# Capítulo 4

# Os espaços vectoriais $\mathbb{K}^n$

Neste capítulo estudaremos um caso muito particular de uma importante classe de estruturas algébricas, denominada por espaços vectoriais.

Tal como nos resultados apresentados anteriormente, $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 4.1 Definição e exemplos

Considere-se o conjunto $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$. Faça-se, ainda, a identificação dos elementos de $\mathbb{K}^n$ com o conjunto das matrizes coluna $n \times 1$ com entradas em $\mathbb{K}$. Os elementos de $\mathbb{K}^n$ serão denominados como vectores de $\mathbb{K}^n$.

Relembrando as propriedades do produto escalar e da soma de matrizes, e particularizando-as para o caso das matrizes coluna $n \times 1$, obtêm-se as seguintes propriedades:

1. Fecho da adição: $\forall_{x,y \in \mathbb{K}^n}, x + y \in \mathbb{K}^n$;

2. Fecho da multiplicação por escalares: $\forall_{x \in \mathbb{K}^n}, \alpha \in \mathbb{K}, \alpha x \in \mathbb{K}^n$;

3. Comutatividade da adição: $\forall_{x,y \in \mathbb{K}^n}, x + y = y + x$;

4. Associatividade da adição: $\forall_{x,y,z \in \mathbb{K}^n}, x + (y + z) = (x + y) + z$;

5. Existência de zero: existe um elemento de $\mathbb{K}^n$ (a matriz 0 de tipo $n \times 1$), tal que $x + 0 = x$, para $x \in \mathbb{K}^n$;

6. Existência de simétricos: $\forall_{x \in \mathbb{K}^n}, x + (-1)\, x = 0$;

7. Associatividade da multiplicação por escalares: $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n}, \alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$;

8. Distributividade: $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$ e $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$, para $x, y \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

9. Existência de identidade: $1x = x$, para todo $x \in \mathbb{K}^n$.

**Definição 4.1.1.** *Seja $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Então $W$ é um* subespaço *de $\mathbb{K}^n$ se as condições seguintes forem satisfeitas:*

1. $W \neq \emptyset$;

2. $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;

3. $v \in W, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha v \in W$.

Observe que se $W$ é subespaço de $\mathbb{K}^n$ então **necessariamente** $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

Como exemplo, considere o subconjunto $S$ de $\mathbb{R}^2$ dado por $S = \{(x, y) : y = 2x\}$. O conjunto é obviamente não vazio, já que $(0, 0) \in S$. Tomemos, agora, e de forma arbitrária, dois elementos, $u$ e $v$, se $S$. Então $u = (x_1, 2x_1)$ e $v = (x_2, 2x_2)$, para algum $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, donde $u + v = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) \in S$. Finalmente, e para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $\alpha u = (\alpha x_1, 2\alpha x_1) \in S$.

No entanto, $T = \left\{(x, x^3) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\right\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$, isto apesar de $(0, 0) \in T$. De facto, e apesar $(1, -1), (2, 8) \in T$, a sua soma não é elemento de $S$.

De ora em diante, sempre que nos referirmos a um *espaço vectorial* $V$ este é um subespaço de $\mathbb{K}^n$, dizendo-se que $V$ é um espaço vectorial real ou complexo, consoante $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Note-se que, em particular, $\mathbb{K}^n$ é um espaço vectorial.

Dizemos que um subconjunto não vazio $W$ de um espaço vectorial $V$ é subespaço vectorial de $V$ se para quaisquer escolhas de $u, v \in W$ e de $\alpha \in \mathbb{K}$ se tem $u+v \in W$ e $\alpha v \in W$. Mostra-se facilmente que um subespaço vectorial é também um subespaço de $\mathbb{K}^n$. Não faremos, por consequência, distinção entre subespaço e subespaço vectorial.

**Exercícios**

Diga quais dos conjuntos seguintes são subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ :

1. $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0$ e $x_2 + 2x_4 = 0\}$.

2. $W_2 = \{(0, a, b, -1) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

3. $W_3 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

4. $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 \in \mathbb{Q}\}$.

## 4.2 Independência linear

Sejam $V$ um espaço vectorial e $\{v_i\}_{i \in I} \subseteq V, \{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{K}$. Se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

diz-se que $v$ é uma *combinação linear* dos vectores $v_1, \ldots, v_n$. Neste caso, dizemos que $v$ se pode escrever como *combinação linear* de $v_1, \ldots, v_n$.

**Definição 4.2.1** (Conjunto linearmente independente)**.** *Um conjunto não vazio* $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ *diz-se* linearmente independente *se*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

*Um conjunto diz-se linearmente dependente se não for linearmente independente.*

Por abuso de linguagem, tomaremos, em algumas ocasiões, vectores linearmente independentes para significar que o conjunto formado por esses vectores é linearmente independente.

O conceito de dependência e independência linear é usualmente usado de duas formas.

(i) Dado um conjunto não vazio $\{v_i\}$ de $n$ vectores linearmente dependentes, então é possível escrever o vector nulo como combinação linear não trivial de $v_1, \ldots, v_n$. Ou seja, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, algum ou alguns dos quais não nulos, tais que

$$0 = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i v_i.$$

Seja $\alpha_k$ um coeficiente não nulo dessa combinação linear. Então

$$v_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(-\alpha_k^{-1}\alpha_i\right) v_i.$$

Concluindo, dado um conjunto de vectores linearmente dependentes, então pelo menos um desses vectores é uma combinação linear (não trivial) dos outros vectores.

(ii) Dado um conjunto não vazio $\{v_i\}$ de $n$ vectores linearmente independentes, da relação

$$0 = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i v_i$$

podemos concluir de forma imediata e óbvia que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Esta implicação será muito útil ao longo desta disciplina.

Como exemplo, consideremos em $\mathbb{R}^3$ os vectores $\alpha = (1, 1, 0), \beta = (1, 0, 1), \gamma = (0, 1, 1), \delta = (1, 1, 1)$. Estes quatro vectores são linearmente dependentes (pois $\alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0$), apesar de quaisquer três deles serem linearmente independentes.

