Universidade do Minho | MIEInf
Dep. de Matemática e Aplicações | 05 de Janeiro de 2017
[duração 2h]

Cálculo

Teste 2

Nome completo	Número

Grupo I

(15 valores)

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

1. (2 valores)

Considere a região plana cuja área se pode calcular por $\int_0^1 x^2\,dx$. Nestas condições,

(a) forme a soma de Riemann para f, onde $f(x) = x^2$, relativa à partição $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ do intervalo $[0, 1]$ e com $\tilde{x}_1 = \frac{1}{8}$, $\tilde{x}_2 = \frac{3}{8}$, $\tilde{x}_3 = \frac{5}{8}$ e $\tilde{x}_4 = \frac{7}{8}$.

(b) esboce uma figura que ilustre o que representa a soma de Riemann da alínea anterior.

2. (3 valores)

Calcule $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$, usando $t^2 = x - 1$.

3. (2 valores)

Seja $\mathcal{A}$ a região plana limitada pelas curvas definidas por $x = y^2$ e $2y^2 = x + 4$.

(a) Recorrendo a integrais definidos, exprima de duas formas distintas– integrando em ordem em x e integrando em ordem a y– a área de $\mathcal{A}$.

(b) Calcule a área de $\mathcal{A}$.

4. (3 valores)

Qual o comprimento de uma *catenária* –definida por $y = \cosh x \quad \left(= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$– entre os pontos de abcissas -1 e 1?

5. (2 valores)

Estude a natureza de

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$

6. (3 valores)

Considere a série de potências

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(2x)^n}{n}\,.$$

Determine o raio e o intervalo de convergência desta série.

Grupo II
(5 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique, justificando, se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Se $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)\,dt\,.$$

2. Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2\,.$

4. Se $\lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$, então $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

5. Se $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge quando $x = 2$, então converge quando $x = 1$.

---

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$