Cap. 3– Séries

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

dezembro de 2017

3.1– Conceitos gerais & Séries Importantes

Sucessão de números reais

- [Sucessão de números reais] Uma sucessão de números reais é uma correspondência definida de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

  - A imagem de $n \in \mathbb{N}$ por u representa-se por u_n e designa-se termo de ordem n ou termo geral da sucessão.
  - Os números reais $u_1, u_2, u_3, \ldots$ designam-se, respetivamente, primeiro termo da sucessão, segundo termo, terceiro termo, etc.

Exemplos: Progressões

1. [Progressão aritmética] Uma progressão aqritmética de razão r e primeiro termo a (com $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $a \in \mathbb{R}$) é a sucessão de números reais definida por

$$u_n = a + (n-1)r, \quad \text{para qualquer}\, n \in \mathbb{N}$$

O primeiro termo é $u_1 = a$, o segundo é $u_2 = a + r$, o terceiro é $u_3 = a + 2r$, $\cdots$; ou seja, é constante –e igual à razão r– a diferença entre cada termo e o que o precede.

2. [Progressão geométrica] Uma progressão geométrica de razão r e primeiro termo a (com $r \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) é a sucessão de números reais definida por

$$u_n = a\, r^{n-1}, \quad \text{para qualquer}\, n \in \mathbb{N}$$

O primeiro termo é $u_1 = a$, o segundo é $u_2 = a\, r$, o terceiro é $u_3 = a\, r^2$, $\cdots$; ou seja, é constante –e igual à razão r– o quociente entre cada termo e o que o precede.

Sucessão monótona e sucessão limitada

Seja u uma sucessão de números reais

- [Sucessão monótona] Diz-se que u é
  - crescente quando é positiva a diferença entre qualquer termo e o que o precede, isto é,
$$u_{n+1} \geq u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
  - decrescente quando é negativa a diferença entre qualquer termo e o que o precede, isto é,
$$u_{n+1} \leq u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
  - monótona se for decrescente ou crescente
- [Sucessão limitada] Diz-se que u é limitada quando existir um número real positivo M tal que
$$|u_n| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos

1. A sucessão definida por $u_n = 2n$ é crescente e não é limitada.
2. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$ é decrescente e é limitada.
3. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ é crescente e é limitada.
4. A sucessão definida por $u_n = (-1)^n$ não é monótona e é limitada.

Sucessão Convergente

- [Limite de uma sucessão] Diz-se que o limite da sucessão de números reais u é o número real a

  e escreve-se
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim_n u_n = a \quad \text{ou} \quad u_n \longrightarrow a$$
  quando (por definição)
$$\forall \delta > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \delta$$
  - Neste caso, diz-se que a sucessão u é uma sucessão convergente.
  - Uma sucessão que não é convergente diz-se divergente.

- [Propriedades das sucessões convergentes]
  1. O limite de uma sucessão, quando existe, é único.
  2. Qualquer sucessão constante é convergente: tem por limite a própria constante, isto é
$$\lim_n k = k, \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$
  3. Qualquer a sucessão monótona e limitada é convergente.
  4. É válida a "aritmética" de limites.

Exemplo

1. A sucessão definida por $u_n = 2n$ é divergente.
2. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$ (monótona e limitada) é convergente. $\lim_n u_n = 0$.
3. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ é convergente, para 2.
4. A sucessão definida por $u_n = (-1)^n$ é divergente.

Séries de números reais:: motivação

- [Paradoxo(s) de Zenão]: Uma discrepância entre a forma como entendemos o mundo e como o mundo, realmente, é!

  No séc. V a.C., o filósofo grego Zenão (de Eleia) enunciou um problema que é hoje conhecido como sendo o Paradoxo de Aquiles e da tartaruga:

  > *Aquiles, o herói mais veloz da mitologia grega, entra numa corrida contra uma lenta tartaruga.*
  > *Uma vez que a velocidade de Aquiles é assumidamente superior à da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida dez metros à sua frente.*
  > *Em pouco tempo Aquiles atinge a marca dos 10m, mas neste intervalo de tempo a tartaruga já caminhou 1m. Em seguida, Aquiles percorre esse metro adicional, mas a tartaruga já lá não está, pois percorreu mais 1/10 de metro.*
  > *Quando Aquiles cobre este 1/10 de metro adicional, a tartaruga está 1/100 de metro à frente. E depois, 1/1000 à frente, e depois 1/10.000, etc., etc..*

  Como pôde Aquiles vencer a tartaruga?

Como pôde Aquiles vencer a tartaruga?

- Aquiles teria pela frente uma missão IMPOSSÍVEL porque teria que percorrer um número INFINITO de espaços, num período de tempo finito. E
- o argumento de que Aquiles é mais veloz do que a tartaruga só serve para a justificação de que os espaços que o separam da tartaruga são, cada vez, mais pequenos.
  - O espaço percorrido pela tartaruga é

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$$

  - Enquanto que o espaço percorrido por Aquiles é

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \cdots = 10 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$$

- Apesar de sabermos adicionar 2 números, 3 números, um bilião de números ou qualquer número finito de números, tal conhecimento NÃO nos permite adicionar um número infinito de números...
- A teoria das séries numéricas (de números reais) desenvolveu-se, precisamente, para contormar esta dificuldade.

Série de números reais

- A partir de uma sucessão u de números reais, forme-se uma outra sucessão s –dita das somas parciais– do seguinte modo:

$$s_1 = u_1 = \sum_{k=1}^{1} u_k$$

$$s_2 = u_1 + u_2 = \sum_{k=1}^{2} u_k$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$\vdots$$

- O termo geral da sucessão s, das somas parciais, é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

- [Série numérica convergente] A série numérica $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ diz-se convergente quando a respetiva sucessão das somas parciais for convergente, isto é, for tal que

$$\exists S \in \mathbb{R} \,:\, S = \lim_n s_n$$

  - Escreve-se, então

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

    e diz-se que S é a soma da série.
  - Se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ não é convergente, diz-se que ela é divergente

Observações

1. Não se confunde uma série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ com o termo geral da sucessão das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Não se confunde a sucessão u com a sucessão s (das respetivas somas parciais).
2. A sucessão u diz-se a sucessão geradora da série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.
3. [Notações] A série de números reais representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 1} u_n, \quad \text{ou} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \quad \text{ou} \quad \sum_{n} u_n.$$

4. Há também séries cuja sucessão geradora tem domínio $\mathbb{N}_0$ ou tem domínio $\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \geq n_0\}$, sendo $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Nestes casos escrever-se-à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0} u_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq n_0} u_n.$$

Exemplos

1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$, descrita no paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, é convergente.
   - O termo geral da sucessão geradora é $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$
   - O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k-1}}$$

   - Tem-se soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

$$s_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 1.\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \longrightarrow \frac{10}{9}$$

   - Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$ converge e a sua soma é $\frac{10}{9}$

Problema :: Paradoxo de Aquiles e a tartaruga

- O espaço percorrido pela tartaruga é

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{10}{9}$$

  e o espaço percorrido por Aquiles é

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots = 10+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = 10+\frac{10}{9} = \frac{100}{9}$$

  - Logo, Aquiles vence a tartaruga.

2. A série $\sum_{n\geq 1} n$ é divergente.

- O termo geral da sucessão geradora é $u_n = n$
- O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

- Tem-se[1]

$$s_n \geq \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ parcelas}} = n \times 1 = n \longrightarrow +\infty$$

- Logo a série $\sum_{n\geq 1} n$ é divergente.

Observação: Isto significa, por exemplo, que se Aquiles tivesse que percorrer estes espaços –cada vez maiores– jamais teria alcançado a tartaruga.

[1] Também se poderia usar a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

3. Relativamente à série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$:

- termo geral da sucessão geradora $u_n = \frac{1}{n}$
- sucessão das somas parciais

$$s_1 = u_1 = 1;$$
$$s_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2};$$
$$\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

- Neste caso (como de resto na maioria dos casos com que somos confrontados), não nos é fácil estudar a convergência da série a partir da definição, isto é, recorrendo à sucessão das suas somas parciais.

Conjecture: E se esta série descrevesse a corrida entre Aquiles e a tartaruga?

Condição necessária de convergência

- [Condição necessária de convergência] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então

$$\lim_n u_n = 0.$$

- [Condição suficiente de divergência] Se a sucessão u não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

Exemplo

1. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ é divergente.

   Basta notar que

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

2. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente no entanto $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Propriedades das séries numéricas

[Propriedade 1] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ tem por soma S e $\sum_{n\geq 1} v_n$ tem por soma T então

- $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)$ converge e tem por soma $S+T$;
- $\sum_{n\geq 1}\alpha\, u_n$ converge e tem por soma $\alpha\, S$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.

[Propriedade 2] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então, dado $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1}\alpha\, u_n$ também diverge.

[Propriedade 3] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge e a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge então a série $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)$ diverge.

[Propriedade 4] Se as sucessões u e v diferem, quando muito, num número finito de termos então têm a mesma natureza.

Isto é, [Propriedade 4'] A natureza de uma série (convergência vs. divergência) não se altera quando se adiciona e/ou se subtrai um número finito de termos.

Exemplo

1. Averiguar a natureza da série
$$\sum_{n\geq 1}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}}\,.$$

   - Note-se que
$$\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}}=\frac{3^{n-1}}{6^{n-1}}-\frac{2^{n-1}}{6^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}.$$

Observação

1. Se as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ forem divergentes nada se pode concluir quanto à convergência da série
$$\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n).$$

   - As séries
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\quad \text{e} \sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n+1}\quad \text{divergem}\quad \text{e}\quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\text{converge.}$$
   - As séries
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\quad \text{e} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+2}\quad \text{divergem}\quad \text{e}\quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)\text{diverge.}$$

Série geométrica

- Chama-se série geométrica de razão r a uma série cuja forma geral é
$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}, \qquad r\in\mathbb{R}.$$
  - A sucessão geradora, u, é definida por $u_n = r^{n-1}$;
  - A sucessão das somas parciais, s , é definida por
$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{se} \quad r = 1; \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$

- Sendo
$$s_n = \begin{cases} n, & \text{se} \quad r = 1; \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$
  - Se $r = 1$ a série diverge.
De facto $u_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$.
  - Se $r = -1$ a série diverge.
De facto $u_n = (-1)^{n-1}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ não existe.
  - Se $r > 1$ a série diverge.
Temos $u_n = r^{n-1}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} r^{n-1} \to +\infty \neq 0$.
  - Se $r < -1$ a série diverge.
Temos $u_n = r^{n-1}$ e não existe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
  - Se $-1 < r < 1$ a série converge e tem por soma $\dfrac{1}{1-r}$.

- [Série geométrica I] A série geométrica de razão r definida por
$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}, \qquad r\in\mathbb{R}$$
é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é
$$S = \frac{1}{1-r}.$$
- [Série geométrica II] A série geométrica de primeiro termo $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e razão r definida por
$$\sum_{n\geq 1} a\, r^{n-1}, \qquad r\in\mathbb{R}$$
é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é
$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Série harmónica

A convergência de séries numéricas explica muitos dos fenómenos que observamos no mundo (e não só o caso de que Aquiles, sendo um corredor mais veloz, ultrapassa a tartaruga). Qualquer distância, tempo ou força se pode decompôr em um úmero infinito de porções que, em certos casos, podemos abordar como finitos mas cujo entendimento não pára de nos surpreender...

- Chama-se série harmónica à série cuja forma geral é
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$
e da qual falámos em um dos exemplos anteriores.
Pois bem: não se trata, somente, de "ir percorrendo espaços cada vez mais pequenos". Na verdade
  - **a série harmónica é divergente**.

Série de Riemann

- Chama-se série de Riemann de expoente r a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^r}, \qquad r > 0$$

  - A sucessão geradora, u , é definida por $u_n = \dfrac{1}{n^r}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
  - A sucessão das somas parciais é definida por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}$$

  - A série de Riemann é convergente se e só se $r > 1$ (c.f. Cap. 3.2)

Nota

A série harmónica é uma série de Riemann (obtém-se quando $r = 1$). O estudo da convergência destas (e outras) séries pode fazer-se recorrendo a integrais impróprios