Cap. 1– Funções reais de uma variável real

M.Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

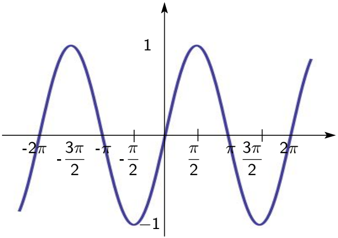
outubro 2016

1.4 Algumas funções importantes

A. Funções trigonométricas (diretas)

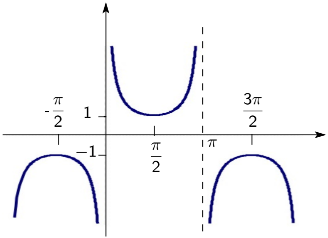
Seno

$y = \operatorname{sen} x$,
$D_{\text{sen}} = \mathbb{R}$,
$CD_{\text{sen}} = [-1, 1]$



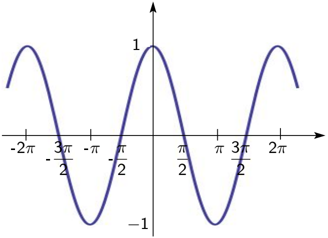
Cossecante

$y = \operatorname{cosec} x$,
$D_{\text{cosec}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$CD_{\text{cosec}} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$



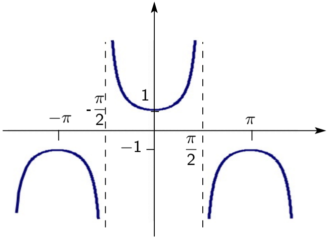
Cosseno

$y = \cos x,$
$\mathsf{D}_{\cos} = \mathbb{R},$
$\mathsf{CD}_{\cos} = [-1, 1]$



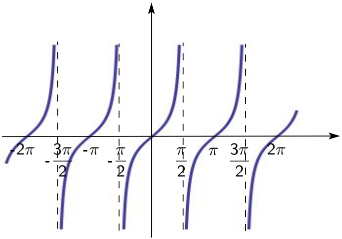
Secante

$y = \sec x,$
$\mathsf{D}_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\,\frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z}\},$
$\mathsf{CD}_{\sec} = \mathbb{R} \backslash]-1, 1[$



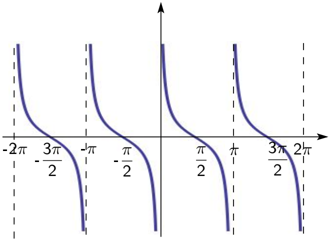
Tangente

$y = \text{tg}\, x$,
$\text{D}_{\text{tg}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$\text{CD}_{\text{tg}} = \mathbb{R}$



Cotangente

$y = \text{cotg}\, x$,
$\text{D}_{\text{cotg}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$\text{CD}_{\text{cotg}} = \mathbb{R}$



Algumas propriedades das funções trigonométricas

- As funções seno, cossecante, cosseno, secante, tangente e cotagente são contínuas;
- As funções seno, cossecante, cosseno e secante são periódicas de período 2π;
- As funções tangente e cotangente são periódicas de período π;
- A função cosseno é par;
- A função seno é ímpar;

- Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

  (a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (fórmula fundamental da trigonometria)

- Para quaisquer $x,\, y \in \mathbb{R}$ tem-se

(a) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (fórmula fundamental da trigonometria)

(b) $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

(c) $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x, \qquad x \neq k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

(d) $\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x\, \cos y + \text{sen}\, y\, \cos x$ (fórmula da adição para o seno)

(e) $\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$ (fórmula da adição para o cosseno)

Em particular,

(f) $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}\, x\, \cos x$ (fórmula da duplicação para o seno)

(g) $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ (fórmula da duplicação para o cosseno)

(h) $\text{sen}(x-y) = \text{sen}\, x\, \cos y - \text{sen}\, y\, \cos x$

(i) $\cos(x-y) = \cos x\, \cos y + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

Recorde-se que

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

B. Funções trigonométricas inversas

- As funções seno, cossecante, cosseno, secante, tangente e cotangente são funções não bijetivas pelo que não possuem inversa.

