (0.2)\end{matrix}\right. = \text{"}$

(etc)...

CONSIDERAÇÕES:

- A COSTUREIRA RETIRA SEMPRE 1 PEÇA SE ESTADO ≥ 1
- A COSTUREIRA FICA 1/2 h "parada" SE, QUANDO VAI PARA TIRAR UMA NOVA PEÇA, A MESA ESTÁ VAZIA (ESTADO=0)
- O MENSAGEIRO, QUANDO CHEGA COM 2 PEÇAS E VERIFICA QUE A MESA CONTÉM 2 PEÇAS, SÓ DEIXA 1 PEÇA.

De acordo com as definições anteriores (e considerações), a matriz de transição respectiva será então:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

N.B.
$0.7 = \underset{\text{traz 1}}{0.5} + \underset{\text{traz 2}}{0.3}$
mas só deixa 1 em qualquer dos casos

— // —

Resolução:

A questão colocada sobre a estimativa da inactividade da costureira (média medida no decurso de um longo período de tempo), tem a ver com o resultado do processo na sua fase estacionária.

Este resultado pode ser obtido através de um dos métodos gerais:

→ método iterativo (aprox.) $S_n = S_{n-1} P$

determinando-se convergência a menos que um pré-determinado erro ex 1% (centésimas)

→ método (exacto) das Transformadas Z

$$S_n = S + T_n$$

Alternativamente, e porque se trata de um processo ERGÓDICO (porquê?), o mesmo resultado ($\lim_{n\to\infty} S_n = c^{te}$) pode ser obtido ~~pe~~ através da resolução do sistema de equações: $\boxed{\pi = \pi . P}$ substituindo uma qq das equações por $\boxed{\pi_1 + \pi_2 + \ldots = 1}$

Resolvendo (ver ficheiro Excel "meio_exs.xlsx"):

$$\pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.142 & 0.332 & 0.316 & 0.211 \end{bmatrix} \end{array}$$

(32ª iteração)
< 0.1% erro
e confirmado
por $\begin{cases} \pi = \pi \cdot P \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$

Conclusão: independentemente do estado inicial (como série de esperas), verifica-se que a costureira fica sem peça alguma para costurar cerca de 14.2% das vezes, ou do tempo.

facultativa: análise sobre a estimativa de tempo de inactividade

Admitindo que o mensageiro pode passar, aleatoriamente, com iguais probabilidades, a qualquer instante entre cada dois consecutivos recomeços de trabalho da costureira, podemos considerar que, nas situações em que a costureira fica sem qualquer peça para poder costurar, ela só vai esperar, em média, 15 minutos (média entre 0 e 30 min).

N.B. numa situação real, a costureira não esperaria mais tempo após uma nova peça ter chegado.

Então, em termos de tempo de inactividade, podemos estimar que este será entre 7.1% (metade) e 14.2%. Isto pq também há que ter em conta que o mensageiro pode não trazer peças.

Ex. 1.4 (formulação alternativa)

TENDO EM CONTA A FORMULAÇÃO ANTERIOR, MAS DEFININDO-SE AGORA OS ESTÁGIOS COMO:

"Os instantes imediatamente posteriores ao instante em que a costureira retira (eventualmente) uma nova peça..."

É EVIDENTE (VER ESQUEMA ANTERIOR RESOLUÇÃO) QUE O Nº DE ESTADOS POSSÍVEIS PODE SER REDUZIDO AO CONJUNTO

$$\{0,\ 1,\ 2\}$$

(Máx. 3 peças reduz-se a 2, automaticamente, logo que a costureira retira uma nova peça)

ENTÃO, UMA FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO SERÁ:

$$P' = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

N.B.

Próximo Estado = Estado Anterior + Nº peças deixadas − Nº peças retiradas
(0, 1 ou 2) (0 ou 1)

(sequência temporal)

Ex:

$$\boxed{0} + \begin{cases} 0 & (0.3) \\ 1 & (0.5) \\ 2 & (0.2) \end{cases} - \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & (0.3+0.5) \\ 1 & (0.2) \end{cases}$$

$$\boxed{1} + \begin{cases} 0 & (0.3) \\ 1 & (0.5) \\ 2 & (0.2) \end{cases} - 1 = \begin{cases} 0 & (0.3) \\ 1 & (0.5) \\ 2 & (0.2) \end{cases}$$

$$\boxed{2} + \begin{cases} 0 & (0.3) \\ 1 & (0.5) \\ 2 & (0.2) \end{cases} - 1 = \begin{cases} 1 & (0.3) \\ 2 & (0.5+0.2) \end{cases}$$

ESTA SEGUNDA FORMULAÇÃO ESTÁ DE ACORDO COM A RESOLUÇÃO APRESENTADA NO CADERNO DE EXERCÍCIOS, pág. 7:

——— // ———

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.47 & 0.32 & 0.21 \\ 0.47 & 0.32 & 0.21 \\ 0.47 & 0.32 & 0.21 \end{bmatrix} \end{array}$$

Com que frequência fica a costureira inactiva?

Neste caso, a resposta não é imediata, pois o facto de ela ficar com ZERO peças na mesa, imediatamente após ter eventualmente tirado 1 para costurar, não significa necessariamente inactividade. Assim:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \boxed{0 + 0 - 0 = 0} \\ (2) & \boxed{0 + 1 - 1 = 0} \\ & \text{(antes)} \quad \text{(mens.)} \quad \text{(costureira)} \end{array}\right\} \text{ frequência } 47 \text{ em } 100$$

Inactividade: $\dfrac{47}{100} \times 0{,}3$ (probabilidade de o mensageiro trazer/deixar ZERO peças, isto é CASO (1) indicado)

$= 0.141$

i.e. 14.1% das vezes/tempo