UNIVERSIDADE DO MINHO

ESCOLA DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Maria Joana Torres

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2018/2019

Conteúdo

1 Folhas de exercícios

Esta secção contém as folhas de exercícios que foram fornecidas aos alunos durante o semestre.

Matemática para o mundo real

Use um sistema computacional para simular os seguintes modelos.

1. **Rei Artur e os Cavaleiros da Távola Redonda**. Os materiais radioativos desintegram-se proporcionalmente à quantidade de átomos radioativos presente, segundo uma constante de desintegração $k > 0$ que depende do material ([5, 9]).

   Seja $N(t)$ o número de átomos radioativos no tempo t num dado material. Tem-se que:

   $$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t).$$

   (a) Justifique que $N(t) = N_0 e^{-kt}$ sendo N_0 o número de átomos radioativos no tempo inicial.

   (b) Verifique que o *tempo de meia-vida*, i.e., o tempo necessário para o número de átomos radioativos se reduzir a metade do número inicial é

   $$t_{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{k}.$$

   (c) Numa parede do Castelo de Winchester está pendurada uma mesa redonda. Muitos gostariam de acreditar que esta é a Távola Redonda do Rei Artur, que estaria no auge dos seus poderes por volta de 500 DC. Se a mesa fosse desta altura, que proporção de carbono-14 restaria? Em 1976 a mesa foi datada usando a técnica do carbono radioativo: foi encontrada $91,6\%$ da quantidade original de carbono-14 ([1]). Sabendo que o tempo de meia-vida do carbono-14 é aproximadamente 5700 anos, de quando data a Távola Redonda?

2. **Lei do arrefecimento de Newton**. A seguinte lei (chamada *lei do arrefecimento de Newton*) foi considerada por Newton (1643-1727) para estudar o fenómeno da variação da temperatura de uma bola de metal aquecida por perda de calor para o meio ambiente ([6]):

   o fluxo de calor através das paredes de um corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente.

   A lei do arrefecimento de Newton fornece um modelo simplificado para o fenómeno da variação da temperatura de um corpo por perda de calor para o meio ambiente, em que são consideradas as seguintes hipóteses:

   - a temperatura $T(t)$ é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;

- a temperatura T_m do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
- o fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt, é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m),$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo.

(a) Justifique que $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, sendo T_0 a temperatura inicial do corpo.

(b) Esboce os gráficos da variação da temperatura para vários valores da temperatura inicial T_0.

3. Um corpo a 100°C é colocado numa sala, onde a temperatura ambiente se mantém constante a 25°C. Após 5 minutos a temperatura do corpo decresceu para 90°C. Decorrido quanto tempo estará o corpo a 50°C?

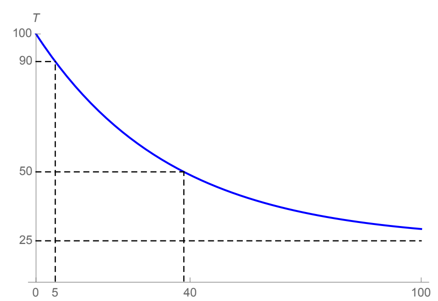


Figura 1: Ilustração da variação da temperatura (t em minutos).

4. Um corpo a 100°C é colocado numa sala de temperatutura desconhecida, mas que é mantida constante. Sabendo que após 10 minutos o corpo está a 90°C e após 20 minutos a 82°C, calcule a temperatura da sala.

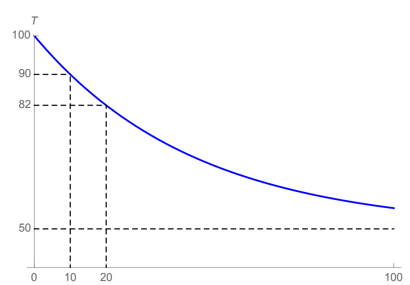


Figura 2: Ilustração da variação da temperatura (t em minutos).

5. **Lei de Hooke: vibrações de molas**. Robert Hooke (1638−1703) foi o físico e matemático britânico que primeiro enunciou a lei do movimento de uma mola ([9, 11]):

   a força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o elongamento ℓ da mola e a sua posição de equilíbrio ℓ_0.

   A constante de proporcionalidade é chamada *constante de Hooke* da mola.

   Consideremos então uma mola e coloquemos um corpo de massa m na sua extremidade. De modo claro, a presença do corpo vai esticar a mola até esta atingir a sua posição de equilíbrio, com um elongamento ℓ_0.

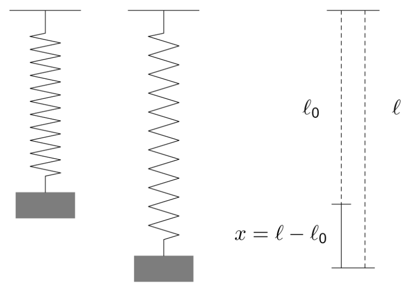
   

   Figura 3: Movimento de uma mola.

   De seguida, vamos retirar o sistema da sua posição de equilíbrio, puxando o corpo um pouco para baixo, até uma posição correspondente a um elongamento ℓ da mola. A lei de Hooke estabelece que *a força exercida no corpo pela mola é proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio*, isto é, que

   $$F = -k(\ell - \ell_0) = -kx.$$

   O sinal no lado direito da igualdade reflecte a ideia que a força exercida pela mola tende a levar o corpo na direcção da posição de equilíbrio, ou seja, a contrariar a sua posição.

   Aplicando a segunda lei do movimento de Newton ao corpo de massa m, obtemos que

   $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

   Habitualmente escreve-se esta equação na forma:

   $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

   onde $\omega^2 = k/m$.

   Mostre que

   $$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t),$$

   com x_0 e v_0 a posição e a velocidade iniciais, respetivamente, do corpo.

6. **Dinâmica de uma população: modelo Malthusiano ou modelo exponencial**.

A equação diferencial simples

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda\, P(t)\,,$$

onde $\lambda > 0$, foi proposta pelo economista inglês Thomas Malthus $(1766 - 1834)$ como um modelo de crescimento populacional ([6, 9]). Neste modelo é assumido que uma população cresce, em cada unidade de tempo, com uma certa taxa relativa λ que depende da fertilidade da espécie. Este modelo conduz a um crescimento exponencial da população

$$P(t) = P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}\,,$$

de forma que o seu tamanho cresce sem limite e dobra em cada d anos, onde $d = \ln 2/\lambda$.

A população do Reino Unido e da Irlanda nos anos 1801, 1851, e 1901, de acordo com os resultados do Census, foi a seguinte:

ano	população
1801	16.345.646
1851	27.533.755
1901	41.609.091

Use o modelo de Malthus para calcular a população do Reino Unido e da Irlanda em 2011. Compare os resultados obtidos com o modelo de Malthus com os resultados do Census 2011 (último Census realizado; o próximo será em 2021), em que a população do Reino Unido e da Irlanda era aproximadamente 68.5 milhões (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Demography_of_the_United_Kingdom e https://en.wikipedia.org/wiki/Census_of_Ireland_2011).

7. **Um modelo populacional mais realista: modelo de Verhulst ou modelo logístico**.

O modelo proposto por Verhulst $(1804 - 1849)$ assume que existe um valor máximo M para o tamanho da população que pode ser suportado pelo meio ambiente ([6, 9]). A chamada *equação logística* é:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda\, P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)\,.$$

A evolução da população ao longo do tempo é descrita pela equação:

$$P(t) = M\left[\frac{P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}{M - P(t_0) + P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}\right]\,.$$

Use o modelo logístico para calcular a população do Reino Unido e da Irlanda em 2011.

Compare os resultados obtidos com o modelo logístico com os resultados do Census 2011.

Equações diferenciais "triviais"

1. **Solução geral e condições iniciais**. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x + 10\,\mathrm{sen}\, x\,.$$

   (a) Resolva a equação diferencial.

   (b) Determine a solução particular que passa no ponto $P = (\pi, 0)$.

   (c) Utilize o applet fornecido nas aulas para efectuar simulações.

2. **Velocidade, aceleração e segunda lei de Newton do movimento**. Um carro de massa m desloca-se a uma velocidade constante v_0 quando subitamente tem de travar. Os travões aplicam uma força k até o carro parar.

   Valores realistas de m e k são: $m = 1000\,kg$ e $k = 6500\,N$ $(1N = 1Kg\,m/s^2)$.

   (a) Quanto tempo demora o carro a parar?

   (b) Que distância percorre o carro até parar?

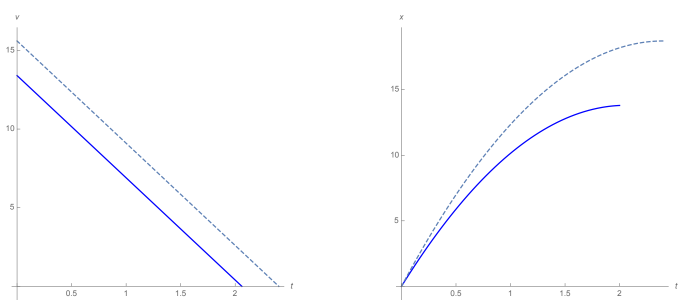


Figura 4: Velocidade e distância percorrida pelo carro, após o início da travagem, para velocidades iniciais $v_0 = 13.4\,m/s$ e $v_0 = 15.6\,m/s$.

3. **Queda livre de corpos**. Uma maçã de massa m cai de uma altura h acima do solo. Desprezando a resistência do ar, a sua velocidade satisfaz

$$m\frac{dv}{dt} = -mg, \quad v(0) = 0\,,$$

   onde $v = \dot{x}$ e $x(t)$ é a posição da partícula (altura acima do solo). Mostre que a maçã atinge o solo quando $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

equações diferenciais - noções básicas

Exercício 1. Classifique cada uma das equações diferenciais seguintes (ordinárias ou com derivadas parciais) e indique a sua ordem:

(a) $\dfrac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m)$, lei do arrefecimento de Newton (k é um parâmetro, T_m é a temperatura ambiente);

(b) $\dfrac{\partial T(t,x)}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$, equação do calor ($k$ é um parâmetro);

(c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, lei de Hooke do movimento de uma mola, $\omega^2 = k/m$.

Exercício 2. Mostre que as seguintes funções são solução das respetivas equações diferenciais:

(a) $f(x) = x + 3e^{-x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, $\qquad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2y, \quad x \in \mathbb{R}^+$

Exercício 3. Mostre que $y^2+x-3 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2y}$, no intervalo $I = (-\infty, 3)$.

Exercício 4. Mostre que $x^3 + 3xy^2 = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 0,$$

no intervalo $I = (0, 1)$.

Exercício 5. Assumindo que as relações dadas definem y implicitamente como uma função diferenciável de x, verifique que são soluções implícitas das respetivas equações diferenciais:

(a) $y - \log y = x^2 + 1$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y-1}$

(b) $e^{xy} + y = x - 1$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

(c) $x^2 - \operatorname{sen}(x+y) = 1$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 2x\sec(x+y) - 1$

Exercício 6.

(a) Mostre que qualquer função da família de funções $f(x) = (x^3 + c)e^{-3x}$, onde c é uma constante arbitrária, é solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$.

(b) Encontre o valor da constante c para as soluções cujos gráficos se apresentam na figura seguinte:

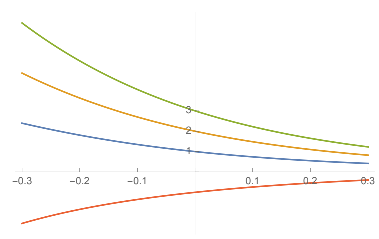


Figura 5: Família de soluções.

Exercício 7. Mostre que a função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$ é solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 6e^x + 4xe^{-2x} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

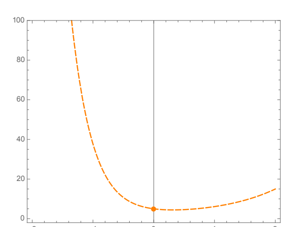


Figura 6: Gráfico da função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$.

Exercício 8. Mostre que a função $y(x) = 1/(1+e^{x^2})$ é solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 2xy(y-1) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

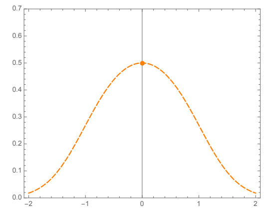


Figura 7: Gráfico da função $y(x) = 1/(1+e^{x^2})$.

Exercício 9. Mostre que a função $y(x) = \text{sen}\,(x)/\text{sen}\,(1)$ é solução do seguinte problema (dito um problema com condições de fronteira): $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

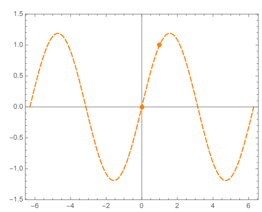


Figura 8: Gráfico da função $y(x) = \text{sen}\,(x)/\text{sen}\,(1)$.

Exercício 10. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $y' + y = 2xe^{-x}$ pode ser escrita na forma $y(x) = (x^2+c)e^{-x}$, com c uma constante arbitrária, resolva o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2xe^{-x} \\ y(-1) = e + 3 \end{cases}$$

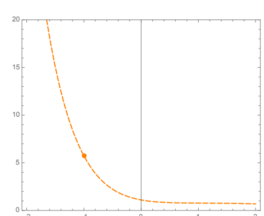


Figura 9: Gráfico da solução do PVI.

Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2018/19

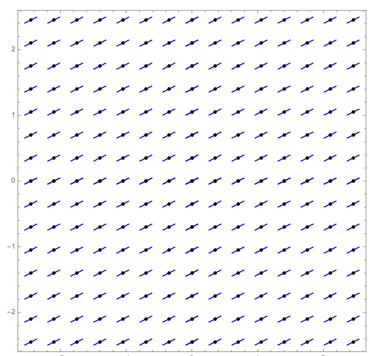
campos de direções tangentes

Exercício 1. Esboce aproximadamente o campo de direções tangentes das seguintes equações:

(a) $y' = 2$ (b) $y' = y$ (c) $y' = -x$ (d) $y' = -y$.

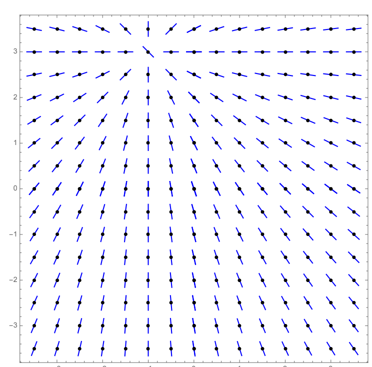
Exercício 2.

(a) O campo de direções tangentes



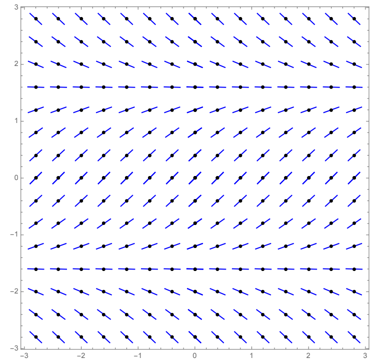
corresponde à equação: ☐ $y' = -1/2$ ☐ $y' = 1/2$ ☐ $y' = 2$

(b) O campo de direções tangentes



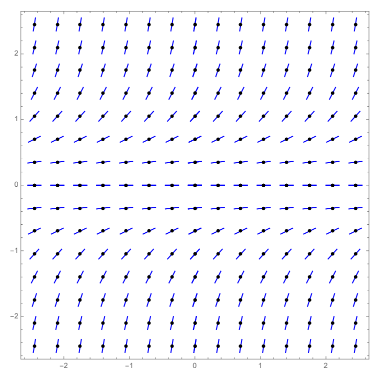
corresponde à equação: ☐ $y' = \dfrac{y-3}{t+1}$ ☐ $y' = 4$ ☐ $y' = t$

(c) O campo de direções tangentes



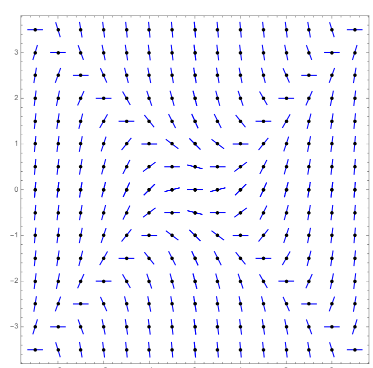
corresponde à equação: ☐ $y' = \cos y$ ☐ $y' = \operatorname{sen} y$ ☐ $y' = 1$

(d) O campo de direções tangentes



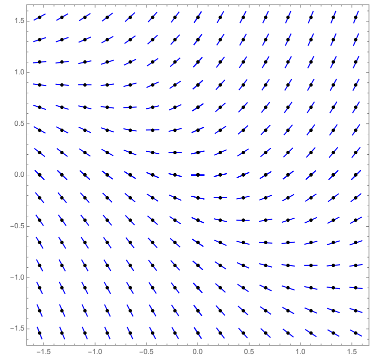
corresponde à equação: ☐ $y' = t$ ☐ $y' = y^2$ ☐ $y' = 0$

(e) O campo de direções tangentes



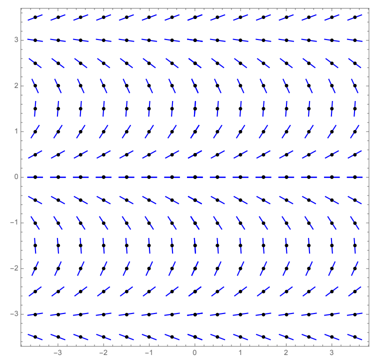
corresponde à equação: ☐ $y' = -y^2$ ☐ $y' = x^2 + y^2$ ☐ $y' = x^2 - y^2$

(f) O campo de direções tangentes



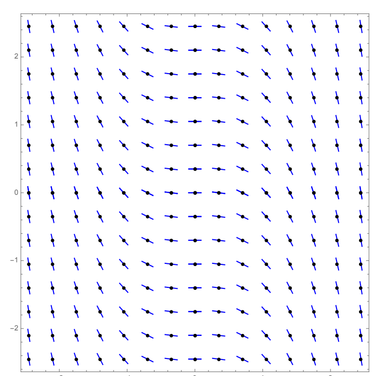
corresponde à equação: ☐ $y' = y - \operatorname{sen} x$ ☐ $y' = y + \cos x$ ☐ $y' = y + \operatorname{sen} x$

