Universidade do Minho

Ano Letivo 2019/20

Caderno de Exercícios Propostos

Modelos Estocásticos de Investigação Operacional

1. *Processos Estocásticos e Programação Dinâmica Estocástica*
2. *Teoria de Filas de Espera*
3. *Gestão de Stocks ou Inventários*

1. Exercícios de Processos Estocásticos e de Programação Dinâmica Estocástica

Exercício 1.1: Cadeias de Markov ergódicas?

Das seguintes matrizes de probabilidades de transição, diga quais delas correspondem a processos Markovianos ergódicos. Para as restantes, identifique os estados recorrentes, transientes e absorventes.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & .8 & .2 \\ .4 & .6 & 0 \\ .3 & .5 & .2 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .6 \\ .4 & .2 & .4 \\ 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} .2 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .7 \\ .5 & .4 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_5 = \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 & .7 \\ .4 & .1 & .3 & .2 \\ .6 & .1 & .2 & .1 \\ .2 & 0 & 0 & .8 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.2: Cadeia de Markov ergódica

Um mecânico reparador que trabalha numa mina pode estar ocupado ou livre. Se estiver correntemente ocupado, a probabilidade de ainda estar ocupado passados 5 minutos é 0.5. Se estiver correntemente livre, a probabilidade de ainda estar livre passados 5 minutos é 0.9.

Defina estágios, estados e a matriz de probabilidades de transição (P).

Com base na análise das transições possíveis, calcule a probabilidade de encontrar o mecânico livre após 10 minutos de o ter encontrado ocupado. Depois determine a matriz P^2 e verifique que a probabilidade calculada anteriormente corresponde a um dos elementos desta matriz.

Determine também P^4 e P^8, e calcule uma estimativa da proporção limite do tempo durante o qual o mecânico estará ocupado. Confirme o resultado obtido através do cálculo do vetor de probabilidade limite.

Exercício 1.3: Cadeia de Markov ergódica

No início de cada dia de trabalho, uma dada máquina pode estar avariada ou em condições de funcionar. Se estiver a funcionar, há uma probabilidade de 0.05 de ficar na condição de avariada no início do dia seguinte. Se estiver avariada (no início de um dado dia), há a garantia de que vai ser arranjada nesse mesmo dia e estará por certo em condições de funcionar no início do dia seguinte.

Se a máquina estiver a funcionar na segunda-feira, qual a probabilidade de estar avariada no início da quarta-feira? E, em média, que fração de tempo passará a máquina avariada ao longo de cada mês?

Suponha agora que a máquina, se estiver avariada no início de um dado dia, demorará 1 ou 2 dias até ser arranjada, com probabilidades 0.7 e 0.3, respetivamente. (Em qualquer dos casos, considere que ficará sempre em condições de funcionar só no início do dia a seguir ao dia em que fica arranjada). Nestas condições, estime a nova fração de tempo que a máquina permanecerá avariada ao longo de cada mês.

Exercício 1.4: Cadeia de Markov ergódica

Uma costureira trabalha exclusivamente numa fase do processo de fabrico numa determinada empresa de confeção de vestuário. Esta fase tem um tempo de processamento de exatamente ½ hora por peça.

A cada ½ hora, um mensageiro passa pela mesa da costureira, recolhe todas as peças de roupa já prontas, e deixa novas peças para serem costuradas. O número de peças de roupa inacabada transportadas na altura da passagem é incerto: 30% das vezes o mensageiro não transporta peça alguma; 50% das vezes, transporta uma peça; 20% das vezes, transporta duas peças. O mensageiro é instruído a deixar à costureira o máximo possível das peças que transporta, sem que, no entanto, permita a acumulação de mais do que três peças de roupa na sua mesa. (Qualquer excesso deverá ser entregue a outra costureira.)

Determine a percentagem de vezes (ou de tempo) em que a costureira fica sem peça alguma para costurar, considerando que todas as peças de roupa que se encontram na sua mesa de trabalho no final de um dia de trabalho serão processadas no dia seguinte. *(R: 14.21% do tempo; Ver Anexo 1.1 pg.6)*

Exercício 1.5: Cadeia de Markov com estados absorventes

Uma empresa realiza regularmente um programa de formação profissional em duas fases distintas. A primeira fase consiste em 3 semanas de aulas teóricas. A segunda fase, também com a duração de 3 semanas, consiste numa aprendizagem prática sob a direção de supervisores especializados.

Pelas experiências anteriores, a empresa espera que somente 60% dos candidatos à fase teórica sejam posteriormente admitidos à fase prática, sendo os restantes eliminados definitivamente do programa de formação. Dos que fazem a parte prática, 70% conseguem obter (de imediato) o diploma final, enquanto 10% são levados a repetir a respetiva parte prática, e os restantes são eliminados definitivamente do programa de formação.

