

Tópicos de Matemática Discreta

folha 1

1. Noções elementares de lógica

1.1. Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

- (a) A Terra é redonda.
- (b) Hoje está sol.
- (c) $2 + x = 3$ e 2 é par.
- (d) $(25 \times 2) + 7$
- (e) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.
- (f) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?
- (g) $4 < 3$
- (h) Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$.
- (i) A U.M. é a melhor academia do país.

1.2. Representando as frases *Eu gosto de leite*, *Eu não gosto de cereais* e *Eu sei fazer crepes* por p_0 , p_1 e p_2 , respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| (a) $p_0 \wedge p_1$ | (c) $\neg p_2$ | (e) $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | (g) $(p_2 \wedge p_0) \vee p_1$ |
| (b) $p_1 \vee p_2$ | (d) $\neg(p_0 \vee p_1)$ | (f) $p_2 \rightarrow p_0$ | (h) $p_2 \wedge (p_0 \vee p_1)$ |

1.3. Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por 8* representadas, respetivamente, por p_0 , p_1 e p_2 .

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

- (i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.
- (ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.
- (iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| (i) $p_0 \vee (\neg p_2)$ | (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ | (iii) $(\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee p_0)$ |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|

1.4. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto \mathcal{F}^{CP} :

- | | |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$ | (d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp)$ |
| (b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$ | (e) (\perp) |
| (c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($ | (f) $((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$ |

Tópicos de Matemática Discreta

folha 2

1.5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

- (a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$
- (b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.
- (c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.
- (d) $\sqrt{530} < 25 \rightarrow 530 < 25^2$
- (e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

1.6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

- | | |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $p_0 \vee (\neg p_0)$ | (g) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$ |
| (b) $\neg(p_0 \vee p_1)$ | (h) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$ |
| (c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$ | (i) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ |
| (d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$ | (j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \rightarrow p_2)$ |
| (e) $\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$ | (k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$ |
| (f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$ | (l) $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$ |

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

- | | | |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (a) $p_0 \vee p_2$ | (b) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$ | (c) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ |
| (d) $\neg p_3 \vee \neg p_2$ | (e) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$ | (f) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$ |
| (g) $p_2 \rightarrow p_1$ | (h) $p_0 \leftrightarrow p_2$ | (i) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$ |
| (j) $p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$ | (k) $((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$ | (l) $(p_3 \rightarrow p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$ |

1.8. Admitindo que p_0 , p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

- (a) $p_0 \wedge p_1$
- (b) $p_0 \vee p_1$
- (c) $p_0 \rightarrow p_1$
- (d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 3

1.9. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

- (a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.
- (b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.
- (c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.
- (d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.
- (e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.
- (f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.
- (g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.
- (h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

1.10. Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
 - Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
 - Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.
- (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.
- (b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

1.11. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| (a) $p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$ | (d) $(p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$ |
| (b) $\neg(p_0 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$ | (e) $(p_0 \vee \neg p_0) \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$ |
| (c) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$ | (f) $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ |

1.12. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\neg(p_0 \wedge p_1); \neg p_0 \wedge \neg p_1$ | (b) $p_0 \rightarrow p_1; p_1 \rightarrow p_0$ |
| (c) $\neg(p_0 \rightarrow p_1); p_0 \wedge (p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$ | (d) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2); \neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0$ |

1.13. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \vee \neg p_1$ e que envolva apenas os conectivos \wedge e \neg .

Tópicos de Matemática Discreta

folha 4

1.14. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

- (a) A equação $x^3 = 28$ tem pelo menos uma solução nos números naturais.
- (b) 1000000 não é o maior número natural.
- (c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.
- (d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

1.15. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

- (a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.
- (b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.
- (c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.
- (d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

1.16. Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

- (a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.
- (b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.
- (c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x .
- (d) Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito.

1.17. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

- (a) $\forall_x \exists_y x + y = 0$
- (b) $\exists_x \forall_y x + y = 0$
- (c) $\exists_x \forall_y x + y = y$
- (d) $\forall_x (x > 0 \rightarrow \exists_y xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 5

1.18. Considerando que p representa a proposição $\forall a \in A \exists b \in B (a^2 = b \vee a + b = 0)$,

- (a) verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 4\}$.
- (b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p .

1.19. Considerando que p representa a proposição

$$\exists y \in A \forall x \in A (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)),$$

- (a) dê exemplo de um universo A não vazio onde:
 - (i) a proposição p é verdadeira;
 - (ii) a proposição p é falsa.
- (b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

1.20. Averigue a validade dos seguintes argumentos:

- (a) O João afirma: “Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão”. No dia seguinte o João comentou: “Ontem não fui ao cinema.” Em resposta, a Joana concluiu: “Então viste um filme na televisão”.
- (b) A Maria afirmou: “Se hoje encontrar a Alice e estiver calor, vou à praia”. No dia seguinte a Maria comentou: “Ontem esteve calor e fui à praia”. Em resposta, a Rita concluiu: “Então encontrei a Alice”.
- (c) O Tiago disse: “Vou almoçar no bar ou na cantina”. E acrescentou: “Se comer no bar fico mal disposto e não vou ao cinema”. Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: “O Tiago foi almoçar à cantina”.

1.21. Mostre que a soma de dois números inteiros ímpares é um número par.

1.22. Mostre que o produto de números inteiros ímpares é um número ímpar.

1.23. Mostre que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

1.24. Seja n um número natural ímpar. Mostre que $n^2 + 8n - 1$ é múltiplo de 4.

1.25. Mostre que, para todo o natural n , se $3n + 5$ é ímpar, então n é par.

1.26. Prove que, para todo o natural n , n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

1.27. Prove que, dado um número natural n , se n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e de 3.

1.28. Encontre um contraexemplo para cada das afirmações seguintes:

- (a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.
- (b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.
- (c) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.