**Teorema 4.2.2.** *Sejam* $v_1, \ldots, v_n$ *elementos linearmente independentes de um espaço vectorial* $V$*. Sejam ainda* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

*Então* $\alpha_i = \beta_i$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$*.*

*Demonstração.* Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ então

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0,$$

pelo que, usando o facto de $v_1, \ldots, v_n$ serem linearmente independentes, se tem $\alpha_i - \beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. □

O resultado anterior mostra a *unicidade* da escrita de um vector como combinação linear de elementos de um conjunto linearmente independente, caso essa combinação linear exista.

**Teorema 4.2.3.** *Seja $A$ um subconjunto não vazio de um espaço vectorial $V$. Então o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de $A$ é um subespaço vectorial de $V$.*

*Demonstração.* Seja $A'$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de $A$. $A'$ é obviamente não vazio visto $A \neq \emptyset$. Sejam $u, v \in A'$. Ou seja,

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i a_i, \;\; v = \sum_{j \in J} \beta_j a_j,$$

para alguns $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, com $a_i \in A$. Note-se que

$$u + v = \sum_{i \in I} \alpha_i a_i + \sum_{j \in J} \beta_j a_j$$

e portanto $u + v$ é assim uma combinação linear de elementos de $A$ – logo, $u + v \in A'$. Para $\kappa \in \mathbb{K}$, temos que $\kappa u = \sum_{i \in I}^{n} \kappa \alpha_i a_i$ e portanto $\kappa u \in A'$. □

Tendo em conta o teorema anterior, podemos designar o conjunto das combinações lineares dos elementos de $A$ como o *espaço gerado* por $A$. Este espaço vectorial (subespaço de $V$) denota-se por $\langle A \rangle$.

Quando o conjunto $A$ está apresentado em extensão, então não escrevemos as chavetas ao denotarmos o espaço gerado por esse conjunto. Por exemplo, se $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, então $\langle A \rangle$ pode-se escrever como $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Por notação, $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

É importante referir os resultados que se seguem, onde $V$ indica um espaço vectorial.

1. Os vectores não nulos $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ são linearmente independentes se e só se, para cada $k$, $v_k \notin \langle v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$.

2. Sejam $A, B \subseteq V$.

   (a) Se $A \subseteq B$ então $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

   (b) $\langle A \rangle = \langle \langle A \rangle \rangle$.

   (c) $\langle A \rangle$ é o menor (para a relação de ordem $\subseteq$) subespaço de $V$ que contém $A$.

## 4.3 Bases de espaços vectoriais

**Definição 4.3.1.** *Seja $V$ um espaço vectorial.*

*Um conjunto $\mathcal{B}$ linearmente independente tal que $\langle\mathcal{B}\rangle = V$ é chamado de* base *de $V$.*

**Teorema 4.3.2.** *Todo o espaço vectorial tem uma base.*

De ora em diante, apenas consideraremos espaços vectoriais finitamente gerados. Por vezes faremos referência à base $v_1, v_2, \ldots, v_n$ para indicar que estamos a considerar a base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

**Definição 4.3.3.** *Uma base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $V$ cujos elementos estão dispostos por uma ordem fixa*[1]*. Chamam-se* componentes *ou* coordenadas *de $u \in V$ na base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ aos coeficientes escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ da combinação linear*

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k.$$

As coordenadas de $u$ na base $\mathcal{B}$ são denotadaspor

$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Recordemos que, se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $V$, em particular são linearmente independentes, e portanto dado $v \in V$, os coeficientes de $v$ na base $\mathcal{B}$ são únicos.

**Teorema 4.3.4.** *Se um espaço vectorial tem uma base com um número finito $n$ de elementos, então todas as bases de $V$ têm $n$ elementos.*

*Demonstração.* Seja $V$ um espaço vectorial e $v_1, \ldots, v_n$ uma base de $V$. Seja $w_1, \ldots, w_m$ outra base de $V$ com $m$ elementos.

Como $v_1, \ldots, v_n$ é base de $V$, existem $\alpha_{ji} \in \mathbb{K}$ para os quais

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j.$$

[1] De uma forma mais correcta, $\mathcal{B}$ não deveria ser apresentado como conjunto, mas sim como um n-uplo: $(v_1, \ldots, v_m)$. Comete-se assim um abuso de notação, tendo em mente que a notação escolhida indica a ordem dos elementos da base pelos quais foram apresentados.

Note-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} x_i w_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_{ji} v_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_{ji} \right) v_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_{ji} = 0, \text{ para todo } j \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

e que

$$\sum_{i=1}^{m} x_i w_i = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 0$$

é um sistema *determinado*, pelo que

$$m = \operatorname{car}\left( \begin{bmatrix} \alpha_{ji} \end{bmatrix} \right) \leq n.$$

Trocando os papéis de $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ e de $\langle w_1, \ldots, w_m \rangle$, obtemos $n \leq m$. Logo, $n = m$. $\square$

**Definição 4.3.5.** *Seja $V$ um espaço vectorial. Se existir uma base de $V$ com $n$ elementos, então diz-se que $V$ tem dimensão $n$, e escreve-se* $\dim V = n$. *$V$ tem dimensão nula,* $\dim V = 0$ *se $V = \{0\}$.*

**Corolário 4.3.6.** *Seja $V$ um espaço vectorial com* $\dim V = n$. *Para $m > n$, qualquer conjunto de $m$ elementos de $V$ é linearmente dependente.*

*Demonstração.* A demonstração segue a do teorema anterior. $\square$

**Teorema 4.3.7.** *Seja $V$ um espaço vectorial com* $\dim V = n$.

1. *Se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes em $V$, então $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base de $V$.*

2. *Se $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$, então $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base de $V$.*