Atualmente, a empresa está a formar um total de 66 candidatos, distribuídos pela fase teórica (45) e pela fase prática (21). Deste total, qual o número esperado de candidatos que alguma vez obterão o diploma final? *(R: 37.353 diplomados; Ver Anexo 1.2 pg.7)*

Exercício 1.6: Problema de decisão, n.º finito de estágios

Uma companhia de exploração petrolífera planeia o seu programa de perfurações em determinado campo petrolífero. Existem cinco possíveis localizações para perfuração, numeradas de 1 a 5 que, a serem selecionadas, o são por ordem numérica.

Se se executar um furo e se for encontrado petróleo, esse furo é considerado um "sucesso"; ao invés, se não for encontrado petróleo, esse furo é considerado um "insucesso". Caso o furo não seja executado, ele é considerado um "insucesso".

Estudos geológicos indicam que a probabilidade genérica de se encontrar petróleo no campo petrolífero é de 0.1. Mas, como é natural que as perfurações em que se encontra petróleo estejam concentradas por regiões, a companhia decide basear a sua política na hipótese de que se qualquer furo provar ser um "sucesso", há uma probabilidade de 0.5 de o furo seguinte ser também um "sucesso", se executado.

O custo de cada perfuração é de 1 U.M., e a contribuição ilíquida esperada (U.M.) de cada furo é:

Furo n.º	1	2	3	4	5
Contribuição ilíquida:	5	4	6	9	5

Que política deve a companhia usar, por forma a maximizar a esperança do lucro líquido total?

Exercício 1.7: Problema de decisão, n.º finito de estágios

Um comerciante lança encomendas para aquisição de um determinado tipo de máquina no início de um mês, e recebe-a no início do mês seguinte. Não lhe é possível armazenar nem encomendar mais do que uma máquina de cada vez.

O custo de uma máquina é 8 U.M., o preço de venda é 10 U.M., e há um custo de posse de inventário de 1 U.M. por máquina, por mês completo.

Se o comerciante faz uma encomenda, mas posteriormente verifica que, devido à restrição do stock máximo, a não pode receber, então sofre uma penalização de 1 U.M..

Ele estima a probabilidade de fazer uma venda em cada um dos próximos quatro meses, desde que tenha stock disponível, como sendo:

Jan	Fev	Mar	Abr
0.7	0.6	0.6	0.4

O comerciante sente-se inseguro quanto a vendas para além dos quatro meses, e decide valorizar o stock no princípio de maio em 7 U.M. por unidade.

Recomende ao comerciante uma política de encomendas a seguir ao longo dos meses, supondo que ele tem uma máquina em stock no princípio de janeiro.

Exercício 1.8: Incerteza nas contribuições, mas certeza nos estados obtidos

Uma empresa da área alimentar compra diariamente 4 paletes de leite do dia a um fornecedor local, a um preço de 1 UM por palete. A empresa possui 3 supermercados, nos quais vende o leite por 2 UM cada palete. Infelizmente para a empresa, a procura por este produto é incerta (*ver tabela abaixo*), sendo que todo o leite não vendido num determinado dia poderá ser retomado pelo fornecedor, mas a um preço 50% inferior ao preço de aquisição, ou seja, a 0.5 UM por palete.

O problema da empresa consiste em determinar que alocação deve ser feita das 4 paletes de leite pelos 3 supermercados, de forma a maximizar a esperança do lucro obtido diariamente. Que alocação será de recomendar?

	Procura diária (paletes)	Probabilidade
Supermercado 1	1	0.60
	2	0
	3	0.40
Supermercado 2	1	0.50
	2	0.10
	3	0.40
Supermercado 3	1	0.40
	2	0.30
	3	0.30

Exercício 1.9: Problema de decisão, número indeterminado de estágios

O programa de privatizações do governo vai continuar com mais três OPV's sobre a 100Pó, ÉDoZé e PoTecom, durante os próximos três meses: 100Pó em maio, ÉDoZé em junho e PoTecom em julho.

O Sr. Grilo possui 1000 UM que pretende aplicar. Em relação a qualquer uma das companhias em processo de privatização, o Sr. Grilo pode não fazer qualquer oferta de compra, tentar comprar 500 UM, ou tentar comprar 1000 UM de ações.

Caso o Sr. Grilo não consiga (ou não tente) investir em ações, pode ainda investir na última novidade com benefícios fiscais, os PPU's - Planos Poupança em Universidades. Estes últimos podem ser adquiridos em múltiplos de 100 UM, e o respetivo ganho esperado ao fim de um ano ronda os 60% do capital investido.