(g) O campo de direções tangentes



corresponde à equação: ☐ $y' = \operatorname{tg} y$ ☐ $y' = -\operatorname{tg} y$ ☐ $y' = \operatorname{tg} t$

(h) O campo de direções tangentes



corresponde à equação: ☐ $y' = -y^2$ ☐ $y' = -x^2$ ☐ $y' = x^2$

edo's primeira ordem separáveis

Exercício 1. Verifique que cada uma das seguintes equações diferenciais é separável e determine as suas soluções maximais (isto é, determine as suas soluções explícitas, indicando o intervalo maximal onde cada solução está definida):

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4xy}{x^2+1}$ (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = xy$ (e) $\dfrac{dy}{dx} = -y^2$

Exercício 2. Determine a solução maximal dos seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $\begin{cases} x' = (1-2t)x^2 \\ x(0) = -1/6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = (1-2t)x^2 \\ x(0) = 1/6 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{1+2y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$

Exercício 3. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

(a) $y' = 6xy, \;\; P = (0, -2)$

(b) $x' = 2\,t\,(1+x), \;\; P = (0, 0)$

(c) $y' = \cos(x+1)\,y, \;\; P = (-1, 2)$

Exercício 4. Resolva as seguintes equações diferenciais separáveis:

(a) $\dfrac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{sen}(x) = 0$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x(y^2 - y)$ (c) $\dfrac{dy}{dx} = -8\cos^2(y)\operatorname{sen}^2(x)$

(d) $y' = \dfrac{x\cos(2x)}{1+y}$ (e) $y' = \cos(x)\,e^{-y}$ (f) $y' = \dfrac{x\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(y)}$

Exercício 5. Determine as soluções maximais da equação

$$y' = 3x^2(y-1)^2, \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

que passam em cada um dos pontos $P = (1, 1)$ e $Q = (0, \frac{1}{2})$.

edo's primeira ordem lineares

Exercício 1. Verifique que as seguintes equações diferenciais são lineares e determine as suas soluções maximais:

(a) $y' = -2y + 50\, e^{-10x}$ (b) $y' + \dfrac{3y}{x} + 3x = 2$ (c) $y' - \dfrac{1}{x}y = -x$

(d) $y' + 2y = 4x^3 e^{-2x}$ (e) $x' = \dfrac{x}{t} + 3t$ (f) $y' = \dfrac{y}{x} - xe^x$

(g) $y' - \dfrac{4}{x}y = -\dfrac{2}{x^3}$ (h) $y' - \dfrac{4}{x}y = x^5 e^x$ (i) $y' + \dfrac{y}{x} = 2x^3 - 1$

Exercício 2. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

(a) $x^2 y' + xy = 1,\ \ P = (1, 2)$ (b) $y' + (1 - 2x)y = x\, e^{-x},\ \ P = (0, 2)$

(c) $y' + 3t^2 y = e^{-t^3+t},\ \ P = (0, 2)$ (d) $r' - \cos(\theta) r = \theta\, e^{\theta^2 + \mathrm{sen}\,(\theta)},\ \ P = (0, 1)$

Exercício 3. Determine a solução maximal dos seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \mathrm{sen}\,(x) \\ y(\pi/2) = \pi/2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \cos(x)\dfrac{dy}{dx} + y\,\mathrm{sen}\,(x) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} xy' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Exercício 4. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = 3x - 2 \\ y(-1) = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{t} - te^t \\ x(1) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' = \cos(x) - 3y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercício 5. Determine a solução maximal da equação diferencial

$$\cos(x)\,\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{sen}\,(x) = \cos(x)\, e^{\mathrm{sen}\,(x)}$$

que passa no ponto $(0, 2)$.

mudança de variável, edo's primeira ordem homogéneas e de Bernoulli

Exercício 1. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e resolva-as:

(a) $y' = \dfrac{y+t}{t}$ (b) $y' = \dfrac{2y^4+t^4}{ty^3}$ (c) $y' = \dfrac{x^2+2xy}{x^2}$

(d) $y' = \dfrac{y^3}{xy^2-x^3}$ (e) $y' = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$

Exercício 2. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

(a) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$, $P=(2,-\sqrt{2})$ (b) $y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, $P=(2,-1)$

Exercício 3. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

Exercício 4. Considere a equação diferencial $y' = (2y+2x-1)^2$.

(a) Mostre que a mudança de variável definida por $v = 2y+2x-1$ transforma a equação numa equação separável.

(b) Resolva o problema de valores iniciais constituído pela equação dada e pela seguinte condição adicional: $y(0)=1$.

Exercício 5. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

(a) $y' + y = y^{-1}$ (b) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^3}$

Exercício 6. Para cada uma das equações de Bernoulli, determine a solução maximal que passa no ponto referido:

(a) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}x^2y^3$, $P=(1,\frac{1}{2})$

(b) $y' + \operatorname{sen}(x)y = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{y^2}$, $P=(\frac{\pi}{2},2)$

edo's lineares de ordem n

Exercício 1. Considere a equação diferencial linear homogénea de segunda ordem

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = 0\,.$$

(a) Mostre que $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{3x}$ são soluções linearmente independentes desta equação, para $x \in \mathbb{R}$.

(b) Resolva a equação.

(c) Determine a solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

Exercício 2. Para as equações diferenciais que se apresentam de seguida, mostre que as funções correspondentes formam um conjunto fundamental de soluções:

(a) $y''' + 2\,y'' - 11\,y' - 12\,y = 0\,, \qquad \{\,e^{3x},\, e^{-x},\, e^{-4x}\,\}$

(b) $y''' - y'' + 4\,y' - 4\,y = 0\,, \qquad \{\,e^{3x},\, \text{sen}\,x,\, \cos x\,\}$

(c) $x^3\,y''' - 3x^2\,y'' + 6x\,y' - 6\,y = 0\,, \quad x > 0\,, \qquad \{\,x,\, x^2,\, x^3\,\}$

(d) $y^{(4)} - y = 0\,, \qquad \{\,e^{x},\, e^{-x},\, \text{sen}\,x,\, \cos x\,\}$

Exercício 3. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares homogéneas:

(a) $y'' - 2\,y' - 3\,y = 0$

(b) $y''' - 3\,y'' - y' + 3\,y = 0$

(c) $y'' - 8\,y' + 16\,y = 0$

(d) $y''' - 6\,y'' + 12\,y' - 8\,y = 0$

(e) $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$

(f) $y''' - y'' + y' - y = 0$

(g) $y^{(iv)} + y = 0$

(h) $y^{(iv)} + 2\,y'' + y = 0$

Exercício 4. Sabendo que $y(x) = \text{sen}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5\,y = 0\,,$$

resolva a equação.

Exercício 5. Resolva os seguintes dois problemas com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' - y' - 12\,y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 4y' + 29\,y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

Exercício 6. Resolva o seguinte problema (dito um problema com condições de fronteira):

$$\begin{cases} y'' = y', & x \in [0,1] \\ y'(0) + y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercício 7. Resolva a equação diferencial $y'' - 3\,y' + 2\,y = f(x)$, quando:

(a) $f(x) = 4x^2$ (b) $f(x) = x + e^x$

(c) $f(x) = x\,e^x$ (d) $f(x) = 2x^2 + e^x + 2x\,e^x + 4\,e^{3x}$

Exercício 8. Resolva os seguintes dois problemas com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\,\text{sen}\, x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 3x^2 - 4\,\text{sen}\, x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercício 9. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - 3y' + 2y = \text{sen}\,(2x) + e^{2x}$

(b) $y''' - 4y' = 3x + e^x$

(c) $y'' - y' + 2y = 2x - 1 - 3\,e^x$

(d) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$

(e) $y''' + y'' - 2y = x\,e^x + 1$

oscilações

O *oscilador harmónico* é o modelo matemático para o movimento retilíneo de uma partícula sujeita a uma força atratora para a origem com magnitude igual a um múltiplo k (constante positiva) da distância à origem.

Seja m a massa da partícula. Pela segunda lei do movimento de Newton temos que

$$m\ddot{x} = -kx\,,$$

ou seja,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

que é a equação do *oscilador harmónico simples*.

Se no oscilador existir a presença de uma força de atrito proporcional à velocidade, pela segunda lei do movimento de Newton, temos que:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}\,,$$

onde μ é uma constante positiva, ou seja,

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0 \tag{2}$$

que é a equação do *oscilador harmónico amortecido*.

Por último, suponhamos que existe uma força externa atuando na partícula, força essa que é independente da posição e da velocidade da partícula, mas que pode variar com o tempo. Neste caso, a segunda lei do movimento de Newton, fornece que:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F(t)\,,$$

ou seja,

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t) \tag{3}$$

que é a equação do *oscilador harmónico amortecido e forçado*.

Exercício 1. Resolva as equações do oscilador harmónico simples e do oscilador harmónico amortecido. Resolva a equação do oscilador harmónico amortecido e forçado no caso em que a força externa é periódica do tipo $F_0 \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 > 0$ ou do tipo $F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$, $\omega_0 > 0$, $F_0 > 0$.

teoria qualitativa de edo's

Exercício 1. Esboce os retratos de fase das seguintes equações diferenciais ordinárias e classifique os pontos de equilíbrio.

(a) $x' = -x + 1$

(b) $x' = x(2 - x)$

(c) $x' = -x(1 - x)(2 - x)$

(d) $x' = x^2 - x^4$

Exercício 2. Comece por recordar o seguinte:

Teorema (Forma normal de Jordan): Dada uma matriz A de dimensão 2×2, existe uma matriz invertível P tal que $J = P^{-1}AP$ é uma forma normal de Jordan.

Determine P e a correspondente forma normal de Jordan para as seguintes matrizes.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Exercício 3. Determine a solução do seguinte PVI: $X' = AX$ com $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ para cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercício 4. Considere a edo planar $X' = AX$, onde:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcule a solução do seguinte PVI: $X' = AX$ com $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. Estude a estabilidade da solução de equilíbrio.
3. Esboce o plano de fase.

Exercício 5 **(Modelos ecológicos: competição de espécies)**. Considere os seguintes sistemas de edo's:

(a) $\begin{cases} x' = x(8 - 4x - y) \\ \\ y' = y(3 - 3x - y) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = x(4 - 2x - 2y) \\ \\ y' = y(9 - 6x - 3y) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = x(4 - 2x - y) \\ \\ y' = y(9 - 3x - 3y) \end{cases}$

1. Estude a estabilidade das soluções de equilíbrio.
2. Esboce o plano de fase.

séries de Fourier e edp's

Exercício 1. Indique a ordem e linearidade de cada uma das seguintes edp's:

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(b) $x^2\,\dfrac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3\,\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}$

(c) $u\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r\,s\,t$

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(e) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$

Exercício 2. Indique o tipo de cada uma das seguintes edp's:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4$

(e) $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3y^2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

Exercício 3. Mostre que $u(x,t) = e^{-8t}\,\text{sen}\,(2x)$ é solução do seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = \text{sen}\,(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Exercício 4. Mostre que

$$u(x,t) = \cos(6t)\,\text{sen}\,(3x) + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,(8t)\,\text{sen}\,(4x) + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,(12t)\,\text{sen}\,(6x) - 4\cos(20t)\,\text{sen}\,(10x)$$

é solução do seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = \text{sen}\,(3x) - 4\,\text{sen}\,(10x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\,\text{sen}\,(4x) + \text{sen}\,(6x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

separação de variáveis

Exercício 5. Use o método de separação de variáveis para resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, \quad 0 < x < 10,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = 3\,\text{sen}\,(2\pi x) - 7\,\text{sen}\,(4\pi x), \quad 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Exercício 6. Use o método de separação de variáveis para resolver os seguintes problemas:

(a) $u_t = u_y, \quad u(0,t) = e^{-3t} + e^{2t}$

(a) $u_t = u_y - u, \quad u(0,t) = e^{-5t} + 2\,e^{-7t} - 14\,e^{13t}$

séries de Fourier

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2 definida, em $[-1, 1[$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{2n+1}.$$

(b) Seja S a função para a qual a série anterior converge. Esboce o gráfico de S, para $x \in [-3, 3]$.

(c) Fazendo uso da série referida na alínea (a), mostre que se tem:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Calcule, então, uma aproximação para π, usando quatro termos da série anterior.

Exercício 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida, em $[-\pi, \pi[$, por $f(x) = x$.

(a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

(b) Seja S a função para a qual a série anterior converge. Esboce o gráfico de S, para $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida, em $[-\pi, \pi]$, por $f(x) = x^2$.

(a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(b) Fazendo uso da série referida na alínea anterior, mostre que se tem:

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Exercício 10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida, em $[-\pi, \pi[$, por $f(x) = e^x$. Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} + 2\,\frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+1} \mathrm{sen}\,(nx) \right).$$

Exercício 11. Mostre que, para $x \in [-1, 1]$, é válida a igualdade

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x).$$

séries de Fourier de senos
séries de Fourier de cossenos

Exercício 12. Considere a seguinte função f, definida no intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que a série de Fourier de senos de f é dada por

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \mathrm{sen}\,((2k-1)\pi x).$$

(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série anterior converge, no intervalo $[-2, 2]$.

(c) Para que valor converge a série quando $x = \frac{11}{2}$?

Exercício 13. Considere a função definida no intervalo $[0, 2\pi]$ por $f(x) = 4x$.

(a) Mostre que a série de Fourier de cossenos de f é dada por

$$4\pi - \frac{32}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da função definida por essa série, no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

Exercício 14. Determine a série de Fourier de senos de cada uma das seguintes funções e, em cada caso, esboce o gráfico da função para o qual a série converge (relativo a dois períodos):

(a) $f(x) = 1, \quad x \in [0, \pi]$

(b) $f(x) = 1 - x, \quad x \in [0, 1]$

(c) $f(x) = x - x^2, \quad x \in [0, 1]$

(d) $f(x) = 1 - \cos(2x), \quad x \in [0, \pi]$

Exercício 15. Determine a série de Fourier de cossenos de cada uma das seguintes funções e, em cada caso, esboce o gráfico da função para o qual a série converge (relativo a dois períodos):

(a) $f(x) = 2x, \quad x \in [0, \pi]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(2x), \quad x \in [0, \pi]$

(d) $f(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x), \quad x \in [0, \pi]$

problemas de condução do calor e de corda vibrante

Exercício 16. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema, em cada um dos casos seguintes:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4\pi x) - \operatorname{sen}(5\pi x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = x - x^2$

Exercício 17. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = 1 - \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema.

Exercício 18. Estude a aplicação do método de separação de variáveis à resolução dum problema de condução do calor do seguinte tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Exercício 19. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema, em cada um dos casos seguintes:

(a) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos(3x) + 5\cos(6x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x)$

Exercício 20. Estude a aplicação do método de separação de variáveis à resolução do problema da corda vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Exercício 21. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema, em cada um dos seguintes casos:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(3\pi x) + \operatorname{sen}(5\pi x), \quad g(x) = 0$

(b) $f(x) = 0, \quad g(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + 2\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5\pi x)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(3\pi x) + \operatorname{sen}(5\pi x), \quad g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi x) + 4\operatorname{sen}(5\pi x)$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = 2\operatorname{sen}(3\pi x) + 5\operatorname{sen}(4\pi x)$

(e) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) - 2\operatorname{sen}(2\pi x) + 3\operatorname{sen}(3\pi x), \quad g(x) = x - x^2$

(f) $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

dinâmica na natureza

Exercício 1. Resolva o problema colocado por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci) no seu Liber Abaci em 1202:

"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Exercício 2. Em 1860, Thomas Austin introduziu 24 coelhos Europeus na Austrália. Determine a população de coelhos na Austrália em 1870 e em 1880, usando o modelo de Fibonacci.

Exercício 3. O outro efeito borboleta.[1] Determine a população de mariposas beija-flor nos próximos anos na Costa Rica, supondo que existem atualmente P_0 mariposas beija-flor e que a taxa relativa de crescimento anual é 1.06.

Exercício 4. Competição: o modelo logístico.[2] Dada uma população inicial de borboletas P_0, designemos por P_n a população de borboletas no ano n. Suponhamos que a evolução da população de borboletas é dada por uma lei do tipo

$$P_{n+1} = \lambda P_n(1 - P_n), \quad \lambda \in [0, 4].$$

1. Moste que o caso $\lambda = 1$ conduz à extinção da população de borboletas.
2. Atribua valores a P_0 e a λ e observe o comportamento da trajetória de P_0. Consegue fazer previsões sobre o comportamento assimptótico de P_n?

Exercício 5. **Esforços heróicos com raízes babilónicas.** Um problema prático, natural nas sociedades baseadas na agricultura, como os Babilónios ou os Egípcios, é:

construir um quadrado dada a sua área.

"Construir" um quadrado quer dizer determinar a medida do seu lado. Assim, se A denota a área do quadrado, o lado ℓ será o comprimento tal que $\ell \times \ell = A$, ou seja, a raiz quadrada de A.

[1] Esta é uma referência à afirmação de Edward Lorenz de que o bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas.

[2] Foi introduzido em 1845 pelo matemático belga Pierre François Verhulst. Foi tornado popular por Robert May no seu famoso artigo *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261 (1976) 459-467.