*Demonstração.* (1) Basta mostrar que $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$. Suponhamos, por absurdo, que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, e que $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \subsetneq V$. Ou seja, existe $0 \neq w \in V$ para o qual $w \notin \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$. Logo, $v_1, \ldots, v_n, w$, são linearmente independentes, pelo que em $V$ existem $n+1$ elementos linearmente independentes, o que contradiz o corolário anterior.
(2) Basta mostrar que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Suponhamos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes e que $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Então pelo menos um deles é combinação linear dos outros. Ou seja, existe $v_k$ tal que $v_k \in \langle v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$. Se $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$ não forem linearmente independentes, então repetimos o processo até obtermos $B \subsetneq A$ linearmente independente. Vamos mostrar que $\langle B\rangle = \langle A\rangle$, recordando que $\langle A\rangle = V$. Seja $C = A \setminus B$; isto é, $C$ é o conjunto dos elementos que se retiraram a $A$ de forma a obter o conjunto linearmente independente $B$. Portanto,

$$v_i \in C \Rightarrow v_i = \sum_{v_j \in B} \beta_{ij} v_j.$$

Seja então $v \in V = \langle A\rangle$. Ou seja, existem $\alpha_i$'s para os quais

$$\begin{aligned} v &= \sum_{v_i \in A} \alpha_i v_i \\ &= \sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i + \sum_{v_i \in C} \alpha_i v_i \\ &= \sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i + \sum_i \alpha_i \sum_{v_j \in B} \beta_{ij} v_j \\ &= \sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i + \sum_i \sum_{v_j \in B} \alpha_i \beta_{ij} v_j \in \langle B\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $B$ é uma base de $V$ com $m < n$ elementos, o que é absurdo. □

**Corolário 4.3.8.** *Sejam $V$ um espaço vectorial e $W_1, W_2$ subespaços vectoriais de $V$. Se $W_1 \subseteq W_2$ e $\dim W_1 = \dim W_2$ então $W_1 = W_2$*

*Demonstração.* Se $W_1 \subseteq W_2$ e ambos são subespaços de $V$ então $W_1$ é subespaço de $W_2$. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_r\}$ uma base de $W_1$, com $r = \dim W_1$. Segue que $\mathcal{B}$ é linearmente independente em $W_2$. Como $r = \dim W_1 = \dim W_2$, temos um conjunto linearmente inpedente com $r$ elementos. Por (1) do teorema, $\mathcal{B}$ é base de $W_2$, o portanto $W_1 = \langle \mathcal{B}\rangle = W_2$. □

**Corolário 4.3.9.** *Seja $V$ um espaço vectorial e $A$ um conjunto tal que $\langle A\rangle = V$. Então existe $B \subseteq A$ tal que $B$ é base de $V$.*

*Demonstração.* A demonstração segue o mesmo raciocínio da demonstração de (2) do teorema anterior. □

## 4.4 Núcleo e espaço das colunas de uma matriz

Faremos agora a interpretação dos conceitos apresentados anteriormente à custa de matrizes sobre $\mathbb{K}$.

Repare que as colunas de $I_n$ formam uma base de $\mathbb{K}^n$, pelo que $\dim \mathbb{K}^n = n$, se considerarmos os escalares em $\mathbb{K}$. Mostre-se que de facto geram $\mathbb{K}^n$. Se se denotar por $e_i$ a coluna $i$ de $I_n$, é imediato verificar que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Por outro lado, $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$ implica $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, e portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. O conjunto $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é chamado *base canónica* de $\mathbb{K}^n$.

**Teorema 4.4.1.** *Sejam $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{K}^m$ e $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}_{m \times n}$ (as colunas de $A$ são os vectores $v_i \in \mathbb{K}^m$). Então $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente se e só se $car(A) = n$.*

*Demonstração.* Consideremos a equação $Ax = 0$, com $x = [x_1\, x_2 \cdots x_n]^T$. Ou seja, consideremos a equação

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Equivalentemente,

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0.$$

Ou seja, a independência linear de $v_1, \ldots, v_n$ é equivalente a $N(A) = \{0\}$ (isto é, 0 ser a única solução de $Ax = 0$). Recorde que $Ax = 0$ é possível determinado se e só se $car(A) = n$. $\square$

Com base no teorema anterior, os vectores

$$u = (1, 2, 3, 3); v = (2, 0, 1, -1); w = (0, 0, -1, -3)$$

são linearmente independentes. Tal é equivalente a mostrar que

$$\operatorname{car} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = \operatorname{car} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 3.$$

Para $y = (1, -6, -7, -11)$, os vectores $u, v, y$ não são linearmente independentes, já que $\operatorname{car} \begin{bmatrix} u & v & y \end{bmatrix} = 2$.

**Teorema 4.4.2.** *Dados $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$, seja $A$ a matriz $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ cujas colunas são $v_1, \ldots, v_m$. Então $w \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ se e só se $Ax = w$ tem solução.*

*Demonstração.* Escrevendo $Ax = w$ como

$$[v_1 \dots v_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = w,$$

temos que $Ax = w$ tem solução se e só se existirem $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_m v_m = w,$$

isto é, $w \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. □

**Definição 4.4.3.** *Ao subespaço $CS(A) = \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\}$ de $\mathbb{K}^m$ chamamos* imagem *de A, ou* espaço das colunas *de A. Por vezes, $CS(A)$ é denotado também por $R(A)$ e por $Im(A)$. O espaço das colunas da $A^T$ designa-se por* espaço das linhas *de A e denota-se por $RS(A)$.*

Considerando $u, v, w, y$ como no exemplo anterior, vamos verificar se $y \in \langle u, v, w \rangle$. Para $A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$, tal é equivalente a verificar se $Ax = y$ tem solução. Ou seja, se car$A$ = car$\left(\begin{bmatrix} A \mid y \end{bmatrix}\right)$. Aplicando o AEG, deduzimos que car$(A) = 3 =$ car$(\begin{bmatrix} A \mid y \end{bmatrix})$.

Já o vector $(0,0,0,1)$ não é combinação linear de $u, v, w$, ou seja, $(0,0,0,1) \notin \langle u, v, w \rangle$. De facto, car$(A) \neq$ car$\left(\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & 0 \\ & 1 \end{array}\right]\right)$.

Vejamos qual a razão de se denominar "espaço das colunas de $A$" a $CS(A)$. Escrevendo $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ através das colunas de $A$, pela forma como o produto de matrizes foi definido, obtemos

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

O teorema anterior afirma que $b \in CS(A)$ (i.e., $Ax = b$ é possível) se e só se $b$ for um elemento do espaço *gerado* pelas colunas de $A$.

A classificação de sistemas de equações lineares como impossível, possível determinado ou possível indeterminado, ganha agora uma nova perspectiva geométrica.

Por exemplo, consideremos a equação matricial $A[x\,y\,z]^T = b$, com $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$. O sistema é possível, já que $car(A) = car([A\,b])$, mas é indeterminado pois

$car(A) < 3$.