Atendendo a que o governo procura encorajar os pequenos investidores e pretende dispersar o capital em bolsa, uma oferta de compra de 1000 UM de ações tem maior probabilidade de ser rejeitada do que uma oferta de compra de 500 UM de ações.

Caso o Sr. Grilo venha a adquirir efetivamente qualquer número de ações, ele pretende manter estas pelo menos durante um ano para assim ter direito a receber o(s) respetivo(s) prémio(s) de fidelidade.

De acordo com o enunciado anterior, e atendendo aos dados constantes na tabela seguinte, determine a melhor política de investimentos a aconselhar ao Sr. Grilo. Identifique claramente todas as hipóteses consideradas.

	Ganho esperado	Probabilidade de aceitação	
Empresa	(1 ano, incl. prémio fidelidade)	Oferta: 500 UM	Oferta: 1000 UM
100Pó	40%	0.8	0.6
ÉDoZé	100%	0.3	0.25
PoTecom	50%	0.6	0.5

Exercício 1.10: Problema de decisão, número indeterminado de estágios

Os concorrentes a um concurso de televisão são convidados a submeter-se a quatro provas, segundo uma ordem específica. As regras são as seguintes:

Em cada estágio, o concorrente pode optar por jogar ou ficar de fora. Se o concorrente joga e é bem-sucedido, mas não em qualquer outro caso, ganha um prémio dado por:

Prova n.º	1	2	3	4
Prémio	2	5	15	75

Se o concorrente joga e falha, perde qualquer prémio monetário que tenha ganho na prova anterior, e perde ainda o direito de participar na prova seguinte.

A probabilidade de ser bem-sucedido nas diversas provas é:

Prova n.º	1	2	3	4
Probabilidade de sucesso	0.8	0.5	0.3	0.2

Que política deverá o concorrente utilizar?

Exercício 1.11: N.º indeterminado de estágios, sem alternativas

Uma estação geradora hidroelétrica necessita que 2 milhões de acres-pés de água sejam libertados no final de cada mês, para funcionar na sua capacidade máxima.

A água para a estação é armazenada num reservatório, para o qual a alimentação é de 0, 1, 2 ou 3 milhões de acres-pés por mês, com probabilidades 1/6, 1/3, 1/3 e 1/6, respetivamente.

Se a quantidade de água disponível exceder a capacidade do reservatório, que é de 3 milhões de acres-pés, o excedente é libertado através de canais de drenagem, e, portanto, eliminado.

Se a quantidade de água disponível em qualquer mês for inferior a 2 milhões de acres-pés, são utilizados geradores de emergência, alimentados a *diesel*, por forma a manter o fornecimento normal de energia.

Atendendo a que são necessários 200 mil U.M. de *diesel* por cada milhão de acres-pés de água insuficiente, determine a esperança dos custos mensais neste combustível, a longo prazo.

(N.B. 1acre=4047m2, 1ft=0.3048m, 1 acre-ft=1233.5m3)

Exercício 1.12: Problema de decisão, n.º indeterminado de estágios

O serviço de manutenção de uma fábrica toma as seguintes formas: serviço de rotina, executado a intervalos de tempo regulares; reparação de emergência, necessária sempre que há avaria.

O gestor da fábrica recebe orçamentos para contratos de manutenção de duas companhias (A e B).

Ambas as companhias se propõem cobrar uma taxa fixa anual de 52 U.M. para manutenção de rotina.

As reparações de emergência são cobradas como serviços extraordinários, e o gestor pode decidir ter a manutenção de rotina e as reparações de emergência apoiadas por diferentes companhias.

No princípio de qualquer semana, a fábrica pode estar em funcionamento ou parada devido a avaria.

Se a fábrica estiver em funcionamento no início de uma semana, estará ainda em funcionamento no início da semana seguinte, com uma probabilidade de 0.7 se a companhia A for responsável pela manutenção de rotina, e 0.9 se o mesmo trabalho for realizado pela companhia B.

Se a fábrica estiver parada por avaria, no início de uma semana, continuará parada no início da semana seguinte com uma probabilidade de 0.5 e 0.3, se o trabalho de reparação de emergência for executado pela companhia A e B, respetivamente.

A fábrica sofre custos de 10 U.M. sempre que a máquina está avariada no princípio de uma semana, tendo estado em funcionamento na semana anterior, ou quando não é reparada, tendo estado parada na semana anterior.

A companhia A propõe cobrar 2 U.M. por reparação de emergência, enquanto a companhia B propõe cobrar 6 U.M pelo mesmo tipo de reparação.

Que companhia deve o gestor da fábrica selecionar para fazer cada um dos tipos de reparação, se se pretender minimizar a esperança dos custos a longo prazo?

