Lógica EI
1º teste
31/março/2017

Grupo I

1. Seja v uma valoração.
Então, v sat. $\mathcal{V}^{CP}$ se e só se v sat. p_i, para todo $i \in \mathbb{N}_0$
se e só se $v(p_i)=1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.
Assim, existe uma única valoração que satisfaz $\mathcal{V}^{CP}$ (a que atribui o valor 1 a todas as variáveis proposicionais.)
Sabemos que, para qualquer valoração v, $v(\bot)=0$. Logo, como $\bot \in \mathcal{F}^{CP}$, não há valorações que satisfaçam $\mathcal{F}^{CP}$.

2. Consideremos $\Gamma = \{p_0 \wedge p_1, p_1 \to \bot\}$
Temos que
(i) Γ é inconsistente (Se v é uma valoração tal que $v(p_0 \wedge p_1)=1$, então $v(p_1)=1$, pelo que $v(p_1 \to \bot)=0$; logo, não existem valorações que satisfaçam Γ)
(ii) $p_0 \wedge p_1 \in \Gamma$
(iii) $\neg$ não ocorre em $p_0 \wedge p_1$ e não ocorre em $p_1 \to \bot$.
Se v é uma valoração tal que $v(p_0)=v(p_1)=1$, então $v(p_0 \wedge p_1)=1$ e $p_0 \wedge p_1$ não é contradição. Se v' é uma valoração tal que $v'(p_1)=0$, então $v'(p_1 \to \bot)=1$ e $p_1 \to \bot$ não é uma contradição.

3. • Se v é uma valoração tal que $v(p_0)=1$ e $v(p_1)=v(p_2)=0$, então $v(\neg p_0 \vee \neg p_1) = v(p_2 \to p_1) = 1$ (pelo que v sat. Γ) mas $v(\neg p_0)=0$ (pelo que v não sat $\neg p_0$). Assim, $\neg p_0$ não é consequência semântica de Γ.

- Se v é tal que $v(p_i)=0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, então $v(\neg p_0 \vee \neg p_1) = v(p_2 \to p_1) = 1$ mas $v(p_3)=0$. Logo, v sat. Γ e v não sat. p_3. Portanto, p_3 não é consequência semântica de Γ.

- $p_2 \to \neg p_0$

  Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $(v(p_0), v(p_1), v(p_2)) \in \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,0), (0,0,0)\}$. Assim, há três casos possíveis: ⓐ $v(p_0)=1$ e $v(p_2)=0$; ⓑ $v(p_0)=0$ e $v(p_2)=1$; ⓒ $v(p_0) = v(p_2)=0$. Em qualquer um destes três casos, $v(p_2 \to \neg p_0)=1$. Logo, $p_2 \to \neg p_0$ é consequência semântica de Γ.

- $\neg p_2 \vee \neg p_0 \Leftrightarrow p_2 \to \neg p_0$.

  Sendo assim, sempre que uma valoração v sat. Γ, sabemos que v sat. $\neg p_2 \vee \neg p_0$ (porque v sat. $p_2 \to \neg p_0$). Portanto, $\neg p_2 \vee \neg p_0$ é consequência semântica de Γ.

4.

- Suponhamos que existe uma valoração v tal que $v(\varphi)=0$. Então, $v(\neg(p_1 \vee p_2))=1$ e $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2)=0$. Assim, $v(p_1 \vee p_2)=0$, e $v(\neg p_1)=0$ ou $v(\neg p_2)=0$. Logo, $v(p_1)=0$, $v(p_2)=0$, e $v(p_1)=1$ ou $v(p_2)=1$, o que é impossível. Provámos, deste modo que não existe uma tal valoração.
- φ é tautologia porque para toda a valoração v, $v(\varphi)=1$ (provado indiretamente acima).
- Se φ é uma tautologia, então $\varphi \Leftrightarrow p_0 \vee \neg p_0$, que é uma FNC e uma FND.

  R: $p_0 \vee \neg p_0$.

5. O subconjunto X de $\mathcal{F}^{CP}$ cujos elementos não têm ocorrências dos conetivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ é definido indutivamente por

(1) $p_i \in X$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

(2) $\bot \in X$.

Assim, $X = \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$.

Considere-se $\varphi = p_0 \vee \neg p_0 \in \mathcal{F}^{CP}$. φ é uma tautologia e, por isso, é trivial que não existe $\psi \in X$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Portanto, $\{\bot\}$ não é um conjunto completo de conetivos.

Grupo II

6 (a)

① $p_0, p_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ pois toda a variável proposicional é uma fórmula do CP.

② Como $p_0, p_1 \in \mathcal{F}^{CP}$, sabemos que $p_0 \vee p_1 \in \mathcal{F}^{CP}$, pela definição de $\mathcal{F}^{CP}$ e por ①

③ Como $p_0 \vee p_1 \in \mathcal{F}^{CP}$, segue-se que $\neg(p_0 \vee p_1) \in \mathcal{F}^{CP}$, pela definição de $\mathcal{F}^{CP}$ e por ②

④ Como $\neg(p_0 \vee p_1)$ e p_0 são elementos de $\mathcal{F}^{CP}$, podemos concluir que $((\neg(p_1 \vee p_0)) \rightarrow p_0) \in \mathcal{F}^{CP}$, pela definição de $\mathcal{F}^{CP}$ e por ① e ③.

(b) $f : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0,1\}$ é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ do seguinte modo:

① $f(\bot) = 1$;

② $f(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

③ $f(\neg\varphi) = f(\varphi)$, para toda $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

④ $f(\varphi \vee \psi) = 0$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

⑤ $f(\varphi \square \psi) = \min(f(\varphi), f(\psi))$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e qualquer $\square \in \{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(c) $f(\neg p_1 \to p_2) = \min\left(f(\neg p_1), f(p_2)\right)$
$= \min\left(f(p_1), f(p_2)\right) = \min(1,1) = 1$

$f(\neg(p_1 \vee p_0) \to p_0) = 0$ (uma vez que $\vee$ ocorre na fórmula)

(d) De (b) temos que $f(\bot) = 1$. Como toda a valoração v satisfaz a condição $v(\bot) = 0$, f não é uma valoração.

(e) Seja $P(\varphi)$ o predicado $f(\varphi) = f(\varphi[\bot/p_{2017}])$ sobre os elementos φ de $\mathcal{F}^{CP}$.

(I) $f(\bot) = 1$
$f(\bot[\bot/p_{2017}]) = f(\bot) = 1$.
Logo, $P(\bot)$.

(II). Seja $i \in \mathbb{N}_0$.
Se $i \neq 2017$, $f(p_i[\bot/p_{2017}]) = f(p_i)$, por definição da função $-[\bot/p_{2017}]$. Logo, $P(p_i)$.
Se $i = 2017$, $f(p_i[\bot/p_{2017}]) = f(\bot) = 1 = f(p_{2017}) = f(p_i)$. Assim, $P(p_{2017})$.

(III) Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $P(\varphi)$. (HI).
Então,

$f((\neg\varphi)[\bot/p_{2017}]) = f(\neg\varphi[\bot/p_{2017}])$ (pela df. de $-[\bot/p_{2017}]$)
$= f(\varphi[\bot/p_{2017}])$ (pela df. de f)
$= f(\varphi)$ (por HI).
$= f(\neg\varphi)$ (pela df. de f)

Assim, $P(\neg\varphi)$.

(IV) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$. (HI)

Seja $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Se $\square = \vee$:

$$f\left((\varphi \square \psi)[\perp/p_{2017}]\right) = f\left(\varphi[\perp/p_{2017}] \vee \psi[\perp/p_{2017}]\right) \text{ pela def da } \_[\perp/p_{2017}]$$

$$= 0 \text{ pela definição de } f.$$

$f(\varphi \square \psi) = 0$ pela definição de f.

Portanto, $P(\varphi \square \psi)$.

Se $\square \in \{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

$$f\left((\varphi \square \psi)[\perp/p_{2017}]\right) = f\left(\varphi[\perp/p_{2017}] \square \psi[\perp/p_{2017}]\right) \text{ pela def de } \_[\perp/p_{2017}]$$

$$= \min\left(f(\varphi[\perp/p_{2017}]), f(\psi[\perp/p_{2017}])\right) \text{ pela def. de } f$$

$$= \min\left(f(\varphi), f(\psi)\right) \text{ pela HI}$$

$$= f(\varphi \square \psi) \text{ pela def. de } f.$$

Logo, $P(\varphi \square \psi)$.

Por (I)-(IV), pelo Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, podemos concluir que $P(\varphi)$, para toda $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

7.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\cancel{\varphi \wedge \neg\psi}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_1 E$}
\UnaryInfC{φ}
\AxiomC{$\cancel{\varphi \rightarrow \psi}^{(2)}$}
\BinaryInfC{ψ}
\AxiomC{$\cancel{\varphi \wedge \neg\psi}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_2 E$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$\neg I^{(2)}$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$}
\RightLabel{$I\rightarrow^{(1)}$}
\UnaryInfC{$(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$}
\end{prooftree}
$$

é uma demonstração em DNP da fórmula dada.