As colunas de $A$, que geram $CS(A)$, não são linearmente independentes. Como $Ax = b$ é possível temos que $b \in CS(A)$, mas não sendo as colunas linearmente independentes, $b$ não se escreverá de forma única como combinação linear das colunas de $A$. O sistema de equações tem como soluções as realizações *simultâneas* das equações $2x+4y-8z = 14$, $x+2y-4z = 7$ e $2x + 3y + 5z = 10$. Cada uma destas equações representa um plano de $\mathbb{R}^3$, e portanto as soluções de $Ax = b$ são exactamente os pontos de $\mathbb{R}^3$ que estão na intersecção destes planos.

No entanto, o sistema $Ax = c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ é impossível, já que $car(A) = 2 \neq 3 = car([A\,c])$. A intersecção dos planos dados pelas equações do sistema é vazia.

Considere agora $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. O facto de $Ax = b$ ser impossível (compare a característica de $A$ com a de $[A\,b]$) significa que $b \notin CS(A)$. Ora $CS(A) = \langle (1, 1, -1), (1, 0, 1) \rangle$, ou seja, $CS(A)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que se escrevem da forma

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(1, 0, 1) = (\alpha + \beta, \alpha, -\alpha + \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Com alguns cálculos, podemos encontrar a equação que define $CS(A)$. Recorde que se pretende encontrar os elementos $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ para os quais existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

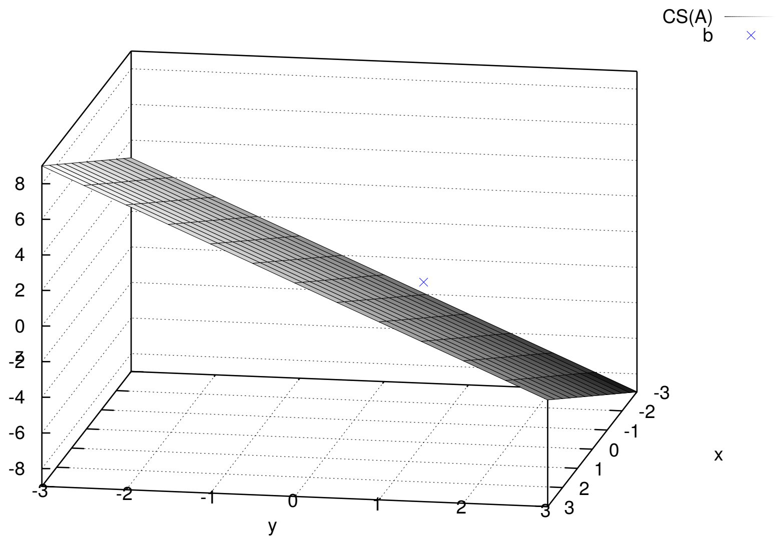
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Usando o método que foi descrito na parte sobre resolução de sistemas lineares,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 1 & z \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & z - x + 2y \end{array}\right].$$

Como o sistema tem que ter soluções $\alpha, \beta$, somos forçados a ter $z = x - 2y$.

Ora $Ax = b$ é impossível, pelo que $b \notin CS(A)$. Ou seja, $b$ não é um ponto do plano gerado pelas colunas de $A$.




Se $A$ for invertível, então $CS(A) = \mathbb{K}^n$ (neste caso, tem-se necessariamente $m = n$). De facto, para $x \in \mathbb{K}^n$, podemos escrever $x = A(A^{-1}x)$, pelo que, tomando $y = A^{-1}x \in \mathbb{K}^n$, temos $x = Ay \in CS(A)$. Portanto,

$$\mathbb{K}^n \subseteq CS(A) \subseteq \mathbb{K}^n.$$

Se $A, B$ são matrizes reais para as quais $AB$ existe, temos a inclusão $CS(AB) \subseteq CS(A)$. De facto, se $b \in CS(AB)$ então $ABx = b$, para algum $x$. Ou seja, $A(Bx) = b$, pelo que $b \in CS(A)$.

Se $B$ for invertível, então $CS(AB) = CS(A)$. Esta igualdade fica provada se se mostrar que $CS(A) \subseteq CS(AB)$. Para $b \in CS(A)$, existe $x$ tal que $b = Ax = A(BB^{-1})x = (AB)B^{-1}x$, e portanto $b \in CS(AB)$.

Recordemos, ainda, que para $A$ matriz real $m \times n$, existem matrizes $P, L, U$ permutação, triangular inferior com 1's na diagonal (e logo invertível) e escada, respectivamente, tais que

$$PA = LU.$$

Ou seja,

$$A = P^{-1}LU.$$

Finalmente, e a comprovação deste facto fica ao cargo do leitor, as linhas não nulas de $U$, matriz obtida de $A$ por aplicação do método de eliminação de Gauss, são *linearmente independentes*.

Para $A, P, L, U$ definidas atrás,

$$RS(A) = CS(A^T) = CS(U^T(P^{-1}L)^T) = CS(U^T) = RS(U).$$

Ou seja, o espaço das linhas de $A$ e o das linhas de $U$ são o mesmo, e uma base de $RS(A)$ são as linhas não nulas de $U$ enquanto elementos de $\mathbb{K}^n$. Temos, então,

$$RS(A) = RS(U) \text{ e } \dim RS(A) = car(A)$$

Seja $QA$ a forma normal de Hermite de $A$. Portanto, existe uma matriz permutação $P_{\text{erm}}$ tal que $QAP_{\text{erm}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, onde $r = \text{car}(A)$. Repare que $CS(QA) = CS(QAP_{\text{erm}})$, já que o conjunto gerador é o mesmo (ou ainda, porque $P_{\text{erm}}$ é invertível). As primeiras $r$ colunas de $I_m$ formam uma base de $CS(QAP_{\text{erm}}) = CS(QA)$, e portanto $\dim CS(QA) = r$. Pretendemos mostrar que $\dim CS(A) = \text{car}(A) = r$. Para tal, considere o lema que se segue:

**Lema 4.4.4.** *Seja $Q$ uma matriz $n \times n$ invertível e $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$. Então $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é linearmente independente se e só se $\{Qv_1, Qv_2, \ldots, Qv_r\}$ é linearmente independente.*

*Demonstração.* Repare que $\sum_{i=1}^r \alpha_i Q v_i = 0 \Leftrightarrow Q\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0$. □

Usando o lema anterior,

$$\dim CS(A) = \dim CS(QA) = r = \text{car}(A).$$

Sendo $U$ a matriz escada de linhas obtida por Gauss, $U$ é equivalente por linhas a $A$, e portanto $\dim CS(U) = \dim CS(A) = \text{car}(A)$.

Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 0, -2), v = (2, -2, 0), w = (-1, 3, -1).$$

Estes formam uma base de $\mathbb{R}^3$, já que $CS(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) = \mathbb{R}^3$. Esta igualdade é válida já que $CS(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\text{car}(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) = \dim CS(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) = 3$. Fica ao cargo do leitor verificar que, para $A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ se tem $\text{car}(A) = 3$.

Já os vectores $u, v, q$, com $q = (-5, 6, -2)$, não são uma base de $\mathbb{R}^3$. De facto,

$$\text{car}\left(\begin{bmatrix} u & v & q \end{bmatrix}\right) = \text{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

e portanto $\dim CS(\begin{bmatrix} u & v & q \end{bmatrix}) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. As colunas da matriz não são linearmente independentes, e portanto não são uma base do espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} u & v & q \end{bmatrix}$.

A questão que se coloca aqui é: **como obter uma base para** $CS(A)$?

Suponha que $V$ é a matriz escada de linhas obtida da matriz $A^T$. Recorde que $RS(A^T) = RS(V)$, e portanto $CS(A) = CS(V^T)$. Portanto, e considerando a matriz $A = [u\,v\,q]$ do exemplo anterior, basta-nos calcular uma matriz escada de linhas $V$ associada a $A^T$. Por exemplo, $V^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 6 & \frac{6}{5} & 0 \\ -2 & -\frac{12}{5} & 0 \end{bmatrix}$. As duas primeiras colunas de $V^T$ formam uma base de $CS(A)$.

Em primeiro lugar, verifica-se que as $r$ colunas de $U$ com pivot, digamos $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}$ são linearmente independentes pois $\begin{bmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \ldots & u_{i_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$ é possível determinado.

Em segundo lugar, vamos mostrar que as colunas de $A$ correspondentes às colunas de $U$ com pivot são também elas linearmente independentes. Para tal, alertamos para a igualdade $U \begin{bmatrix} e_{i_1} & \ldots & e_{i_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \ldots & u_{i_r} \end{bmatrix}$, onde $e_{i_j}$ indica a $i_j$-ésima coluna de $I_n$. Tendo $U = L^{-1}PA$, e como $\begin{bmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \ldots & u_{i_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$ é possível determinado, segue que, pela invertibilidade de $L^{-1}P$, a equação $A \begin{bmatrix} e_{i_1} & \ldots & e_{i_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$ admite apenas a solução nula. Mas $A \begin{bmatrix} e_{i_1} & \ldots & e_{i_r} \end{bmatrix}$ é a matriz constituída pelas colunas $i_1, i_2, \ldots, i_r$ de $A$, pelo que estas são linearmente independentes, em número igual a $r = \text{car}(A)$. Visto $\dim CS(A) = r$, essas colunas constituem de facto uma base de $CS(A)$.

Seja $A$ a matriz do exemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora descrever esta segunda forma de encontrar uma base de $CS(A)$. Como já vimos, $\text{car}(A) = 2$, pelo que as colunas de $A$ não formam uma base de $CS(A)$ pois não são linearmente independentes, e $\dim CS(A) = 2$. Façamos a decomposição $PA = LU$, trocando a primeira pela terceira linha, obtendo a matriz escada de linhas $U = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Uma base possível para $CS(A)$ são as **colunas de** $A$ correspondendo às colunas de $U$ que **têm pivot**. No caso, a primeira e a segunda colunas de $A$ formam uma base de $CS(A)$.

Finalmente, como $car(A^T) = \dim CS(A^T) = \dim RS(A) = car(A)$, temos a igualdade

$$car(A) = car(A^T).$$

Repare que $N(A) = N(U)$ já que $Ax = 0$ se e só se $Ux = 0$. Na resolução de $Ux = 0$, é feita a separação das incógnitas em básicas e em livres. Recorde que o número destas últimas é denotado por $\mathrm{nul}(A)$. Na apresentação da solução de $Ax = 0$, obtemos, pelo algoritmo para a resolução da equação somas de vectores, cada um multiplicado por uma das incógnitas livres. Esses vectores são geradores de $N(A)$, e são em número igual a $n-r$, onde $r = \mathrm{car}(A)$. Queremos mostrar que $\mathrm{nul}(A) = \dim N(A)$. Seja $QA$ a forma normal de Hermite de $A$; existe $P$ permutação tal que $QAP = \left[\begin{array}{c|c} I_r & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = H_A$, tendo em mente que $r \leq m, n$. Como $Q$ é invertível, segue que $N(QA) = N(A)$. Sendo $H_A$ a matriz obtida de $QA$ fazendo trocas convenientes de colunas, tem-se $\mathrm{nul}(H_A) = \mathrm{nul}(QA) = \mathrm{nul}(A)$. Definamos a matriz quadrada, de ordem $n$, $G_A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Como $H_A G_A = H_A$ segue que $H_A(I_n - G) = 0$, e portanto as colunas de $I_n - G$ pertencem a $N(H_A)$. Mas $I_n - G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right]$ e as suas últimas $n-r$ colunas são linearmente independentes (já que $\mathrm{car}\left(\begin{bmatrix} M \\ I_{n-r} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{car}\left(\begin{bmatrix} I_{n-r} \\ M \end{bmatrix}\right) = \mathrm{car}\left(\begin{bmatrix} I_{n-r} \\ M \end{bmatrix}^T\right) = n - r$). Logo, $\dim N(A) = \dim N(H_A) \geq n - r$. Pelo que vimos atrás, $\dim N(A) = \dim N(U) \leq n - r$. Segue das duas desigualdades que

$$\mathrm{nul}(A) = \dim N(A).$$

Como $n = \mathrm{car}(A) + \mathrm{nul}(A)$, obtemos, finalmente,

$$n = \dim CS(A) + \dim N(A).$$

Considere o subespaço $W$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores

$$(1, 2, 1), (2, -3, -1), (3, 1, 2), (4, 1, 2), (5, 0, 4).$$

Como temos 5 vectores de um espaço de dimensão 3, eles são necessariamente linearmente dependentes. Qual a dimensão de $W$? $W$ é o espaço das colunas da matriz $A$, cujas colunas são os vectores dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ora $\dim CS(A) = \mathrm{car}(A)$. Calcule a matriz $U$ escada de linhas aplicando o AEG, e verifique que as colunas de $U$ com pivots são a primeira, a segunda e a terceira. Como $\mathrm{car}(A) = 3$ então