(Sugestão: considere que as mudanças de estado ocorrem apenas no início de cada semana.)

ANEXO 1.1

Resolução do Exercício 1.4 (Costureiras)

(?) Defina estágios:

(?) Defina estados:

(?) Defina Matriz de Transição, P=

Os cálculos seguintes talvez lhe sejam úteis:

1.000	0.000	0.000	Estado inicial ou número inicial

	0.800	0.200	0.000	1.000		0.541	0.303	0.156		0.489	0.313	0.198		0.477	0.315	0.208
P =	0.300	0.500	0.200	1.000	P6 =	0.455	0.319	0.226	P11 =	0.469	0.317	0.214	P16 =	0.473	0.316	0.211
	0.000	0.300	0.700	1.000		0.351	0.338	0.311		0.445	0.321	0.234		0.467	0.317	0.216
	0.800	0.200	0.000			0.541	0.303	0.156		0.489	0.313	0.198		0.477	0.315	0.208
	0.700	0.260	0.040			0.524	0.307	0.170		0.485	0.314	0.201		0.476	0.315	0.208
P2 =	0.390	0.370	0.240		P7 =	0.460	0.318	0.222	P12 =	0.471	0.316	0.213	P17 =	0.473	0.316	0.211
	0.090	0.360	0.550			0.382	0.333	0.285		0.453	0.320	0.228		0.469	0.317	0.214
	0.700	0.260	0.040			0.524	0.307	0.170		0.485	0.314	0.201		0.476	0.315	0.208
	0.638	0.282	0.080			0.511	0.309	0.180		0.482	0.314	0.204		0.476	0.315	0.209
P3 =	0.423	0.335	0.242		P8 =	0.463	0.318	0.219	P13 =	0.471	0.316	0.212	P18 =	0.473	0.316	0.211
	0.180	0.363	0.457			0.405	0.328	0.266		0.458	0.319	0.223		0.470	0.316	0.213
	0.638	0.282	0.080			0.511	0.309	0.180		0.482	0.314	0.204		0.476	0.315	0.209
	0.595	0.293	0.112			0.501	0.311	0.188		0.480	0.315	0.205		0.475	0.316	0.209
P4 =	0.439	0.325	0.236		P9 =	0.466	0.317	0.217	P14 =	0.472	0.316	0.212	P19 =	0.473	0.316	0.211
	0.253	0.355	0.393			0.423	0.325	0.252		0.462	0.318	0.220		0.471	0.316	0.213
	0.595	0.293	0.112			0.501	0.311	0.188		0.480	0.315	0.205		0.475	0.316	0.209
	0.564	0.299	0.137			0.494	0.312	0.194		0.478	0.315	0.207		0.475	0.316	0.210
P5 =	0.449	0.321	0.230		P10 =	0.468	0.317	0.215	P15 =	0.472	0.316	0.212	P20 =	0.473	0.316	0.211
	0.309	0.346	0.346			0.436	0.323	0.241		0.465	0.317	0.218		0.472	0.316	0.212
	0.564	0.299	0.137			0.494	0.312	0.194		0.478	0.315	0.207		0.475	0.316	0.210

(?) Conclusões:

ANEXO 1.2

Resolução do Exercício 1.5 (Empresa de Formação Profissional)

(?) Defina estágios:

(?) Defina estados:

(?) Defina Matriz de Transição, P=

Os cálculos seguintes talvez lhe sejam úteis:

P =	1.000	0.000	0.000	0.000	P6 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P11 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P16 =	1.000	0.000	0.000	0.000
	0.400	0.000	0.600	0.000		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467
	0.200	0.000	0.100	0.700		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
P2 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P7 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P12 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P17 =	1.000	0.000	0.000	0.000
	0.520	0.000	0.060	0.420		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467
	0.220	0.000	0.010	0.770		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
P3 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P8 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P13 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P18 =	1.000	0.000	0.000	0.000
	0.532	0.000	0.006	0.462		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467
	0.222	0.000	0.001	0.777		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
P4 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P9 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P14 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P19 =	1.000	0.000	0.000	0.000
	0.533	0.000	0.001	0.466		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467
	0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
P5 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P10 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P15 =	1.000	0.000	0.000	0.000	P20 =	1.000	0.000	0.000	0.000
	0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467		0.533	0.000	0.000	0.467
	0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000

0	15/22	7/22	0	times	1.000	0.000	0.000	0.000	=	0.434	0.000	0.000	0.566
					0.533	0.000	0.000	0.467					
					0.222	0.000	0.000	0.778					
					0.000	0.000	0.000	1.000					

(?) Conclusões: