Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações MIEInf

Cálculo

folha 10 — 2017'18

Integrais Impróprios.

1. Estude os seguintes integrais impróprios

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

2. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx$ é convergente quando $\alpha < -1$ e é divergente se $\alpha \geq -1$.

3. Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx$ é convergente se $r > 0$ e divergente se $r \leq 0$.

(Sug.: comece por estudar o caso $r = 0$.)

4. Seja $\mathcal{R}$ a região definida por $y = e^{-x}$ com $x \geq 0$ e o eixo das abcissas.

(a) Esboce $\mathcal{R}$ e calcule, se possível, a área de $\mathcal{R}$.

(b) Determine, se possível, o comprimento da curva que limita $\mathcal{R}$ superiormente.

5. Sabendo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e que $a, b \in \mathbb{R}$, calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-a)^2}{b}}\,dx$$

6. Indique, justificando, se cada um dos seguintes integrais é convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\;dx$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$. (Sug.: escreva o integral como soma de dois integrais.)

7. Seja f uma função tal que $\lim_{c\longrightarrow+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$. O que se pode, nestas condições, dizer sobre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$?

8. Estude a natureza dos seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

9. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

Indique o domínio de f e estude a natureza do integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

10. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Com $a \in \mathbb{R}^+$, quais das seguintes afirmações são falsas e quais as verdadeiras? Justifique a sua resposta.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\,f(x)\,dx$ converge. (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(a+x)\,dx$ converge.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(ax)\,dx$ converge. (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (a+f(x))\,dx$ converge.