Provavelmente o algoritmo mais antigo de que há registo histórico é o algoritmo babilónico ($\sim$ 2000 a.C.) para calcular raízes quadradas: se desejamos encontrar a raiz quadrada de um número positivo A, começamos com alguma aproximação $x_0 > 0$ e definimos recursivamente

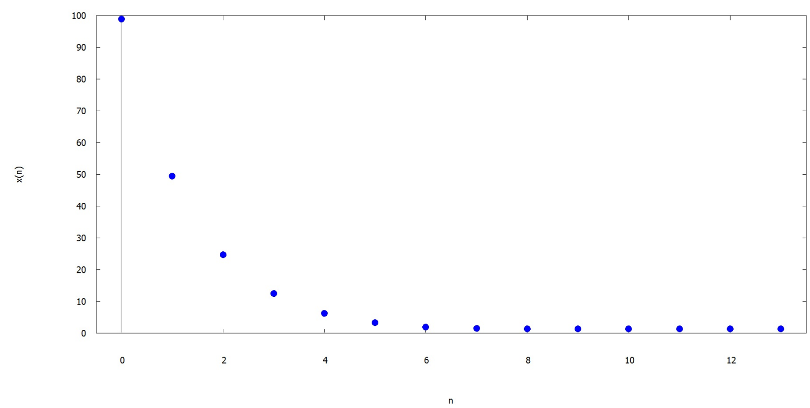
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right). \tag{4}$$

Este é um algoritmo muito eficiente que converge de modo extremamente rápido.

Aproxime $\sqrt{2}$ usando o "algoritmo" dos Babilónios.

Experiências. Suponhamos que queremos encontrar a raiz quadrada de 2 e que começamos com uma aproximação verdadeiramente "ingénua" $x_0 = 99$. Aplicando o "algoritmo" dos Babilónios, poucas iterações são suficientes para que o resultado estabilize:

99.00000000000000
49.51010101010101
24.77524840365297
12.42798706655775
6.29445708659966
3.30609848017316
1.95552056875300
1.48913306969968
1.41609819333465
1.41421481646475
1.41421356237365
1.41421356237309
1.41421356237309



"Algoritmo" dos Babilónios. A tábua YBC 7289, da Coleção da Babilónia de Yale (New Heaven) (Figura 10), é uma das tábuas matemáticas dos Babilónios (1700 a.C.) mais conhecidas. O valor $1; 24, 51, 10$ (em notação sexagesimal) aparece nessa tábua como aproximação para a raiz quadrada de 2. É possível que os Babilónios tenham usado o seguinte procedimento iterativo. Uma primeira aproximação é $3/2 = 1; 30$. Porque este número é superior ao valor desejado e é, portanto, inferior a $2/(1; 30) = 1; 20$, uma segunda aproximação será a média entre estes dois valores, ou seja, $1; 25$. Repetindo o processo, uma terceira e melhor aproximação será a média entre $1; 25$ e $2/(1; 25) = 1; 24, 42, 21$, ou seja, $1; 24, 51, 10$.

Interpretação geométrica e algoritmo. Se b_1 é uma primeira conjetura para o lado do quadrado, construimos o retângulo de base b_1 e área A. A sua altura deve ser $a_1 = A/b_1$. Se b_1 é diferente de a_1, o retângulo não é um quadrado!, e somos obrigados a melhorar a nossa estimativa. Uma segunda e melhor conjetura pode ser uma base b_2 igual à média aritmética $(b_1 + a_1)/2$. A nova altura será então $a_2 = A/b_2$. Acontece que também estes dois números, b_2 e a_2, são diferentes, e de facto aproximam o valor desejado por excesso e por defeito, respetivamente. Iterando o procedimento, a sequência de estimativas para a base procurada é definida pela equação recursiva

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{A}{b_n}\right)$$

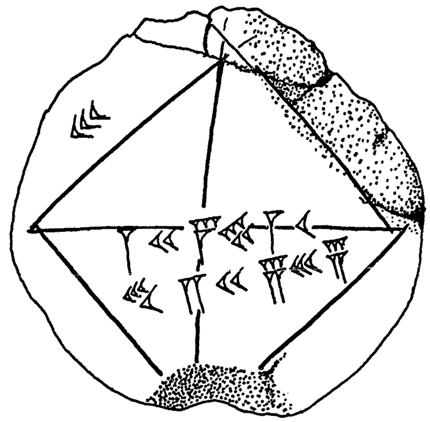


Figura 10: Tábua Babilónica YBC 7289

que supostamente fornece aproximações cada vez melhores do lado do quadrado.

O **Método de Newton** é uma generalização do "algoritmo" dos Babilónios para estimar os zeros de uma função P, e que se reduz a (4) quando $P(x) = x^2 - A$. É dado pela equação recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}. \tag{5}$$

Se tomarmos $P(x) = x^2 - A$ então $P'(x) = 2x$ e a expressão do lado direito de (5) é

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

e, portanto, (5) reduz-se a (4).

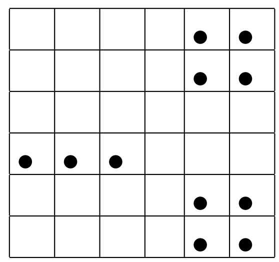
Exercício 6. [**O Jogo da Vida.**] O Jogo da Vida, inventado pelo matemático John Conway no final dos anos setenta (ver www.math.com/students/wonders/life/life.html) pretende modelar uma dada população que viva em localizações fixas. Cada organismo da população é um ponto de uma rede de dimensão $n \times n$, e pode ter vários estados de vida. Na versão mais simples cada organismo só pode ter dois estados: "presente" ou "ausente". Codificamos os estados com cores: branco para ausente, preto para presente.

●				●	●
					●
	●				
	●				
	●			●	●
				●	●

A regra do jogo é que a população muda em estados de tempo discretos de uma forma particular. Por exemplo a regra do jogo pode ser a seguinte.

1. Uma célula morta com exatamente três vizinhos vivos torna-se uma célula viva (nascimento).
2. Uma célula viva com dois ou três vizinhos vivos permanece viva (sobrevivência).
3. Em todos os outros casos, uma célula morre ou permanece morta (solidão ou excesso de população).

Consequentemente o próximo estado é o seguinte:



Jogo da Vida, estado seguinte

1. Jogue o próximo movimento no Jogo da Vida.
2. Num tabuleiro de dimensão 6×6, escolha um estado inicial para o Jogo da Vida, e jogue alguns movimentos. Que conclusões consegue tirar?
3. Efetue experiências com pequenas configurações de células vivas no Jogo da Vida. Descreve o tipo de comportamento assimptótico encontrado.

   Referência para um applet: www.bitstorm.org/gameoflife/

sistemas dinâmicos discretos

Exercício 1. Determine o conjunto estável do ponto fixo zero da transformação $x \mapsto \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$, ao variar o parâmetro λ.

Exercício 2. Em cada alínea, apresente um exemplo de uma transformação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $W^s(0) =]-1, 1[$.

(b) $\omega(x) = \{1\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\omega(x) = \varnothing$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\omega(2) = \{-2, 2\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(e) O conjunto $[-1, 1]$ não contém pontos periódicos.

(f) $\sqrt{3}$ é um ponto periódico de período 2.

(g) f tem um único ponto fixo x e $W^s(x) = \mathbb{R}$.

(h) Todo o ponto da reta é periódico.

(i) Todo o ponto da reta é recorrente.

(j) Todo o ponto da reta é não-errante.

(k) Nenhum ponto da reta é periódico.

(l) Nenhum ponto da reta é recorrente.

(m) O conjunto dos pontos recorrentes é $[0, 2]$.

Exercício 3. Dê exemplo de, ou justifique por que não existe:

1. Uma transformação $f : [0, 1] \to [0, 1]$ que não tenha pontos fixos.
2. Uma transformação contínua $f :]0, 3[\to]0, 3[$ que não tenha pontos fixos.
3. Um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não tenha pontos fixos.

Exercício 4. Apresente um exemplo de uma contração $f : [0,1[\to [0,1[$ sem pontos fixos.

Exercício 5. Determine os pontos fixos e use a iteração gráfica para estudar o comportamentos de pontos próximos dos pontos fixos para as seguintes transformações:

1. $f(x) = x - x^2$, $x \in [0,1]$.
2. $g(x) = 2x - x^2$, $x \in [0,1]$.

Exercício 6. Em cada alínea estude a dinâmica da transformação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = -x^3$ (c) $f(x) = x^{1/3}$ (d) $f(x) = x^3 + x$

(e) $f(x) = x^3 - x$ (f) $f(x) = x^2 + 1/4$ (g) $f(x) = |x - 1|$ (h) $f(x) = \text{sen } x$

Utilize o Maxima para simular a evolução da dinâmica de cada um dos sistemas.

Exercício 7. Considere a transformação $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Mostre que $W^s(1) = \mathbb{R}^+$.

Exercício 8. Para cada uma das seguintes transformações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determine os pontos fixos e indique quais são atrativos e quais são repulsivos:

(a) $f(x) = x^2 - x/2$ (b) $f(x) = 4x - x^2$ (c) $f(x) = x^2 - 1$

(d) $f(x) = \text{sen } x$ (e) $f(x) = x + x^3$ (f) $f(x) = x - x^3$

(g) $f(x) = x + x^2$ (h) $f(x) = x - x^2$ (i) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$

Exercício 9. Em cada alínea, apresente um exemplo de uma transformação contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\sqrt{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

(b) $\sqrt{3}$ é um ponto fixo atrativo.

(c) π e $-\pi$ são pontos fixos repulsivos.

Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

bifurcações

Exercício 1. Considere a família de transformações $\begin{array}{rccc} f_c: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+c \end{array}$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os pontos fixos da transformação f_c, $c \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule o parâmetro c_0 para o qual ocorre uma bifurcação sela-nó.

(c) Estude a dinâmica da transformação f_c, para $c > c_0$.

(d) Mostre que para $c = c_0$ o ponto fixo não é atrativo nem repulsivo. Determine o conjunto dos pontos cuja trajetória converge para este ponto fixo.

(e) Calcule o parâmetro c_1 para o qual ocorre uma bifurcação de duplicação do período.

(f) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_c.

Exercício 2. Considere a família logística de transformações $\begin{array}{rccc} f_\lambda: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lambda x(1-x) \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(a) Determine os pontos fixos da transformação f_λ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(b) Determine para que valores de λ é que os pontos fixos são atrativos e para que valores são repulsivos.

(c) Determine os valores de λ para os quais a transformação f_λ tem uma órbita periódica de período 2 .

(d) Descreve as bifurcações que ocorrem quando $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$.

(e) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_λ.

Exercício 3. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 + x - 2ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

(b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

Exercício 4. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^3 - ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

(b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

Exercício 5. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = ax + x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

(b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

Exercício 6. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = a + x - x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

(b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

sistemas dinâmicos caóticos

Exercício 1. [Sistema dinâmico *tenda*] Considere a transformação *tenda* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq 1/2 \\ 2-2x & \text{se} \quad x > 1/2 \end{cases} .$$

(a) Mostre que $|\mathrm{Fix}(T^n)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

(c) Mostre que T é topologicamente transitiva.

(d) Mostre que T é topologicamente misturadora.

(e) A transformação tenda é caótica?

Exercício 2. [Sistema dinâmico *shift*] Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0\, s_1\, s_2 \cdots) \colon s_j = 0 \,\text{ou}\, 1\}$ e seja $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ a transformação *shift* definida por

$$(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \longmapsto (s_1\, s_2\, s_3\, \cdots)$$

onde $(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \in \Sigma_2$. Considere a métrica d em Σ_2 definida por

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

(a) Em cada alínea determine $d(s,t)$ onde:

(i) $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$ e $t = (1111\cdots) = (\overline{1})$,
(ii) $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$ e $t = (010101\cdots) = (\overline{01})$,
(iii) $s = (011011011\cdots) = (\overline{011})$ e $t = (010101\cdots) = (\overline{01})$.

(b) Mostre que $d(s,t) \leq 2$ para quaisquer $s,t \in \Sigma_2$.

(c) Dê um exemplo de um ponto periódico de período 4.

(d) Mostre que $|\mathrm{Fix}(\sigma^n)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(e) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ_2.

(f) Mostre que existe um ponto $s \in \Sigma_2$ cuja órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(s)$ é densa em Σ_2.

(g) A transformação shift é caótica?

2 Soluções das folhas de exercícios

Esta secção contém as soluções das folhas de exercícios que foram fornecidas aos alunos durante o semestre.

Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Matemática para o mundo real

Consulte o ficheiro 'Folha1.nb'.

1. **Rei Artur e os Cavaleiros da Távola Redonda**.

   (a) Tem-se que $N(t) = N_0 e^{-kt}$, onde N_0 é o número de átomos radioativos no tempo inicial $t = 0$, uma vez que:

   i. para $t = 0$ temos que $N(0) = N_0 e^0 = N_0$. Assim, a função N satisfaz a condição inicial $N(0) = N_0$;

   ii. derivando a função N, obtém-se que $N'(t) = -kN_0 e^{-kt} = -kN(t)$, para todo o t. Assim, a função N é solução da equação diferencial $N'(t) = -kN(t)$.

   (b) Por um lado temos que
$$N(t_{\text{meia-vida}}) = \frac{N_0}{2}\,.$$
   Por outro lado, como $N(t) = N_0 e^{-kt}$, temos que
$$N(t_{\text{meia-vida}}) = N_0 e^{-k\,t_{\text{meia-vida}}}\,.$$
   Consequentemente,
$$N_0 e^{-k\,t_{\text{meia-vida}}} = \frac{N_0}{2}\,,$$
   e, portanto, $t_{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{k}$.

   (c) Comecemos por observar o seguinte: supondo, mais geralmente, que N_s é o número de átomos radioativos no tempo s, tem-se que $N(t) = N_s e^{-k(t-s)}$. Com efeito, de modo análogo a (a), tem-se que:

   i. para $t = s$ temos que $N(s) = N_s e^0 = N_s$. Assim, a função N satisfaz a condição inicial $N(s) = N_s$;

   ii. derivando a função N, obtém-se que $N'(t) = -kN_s e^{-k(t-s)} = -kN(t)$, para todo o t. Assim, a função N é solução da equação diferencial $N'(t) = -kN(t)$

   Vamos agora usar a informação de que o tempo de meia-vida do carbono-14 é aproximadamente 5700 anos para calcular a constante k.
   Como $t_{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{k}$, então
$$k = \frac{\ln 2}{5700} \sim 1.216 * 10^{-4}\,.$$

Podemos agora responder às questões colocadas.

• Tomando $s = 500$, temos que

$$N(t) = N(500)e^{-k(t-500)}.$$

Consequentemente, em 2018 teríamos que

$$N(2018) = N(500)e^{-k.1518}.$$

Assim, se a mesa datasse de 500 DC, a proporção de carbono-14 em 2018 seria $e^{-k.1518} \sim e^{-(1.216*10^{-4}).1518} \sim 83\%$.

• Como foi encontrada $91,6\%$ da quantidade original de carbono-14, temos que:

$$N(1976) = 0.916N_s = N_s e^{-k(1976-s)}.$$

Consequentemente,

$$s = 1976 + \frac{\ln 0.916}{1.216 * 10^{-4}} \sim 1255.$$

Portanto, a Távola Redonda data aproximadamente do ano de 1255, no reinado do rei Eduardo I.

2. **Lei do arrefecimento de Newton**.

   (a) Tem-se que $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, onde T_0 é a temperatura inicial do corpo, uma vez que:

      i. para $t = 0$ temos que $T(0) = T_m + (T_0 - T_m)e^0 = T_0$. Assim, a função T satisfaz a condição inicial $T(0) = T_0$;

      ii. derivando a função T, obtém-se que $T'(t) = -k(T_0 - T_m)e^{-kt} = -k(T(t) - T_m)$, para todo o t. Assim, a função T é solução da equação $T'(t) = -k(T(t) - T_m)$.

   (b) Consulte o ficheiro do *Mathematica*: 'Folha1.nb'.

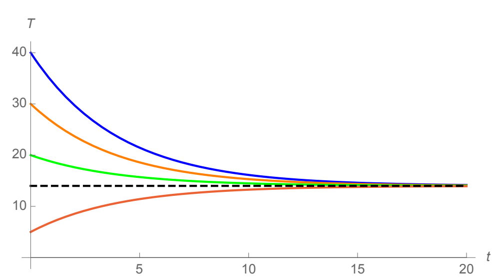


Figura 11: Variação da temperatura, para diferentes temperaturas T_0, tomando $T_m = 14$ e $k = 0.25$.

3. Recorde que a função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}\,, \tag{6}$$

onde T_0 é a temperatura inicial do corpo, descreve a evolução temporal da temperatura, satisfazendo a lei do arrefecimento de Newton.

Pelos dados do problema temos que:

$$T_0 = 100,\ T_m = 25,\ T(5) = 90\,.$$

Tendo em conta (6) para $t = 5$, tem-se que:

$$90 = 25 + (100 - 25)e^{-k.5}\,.$$

Consequentemente, podemos determinar o valor da constante k:

$$k = -\tfrac{1}{5}\ln(\tfrac{65}{75}) \sim 0.0286202\,.$$

O corpo estará a 50° para o valor de t que for solução da seguinte equação:

$$50 = 25 + (100 - 25)e^{-k.t}\,,$$

onde k tem o valor determinado acima. Resolvendo a equação em ordem a t, obtemos que $t \sim 38,3859$ minutos.

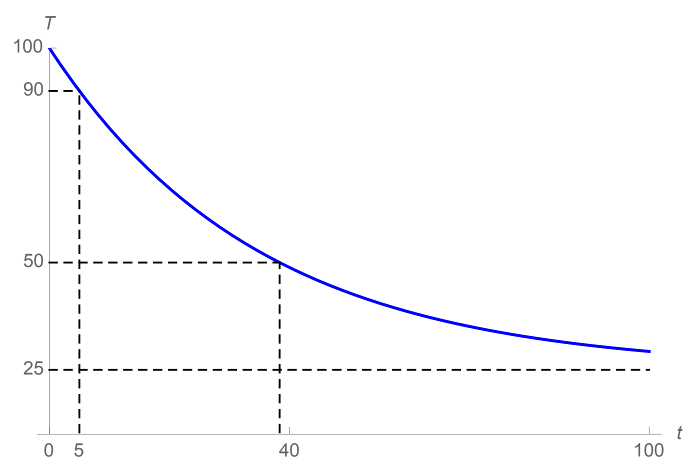


Figura 12: Ilustração da variação da temperatura (t em minutos).

4. Recorde que a função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}\,, \tag{7}$$

onde T_0 é a temperatura inicial do corpo, descreve a evolução temporal da temperatura, satisfazendo a lei do arrefecimento de Newton.

Tendo em conta os dados do problema temos que:

$$T_0 = 100,\ T(10) = 90 \text{ e } T(20) = 82\ .$$

Tendo em conta (7) para $t = 10$ e $t = 20$, respetivamente, tem-se que :

$$\begin{cases} 90 = T_m + (100 - T_m)\, e^{-k.10} \\ \\ 82 = T_m + (100 - T_m)\, e^{-k.20} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $T_m = 50°C$.

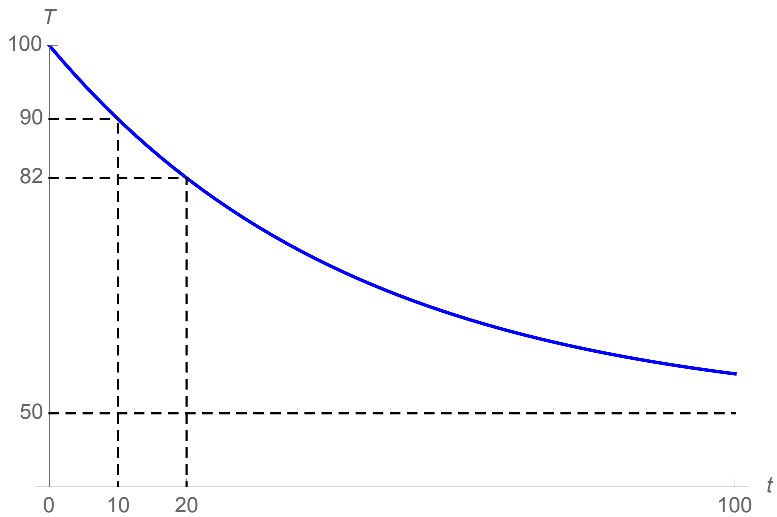


Figura 13: Ilustração da variação da temperatura (t em minutos).

5. **Lei de Hooke: vibrações de molas**. Ver slides das aulas.

6. **Dinâmica de uma população: modelo Malthusiano ou modelo exponencial**.

   Recorde que a função

$$P(t) = P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}\,, \tag{8}$$

   onde $P(t_0)$ é a população no instante inicial t_0, descreve a evolução temporal da população, satisfazendo o modelo exponencial.

   Podemos usar os dados de 1801 e 1851 para calcular λ. Tendo em conta (8), para $t = 1851$ e $t_0 = 1801$, tem-se que

$$P(1851) = P(1801)e^{\lambda.50}\,.$$

   Consequentemente,

$$\lambda \sim 0.01\,.$$

Podemos agora calcular os valores de $P(1901)$ e $P(2011)$. Temos que:

$$P(1901) = P(1801)e^{\lambda.100} \sim 46\,\text{milhões}\,,$$

e

$$P(2011) = P(1801)e^{\lambda.210} \sim 146\,\text{milhões}\,.$$

Consequentemente, o modelo exponencial sobreestimou a população em 2011.

7. **Um modelo populacional mais realista: modelo de Verhulst ou modelo logístico**.

Recorde que a função

$$P(t) = M\left[\frac{P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}{M - P(t_0) + P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}\right]\,, \tag{9}$$

onde $P(t_0)$ é a população no instante inicial t_0, descreve a evolução temporal da população satisfazendo o modelo logístico.

Usando os dados de 1801, 1851 e 1901 podemos determinar os valores de M e λ. Com efeito temos que (após alguns calculos):

$$M = 83.1 \;\text{ e }\; \lambda \sim 0.014\,.$$

Consequentemente,

$$P(2011) \sim 68.6\,\text{milhões}\,.$$

Equações diferenciais "triviais"

Consulte o ficheiro 'Folha2.nb'.

1. **Solução geral e condições iniciais**. Consideremos a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x + 10 \operatorname{sen} x\,.$$

(a) Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \int (x + 10 \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{x^2}{2} - 10 \cos x + c,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

Então, a expressão geral (explícita) da solução da equação diferencial é

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - 10 \cos x + c,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Encontrada a solução geral, queremos agora determinar a solução particular que passa no ponto $P = (\pi, 0)$. Isto é, queremos determinar para que escolha da cosntante c se obtém $y(\pi) = 0$. Temos que

$$y(\pi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2} - 10 \cos \pi + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{\pi^2}{2} - 10\,.$$

Assim, a solução particular que passa no ponto $P = (\pi, 0)$ é a função

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,. \\ & x & \mapsto & \frac{x^2}{2} - 10 \cos x - \frac{\pi^2}{2} - 10 \end{array}$$

(c) Consulte o ficheiro 'Folha2.nb'.

2. **Velocidade, aceleração e segunda lei de Newton do movimento**. Um carro de massa m desloca-se a uma velocidade constante v_0 quando subitamente tem de travar. Os travões aplicam uma força k até o carro parar.

Valores realistas de m e k são: $m = 1000\,kg$ e $k = 6500\,N$ $(1N = 1Kg\,m/s^2)$.

(a) Usando a segunda lei de Newton temos que

$$m\frac{dv}{dt} = -k\,,$$

uma vez que a força atua no sentido contrário ao do movimento do carro. Podemos reescrever esta equação como

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\,.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$v(t) = -\frac{k}{m}t + c\,,$$

onde a constante c pode ser determinada fazendo-se $t = 0$: $c = v(0)$, ou seja, c é a velocidade inicial (i.e., no instante $t = 0$), que designaremos por v_0.

Assim, a expressão da solução particular que satisfaz $v(0) = v_0$ é: $v(t) = v_0 - \frac{k}{m}t$.

O carro pára para $t = t_p$ tal que $v(t_p) = 0$. Então, o carro pára quando $t_p = \frac{mv_0}{k}$.

Consulte o ficheiro 'Folha2.nb' para efetuar simulações com diferentes valores da velocidade inicial.

(b) Uma vez que

$$\frac{dx}{dt} = v(t)\,,$$

temos que

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{k}{m}t\,.$$

Integrando ambos os membros entre $t = 0$ e $t = t_p$ obtemos

$$x(t_p) - x(0) = \int_0^{t_p} \left(v_0 - \frac{k}{m}t\right)\,dt = \left(v_0 t - \frac{kt^2}{2m}\right)\Bigg]_{t=0}^{t=t_p} = v_0 t_p - \frac{kt_p^2}{2m}\,.$$

Consequentemente,

$$x(t_p) = x_0 + v_0 t_p - \frac{kt_p^2}{2m}\,.$$

Como $t_p = \dfrac{mv_0}{k}$, substituindo na equação anterior, obtemos que

$$x(t_p) = x_0 + \frac{mv_0^2}{2k}\,.$$

Consulte o ficheiro 'Folha2.nb' para efectuar simulações com diferentes valores da velocidade inicial.

3. **Queda livre de corpos**. Seja h a altura acima do solo da qual cai a maçã. Pela segunda lei do movimento de Newton temos que

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\,,$$

isto é,

$$\frac{dv}{dt} = -g\,.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$v(t) = -gt + c\,,$$

onde a constante c pode ser determinada fazendo-se $t = 0$: $c = v(0)$, ou seja, c é a velocidade inicial que neste caso é 0. Assim, obtemos que

$$v(t) = -gt\,.$$

Integrando mais uma vez, obtemos

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1\,,$$

onde a constante c_1 pode ser determinada tendo em conta que quando $t = 0$, a posição da partícula é $x(0) = h$. Obtemos então que:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h\,.$$

De modo claro, a maçã atinge o solo no tempo $t = t_s$ em que $x(t_s) = 0$. Então

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

equações diferenciais - noções básicas

Consulte o ficheiro 'Folha3.nb'.

Exercício 1.

(a) Equação diferencial ordinária de 1ª ordem

(b) Equação diferencial com derivadas parciais de 2ª ordem

(c) Equação diferencial ordinária de 2ª ordem

Exercício 2.

(a) Primeiro notemos que f e a sua derivada f' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - 3e^{-x}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(1 - 3e^{-x}) + (x + 3e^{-x}) = x + 1,$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Primeiro notemos que g e as suas derivadas g' e g'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 6e^{3x} - 20e^{4x}$$

e

$$g''(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(18e^{3x} - 80e^{4x}) - 7(6e^{3x} - 20e^{4x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{4x}) = 0,$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) Primeiro notemos que h e as suas derivadas h' e h'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

e

$$g''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$x^2 \left(2 - \frac{2}{x^3}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{x}\right),$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercício 3. Devemos mostrar que a relação $y^2 + x - 3 = 0$ define pelo menos uma função real y no intervalo $]-\infty, 3[$ que é solução da equação diferencial. A relação $y^2 + x - 3 = 0$ define duas funções reais y_1 e y_2 dadas por

$$y_1(x) = \sqrt{3-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -\sqrt{3-x},$$

respetivamente, para todo o $x \in]-\infty, 3[$. Averiguemos, por exemplo, se a função y_1 é solução explícita da equação diferencial.

Primeiro notemos que y_1 e a sua derivada y_1' estão definidas para todo $x \in]-\infty, 3[$. Temos que, para todo o $x \in]-\infty, 3[$,

$$y_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Substituindo depois y_1 e y_1' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$\frac{-1}{2\sqrt{3-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}},$$

a qual é válida para todo o $x \in]-\infty, 3[$. Consequentemente, a função $y_1(x) = \sqrt{3-x}$, $x \in]-\infty, 3[$, é uma solução explícita da equação diferencial dada.

Exercício 4. Devemos mostrar que a relação $x^3 + 3xy^2 = 1$ define pelo menos uma função real y no intervalo $]0, 1[$ que é solução da equação $2xyy' + x^2 + y^2 = 0$. A relação $x^3 + 3xy^2 = 1$ define duas funções reais y_1 e y_2 dadas por

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}},$$

respetivamente, para todo o $x \in]0, 1[$. Averiguemos, por exemplo, se a função y_1 é solução explícita da equação diferencial.

Primeiro notemos que y_1 e a sua derivada y_1' estão definidas para todo $x \in]0,1[$. Temos que, para todo o $x \in]0,1[$,

$$y_1'(x) = \frac{\frac{-2x^3-1}{3x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}}.$$

Substituindo depois y_1 e y_1' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$2x\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}.\frac{\frac{-2x^3-1}{3x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}} + x^2 + \frac{1-x^3}{3x} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{-2x^3-1}{3x} + x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3x} + x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 0,$$

a qual é válida para todo o $x \in]0,1[$. Consequentemente, a função $y_1(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$, $x \in]0,1[$, é uma solução explícita da equação diferencial dada.

Exercício 5.

(a) Derivando a relação $y - \log y = x^2 + 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = 2x \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx}\left(\frac{y-1}{y}\right) = 2x \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}.$$

(b) Derivando a relação $e^{xy} + y = x - 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$ye^{xy} + xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 \;\Leftrightarrow\; xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - ye^{xy} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1-ye^{xy}}{1+xe^{xy}} \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x}.$$

(c) Derivando a relação $x^2 - \operatorname{sen}(x+y) = 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$2x - \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{dy}{dx}\cos(x+y) = -2x + \cos(x+y) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos(x+y)} - 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2x\sec(x+y) - 1.$$

Exercício 6.

(a) Primeiro notemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$, as funções f e f' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2e^{-3x} - 3(x^3 + c)e^{-3x}.$$

Substituindo depois f e f' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$(3x^2e^{-3x} - 3(x^3 + c)e^{-3x}) + 3(x^3 + c)e^{-3x} = 3x^2e^{-3x},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Temos que $f(0) = c$. Consequentemente, $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$ e $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$.

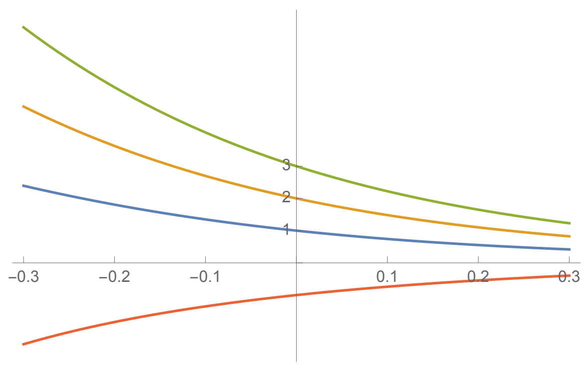


Figura 14: Família de soluções.

Exercício 7. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y'(x) + 2y(x) = 6e^x + 4xe^{-2x}$, no intervalo $\mathbb{R}$. Primeiro notemos que y e a sua derivada y' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = (4x + 6e^{3x})e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x^2 + 2e^{3x} + 3).$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(4x + 6e^{3x})e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x^2 + 2e^{3x} + 3) + 2((2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}) = 6e^x + 4xe^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4xe^{-2x} + 6e^x - 4e^{-2x}x^2 - 4e^x - 6e^{-2x} + 4x^2e^{-2x} + 4e^x + 6e^{-2x} = 6e^x + 4xe^{-2x},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz a condição inicial $y(0) = 5$. Temos que $y(0) = (0 + 2e^0 + 3).e^0 = 5$. Então a função y verifica a condição inicial $y(0) = 5$.

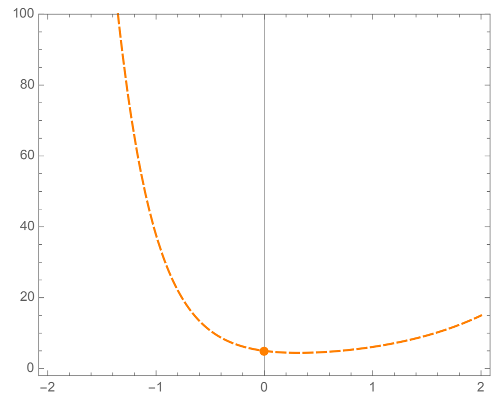


Figura 15: Gráfico da função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$.

Exercício 8. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y' = 2xy(y-1)$, no intervalo $\mathbb{R}$. Primeiro notemos que y e a sua derivada y' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$\frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x\,\frac{1}{1+e^{x^2}}\left(\frac{1}{1+e^{x^2}} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x\,\frac{1}{1+e^{x^2}}\left(\frac{-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\right),$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$. Temos que $y(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$. Então a função y verifica a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$.

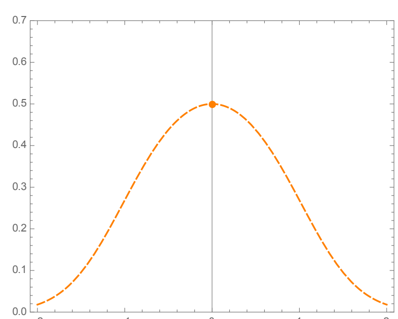


Figura 16: Gráfico da função $y(x) = 1/(1+e^{x^2})$.

Exercício 9. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y'' = -y$, no intervalo $\mathbb{R}$. Primeiro notemos que y e as suas derivadas y' e y'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(1)} \quad \text{e} \quad y''(x) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)} = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz as condições $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$. Temos que $y(0) = \frac{\operatorname{sen}(0)}{\operatorname{sen}(1)} = 0$ e $y(1) = \frac{\operatorname{sen}(1)}{\operatorname{sen}(1)} = 1$. Então a função y verifica as condições $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

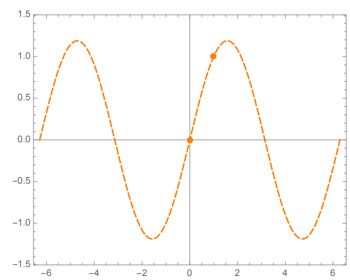


Figura 17: Gráfico da função $y(x) = \operatorname{sen}(x)/\operatorname{sen}(1)$.

Exercício 10. Queremos determinar a solução da forma $y(x) = (x^2 + c)e^{-x}$ que satisfaz $y(-1) = e + 3$. Substituindo x por -1 e y por $e + 3$, obtemos

$$e + 3 = (1 + c)\,e \iff c = 3\,e^{-1}.$$

Então, a expressão geral da solução procurada é $y(x) = (x^2 + 3\,e^{-1})e^{-x}$.

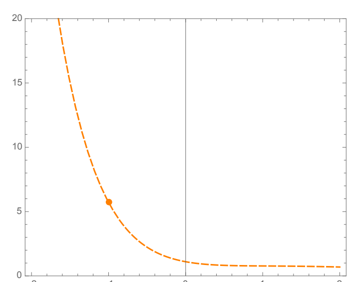


Figura 18: Gráfico da solução do PVI.

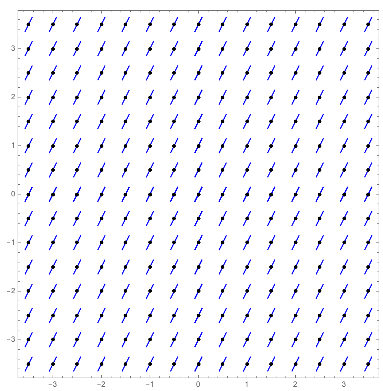
Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

campos de direcções tangentes

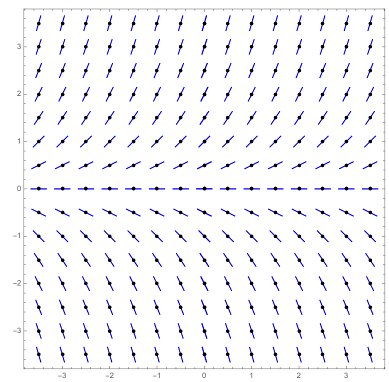
Consulte o ficheiro 'Folha4.nb'.

Exercício 1.

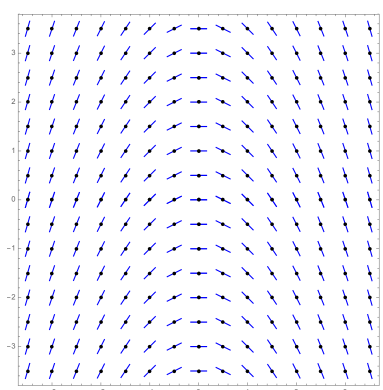
(a) $y' = 2$



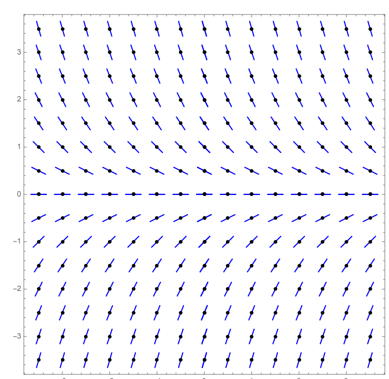
(b) $y' = y$



(c) $y' = -x$



(d) $y' = -y$



Exercício 2. (2), (1), (1), (2), (3), (3), (1), (2)

edo's primeira ordem separáveis

Consulte o ficheiro 'Folha5.nb'.