- Considerando restrições apropriadas destas funções, é, no entanto, possível definir as correspondentes funções inversas.

Arco-seno

- Para a função seno a restrição bijetiva "padrão" é

$$\begin{array}{rccc} \text{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \text{sen}\, x \end{array}$$

Arco-seno

- Para a função seno a restrição bijetiva "padrão" é

$$\begin{array}{rccc} \text{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \text{sen}\, x \end{array}$$

A inversa desta restrição, que se designa por arco-seno – lê-se arco (cujo) seno – é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \text{arcsen}\, y \end{array}$$

onde $\text{arcsen}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y. Assim,

$$x = \text{arcsen}\, y\,,\ y \in [-1,1] \iff y = \text{sen}\, x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Arco-cossecante

- Para a função cossecante a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \text{cosec}: & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \text{cosec}\, x \end{array}$$

Arco-cossecante

- Para a função cossecante a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \text{cosec}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-1, 1[\\ & x & \longmapsto & \text{cosec}\, x \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-cossecante – lê-se arco (cuja) cossecante – é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{arccosec}: & \mathbb{R} \setminus]-1, 1[& \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ & y & \longmapsto & \text{arccosec}\, y \end{array}$$

onde $\text{arccosec}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ cuja cossecante é igual a y. Assim,

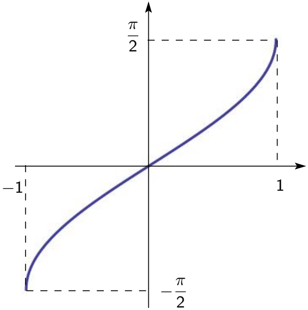
$$x = \text{arccosec}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[\iff y = \text{cosec}\, x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

Arco-seno

$y = \text{arcsen}\, x,$

$D_{\text{arcsen}} = [-1, 1],$

$CD_{\text{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

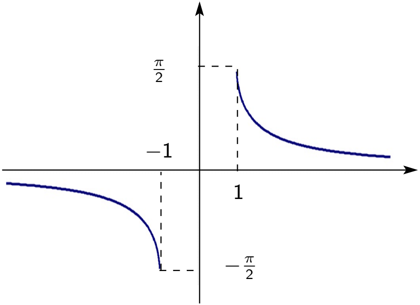


Arco-cossecante

$y = \text{arccosec}\, x,$

$D_{\text{arccosec}} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[,$

$CD_{\text{arccosec}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$



Arco-cosseno

- Relativamente à função cosseno, a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Arco-cosseno

- Relativamente à função cosseno, a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-cosseno – lê-se arco (cujo) cosseno – é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \text{arccos}\ y \end{array}$$

onde $\arccos y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual a y. Assim

$$x = \arccos y\,,\ y \in [-1,1] \iff y = \cos x\,,\ x \in [0,\pi]\,.$$

Arco-secante

- Para a função secante a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccl} \sec: & [0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

Arco-secante

- Para a função secante a restrição bijetiva padrão é

$$\begin{array}{rccc} \sec : & [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-secante – lê-se arco (cuja) secante – é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsen} : & \mathbb{R} \setminus]-1,1[& \longrightarrow & [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsec} y \end{array}$$

onde $\operatorname{arcsec} y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ cuja secante é igual a y. Assim,

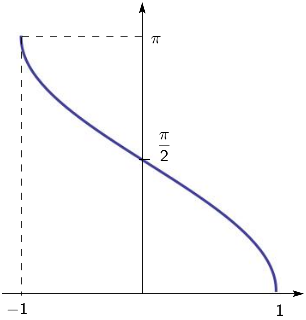
$$x = \operatorname{arcsec} y\,,\ y \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[\iff y = \sec x\,,\ x \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Arco-cosseno

$y = \text{arccos}\, x,$

$\text{D}_{\text{arccos}} = [-1, 1],$

$\text{CD}_{\text{arccos}} = [0, \pi]$

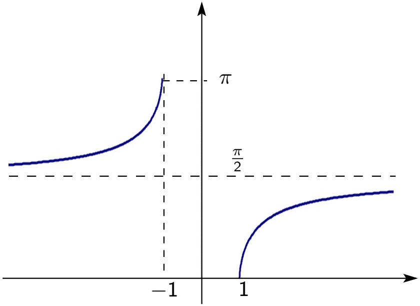


Arco-secante

$y = \text{arcsec}\, x,$

$\text{D}_{\text{arcsec}} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[,$

$\text{CD}_{\text{arcsec}} = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



Arco-tangente

- Para a função tangente considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{tg}: & \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

Arco-tangente

- Para a função tangente considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \text{tg}: & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{tg}\, x \end{array}$$

A sua inversa, designada por arco-tangente – lê-se arco (cuja) tangente – é a função

$$\begin{array}{rccl} \text{arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \text{arctg}\, y \end{array}$$

onde $\text{arctg}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a y. Assim

$$x = \text{arctg}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \text{tg}\, x\,,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Arco-cotangente

- Relativamente à função cotangente, considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \text{cotg}: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{cotg}\, x \end{array}$$

Arco-cotangente

- Relativamente à função cotangente, considera-se a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \text{cotg}: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{cotg}\, x \end{array}$$

cuja inversa é a função arco-cotangente – lê-se arco (cuja) cotangente – definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{arccotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & y & \longmapsto & \text{arccotg}\, y \end{array}$$

onde $\text{arccotg}\, y$ indica o único arco/ângulo do intervalo $]0,\pi[$ cuja cotangente é igual a y. Então

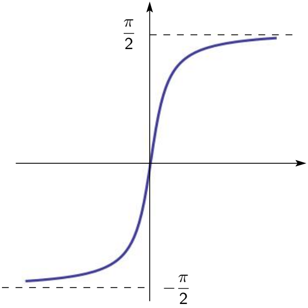
$$x = \text{arccotg}\, y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \text{cotg}\, x\,,\ x \in\,]0,\pi[\,.$$

Arco-tangente

$y = \operatorname{arctg} x,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arctg}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

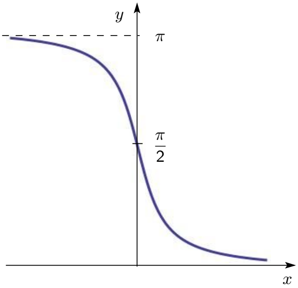


Arco-cotagente

$y = \operatorname{arccotg} x,$

$\mathrm{D}_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$

$\mathrm{CD}_{\operatorname{arccotg}} =]0, \pi[$



C. Funções exponenciais e logarítmicas

Propriedades da função exponencial

Para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$, a função exponencial de base a, a^x, $a > 0$ verifica

(a) é uma função contínua;

(b) $a^{x+z} = a^x\, a^z$;

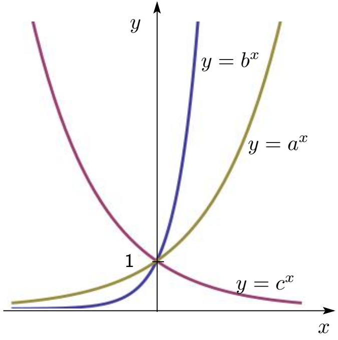
(c) $(a^x)^z = a^{xz}$;

(d) se $b > 0$, $(a\, b)^x = a^x\, b^x$;

(e) se $a > 1$, é crescente;

(f) se $a = 1$, é constante;

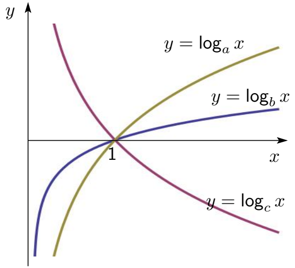
(g) se $0 < a < 1$, é decrescente.