$\dim W = 3$. Ora $W \subseteq \mathbb{R}^3$ e têm a mesma dimensão, pelo que $W = \mathbb{R}^3$. Ou seja, as colunas de $A$ geram $\mathbb{R}^3$. As colunas de $A$ que formam uma base para $W$ são aquelas correspondentes às colunas de $U$ que têm pivot; neste caso, as três primeiras de $U$. Uma base $\mathcal{B}$ para $W$ é o conjunto formado pelos vectores $v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,-3,-1), v_3 = (3,1,2)$. Vamos agora calcular as coordenadas de $b = (0,-2,-2)$ nesta base. Tal corresponde a resolver a equação $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} x = b$. A única solução é o vector $(1,1,-1)$, que é o vector das coordenadas de $b$ na base $v_1, v_2, v_3$. Ou seja, $(0,-2,-2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vamos agora apresentar alguns resultados importantes que se podem deduzir facilmente à custa de $car(A) + \mathrm{nul}(A) = n$, onde $A$ é uma matriz $m \times n$. Pressupõe-se que $B$ é uma matriz tal que $AB$ existe.

1. $car(AB) \leq car(A)$.
   Como vimos na secção anterior, $CS(AB) \subseteq CS(A)$, pelo que $\dim CS(AB) \leq \dim CS(A)$.

2. Se $B$ é invertível então $car(A) = car(AB)$.

3. $N(B) \subseteq N(AB)$.
   Se $b \in N(B)$ então $Bb = 0$. Multiplicando ambos os lados, à esquerda, por $A$ obtemos $ABb = 0$, pelo que $b \in N(AB)$.

4. $\mathrm{nul}(B) \leq \mathrm{nul}(AB)$.

5. $N(A^TA) = N(A)$.
   Resta mostrar que $N(A^TA) \subseteq N(A)$. Se $x \in N(A^TA)$ então $A^TAx = 0$. Multiplicando ambos os lados, à esquerda, por $x^T$ obtemos $x^TA^TAx = 0$, pelo $(Ax)^TAx = 0$. Seja $(y_1, \ldots, y_n) = y = Ax$. De $y^Ty = 0$ obtemos $y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2 = 0$. A soma de reais não negativos é zero se e só se cada parcela é nula, pelo que cada $y_i^2 = 0$, e portanto $y_i = 0$. Ou seja, $y = 0$, donde segue que $Ax = 0$, ou seja, que $x \in N(A)$.

6. $\mathrm{nul}(A^TA) = \mathrm{nul}(A)$.

7. $car(A^TA) = car(A) = car(AA^T)$.
   De $car(A) + \mathrm{nul}(A) = n = car(A^TA) + \mathrm{nul}(A^TA)$ e $\mathrm{nul}(A^TA) = \mathrm{nul}(A)$ segue que $car(A^TA) = car(A)$. Da mesma forma, $car(A^T) = car(AA^T)$. Como $car(A) = car(A^T)$, obtemos $car(A) = car(AA^T)$.

8. Se $car(A) = n$ então $A^TA$ é invertível.
   $A^TA$ é uma matriz $n \times n$ com característica igual a $n$, pelo que é uma matriz não-singular, logo invertível.

**Exercícios**

1. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os vectores

   $v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, -2), \quad u_1 = (-1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 0, 0), \quad u_3 = (1, 0, 1).$

   Verifique se

   (a) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de $v_1, v_2$.

   (b) $(1, 2, 1)$ é combinação linear de $v_1, v_2$.

   (c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de $u_1, u_2, u_3$.

   (d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de $u_1, u_2, u_3$.

2. Verifique se $(2, 5, -3) \in \langle(1, 4, -2), (-2, 1, 3)\rangle$.

3. Determine $\alpha, \beta$ de forma a que $(1, 1, \alpha, \beta) \in \langle(1, 0, 2, 1), (1, -1, 2, 2)\rangle$.

4. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:

   (a) $\{(0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1)\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$.

   (b) $\{(1, 2, 1), (-2, 3, 1)\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$.

5. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

   $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\},$
   $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2y + z = 0\}, \quad V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}.$

   Indique a dimensão e uma base para cada um deles.

6. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

   $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\}$

   $W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\}$

   $W_2 =< (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) >.$

   (a) Diga, justificando, se $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $U$.

   (b) Determine uma base de i. $W_1$. ii. $W_2$.

7. Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ :

   $$v_1 = (\alpha, 6, -1), \; v_2 = (1, \alpha, -1), \; v_3 = (2, \alpha, -3).$$

   (a) Determine os valores do parâmetro real $\alpha$ para os quais o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Para um dos valores de $\alpha$ determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1, 1.2)$ em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

8. Considere os seguintes elementos de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,0,2), v_2 = (1,-1,1), v_3 = (0,-1,1), v_4 = (1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}).$$

Verifique se $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$.

9. Considere os elementos de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2,-3,1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,1,-2)$.

   (a) Mostre que são uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine as coordenadas de $(3,2,1)$ relativamente a esta base.

10. Mostre que os vectores $(a,b),(c,d)$ são uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se $ad - bc \neq 0$.

11. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 = 0\}, \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 = 0\},$$

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Para cada um deles, determine a dimensão e indique uma base.

12. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_3 \wedge x_4 = 2x_2\}, G = \langle(1,0,1,0),(0,2,0,1),(-1,2,-1,1)\rangle.$$

Determine a dimensão e indique uma base para $F$ e para $G$.

13. Encontre uma base para o espaço das colunas das matrizes seguintes:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & -17 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -8 & -1 \\ -1 & 6 & -8 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

14. Indique, justificando convenientemente, o valor lógico da seguinte afirmação:

`‘‘Se as colunas da matriz quadrada` $A$ `são linearmente independentes, então as colunas de` $A^2$ `são também elas linearmente independentes.’’`

15. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mostre que

   (a) se $A^2 = A$ e $car(A) = n$ então $A = I_n$;

   (b) se $A^2 = A$ então $CS(A) \cap N(A) = \{0\}$.

## 4.5 Uma aplicação

Como motivação para o que se segue, suponha que se quer encontrar (caso exista) a recta $r$ de $\mathbb{R}^2$ que incide nos pontos $(-2,-5),(0,-1),(1,1)$. Sendo a recta não vertical, terá uma equação da forma $y = mx + c$, com $m, c \in \mathbb{R}$. Como $r$ incide nos pontos indicados, então necessariamente

$$-5 = m \cdot (-2) + c,\ -1 = m \cdot 0 + c,\ 1 = m \cdot 1 + c.$$

A formulação matricial deste sistema de equações lineares (nas incógnitas $m$ e $c$) é

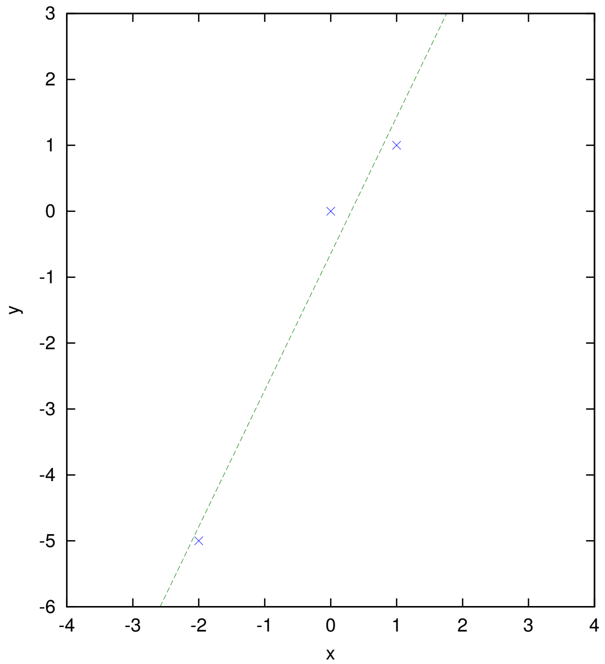
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema é possível determinado, pelo que a existência da recta e a sua unicidade está garantida. A única solução é $(m, c) = (2, 1)$ e portanto a recta tem equação $y = 2x - 1$.

No entanto, se considerarmos como dados os pontos $(-2,-5),(0,0),(1,1)$, facilmente chegaríamos à conclusão que não existe uma recta incidente nos três pontos. Para tal, basta mostrar que o sistema de equações dado pelo problema (tal como fizemos no caso anterior) é impossível. Obtemos a relação

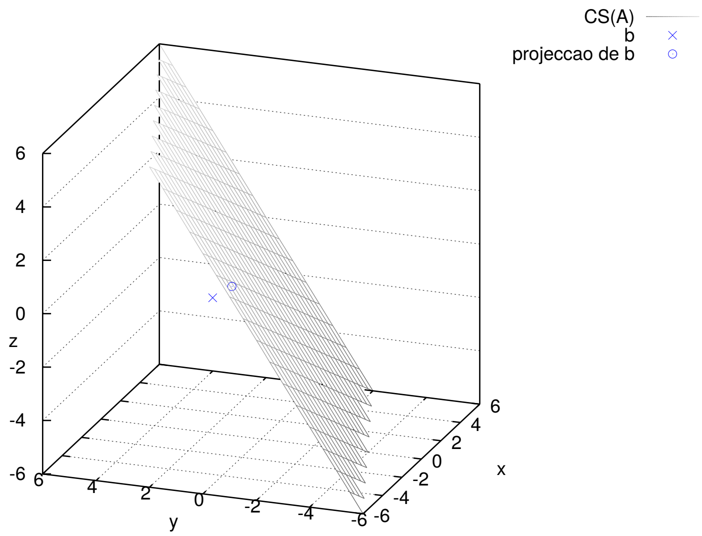
$$b \notin CS(A),$$

onde $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Suponha que os pontos dados correspondem a leituras de uma certa experiência, pontos esses que, teoricamente, deveriam ser colineares. Ou seja, em algum momento houve um desvio da leitura em relação ao que se esperaria. Desconhece-se qual ou quais os pontos que sofreram incorrecções. Uma solução seria a de negligenciar um dos pontos e considerar os outros dois como correctos. É imediato concluir que este raciocínio pode levar a conclusões erróneas. Por exemplo, vamos pressupor que é o primeiro dado que está incorrecto (o ponto $(-2,-5)$). A rectas que passa pelos pontos $(0,0),(1,1)$ tem como equação $y = x$. Ora se o erro esteve efectivamente na leitura do ponto $(0,0)$ (que deveria ser $(0,-1)$) então o resultado correcto está bastante distante do que obtivémos. O utilizador desconhece qual (ou quais, podendo haver leituras incorrectas em todos os pontos) dos dados sofreu erros. Geometricamente, a primeira estratégia corresponde a eliminar um dos pontos e traçar a recta que incide nos outros dois. Uma outra que, intuitivamente, parece a mais indicada, será a de, de alguma forma e com mais ou menos engenho, traçar uma recta que se tente *aproximar o mais possível* de todos os pontos, ainda que não incida em nenhum deles!




Vamos, de seguida, usar todo o engenho que dispomos para encontrar a recta que se aproxima o mais possível dos pontos $(-2,-5),(0,0),(1,1)$.

Sabendo que $b \notin CS(A)$, precisamos de encontrar $b' \in CS(A)$ por forma a que $b'$ seja o ponto de $CS(A)$ mais próximo de $b$. Ou seja, pretendemos encontrar $b' \in CS(A)$ tal que $d(b,b') = \min_{c\in CS(A)} d(c,b)$, onde $d(u,v) = \|u-v\|$. O ponto $b'$ é o de $CS(A)$ que minimiza a distância a $b$. Este ponto $b'$ é único e é tal que $b-b'$ é ortogonal a todos os elementos de $CS(A)$. A $b'$ chamamos *projecção ortogonal* de $b$ sobre (ou ao longo) de $CS(A)$, e denota-se por $proj_{CS(A)}b$.




Apresentamos, de seguida, uma forma fácil de cálculo dessa projecção, quando as colunas de $A$ são linearmente independentes. Neste caso, $A^TA$ é invertível e a projecção de $b$ sobre $CS(A)$ é dada por

$$b' = A(A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Pretendemos agora encontrar $x$ por forma a que $Ax = b'$, ou seja, $x$ por forma a que a distância de $Ax$ a $b$ seja a menor possível. Repare que se $Ax = b$ é impossível, então essa distância será, seguramente, não nula. A equação $Ax = b'$ é sempre possível, já que $b' = A(A^TA)^{-1}A^Tb \in CS(A)$; ou seja, $b'$ escreve-se como $Aw$, para algum $w$ (bastando tomar $w = (A^TA)^{-1}A^Tb$). No entanto, o sistema pode ser indeterminado, e nesse caso poderá interessar, de entre todas as soluções possíveis, a que tem norma mínima. O que acabámos por expôr, de uma forma leve e ingénua, denomina-se o *método dos mínimos quadrados*, e a $x$ solução de $Ax = b'$ de norma minimal, denomina-se a solução no sentido dos mínimos quadrados de norma minimal.

## Exercícios

1. Calcule a projecção ortogonal do vector $(2, -1, 1)$ sobre o espaço gerado por $(1, 1, 1), (0, 1, 3)$.

2. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -1 \end{bmatrix}^T$ e $b = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}^T$, determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$.

3. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de

(a) $\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 &= 2 \end{cases}$

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule a projecção ortogonal de $b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ sobre $CS(A)$.

   (b) O que pode dizer sobre o sistema $Ax = b$?

---

Ao invés de procurarmos a recta que melhor se adequa aos dados disponíveis, podemos procurar o polinómio de segundo, terceiro, etc, graus. Se os dados apresentados forem pontos de $\mathbb{R}^3$, podemos procurar o plano que minimiza as somas das distâncias dos pontos a esse plano. E assim por diante, desde que as funções que definem a curva ou superfície sejam lineares nos parâmetros. Por exemplo, $ax^2 + bx + c = 0$ não é uma equação linear em $x$ mas é-o em $a$ e $b$.

**Exemplo 4.5.1.** O exemplo que de seguida apresentamos baseia-se no descrito em [3, pag.58]

Suponha que se está a estudar a cinética de uma reacção enzimática que converte um substrato S num produto P, e que essa reacção segue a equação de Michaelis-Menten,

$$r = \frac{k_2[E]_0[S]}{K_m + [S]},$$

onde

1. $[E]_0$ indica concentração enzimática original adicionada para iniciar a reacção, em gramas de $E$ por litro,

2. $r$ é o número de gramas de $S$ convertido por litro por minuto (ou seja, a velocidade da reacção),

3. $k_2$ é o número de gramas de $S$ convertido por minuto por grama de $E$.

Depois de se efectuar uma série de experiências, obtiveram-se os dados apresentados na tabela seguinte, referentes à taxa de conversão de gramas de $S$ por litro por minuto:

| $[S]$ g s/l | $[E]_0 = 0.005$ $g_E$/l | $[E]_0 = 0.01$ $g_E$/l |
|---|---|---|
| 1.0 | 0.055 | 0.108 |
| 2.0 | 0.099 | 0.196 |
| 5.0 | 0.193 | 0.383 |
| 7.5 | 0.244 | 0.488 |
| 10.0 | 0.280 | 0.569 |
| 15.0 | 0.333 | 0.665 |
| 20.0 | 0.365 | 0.733 |
| 30.0 | 0.407 | 0.815 |

Re-escrevendo a equação de Michaelis-Menten como

$$\frac{[E]_0}{r} = \frac{K_m}{k_2}\frac{1}{[S]} + \frac{1}{k_2},$$

obtemos um modelo linear

$$y = b_1 x + b_0$$

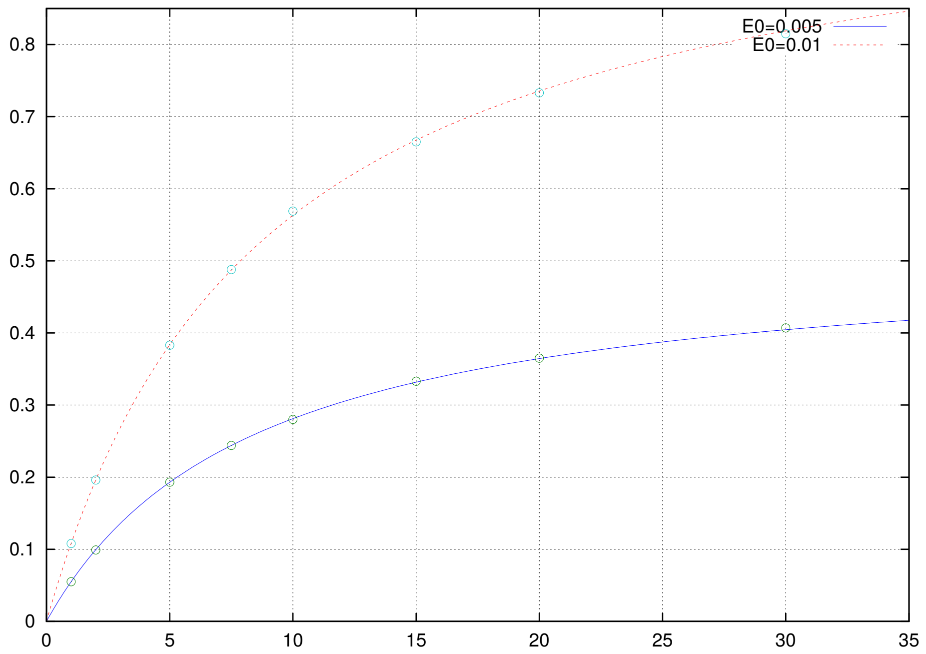
com

$$y = \frac{[E]_0}{r},\ x = \frac{1}{[S]},\ b_0 = \frac{1}{k_2},\ b_1 = \frac{K_m}{k_2}.$$

Denotemos os dados $x$ e $y$ por $x_i$ e $y_i$, com $i = 1, \ldots, 8$. Este sistema de equações lineares tem a representação matricial

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{bmatrix}$$

com $A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & 1 \end{bmatrix}$. A única solução de $A^T A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = y$ indica-nos a solução no sentido dos mínimos quadrados da equação matricial, e daqui obtemos os valores de $k_2$ e de $K_m$.


E0=0.005
E0=0.01
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0
5
10
15
20
25
30
35