Exercício 1.

(a) Soluções constantes

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Soluções não constantes

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c\,x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & c\,x^2 \end{array} \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

(b) Solução constante

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Soluções não constantes

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \dfrac{c}{(x^2+1)^2} \end{array} \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

(c) Soluções não constantes

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{x^2+2c} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+2c} \end{array} \qquad c \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, -\sqrt{-2c}[& \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & -\sqrt{x^2+2c} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl}]\sqrt{-2c}, +\infty[& \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & -\sqrt{x^2+2c} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, -\sqrt{-2c}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+2c} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl}]\sqrt{-2c}, +\infty[& \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+2c} \end{array} \qquad c \in \mathbb{R}^-$$

(d) Solução constante

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Soluções não constantes

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & c\,e^{x^2/2} \end{array} \qquad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

(e) Solução constante

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Soluções não constantes

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, c[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-c} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl}]c, +\infty[& \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-c} \end{array} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Exercício 2.

(a) $$\begin{array}{rcl}]-2, 3[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t^2-t-6} \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t^2-t+6} \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcl} \left]\dfrac{\sqrt{15}}{2}, +\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-1+\sqrt{4x^2-15}}{2} \end{array}$$

Exercício 3.

(a) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\,e^{3x^2} \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{t^2}-1 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,e^{\operatorname{sen}(x+1)} \end{array}$

Exercício 4.

(a) $y(x) = \dfrac{1}{c-\cos(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = 0; \quad y(x) = 1; \quad \log\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg}(y) = 2\operatorname{sen}(2x) - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(d) $y + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x\operatorname{sen}(2x)}{2} + \dfrac{\cos(2x)}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(e) $y(x) = \log(\operatorname{sen}(x) + c), \quad c \in \mathbb{R}$

(f) $\dfrac{3y}{2} - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Exercício 5. A solução maximal que passa no ponto $P = (1,1)$ é:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

A solução maximal que passa no ponto $Q = (0, \frac{1}{2})$ é:

$$\begin{array}{ccc}]-\sqrt[3]{2}, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - \dfrac{1}{x^3+2} \end{array}$$

edo's primeira ordem lineares

Consulte o ficheiro 'Folha6.nb'.

Exercício 1.

(a) As soluções maximais da equação são as funções da forma,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & -\frac{25}{4}e^{-10x} + c\,e^{-2x} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{5} + \frac{c}{x^3} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{5} + \frac{c}{x^3} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(c) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 - c\,x \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & -x^2 + c\,x \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(d) As soluções maximais da equação são as funções da forma,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & e^{-2x}\,x^4 + c\,e^{-2x} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(e) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\,t^2 + c\,t \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & 3\,t^2 + c\,t \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(f) As soluções maximais da equação são as funções da forma,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -xe^x + cx \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & -xe^x - cx \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(g) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3\,x^2} + c\,x^4 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3\,x^2} + c\,x^4 \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(h) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5\,e^x - x^4\,e^x + c\,x^4 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & x^5\,e^x - x^4\,e^x + c\,x^4 \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(i) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2\,x^4}{5} - \frac{x}{2} + \frac{c}{x} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & \frac{2\,x^4}{5} - \frac{x}{2} + \frac{c}{x} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(j) As soluções maximais da equação são as funções da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -4 + c\,e^{-\frac{1}{x}} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & -4 + c\,e^{-\frac{1}{x}} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.

(a) A solução maximal que passa no ponto $(1, 2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \frac{\log x}{x} + \frac{2}{x} \end{array}$$

(b) A solução maximal que passa no ponto $(0,2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}\, e^{x^2-x} \end{array}$$

(c) A solução maximal que passa no ponto $(0,2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & e^{t-t^3} + e^{-t^3} \end{array}$$

(d) A solução maximal que passa no ponto $(0,1)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ \theta & \mapsto & \frac{1}{2}e^{\theta^2+\text{sen}\,(\theta)} + \frac{1}{2}\, e^{\text{sen}\,(\theta)} \end{array}$$

Exercício 3.

(a) A solução maximal do problema de valores iniciais é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & -x\,\cos(x) + x \end{array}$$

(b) A solução maximal do problema de valores iniciais é a função

$$\begin{array}{rcl} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \text{sen}\,(x) + 2\,\cos(x) \end{array}$$

(c) A solução maximal do problema de valores iniciais é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

Exercício 4.

(a) $y(x) = x^2 - x - \frac{2}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^-$

(b) $x(t) = -t\,e^t + e\,t, \quad t \in \mathbb{R}^+$

(c) $y(x) = \frac{\text{sen}\,(x)+3\,\cos(x)-3\,e^{-3x}}{10}, \ x \in \mathbb{R}$

Exercício 5. A solução maximal da equação diferencial que passa no ponto $(0,2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{\text{sen}\,(x)}}{\cos\,(x)} + \dfrac{1}{\cos\,(x)} \end{array}$$

mudança de variável, edo's primeira ordem homogéneas e de Bernoulli

Exercício 1.

(a) $y(t) = t\log|t| + ct,\ \ c \in \mathbb{R}$

(b) $\sqrt[4]{y^4 + t^4} = c\,t^2,\ \ c \in \mathbb{R}^+$

(c) $y(x) = c\,x^2 - x,\ \ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\quad y(x) = -x$

(d) $\frac{y^2}{2x^2} - \log|\frac{y}{x}| = \log|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R};\quad y(x) = 0$

(e) $|y - x| = c\,|(y + 3x)^5|,\quad c \in \mathbb{R}^+;\ \ y(x) = x;\quad y(x) = -3x$

Exercício 2.

(a) A solução maximal que passa no ponto $(2, -\sqrt{2})$ é a função

$$\begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & -x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \end{array}$$

(b) A solução maximal que passa no ponto $(2, -1)$ é a função

$$\begin{array}{rcl}]0, \frac{5}{2}[& \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & -\sqrt{\frac{5}{2}x - x^2} \end{array}$$

Exercício 3. $\quad y + \sqrt{y^2 + x^2} = x^2$

Exercício 4. $\quad \operatorname{arctg}(2y + 2x - 1) = 2x + \pi/4$

Exercício 5.

(a) $y^2 = 1 + c\,e^{-2x},\ c \in \mathbb{R}$

(b) $y^{-2} = \frac{1}{3x^2} + c\,x^4,\ c \in \mathbb{R}$

Exercício 6.

(a) A solução maximal que passa no ponto $(1, \frac{1}{2})$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{x^2}{x^5+3}} \end{array}$$

(b) A solução maximal que passa no ponto $(\frac{\pi}{2}, 2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{1+7e^{3\cos x}} \end{array}$$

edo's lineares de ordem n

Exercício 1.

(b) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = 3e^{2x} - e^{3x}$

Exercício 3.

(a) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(e) $y(x) = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(f) $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 \cos(x) + c_3 \operatorname{sen}(x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(g) $y(x) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right) + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right),$
$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

(h) $y(x) = (c_1 + c_2 x) \operatorname{sen}(x) + (c_3 + c_4 x)\cos(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Exercício 4. $y(x) = c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x) + e^{-x}(c_3 \operatorname{sen}(2x) + c_4 \cos(2x)), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Exercício 5.

(a) $y(x) = e^{-3x} + 2e^{4x}$

(b) $y(x) = e^{2x}\,\text{sen}\,(5x)$

Exercício 6. $y(x) = \dfrac{e^x - 2}{e - 2}$

Exercício 7.

(a) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x - \frac{1}{2}x^2e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x + x^2 + 3x + \frac{7}{2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exercício 8.

(a) $y(x) = 2e^{-x} + \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x + 2\,\text{sen}\,(x) - \cos(x)$

(b) $y(x) = 6\cos(x) - \text{sen}\,(x) + 3x^2 - 6 + 2x\cos(x)$

Exercício 9.

(a) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{20}\,\text{sen}\,(2x) + \frac{3}{20}\cos(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{3}e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = c_1e^{x/2}\,\text{sen}\,\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + c_2e^{x/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + x - \frac{3}{2}e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^x + c_3e^{3x} - \frac{1}{6}xe^{2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(e) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}\,\text{sen}\,(x) + c_3e^{-x}\cos(x) - \frac{4}{25}xe^x + \frac{1}{10}x^2e^x - \frac{1}{2}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Oscilador harmónico simples

Comecemos por escrever a equação

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

na forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{10}$$

onde $\omega^2 = k/m$. A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 + \omega^2 = 0\,.$$

As raízes desta equação são $r_1 = -\omega i$ e $r_2 = \omega i$. Então a solução geral da equação diferencial (10) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$

As constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial da partícula, $x(0) = x_0$, e a sua velocidade inicial, $\dot{x}(0) = v_0$. Assim, de (11) temos que $c_1 = x_0$. Derivando (11) e fazendo $t = 0$, obtemos $c_2 = v_0/\omega$. Consequentemente, temos que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)\,. \tag{12}$$

Sejam

$$A := \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\,, \qquad \cos\phi := \frac{x_0}{A} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\phi := \frac{v_0}{A\omega}\,,$$

com $0 \le \phi < 2\pi$. Temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \tfrac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \\ &= A\left(\tfrac{x_0}{A} \cos(\omega t) + \tfrac{v_0}{A\omega} \operatorname{sen}(\omega t)\right) \\ &= A(\cos\phi \cos(\omega t) + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(\omega t)) \\ &= A\cos(\omega t - \phi)\,. \end{aligned}$$

Temos assim um movimento oscilatório em torno da posição de equilíbrio $x = 0$. O afastamento máximo da posição de equilíbrio, A, chama-se *amplitude*. O período da função cosseno em $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, $T = 2\pi/\omega$, é o *período* do movimento, o qual significa o tempo necessário para uma oscilação completa. O inverso do período é a *frequência* $f = \omega/2\pi$. O ângulo ϕ é chamado o *ângulo de fase*.

Oscilador harmónico amortecido

Comecemos por escrever a equação

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

na forma

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{13}$$

onde $2\nu = \mu/m$ e $\omega^2 = k/m$.

A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 + 2\nu r + \omega^2 = 0\,.$$

As soluções da equação diferencial dependem das raízes da equação característica, isto é, dependem do sinal de

$$4\nu^2 - 4\omega^2 = \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{\mu^2 - 4km}{m^2}\,.$$

1. **amortecimento forte**: $\mu^2 > 4km$, ou seja, $\nu > \omega$. Neste caso as soluções da equação característica são:

   $$r_1 = -\nu - \ell \quad \text{e} \quad r_2 = -\nu + \ell, \quad \text{onde} \quad \ell = \sqrt{\nu^2 - \omega^2}\,.$$

   Consequentemente, a solução geral de (13) é:

   $$x(t) = e^{-\nu t}(c_1\, e^{-\ell t} + c_2\, e^{\ell t})\,, \quad \ell = \sqrt{\nu^2 - \omega^2}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{14}$$

2. **amortecimento crítico**: $\mu^2 = 4km$, ou seja, $\nu = \omega$. Neste caso

   $$r = -\nu\,,$$

   é uma raiz dupla da equação característica. Consequentemente, a solução geral de (13) é:

   $$x(t) = e^{-\nu t}(c_1 + c_2 t)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{15}$$

3. **amortecimento oscilatório**: $\mu^2 < 4km$, ou seja, $\nu < \omega$. Neste caso as soluções da equação característica são:

   $$r_1 = -\nu - \ell i \quad \text{e} \quad r_2 = -\nu + \ell i, \quad \text{onde} \quad \ell = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}\,.$$

   Consequentemente, a solução geral de (13) é:

   $$x(t) = e^{-\nu t}(c_1 \cos(\ell t) + c_2\, \mathrm{sen}(\ell t))\,, \quad \ell = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}\,, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Oscilador forçado

Vamos considerar apenas o caso em que a força externa é periódica do tipo cosseno. O caso do seno é análogo.

Comecemos por escrever a equação

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

na forma

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = E_0 \cos(\omega_0 t)\,, \tag{17}$$

onde $2\nu = \mu/m$, $\omega^2 = k/m$, $\omega_0 > 0$ e $E_0 = F_0/m > 0$. Para escrevermos a solução geral precisamos de determinar uma solução particular desta equação. Vamos considerar dois casos:

1. **caso I** ($\nu \neq 0$ e $\omega \neq \omega_0$): usando o método dos coeficientes indeterminados, obtemos uma solução particular da equação na forma:

   $$x_p(t) = C\cos(\omega_0 t) + S\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\,,$$

   $$C = (\omega^2 - \omega_0^2)\,E_0\,\triangle^{-1}\,, \quad S = 2\,\nu\,\omega_0\,E_0\,\triangle^{-1}\,, \quad \triangle = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\nu^2\omega_0^2\,.$$

   Tal como fizemos anteriormente, a solução particular $x_p(t)$ pode ser escrita como

   $$x_p(t) = A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1) \tag{18}$$

   onde

   $$A_1 = \sqrt{C^2 + S^2} = \triangle^{-1/2} E_0\,, \;\; \cos\phi_1 = C/A_1\,, \;\; \mathrm{sen}\,\phi_1 = S/A_1\,.$$

   Consequentemente, a solução geral da equação diferencial é

   $$x(t) = x_h(t) + x_p(t)\,,$$

   onde x_p é a expressão dada por (18) e x_h é uma das expressões dadas por (14), (15) ou (16), dependendo dos valores de ν e ω.

2. **caso II** ($\nu = 0$ e $\omega \neq \omega_0$): neste caso obtemos a equação diferencial $\ddot{x} + \omega^2 x = E_0 \cos(\omega_0 t)$. É simples deduzir que

   $$x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right) \tag{19}$$

   é uma solução particular da equação diferencial. Assim, a solução geral da equação diferencial é obtida tendo em conta a solução geral obtida no caso do oscilador harmónico simples (equação homogénea correspondente) e a solução particular (19), isto é,

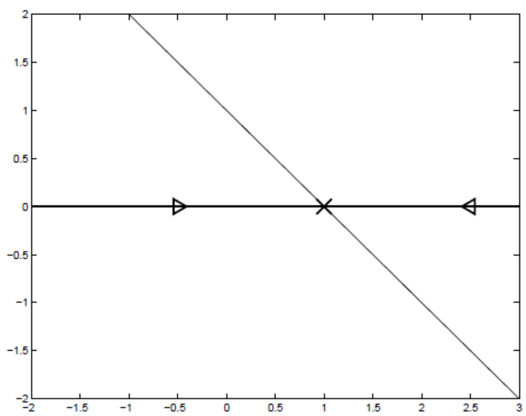
   $$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) + \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t))\,.$$

teoria qualitativa de edo's

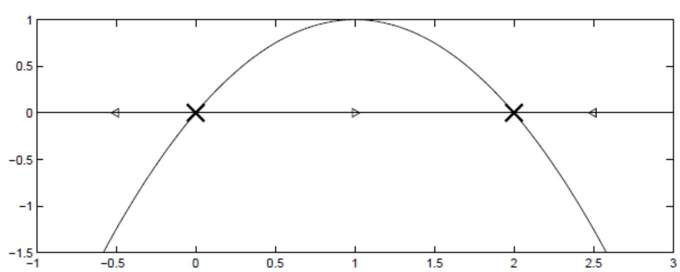
Consulte o ficheiro 'Folha10.nb'.

Exercício 1. As figuras mostram o retrato de fase e o gráfico da função f no lado direito da equação. Os pontos de equilíbrio e a respetiva estabilidade são:

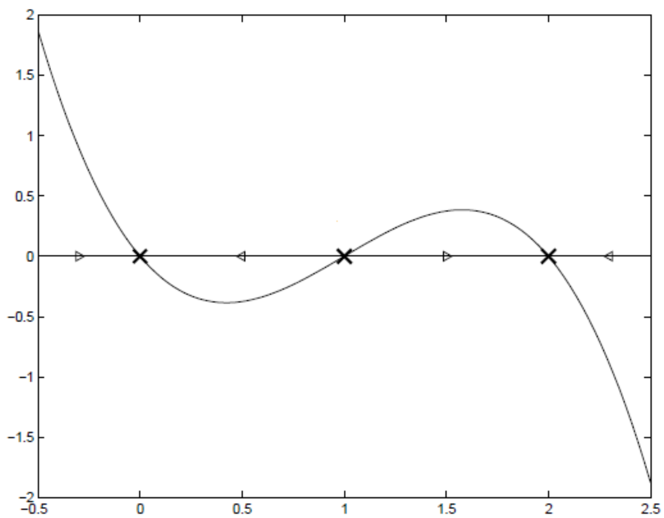
(a)
- $x = 1$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



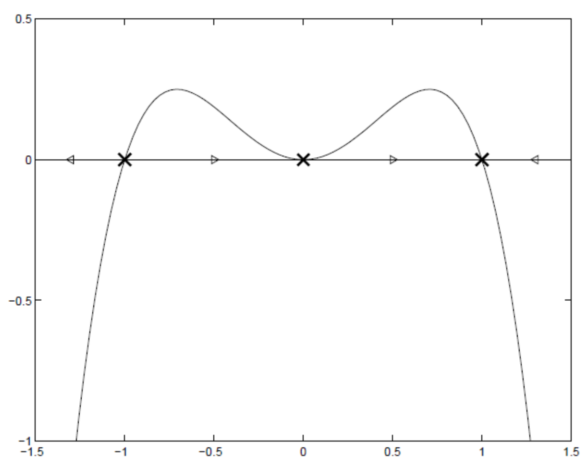
(b)
- $x = 0$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 2$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



(c)
- $x = 0$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.
- $x = 1$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 2$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



(d)
- $x = -1$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 0$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 1$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



Exercício 2.