$1 < a < b$ e $0 < c < 1$

- Para todo[1] o $y \in]0,+\infty[$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, define-se a função logaritmo na base a, denotando-se $\log_a y$, como a função inversa da função exponencial de base a, isto é

$$x = \log_a y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^x = y \qquad \forall y \in]0,+\infty[,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$



$1 < a < b$ e $0 < c < 1$

[1] Para $a = 1$ a função a^x não é bijetiva, logo não admite inversa.

- Propriedades da função logaritmo

  Para quaisquer $x > 0$, $z > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a função logaritmo de base a, $\log_a x$, $a > 1$ verifica

  (a) é uma função contínua;

  (b) $\log_a(xz) = \log_a x + \log_a z$;

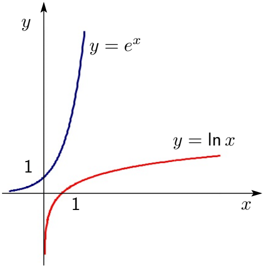
  (c) $\log_a \dfrac{x}{z} = \log_a x - \log_a z$;

  (d) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

- Fala-se em função exponencial natural quando a base da função exponencial é o número de Euler e: e^x.

- O logaritmo natural de y, denotado $\ln y$, é função inversa da função e^x, isto é

$$x = \ln y \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x = y \qquad \forall y \in]0, +\infty[, \ \forall x \in \mathbb{R};$$



Funções exponencial e logarítmica de base e

D. Funções hiperbólicas diretas

- A função seno hiperbólico é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

- A função cossecante hiperbólica é a função real de variável real definida por

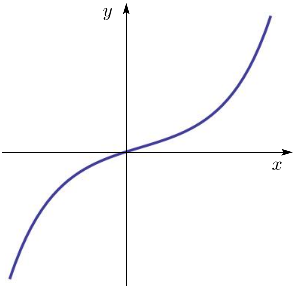
$$\begin{array}{rccl} \text{cosech}: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{cosech}\, x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} \end{array}$$

Seno hiperbólico

$y = \operatorname{sh} x,$

$D_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$

$CD_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$

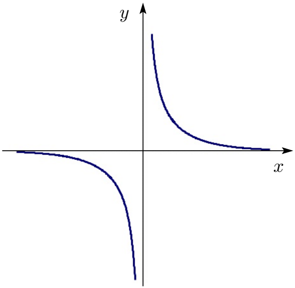


Cossecante hiperbólica

$y = \operatorname{cosech} x,$

$D_{\mathrm{cosech}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$CD_{\mathrm{cosech}} = \mathbb{R}$



- A função cosseno hiperbólico é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

- A função secante hiperbólica é a função real de variável real definida por

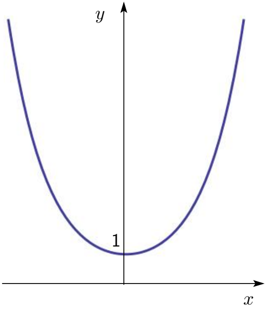
$$\begin{array}{rccl} \text{sech}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{sech}\, x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

Cosseno hiperbólico

$$y = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$\text{D}_{\text{ch}} = \mathbb{R}$

$\text{CD}_{\text{ch}} = [1, +\infty[$

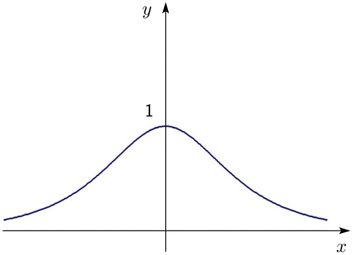


Secante hiperbólica

$$y = \text{sech}\, x = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$\text{D}_{\text{sech}} = \mathbb{R}$

$\text{CD}_{\text{sech}} =]0, 1]$



A função seno hiperbólico é

- ímpar;
- estritamente crescente;
- $D_{\text{sh}} = \mathbb{R}$;
- $CD_{\text{sh}} = \mathbb{R}$.

A função cosseno hiperbólico é

- par;
- não monótona mas
  - estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$;
  - estritamente crescente em $[0, +\infty[$;
- $D_{\text{ch}} = \mathbb{R}$
- $CD_{\text{ch}} = [1, +\infty[$.

A função cossecante hiperbólica é

- ímpar;
- é não monótona mas é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$;
- $D_{\text{cosech}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $CD_{\text{cosech}} = \mathbb{R}$.

A função secante hiperbólica é

- par;
- não monótona mas
  - estritamente crescente em $]-\infty, 0]$;
  - estritamente decrescente em $[0, +\infty[$;
- $D_{\text{sech}} = \mathbb{R}$
- $CD_{\text{sech}} =]0, 1]$.

- A função tangente hiperbólica é a função real de variável real definida por

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

- A função cotangente hiperbólica é a função real de variável real definida por

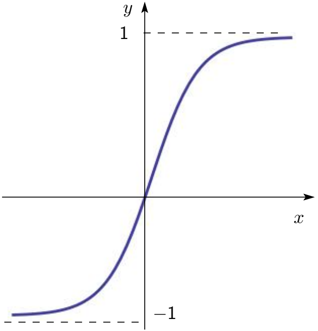
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{coth}: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{coth}\, x = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{array}$$

Tangente hiperbólica

$y = \text{th}\, x,$

$\text{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}$

$\text{CD}_{\text{th}} =]-1, 1[$

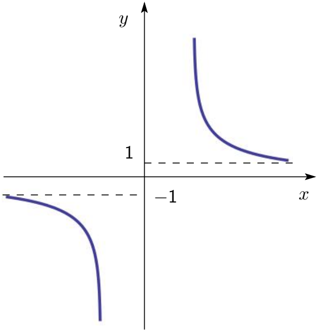


Cotangente hiperbólica

$y = \coth x,$

$\text{D}_{\coth} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\text{CD}_{\coth} = \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$



A função tangente hiperbólica é

- ímpar;
- estritamente crescente;
- $D_{\text{th}} = \mathbb{R}$
- $CD_{\text{th}} =]-1, 1[$.

A função cotangente hiperbólica é

- ímpar;
- estritamente decrescente;
- $D_{\text{coth}} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$;
- $CD_{\text{coth}} = \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$.

Observação

- Para a função seno hiperbólico, sh, também se usa a notação senh;

- De modo análogo, para a função cosseno hiperbólico, ch, também se usa a notação cosh;

Algumas propriedades das funções hiperbólicas

Para todo o $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

- $\text{ch}\, x + \text{sh}\, x = e^x$
- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ (análogo à fórmula fundamental da trigonometria)
- $1 - \text{th}^2 x = \text{sech}^2 x$
- $\text{ch}(x + y) = \text{ch}\, x \ \text{ch}\, y + \text{sh}\, x \ \text{sh}\, y$
- $\text{sh}(x + y) = \text{sh}\, x \ \text{ch}\, y + \text{ch}\, x \ \text{sh}\, y$

Algumas propriedades das funções hiperbólicas

Para todo o $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

- $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (análogo à fórmula fundamental da trigonometria)
- $1 - \operatorname{th}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \ \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \ \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \ \operatorname{sh} y$

Em particular

- $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \ \operatorname{ch} x$ (fórmula da duplicação para o seno hiperbólico)
- $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ (fórmula da duplicação para o cosseno hiperbólico)
- $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \ \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \ \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \ \operatorname{sh} y$

E. Funções hiperbólicas inversas

- Argumento do seno hiperbólico
- Argumento da cossecante hiperbólica
- Argumento do cosseno hiperbólico
- Argumento da secante hiperbólica
- Argumento do tangente hiperbólica
- Argumento do cotangente hiperbólica

Argumento do seno hiperbólico

- A função seno hiperbólico é bijetiva.

Argumento do seno hiperbólico

- A função seno hiperbólico é bijetiva.
- A sua inversa, que se designa por argumento do seno hiperbólico, é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{argsh:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argsh} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argsh} y,\ \ y \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \operatorname{sh} x = y,\ \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$\operatorname{argsh} y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\ \right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Como definir argsh y?

Para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$y = \operatorname{sh} x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$ equação do 2.ï¿$\frac{1}{2}$ grau em e^x

$$\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}\,.$$

A solução com o sinal $+$ é a única admissível, pois

$$e^x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad y - \sqrt{y^2+1} < 0\,,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

donde

$$\operatorname{argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Argumento da cossecante hiperbólica

- A função cossecante hiperbólica é bijetiva.

Argumento da cossecante hiperbólica

- A função cossecante hiperbólica é bijetiva.
- A sua inversa, que se designa por argumento da cossecante hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccl} \text{argcosech:} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & y & \longmapsto & \text{argcosech}\, y \end{array}$$

Assim,

$$x = \text{argcosech}\, y,\ \ y \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \text{cosech}\, x = y,\ \ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e

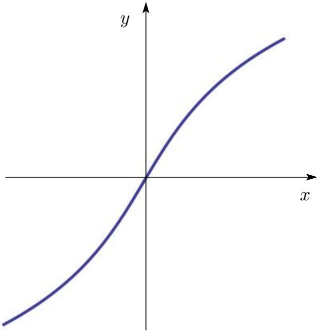
$$\text{argcosech}\, y \ = \ \ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Argumento do seno hiperbólico

$y = \operatorname{argsh} x$,

$D_{\text{argsh}} = \mathbb{R}$

$CD_{\text{argsh}} = \mathbb{R}$

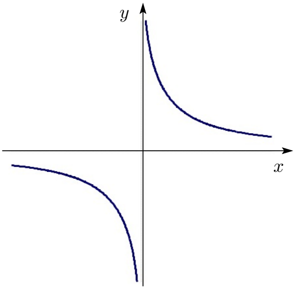


Argumento da cossecante hiperbólica

$y = \operatorname{argcosech} x$,

$D_{\text{argcosech}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$CD_{\text{argcosech}} = \mathbb{R}$



Argumento do cosseno hiperbólico

- A função cosseno hiperbólico não é bijetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{ch}\colon & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \text{ch}\, x \end{array}$$

Argumento do cosseno hiperbólico

- A função cosseno hiperbólico não é bijetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{ch:} & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \text{ch}\, x \end{array}$$

- A inversa desta restrição, que se designa por argumento do cosseno hiperbólico, é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{argch:} & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \text{argch}\, y \end{array}$$

Assim,

$$x = \text{argch}\, y,\ \ y \in [1,+\infty[\iff \ \text{ch}\, x = y,\ \ x \in [0,+\infty[$$

e

$$\text{argch}\, y \ = \ \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\ \right),\ y \in \ [1,+\infty[$$

Argumento da secante hiperbólica

- A função secante hiperbólica não é bijetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{sech}: & [0,+\infty[& \longrightarrow &]0,1] \\ & x & \longmapsto & \text{sech}\, x \end{array}$$

Argumento da secante hiperbólica

- A função secante hiperbólica não é bijetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{sech:} & [0,+\infty[& \longrightarrow &]0,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sech} x \end{array}$$

- A inversa desta restrição, que se designa por argumento da secante hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{argsech:} &]0,1] & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{argsech} y \end{array}$$

Assim,

$$x = \operatorname{argsech} y,\ \ y \in\,]0,1] \iff \operatorname{sech} x = y,\ \ x \in [0,+\infty[$$

e

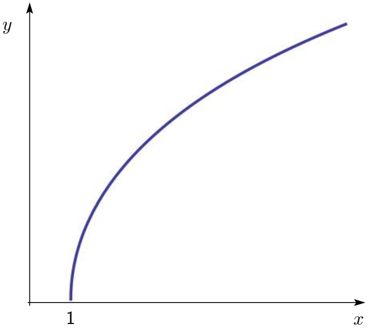
$$\operatorname{argsech} y \;=\; \ln\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}\,\right),\ \ y \in\,]0,1]$$

