Cap. 1– Funções reais de variável real

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

setembro 2017

Funções reais de variável real

Parte I

Generalidades sobre funções reais de (uma) variável real

Definição

- Chama-se função real de variável real a um terno D, E e f onde D e E são dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e f é de uma lei de formação (regra de correspondência) que a cada elemento x de D associa um único elemento $f(x)$ de E.
  - denota-se a função por $f : D \longrightarrow E$;
  - usar-se-ão as notações $x \mapsto f(x)$ ou $x \rightsquigarrow f(x)$ para indicar que o elemento x de D é transformado por f no elemento $f(x)$ de E;
  - o conjunto D designa-se domínio da função;
  - o conjunto E designa-se conjunto de chegada da função

- Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \neq \emptyset$. Nestas condições

  - a imagem ou contradomínio de f é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por
  $$\mathrm{CD}_f = \{f(x) \mid x \in D\};$$

  - o gráfico de f é o conjunto G_f dos pares ordenados $(x, f(x))$ com $x \in D$, isto é,
  $$\mathrm{G}_f = \{(x, f(x)) | \, x \in D\}.$$

Nota

O termo "gráfico"também se usa, muitas vezes, como respeitante à "representação gráfica"!

Observação

- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ significa que a função f a cada elemento de D faz corresponder um número real.

- $D \subset \mathbb{R}$ significa que D é um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é, D é um intervalo ou é a reunião de intervalos ou ....
  Alguns exemplos:
  $$D = [1, 2], \quad D =]1, 2], \quad D =]-\infty, 2], \quad D =]1, 2] \cup [5, 6], \quad D = \mathbb{N} \quad \ldots$$

- Quando não houver dúvidas denotar-se-á a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ simplesmente por f.

- Há diferentes formas para descrever uma função

  - tabelas
  - representações gráficas
  - fórmulas
  - palavras
  - ...

Casos particulares

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \ldots, a_n$ são números reais tais que $a_n \neq 0$, denomina-se função polinomial de grau n.

  - Uma função polinomial descrita por um polinómio de grau zero diz-se função constante.

- Uma função racional f é uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde p e q são funções polinomiais.

  - O domínio de f é o conjunto $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.

- A função valor absoluto é a função $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|x| := \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- A função identidade $id_{\mathbb{R}}$ é uma função real de variável real definida por

$$id_{\mathbb{R}}(x) = x$$

  - O domínio de $id_{\mathbb{R}}$ é $\mathbb{R}$.

Operações algébricas com funções

Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$, com $A \cap B \neq \emptyset$ e f e g duas funções tais que

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

- A soma de (/diferença entre) f e g é a função $f \pm g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
- O produto de f e g é a função $f \times g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$
- O quociente entre f e g é a função $\dfrac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D = A \cap \{x \in B : g(x) \neq 0\}$ e definida por
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Composição de funções

- Sejam D_f, D_g, B, C subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $B \cap D_g \neq \emptyset$ e
$$f : D_f \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g : D_g \longrightarrow C$$
duas funções.

  A função composta de g e f, denotada $g \circ f$, é a função definida por
$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow C \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$
onde
$$D = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}.$$

Exemplo

- Sejam

$$f:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x) = x^2.$$

Caracterize, se possível, as funções $f+g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, $g \circ f$ e $f \circ g$

Restrição e prolongamento de uma função

- A restrição de uma função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big|_X(x) = f(x), \qquad \forall x \in X$$

[Nota] Conceito fundamental no Cap. 1.3

- Um prolongamento de uma função $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ a um conjunto $A \supset X$ é uma função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincida com g em X, isto é tal que

$$f\Big|_X(x) = g(x), \qquad \forall x \in X$$

Nota

A restrição é única mas o prolongamento não!

Exemplo

- Seja $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2.$
  - Restrição de f a $X = [1,2]$ é a função, seja $h = f\big|_{[1,2]}$,

$$h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$$

  - Prolongamento de f a $A = [-5,5]$
    - $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2;$
    - $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$
    - e muitas outras funções ...

Características geométricas

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que:

- f é uma função par quando
  para qualquer $x \in D$, $-x \in D$ e $\forall x \in D \;\; f(-x) = f(x)$;
- f é uma função ímpar quando
  para qualquer $x \in D$, $-x \in D$ e $\forall x \in D \;\; f(-x) = -f(x)$;
- f é uma função periódica de período p quando
  para qualquer $x \in D$, $x + p \in D$ e $\forall x \in D \;\; f(x+p) = f(x)$.

Exemplo

- $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$ não é par;
- $h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$ não é par;
- $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2$ é par;
- $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$ não é par.

Sugestão: Represente graficamente as funções acima indicadas.

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- majorada quando $\exists M \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \leq M \qquad \forall x \in D$
- minorada quando $\exists m \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \geq m \qquad \forall x \in D$
- limitada se f é majorada e minorada, isto é,

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ \, : \, \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A.$$

- crescente quando $\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- decrescente quando $\forall x, y \in D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- monótona quando f é crescente ou decrescente.

Sejam $D, E \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \longrightarrow E$ diz-se

- injetiva quando
$$\forall\, x, y \in D \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- sobrejetiva quando
$$\forall y \in E \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

- bijetiva quando f for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Exemplo

- Não é injetiva nem sobrejetiva a função
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

- Não é injetiva mas é sobrejetiva a função
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

- É injetiva e sobrejetiva, logo bijetiva, a função
$$\begin{aligned} h :]-\infty, 0] &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto h(x) = x^2 \end{aligned}$$

Função inversa

- Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva. A função

$$E \longrightarrow D$$

que faz corresponder a $y \in E$ o único $x \in D$ tal que $f(x) = y$ é chamada função inversa de f e é indicada por f^{-1}.

Nota

Não confundir f^{-1} com $\frac{1}{f}$.

Propriedades da função inversa

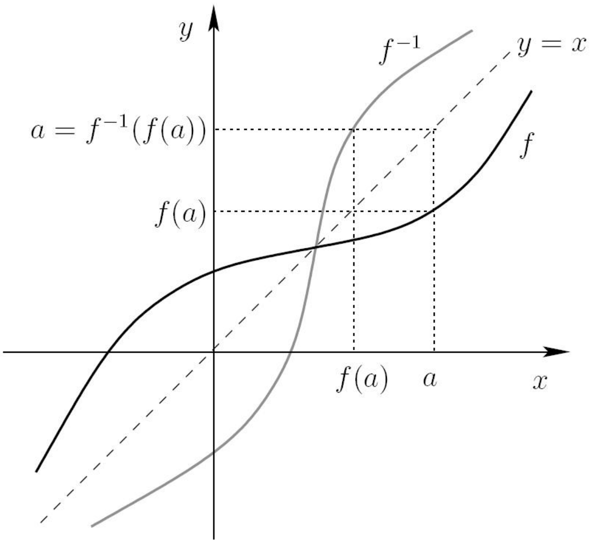
Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva.

1. Se $g : E \longrightarrow D$ é uma função bijetiva, então g é a função inversa de f se e só se
   - $g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in D;$
   - $f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in E.$

2. Se g é a função inversa de f, então
   - $D_f = \text{CD}_g;$
   - $\text{CD}_f = D_g;$
   - $g^{-1} = f.$

Representação gráfica de uma função e da sua inversa

Partindo de uma representação gráfica da função f pode obter-se uma representação gráfica de f^{-1}:



Exemplo

- A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$ tem inversa?
- Indique, caracterizando, uma restrição de f que admita função inversa. Designe-a por g.
- Caracterize a inversa de g.