(a) $P = \begin{pmatrix} 1/2+\sqrt{5}/2 & 1/2-\sqrt{5}/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 1/2+\sqrt{5}/2 & 0 \\ 0 & 1/2-\sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$

(b) A matrix A é uma forma normal de Jordan.

(c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(e) A matrix A é uma forma normal de Jordan.

(d) $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 3.

(a) $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) x_0 + \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) y_0 \\ y(t) = \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) x_0 + \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) y_0 \end{cases}$$

(b) $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t/2} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t/2) & \operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2) \\ -\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2) & \cos(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} e^{t/2} \left(3\, x_0 \cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3}(x_0 + 2y_0) \operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)\right) \\ y(t) = \frac{1}{3} e^{t/2} \left(3\, y_0 \cos(\sqrt{3}t/2) - \sqrt{3}(2x_0 + y_0) \operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)\right) \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} x(t) = e^{-t} x_0 \\ y(t) = e^{-t} y_0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) = e^{2t} x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$

(e) $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^{2t} - te^{2t})x_0 + te^{2t}y_0 \\ y(t) = -te^{2t}x_0 + (te^{2t} + e^{2t})y_0 \end{cases}$$

Exercício 4.

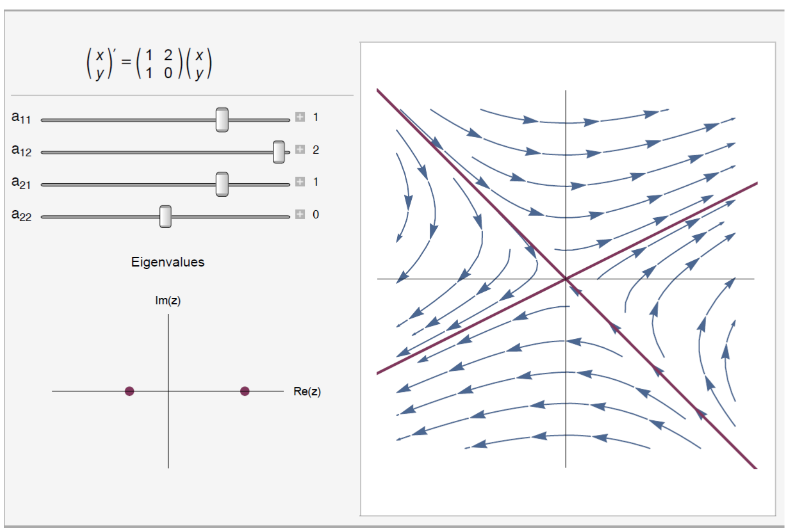
(a) 1. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3}\right) x_0 + \left(\frac{-2e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3}\right) y_0 \\ y(t) = \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}\right) x_0 + \left(\frac{2e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}\right) y_0 \end{cases}$$

2. A origem é uma sela.

3.



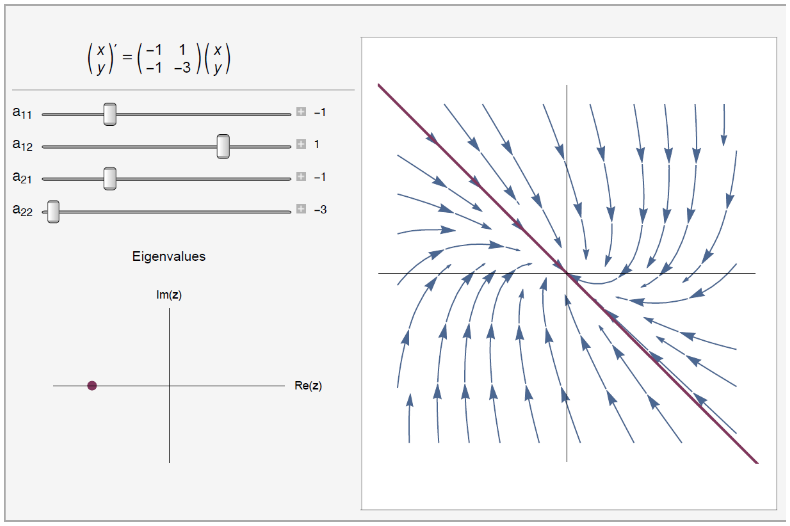
(b) 1. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^{-2t} + te^{-2t})x_0 + te^{-2t}y_0 \\ y(t) = -te^{-2t}x_0 + (e^{-2t} - te^{-2t})y_0 \end{cases}$$

2. A origem é um nó assimptoticamente estável.

3.



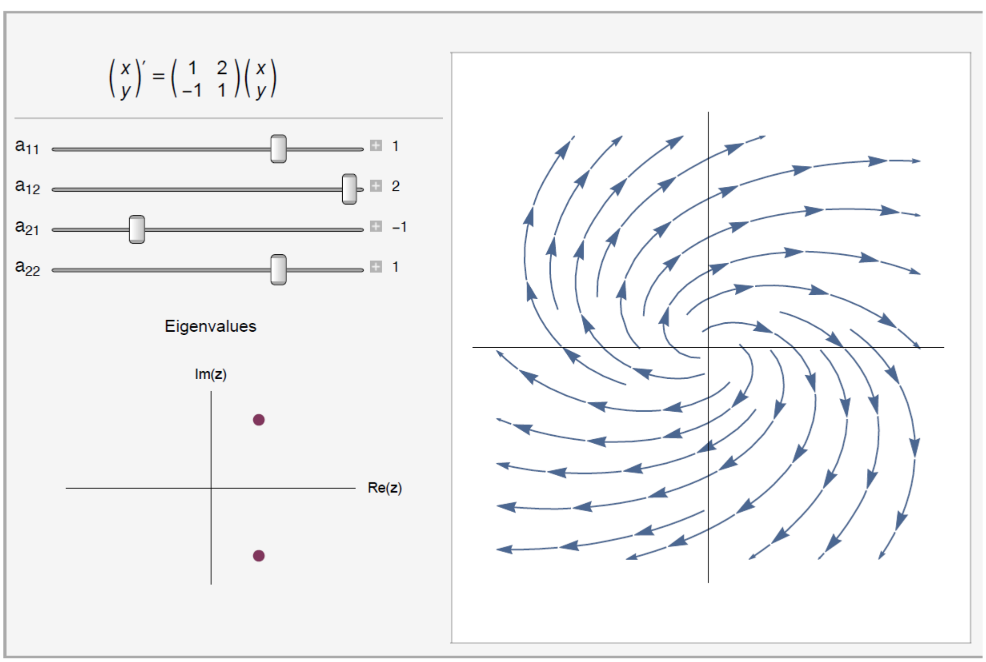
(c) 1. $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \text{sen}(\sqrt{2}t) \\ -\text{sen}(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^t \cos(\sqrt{2}t) x_0 + \sqrt{2} e^t \text{sen}(\sqrt{2}t) y_0 \\ y(t) = (e^t \cos(\sqrt{2}t) y_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \text{sen}(\sqrt{2}t) x_0 \end{cases}$$

2. A origem é um foco instável.

3.

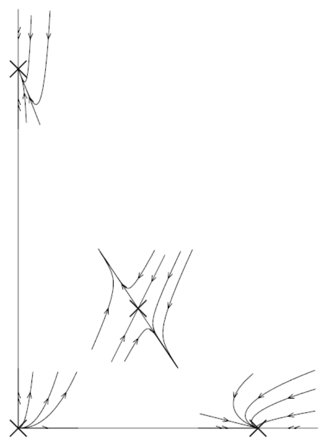


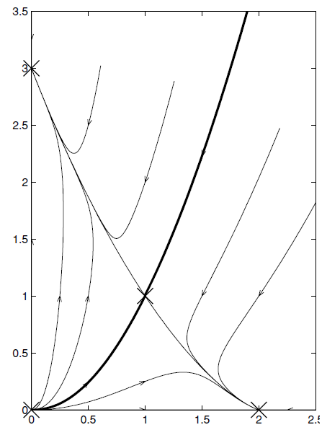
Exercício 5.

(a) Ver slides.

(b) 1. Os pontos de equilíbrio (e respectiva estabilidade) são:
   - $(0,0)$; fonte (instável)
   - $(0,3)$; poço (assimptoticamente estável)
   - $(2,0)$; poço (assimptoticamente estável)
   - $(1,1)$; ponto de sela

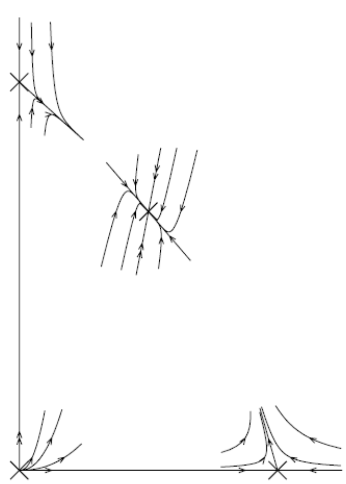
   2.

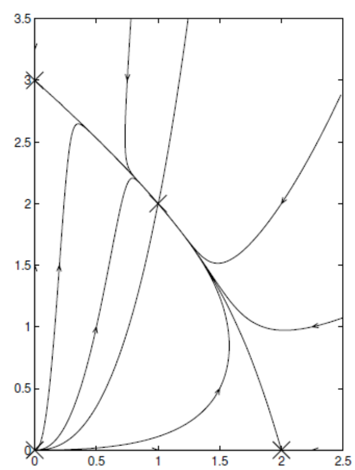




(c) 1. Os pontos de equilíbrio (e respectiva estabilidade) são:
   - $(0,0)$; fonte (instável)
   - $(0,3)$; ponto de sela
   - $(2,0)$; ponto de sela
   - $(1,2)$; poço (assimptoticamente estável)

   2.





séries de Fourier e edp's

Exercício 1.

(a) Equação linear de segunda ordem

(b) Equação linear de terceira ordem

(c) Equação não linear de segunda ordem

(d) Equação linear de segunda ordem

(e) Equação não linear de primeira ordem

Exercício 2.

(a) Equação elíptica

(b) Equação parabólica

(c) Equação hiperbólica

(d) Equação hiperbólica

(e)
- se $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^-$ ou se $x \in \mathbb{R}^-$ e $y \in \mathbb{R}^+$, a equação é hiperbólica
- se $x = y = 0$, a equação é parabólica
- se $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$ ou se $x \in \mathbb{R}^-$ e $y \in \mathbb{R}^-$, a equação é elíptica

Exercício 5. $u(x,t) = 3\,\text{sen}\,(2\pi x)\, e^{(1-4\pi^2)t} - 7\,\text{sen}\,(4\pi x)\, e^{(1-16\pi^2)t}$

Exercício 6.

(a) $u(y,t) = e^{-3(y+t)} + e^{2(y+t)}$

(b) $u(y,t) = e^{-4y-5t} + 2\,e^{-6y-7t} - 14\,e^{14y+13t}$

Exercício 14.

(a) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left((2k-1)x\right)}{2k-1}$

(b) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(n\pi x\right)}{n}$

(c) $\dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)}{(2k-1)^3}$

(d) $-\dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left((2k-1)x\right)}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}$

Exercício 15.

(a) $\pi-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$

(b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos((2k-1)\pi x)}{2k-1}$

(c) $-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-3)(2k+1)}$

(d) $\pi+\dfrac{32}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-3)(2k-1)^2(2k+1)}$

Exercício 16.

(a) $u(x,t)\sim e^{-3\pi^2 t}\operatorname{sen}\left(\pi x\right)+\dfrac{1}{2}e^{-3(4\pi)^2 t}\operatorname{sen}\left(4\pi x\right)-e^{-3(5\pi)^2 t}\operatorname{sen}\left(5\pi x\right)$

(b) $u(x,t)\sim\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}e^{-3((2k-1)\pi)^2 t}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)$

(c) $u(x,t)\sim\dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}e^{-3((2k-1)\pi)^2 t}\operatorname{sen}\left((2k-1)\pi x\right)$

Exercício 17. $u(x,t) \sim -\dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}e^{-5(2k-1)^2t}\,\mathrm{sen}\,((2k-1)x)$

Exercício 19.

(a) $u(x,t) \sim 1 + \dfrac{1}{2}e^{-8t}\cos(2x) + \dfrac{1}{3}e^{-18t}\cos(3x) + 5e^{-72t}\cos(6x)$

(b) $u(x,t) \sim \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}e^{-2(4k-2)^2t}\cos((4k-2)x)$

(c) $u(x,t) \sim \pi + \dfrac{32}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-3)(2k-1)^2(2k+1)}e^{-2(2k-1)^2t}\cos((2k-1)x)$

Exercício 21.

(a) $u(x,t) \sim \cos(4\pi t)\,\mathrm{sen}\,(2\pi x) + \dfrac{1}{5}\cos(6\pi t)\,\mathrm{sen}\,(3\pi x) + \cos(10\pi t)\,\mathrm{sen}\,(5\pi x)$

(b) $u(x,t) \sim \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{sen}\,(2\pi t)\,\mathrm{sen}\,(\pi x) + \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{sen}\,(4\pi t)\,\mathrm{sen}\,(2\pi x) + \dfrac{1}{30\pi}\mathrm{sen}\,(10\pi t)\,\mathrm{sen}\,(5\pi x)$

(c) $u(x,t) \sim \cos(6\pi t)\,\mathrm{sen}\,(3\pi x) + \cos(10\pi t)\,\mathrm{sen}\,(5\pi x) + \dfrac{1}{8\pi}\mathrm{sen}\,(4\pi t)\,\mathrm{sen}\,(2\pi x) + \dfrac{1}{18\pi}\mathrm{sen}\,(6\pi t)\,\mathrm{sen}\,(3\pi x) +$
$+\dfrac{2}{5\pi}\mathrm{sen}\,(10\pi t)\,\mathrm{sen}\,(5\pi x)$

(d) $u(x,t) \sim \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\cos(2(2k-1)\pi t)\,\mathrm{sen}\,((2k-1)\pi x) + \dfrac{1}{3\pi}\mathrm{sen}\,(6\pi t)\,\mathrm{sen}\,(3\pi x) +$
$+\dfrac{5}{8\pi}\mathrm{sen}\,(8\pi t)\,\mathrm{sen}\,(4\pi x)$

(e) $u(x,t) \sim \cos(2\pi t)\,\mathrm{sen}\,(\pi x) - 2\cos(4\pi t)\,\mathrm{sen}\,(2\pi x) + 3\cos(6\pi t)\,\mathrm{sen}\,(3\pi x) +$
$+\dfrac{4}{\pi^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}\mathrm{sen}\,(2(2k-1)\pi t)\,\mathrm{sen}\,((2k-1)\pi x)$

(f) $u(x,t) \sim \dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cos(2(2k-1)\pi t)\,\mathrm{sen}\,((2k-1)\pi x) +$
$+\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}\mathrm{sen}\,(2(2k-1)\pi t)\,\mathrm{sen}\,((2k-1)\pi x)$

sistemas dinâmicos discretos

Consulte o ficheiro 'Folha13.wxm'.

Exercício 1. As aplicações lineares em dimensão 1 são da forma

$$f(x) = \lambda x,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$f^n(x_0) = \lambda^n x_0.$$

Para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, o ponto 0 é um ponto fixo. Além disso, se $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ então o ponto 0 é o único ponto fixo. Se $\lambda = 1$ então todos os pontos da reta real são fixos.

1. Se $|\lambda| < 1$ temos que, para todo o $x_0 \in \mathbb{R}$,

   $$\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \lambda^n x_0 = 0.$$

   Consequentemente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ converge para a origem. Então, $W^s(0) = \mathbb{R}$.

2. Se $\lambda = 1$ a transformação é a identidade e, portanto, todos os pontos são fixos. Consequentemente, $W^s(0) = \{0\}$.

3. Se $\lambda = -1$ temos que: o ponto 0 é um ponto fixo e todos os pontos da reta real diferentes de zero são pontos periódicos de período 2. Consequentemente, $W^s(0) = \{0\}$.

4. Se $|\lambda| > 1$ temos que, para todo o $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

   $$\lim_{n\to+\infty} |f^n(x_0)| = +\infty.$$

   Consequentemente, $W^s(0) = \{0\}$.

Exercício 2.

(a) $W^s(0) =]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

(b) $\omega(x) = \{1\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \end{aligned}$$

(c) $\omega(x) = \varnothing$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

(d) $\omega(2) = \{-2, 2\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

(e) O conjunto $[-1, 1]$ não contém pontos periódicos.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

(f) $\sqrt{3}$ é um ponto periódico de período 2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

(g) f tem um único ponto fixo x e $W^s(x) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x/2 \end{aligned}$$

(h) Todo o ponto da reta é periódico.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(i) Todo o ponto da reta é recorrente.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

(j) Todo o ponto da reta é não-errante.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

(k) Nenhum ponto da reta é periódico.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$$

(l) Nenhum ponto da reta é recorrente.

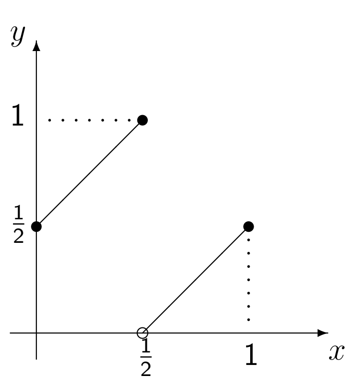
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+3 \end{array}$$

(m) O conjunto dos pontos recorrentes é $[0,2]$.

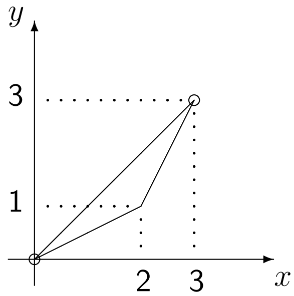
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x<0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-2 & \text{se} \quad x>2 \end{cases} \end{array}$$

Exercício 3. Dê exemplo de, ou justifique por que não existe:

1. Uma transformação $f:[0,1]\to[0,1]$ que não tenha pontos fixos.



2. Uma transformação contínua $f :]0,3[\to]0,3[$ que não tenha pontos fixos.



3. Um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não tenha pontos fixos.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

Exercício 4.

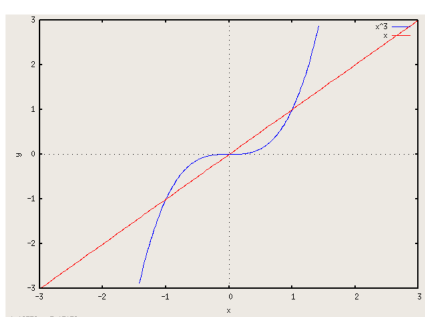
$$\begin{array}{rcl} f:[0,1[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{array}$$

Note que o conjunto $[0,1[$ não é fechado!

Exercício 5. Utilize o software Maxima.

Exercício 6. Utilize o software Maxima para simular a evolução da dinâmica de cada um dos sistemas.

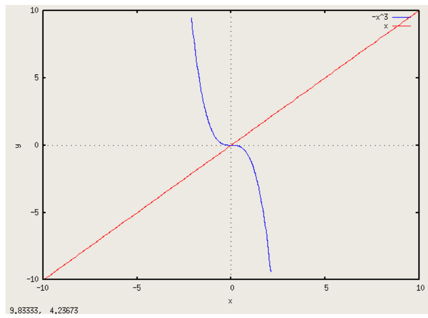
(a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$



Para cada $n \in \mathbb{N}$, a iterada de ordem n é a transformação $\begin{array}{rccc} f^n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & x^{3^n} \end{array}$

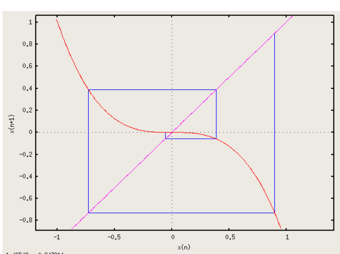
- Os pontos fixos são os pontos $-1, 0$ e 1.
- Se $x_0 > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_0)^{3^n} = +\infty$.
- Se $x_0 < -1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_0)^{3^n} = -\infty$.
- Se $-1 < x_0 < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_0)^{3^n} = 0$.

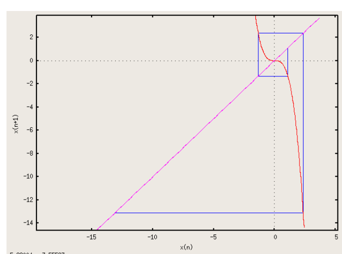
(b) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -x^3 \end{array}$

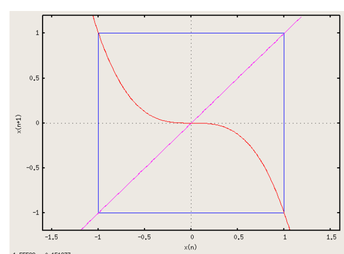


Para cada $n \in \mathbb{N}$, a iterada de ordem n é a transformação

$$\begin{array}{rccl} f^n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^{3^n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -x^{3^n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$$







$x_0 = 0.9$ $\qquad$ $x_0 = 1.1$ $\qquad$ $x_0 = 1$

- O ponto 0 é o único ponto fixo.
- $\{-1, 1\}$ é uma órbita periódica de período 2.
- Se $|x_0| < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.
- Se $|x_0| > 1$ a trajetória de x_0 é divergente. No entanto, $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x_0)| = +\infty$.

(c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{1/3} \end{array}$

Comece por provar o seguinte resultado (que é uma consequência do Teorema de Lagrange): Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo da reta real, tal que

$$\exists \lambda < 1\colon\ \forall x \in I \quad |f'(x)| \leq \lambda\,.$$

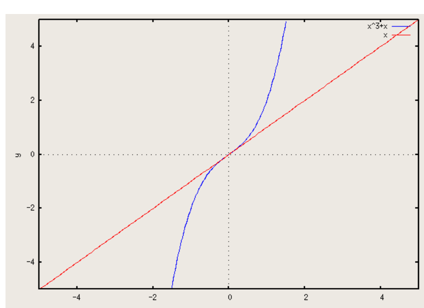
Então

$$|f(x) - f(y) \leq \lambda |x - y|,$$

para todos $x, y \in I$ (i.e., f é uma contração).

- Os pontos fixos são os pontos $-1, 0$ e 1.
- A trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}^+$ é convergente para o ponto 1.
  - (i) Seja $x_0 \in]0,1[$.
    A restrição de f ao intervalo $[0,1]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Consequentente, a trajetória $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é convergente (para um ponto fixo). Como a trajetória $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é crescente, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1$.
  - (ii) Seja $x_0 \in]1, +\infty[$.
    Consideremos a restrição de f ao intervalo $[1, +\infty[$. Temos que $f([1,+\infty[) \subseteq [1, +\infty[$. Além disso, $|f'(x)| \leq 1/3$ para todo o $x \in [1, +\infty[$. Consequentemente, a restrição considerada é uma contração do conjunto fechado $[1, +\infty[$ e o Princípio das Contrações garante que a trajetória $\left(f^n(x_0)\right)_n$ converge para o único ponto fixo 1 em $[1, +\infty[$.
- A trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}^-$ é convergente para o ponto -1.
  - (iii) Seja $x_0 \in]-\infty, 0[$.
    É suficiente notar que, porque f é ímpar, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\lim\limits_{n\to\infty} f^n(-x_0) = -1$.

(d) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 + x \end{array}$



- O ponto 0 é o único ponto fixo.

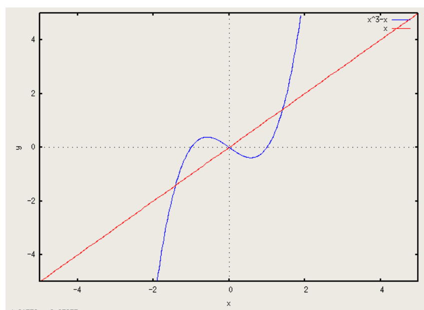
- Se $x_0 > 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

  Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]0, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que 0), o que é absurdo uma vez que 0 é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

- Se $x_0 < 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

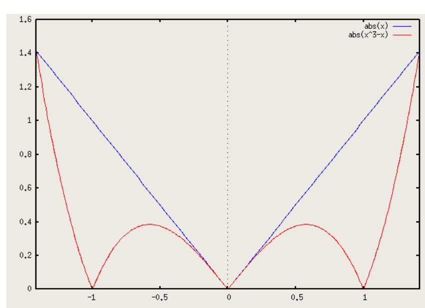
  É suficiente notar que, porque f é ímpar, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\lim\limits_{n\to\infty} f^n(-x_0) = -\infty$.

(e) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - x \end{array}$



- Os pontos fixos são os pontos $-\sqrt{2}, 0$ e $\sqrt{2}$.

- Se $-\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$. Observemos que $|f(x_0)| \le |x_0|$ para todo o $x_0 \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. A figura seguinte permite verificar geometricamente a desigualdade anterior.



Consequentemente, $(|f^n(x_0)|)_n$ é decrescente. Porque $(|f^n(x_0)|)_n$ é decrescente e minorada, é convergente para (um ponto fixo de $|f|$). Como a trajetória $(|f^n(x_0)|)_n$ é decrescente, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x_0)| = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

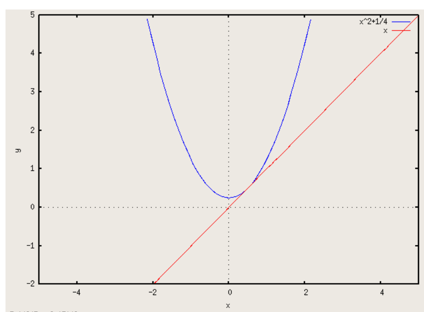
- Se $x_0 > \sqrt{2}$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

  Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que $\sqrt{2}$), o que é absurdo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

- Se $x_0 < -\sqrt{2}$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

  É suficiente notar que, porque f é ímpar, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\lim\limits_{n\to\infty} f^n(-x_0) = -\infty$.

(f) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1/4 \end{array}$



- O ponto $1/2$ é o único ponto fixo.

- Se $x_0 \in [-1/2, 1/2]$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1/2$.

  (i) Seja $x_0 \in [0, 1/2]$.

  A restrição de f ao intervalo $[0, 1/2]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([0, 1/2]) \subseteq [0, 1/2]$. Consequentente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é convergente (para um ponto fixo). Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1/2$.

  (ii) Seja $x_0 \in [-1/2, 0[$.

  Notemos que, se $x_0 \in [-1/2, 0[$ então $f(x_0) \in]0, 1/2]$. Consequentemente, porque a trajetória de qualquer ponto em $]0, 1/2]$ converge para $1/2$, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1/2$.

- Se $x_0 \in \mathbb{R}\backslash[-1/2, 1/2]$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

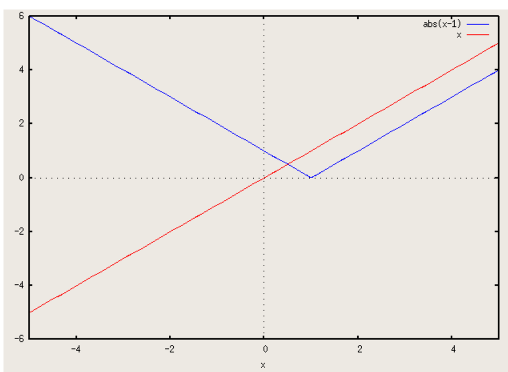
  (i) Seja $x_0 \in]1/2, +\infty[$.

  Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]1/2, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que $1/2$), o que é absurdo uma vez que $1/2$ é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

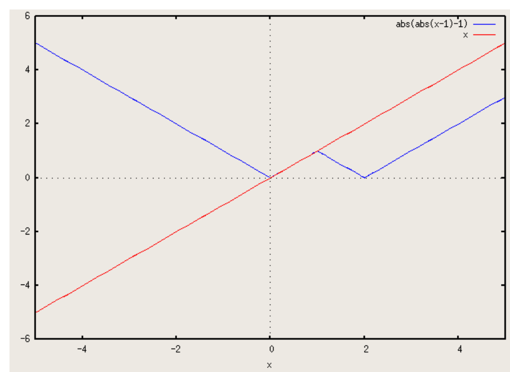
  (ii) Seja $x_0 \in]-\infty, -1/2[$.

  Observemos que, se $x_0 \in]-\infty, -1/2[$ então $f(x_0) \in]1/2, +\infty[$. Consequentemente, porque o limite da trajetória de qualquer ponto em $]1/2, +\infty[$ é $+\infty$, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

(g) $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x-1| \end{array}$$



f



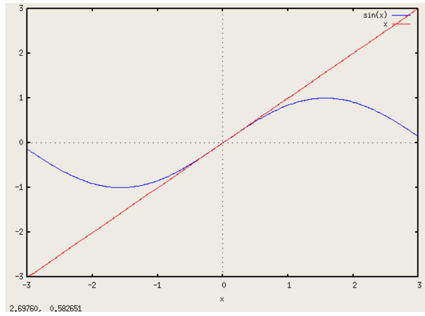
f^2

- O único ponto fixo é o ponto $1/2$. Determine $W^s(1/2)$.

- Se $x_0 \in [0, 1]\backslash\{1/2\}$ então x_0 é um ponto periódico de período 2. Com efeito, temos que $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(-x_0 + 1) = -(-x_0 + 1) + 1 = x_0$.

- Se $x_0 \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ então existe algum tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x_0) \in [0, 1]$ e, portanto, x_0 é um ponto pré-periódico.

(h) $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \text{sen } x \end{array}$

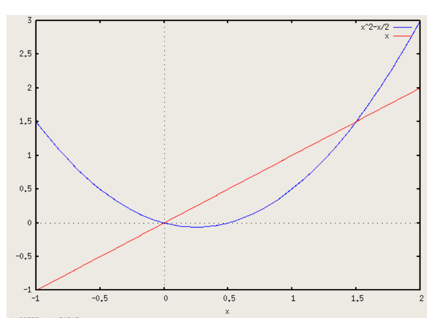


- O único ponto fixo é o ponto 0.
- A trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ converge para 0.
  (i) Seja $x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.
  A restrição de f ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([-\pi/2, \pi/2]) \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$. Consequentente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é convergente (para um ponto fixo). Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.
  (ii) Seja $x_0 \in \mathbb{R} \backslash [-\pi/2, \pi/2]$.
  Notemos que, se $x_0 \in \mathbb{R} \backslash [-\pi/2, \pi/2]$ então $f(x_0) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Consequentemente, porque a trajetória de qualquer ponto em $[-\pi/2, \pi/2]$ converge para 0, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

Exercício 7. A resolução deste exercício é análoga à do exercício 6.(c).

Exercício 8.

(a) $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - x/2 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x/2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3/2.$$

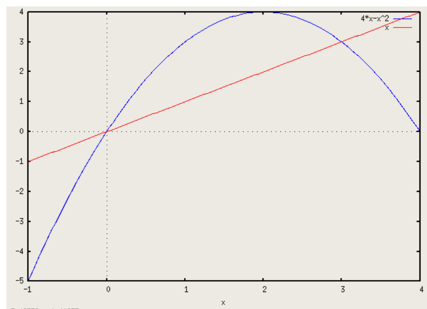
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccl} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 2x - 1/2 \end{array}$ Em particular,

$|f'(0)| = 1/2 < 1$ e, portanto, 0 é um ponto fixo atrativo

e

$|f'(3/2)| = 5/2 > 1$ e, portanto, $3/2$ é um ponto fixo repulsivo.

(b) $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4x - x^2 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow 4x - x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3.$$

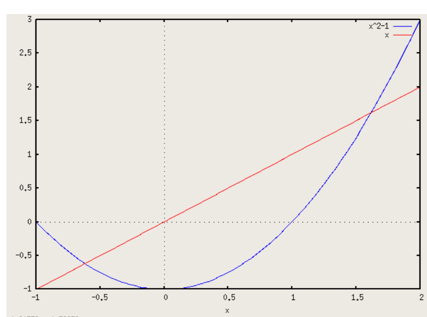
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccl} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 4 - 2x \end{array}$ Em particular,

$|f'(0)| = 4 > 1$ e, portanto, 0 é um ponto fixo repulsivo

e

$|f'(3)| = 2 > 1$ e, portanto, 3 é um ponto fixo repulsivo.

(c) $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

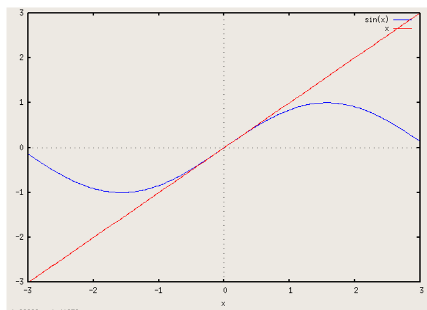
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$ Em particular,

$\left| f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right| = 1 + \sqrt{5} > 1$ e, portanto, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto fixo repulsivo

e

$\left| f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right| = \sqrt{5} - 1 > 1$ e, portanto, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

(d) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{sen } x \end{array}$



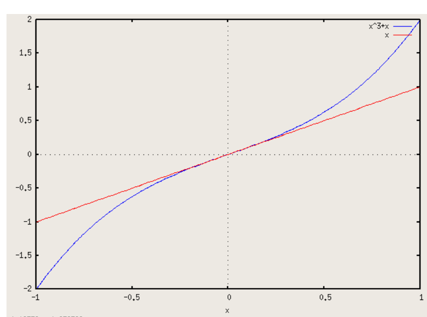
Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow \text{sen } x = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

No exercício 6.h) mostrámos que a trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ converge para 0. Em particular, podemos concluir que o ponto fixo 0 é atrativo.

(e) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + x^3 \end{array}$



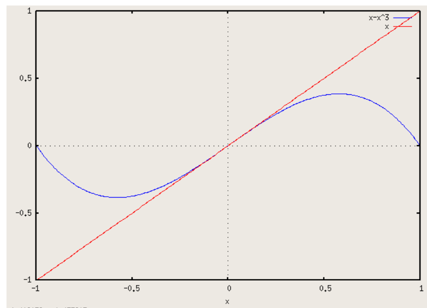
Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccl} f': & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 3x^2 + 1 \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

No exercício 6.d) mostrámos que, se $x_0 > 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$ e que se $x_0 < 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$. Em particular, podemos concluir que o ponto fixo 0 é repulsivo.

(f) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - x^3 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^3 = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccl} f': & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 1 - 3x^2 \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

A restrição de f ao intervalo $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]) \subseteq [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$. Consequentente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ é convergente para o ponto fixo 0. Em particular, podemos concluir que o ponto fixo 0 é atrativo.

(g) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + x^2 \end{array}$

Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + x^2 = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & 1 + 2x \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

O ponto fixo 0 não é nem atrativo nem repulsivo. Com efeito, se $x_0 \in [-1/2, 0]$ então a trajetória de x_0 converge para 0 e se $x_0 \in]0, +\infty[$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

A restrição de f ao intervalo $[-1/2, 0]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([-1/2, 0]) \subseteq [-1/2, 0]$. Consequentente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in [-1/2, 0]$ é convergente para o ponto fixo 0.

Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]0, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que 0), o que é absurdo uma vez que 0 é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não é majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$ para todo o $x_0 \in]0, +\infty[$.

(h) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$

Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & 1 - 2x \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

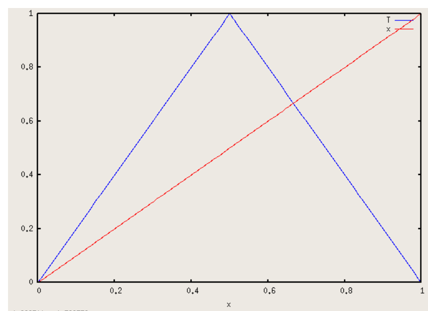
O ponto fixo 0 não é nem atrativo nem repulsivo. Com efeito, se $x_0 \in [0, 1/2]$ então a trajetória de x_0 converge para 0 e se $x_0 \in]-\infty, 0[$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

A restrição de f ao intervalo $[0, 1/2]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([0, 1/2]) \subseteq [0, 1/2]$. Consequentente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in [0, 1/2]$ é convergente para o ponto fixo 0.

Temos que $f(x_0) < x_0$ para todo o $x_0 \in]-\infty, 0[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente decrescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é minorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é minorada e estritamente decrescente então é convergente para um ponto fixo menor ou igual do que x_0 (e, portanto, menor do que 0), o que é absurdo uma vez que 0 é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era minorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente decrescente e não é minorada e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$ para todo o $x_0 \in]-\infty, 0[$.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1/2 \\ 2-2x & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2/3.$$

A derivada de f é a transformação $f' : \mathbb{R}\backslash\{1/2\} \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1/2 \\ -2 & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$$

Em particular,

$|f'(0)| = 2 > 1$ e, portanto, 0 é um ponto fixo repulsivo.

e

$|f'(2/3)| = 2 > 1$ e, portanto, $2/3$ é um ponto fixo repulsivo.

Exercício 9.

(a) $\sqrt{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x-\sqrt{2} \end{aligned}$$

(b) $\sqrt{3}$ é um ponto fixo atrativo.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{3} \end{aligned}$$

(c) π e $-\pi$ são pontos fixos repulsivos.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^3}{\pi^2} \end{aligned}$$

bifurcações

Exercício 1. Considere a família de transformações $\begin{array}{rccl} f_c: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+c \end{array}$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_c são as soluções da equação $f_c(x) = x$. Temos que:

$$f_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 + c = x \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Sejam

$$p_+(c) = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \quad \text{e} \quad p_-(c) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}.$$

Atendendo ao sinal de $1 - 4c$, podemos concluir que:

- f_c não tem pontos fixos se $c > \frac{1}{4}$.
- f_c tem um único ponto fixo $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ quando $c = \frac{1}{4}$.
- f_c tem dois pontos fixos distintos $p_+(c) > p_-(c)$ quando $c < \frac{1}{4}$.

(b) Ocorre uma bifurcação sela-nó para $c_0 = \frac{1}{4}$.

Temos que $f_c'(x) = 2x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f_{\frac{1}{4}}'(\frac{1}{2}) = 1$ e $f_{\frac{1}{4}}''(\frac{1}{2}) = 2 \neq 0$.

Para $c > c_0$ não existem pontos fixos, para $c = c_0$ existe exatamente um ponto fixo e para $c < c_0$ existem exatamente dois pontos fixos.

(c) Quando $c > \frac{1}{4}$, temos que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$, para todo o $x_0 \in \mathbb{R}$.

Comecemos por recordar que não existem pontos fixos. Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a trajectória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo, o que é absurdo uma vez que não existem pontos fixos. O absurdo resultou de termos suposto que a trajectória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

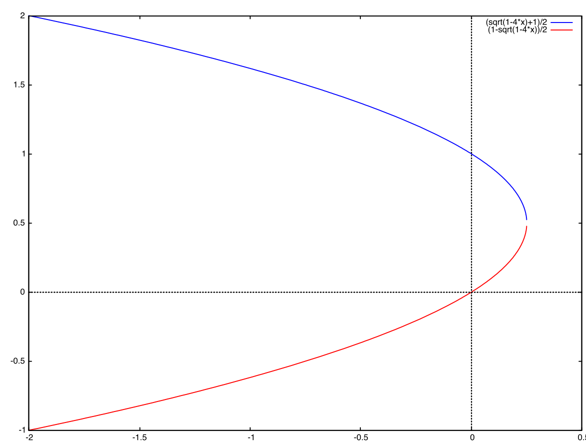
(d) Ver a resolução do exercício 6.f) da folha de exercícios 13. Tem-se que $W^s(\frac{1}{2}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(e) Ocorre uma bifurcação de duplicação do período para $c_1 = -\frac{3}{4}$.

Temos que $f_c'(x) = 2x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -1$ (note que $f_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$). Além disso, tem-se que:

- para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, f_c tem um ponto fixo atrativo em $p_-(c)$ e não tem ciclos de período 2;
- para $c = -\frac{3}{4}$, $f_{-\frac{3}{4}}$ tem um ponto fixo em $p_{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$ tal que $|f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2})| = 1$ ($f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -1$) e não tem ciclos de período 2;
- para $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, f_c tem pontos fixos repulsivos em $p_-(c)$ e $p_+(c)$ e um ciclo atrativo de período 2 em $q_\pm(c) = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4c-3})$ (que pode ser obtido resolvendo a equação $f_c^2(x) = x$).

(f) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 2. Considere a família de transformações $f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\, x(1-x) \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_λ são as soluções da equação $f_\lambda(x) = x$. Temos que:

$$f_\lambda(x) = x \;\Leftrightarrow\; \lambda\, x(1-x) = x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = p_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Consequentemente,

- f_λ tem um único ponto fixo, o ponto 0, se $\lambda = 1$.
- f_λ tem dois pontos fixos: $x = 0$ e $x = p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, se $\lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

(b) Temos que

$$f'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $x = 0$. Temos que

$$|f'_\lambda(0)| = |\lambda|.$$

Consequentemente,

- se $\lambda \in]0,1[$, então $|f'_\lambda(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;
- se $\lambda > 1$, então $|f'_\lambda(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo;
- se $\lambda = 1$, o ponto fixo 0 não é atrativo nem repulsivo (ver o exercício 8.h) da folha de exercícios 13).

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Temos que

$$|f'_\lambda(p_\lambda)| = |2 - \lambda|.$$

Consequentemente,

- se $\lambda \in]1,3[$, então $|f'_\lambda(p_\lambda)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_λ é atrativo;
- se $\lambda \in]0,1[\cup]3,+\infty[$, então $|f'_\lambda(p_\lambda)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_λ é repulsivo;
- se $\lambda = 3$, então $p_3 = \frac{2}{3}$. Estude a dinâmica da transformação $f_3(x) = 3x(1-x)$ e conclua que o ponto fixo $\frac{2}{3}$ é atrativo.

(c) Queremos procurar os pontos fixos de f_λ^2, isto é, resolver a equação

$$f_\lambda^2(x) = \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) = x$$

a qual pode ser escrita como

$$\lambda^3 x^4 - 2\lambda^3 x^3 + \lambda^2(1+\lambda)x^2 + (1-\lambda^2)x = 0.$$

Como qualquer ponto fixo de f_λ é também um ponto fixo de f_λ^2, sabemos que $x(\lambda x + 1 - \lambda)$ é um fator do polinómio de grau 4 anterior. Consequentemente, podemos fatorizar a equação anterior e obter

$$x(\lambda x + 1 - \lambda)(\lambda^2 x^2 - \lambda(1+\lambda)x + 1 + \lambda) = 0.$$

Então, para encontrarmos uma órbita periódica de período 2 precisamos de resolver a equação

$$\lambda^2 x^2 - \lambda(1+\lambda)x + 1 + \lambda = 0.$$

As raízes desta equação são:

$$s_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{3}{\lambda}\right)}\right).$$

Consequentemente, quando $\lambda > 3$, a transformação f_λ tem um ciclo de período 2.

(d) Consideremos primeiro a bifurcação que ocorre quando $\lambda = 1$. Temos que:

(i) ao atravessar o parâmetro $\lambda = 1$, a transformação f_λ muda o número de pontos fixos:

- quando $\lambda = 1$, a transformação f_λ tem um único ponto fixo, o ponto 0.
- quando $\lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, a transformação f_λ tem dois pontos fixos: $x = 0$ e $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

(ii) ao atravessar o parâmetro $\lambda = 1$, a natureza dos pontos fixos da transformação f_λ é alterada. Relativamente ao ponto fixo 0 tem-se que:

- quando $\lambda > 1$, o ponto fixo 0 é repulsivo.
- quando $\lambda < 1$, o ponto fixo 0 é atrativo.

A justificação encontra-se na alínea (b).

Relativamente ao ponto fixo p_λ tem-se que:

- quando $\lambda \in]1, 3[$, o ponto fixo p_λ é atrativo.
- quando $\lambda \in]0, 1[\cup]3, +\infty[$, o ponto fixo p_λ é repulsivo.

A justificação encontra-se na alínea (b).

Vamos agora considerar a bifurcação que ocorre quando $\lambda = 3$. Comecemos por observar que a transformação $f_3 = 3x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$, tem dois pontos fixos: o ponto fixo 0 e o ponto fixo $p_3 = \frac{2}{3}$. Além disso,

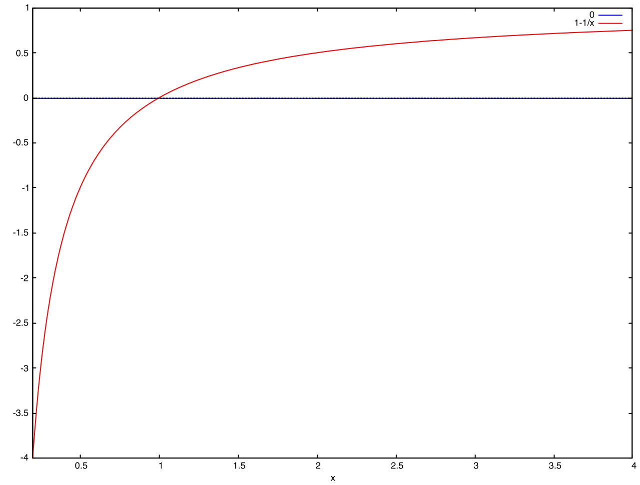
$$f_3'\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_3''\left(\frac{2}{3}\right) = -6 \neq 0.$$

Quando $\lambda = 3$, ocorre uma bifurcação de duplicação de período:

(i) a natureza do ponto fixo $\frac{2}{3}$ é alterada: quando $\lambda \in]1, 3[$, o ponto fixo p_λ é atrativo e quando $\lambda \in]0, 1[\cup]3, +\infty[$, o ponto fixo p_λ é repulsivo.

(ii) uma órbita de período 2 "nasce" quando λ se torna maior do que 3. Mostre que esta órbita é atrativa quando $\lambda \in]3, 1+\sqrt{6}[$.

(e) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 3. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 + x - 2ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 2\,a\,x = x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 2a.$$

Consequentemente,

- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = 0$, se $a = 0$.
- f_a tem dois pontos fixos: $p_1 = 0$ e $p_2 = 2\,a$, se $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = 2x + 1 - 2\,a, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $x = 0$. Temos que

$$|f_a'(0)| = |1 - 2\,a|\,.$$

Consequentemente,

- se $a \in]0, 1[$, então $|f_a'(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;
- se $a \in]-\infty, 0[\,\cup\,]1, +\infty[$, então $|f_a'(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo.

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = 2\,a$. Temos que

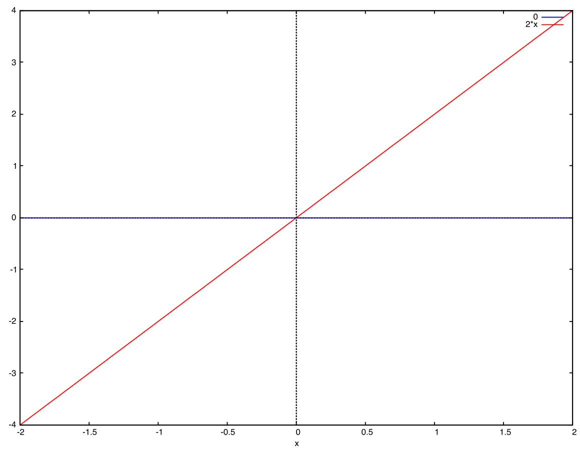
$$|f_a'(p_2)| = |2\,a + 1|\,.$$

Consequentemente,

- se $a \in]-1, 0[$, então $|f_a'(p_2)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é atrativo;

- se $a \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, então $|f_a'(p_2)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é repulsivo.

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 4. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^3 - ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \Leftrightarrow x^3 - a\,x = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{1+a} \vee x = \sqrt{1+a}.$$

Consequentemente,

- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = 0$, se $a \leq -1$.
- f_a tem três pontos fixos: $p_1 = 0$, $p_2 = -\sqrt{1+a}$ e $p_3 = \sqrt{1+a}$, se $a > -1$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = 3x^2 - a, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $p_1 = 0$. Temos que

$$|f_a'(0)| = |-a|\,.$$

Consequentemente,

- se $a \in]-1, 1[$, então $|f_a'(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;

- se $a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, então $|f_a'(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo.

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = -\sqrt{1+a}$. Só existe para $a > -1$. Temos que

$$|f_a'(p_2)| = 3 + 2\,a > 1,$$

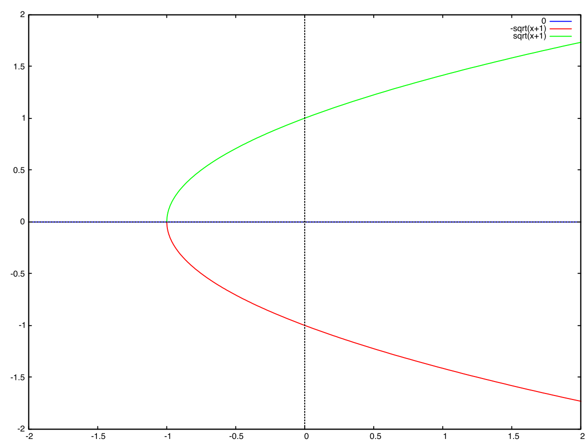
para todo o $a > -1$. Consequentemente, p_2 é sempre um ponto fixo repulsivo.

(iii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_3 = \sqrt{1+a}$. Só existe para $a > -1$. Temos que

$$|f_a'(p_3)| = 3 + 2\,a > 1,$$

para todo o $a > -1$. Consequentemente, p_3 é sempre um ponto fixo repulsivo.

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 5. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = ax + x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \;\Leftrightarrow\; ax + x^2 = x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = 1 - a.$$

Consequentemente,

- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = 0$, se $a = 1$.
- f_a tem dois pontos fixos: $p_1 = 0$ e $p_2 = 1 - a$, se $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = a + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $x = 0$. Temos que

$$|f_a'(0)| = |a|.$$

Consequentemente,

- se $a \in]-1, 1[$, então $|f_a'(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;
- se $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, então $|f_a'(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo.

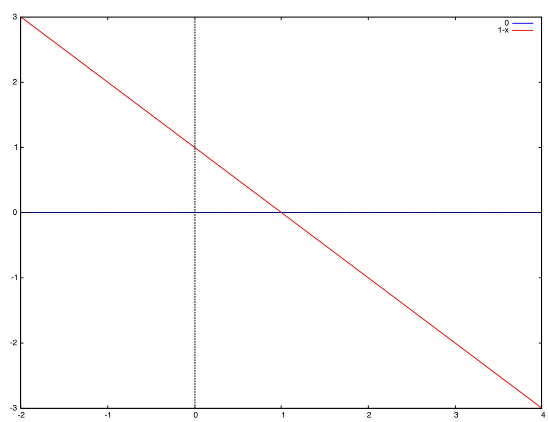
(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = 1 - a$. Temos que

$$|f_a'(p_2)| = |2 - a|.$$

Consequentemente,

- se $a \in]1, 3[$, então $|f_a'(p_2)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é atrativo;
- se $a \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, então $|f_a'(p_2)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é repulsivo.

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 6. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = a + x - x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \Leftrightarrow a + x - x^2 = x \Leftrightarrow x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}.$$

Consequentemente,

- f_a não tem pontos fixos se $a < 0$.
- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = p_2 = 0$, se $a = 0$.
- f_a tem dois pontos fixos: $p_1 = -\sqrt{a}$ e $p_2 = \sqrt{a}$, se $a > 0$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = 1 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $p_1 = -\sqrt{a}$. Temos que

$$|f_a'(p_1)| = 1 + 2\sqrt{a} > 1,$$

para todo o $a > 0$. Consequentemente, o ponto fixo p_1 é sempre repulsivo.

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = \sqrt{a}$. Temos que

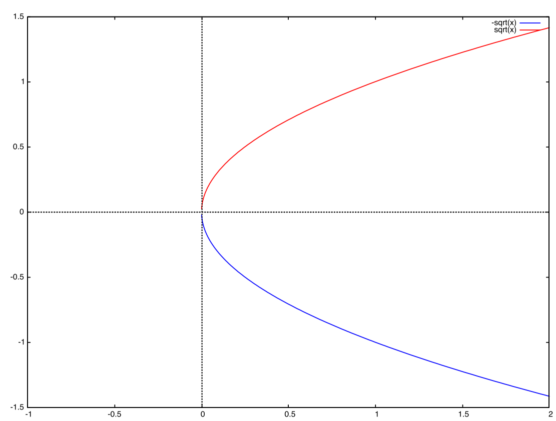
$$|f_a'(p_2)| = \left|1 - 2\sqrt{a}\right|.$$

Consequentemente,

- se $a \in]0, 1[$, então $|f_a'(p_2)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é atrativo;
- se $a \in]1, +\infty[$, então $|f_a'(p_2)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é repulsivo.

(Usando o exercício 8.h da folha de exercícios 13) podemos concluir que para $a = 0$, o ponto fixo 0 não é atrativo nem repulsivo).

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Referências

[1] Martin Biddle, *King Arthur's Round Table: An Archaeological Investigation*, Boydell Press, 2013.

[2] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[3] Robert Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, Perseus Publishing Co., 1989.

[4] Robert Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems*, Westview Press, 1992.

[5] Vladimir A. Dobrushkin, *Applied Differential Equations with Boundary Value Problems*, Taylor & Francis, 2018.

[6] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.

[7] Boris Hasselblatt and Anatole Katok, *A first course in dynamics, with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.

[8] Boris Hasselblatt and Anatole Katok, *A moderna teoria de sistemas dinâmicos*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.

[9] James C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press, 2004.

[10] Shepley L. Ross, *Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1984.

[11] Ricardo Severino e Maria Joana Torres, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, notas de apoio à unidade curricular "Introdução aos Sistemas Dinâmicos" da Licenciatura em Engenharia Informática, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2011.

[12] Maria Joana Soares, notas e exercícios de apoio à unidade curricular "Complementos de Análise Matemática" da Licenciatura em Engenharia Informática, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 1997-98.

[13] Maria Joana Torres, *Sistemas Dinâmicos*, notas de apoio à unidade curricular "Análise e Sistemas Dinâmicos: Aplicações e História" do Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2008.