Argumento
do cosseno hiperbólico

$y = \operatorname{argch} x\,,$

$\mathrm{D}_{\text{argch}} = [1, +\infty[$

$\mathrm{CD}_{\text{argch}} = [0, +\infty[$

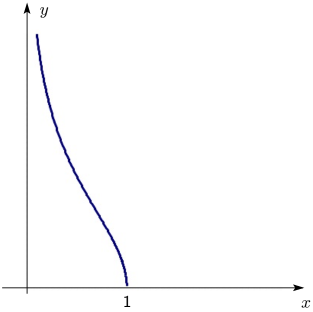


Argumento
da secante hiperbólica

$y = \operatorname{argsech} x\,,$

$\mathrm{D}_{\text{argsech}} =]0, 1]$

$\mathrm{CD}_{\text{argsech}} = [0, +\infty[$



A função argumento do seno hiperbólico é

- contínua;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D}_{\text{argsh}} = \mathbb{R}$
- $\mathrm{CD}_{\text{argsh}} = \mathbb{R}$.

A função argumento do cosseno hiperbólico é

- contínua;
- estritamente crescente;
- $\mathrm{D}_{\text{argch}} = [1, +\infty[$;
- $\mathrm{CD}_{\text{argch}} = [0, +\infty[$.

Argumento da tangente hiperbólica

- A função tangente hiperbólica não é sobrejetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \text{th}\, x \end{array}$$

Argumento da tangente hiperbólica

- A função tangente hiperbólica não é sobrejetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{th:} & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \operatorname{th} x \end{array}$$

- A inversa desta restrição, que se designa por argumento da tangente hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{argth:} &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argth} y \end{array}$$

onde

$$x = \operatorname{argth} y,\ \ y \in\,]-1,1[\iff \operatorname{th} x = y,\ \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$\operatorname{argth} y \ = \ \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right),\ y \in\,]-1,1[\,.$$

Argumento da cotangente hiperbólica

- A função $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \coth\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus[-1,1] \\ & x & \longmapsto & \coth x \end{array}$$

Argumento da cotangente hiperbólica

- A função $\coth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva mas é possível considerar a sua restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \coth\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus[-1,1] \\ & x & \longmapsto & \coth x \end{array}$$

- A inversa desta restrição, que se designa por argumento da cotangente hiperbólica, é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcoth}\colon & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcoth} y \end{array}$$

onde

$$x = \operatorname{argcoth} y,\ \ y \in \mathbb{R}\setminus[-1,1] \iff \coth x = y,\ \ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

e

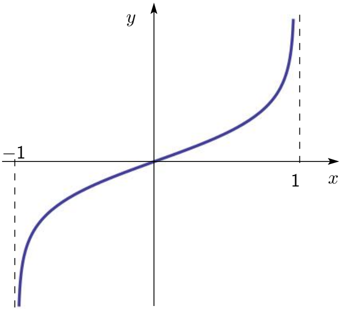
$$\operatorname{argcoth} y = \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right),\ \ y \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$$

Argumento
da tangente hiperbólica

$y = \operatorname{argth} x$,

$\mathrm{D}_{\mathrm{argth}} =]-1, 1[$,

$\mathrm{CD}_{\mathrm{argth}} = \mathbb{R}$

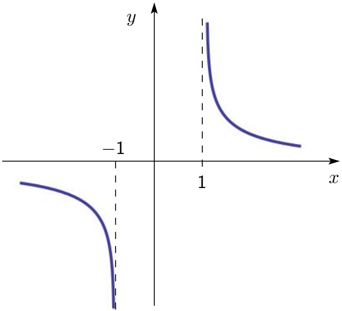


Argumento
da cotangente hiperbólica

$y = \operatorname{argcoth} x$,

$\mathrm{D}_{\mathrm{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

$\mathrm{CD}_{\mathrm{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



A função argumento da tangente hiperbólica é

- contínua;
- estritamente crescente;
- $D_{\text{argth}} =]-1, 1[$
- $CD_{\text{argth}} = \mathbb{R}$.

A função argumento da cotangente hiperbólica é

- contínua;
- decrescente;
- $D_{\text{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$;
- $CD_{\text{argcoth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.