Sistemas Dinâmicos Discretos

Maria Joana Torres

2018/19

O que é um sistema dinâmico?

- um conjunto X $\rightsquigarrow$ espaço de estados de um sistema físico
- uma transformação $f : X \to X$ $\rightsquigarrow$ lei de evolução

Em geral, estamos interessados no comportamento assimptótico da "história" de um ponto $x_0 \in X$, isto é, na sequência de pontos:

$$x_0 \mapsto x_1 = f(x_0) \mapsto x_2 = f^2(x_0) \mapsto x_3 = f^3(x_0) \mapsto \ldots$$

A **ideia** é: se

- X é o espaço dos estados de um sistema físico e
- o sistema está no estado x_0 no tempo 0

então o sistema estará no

- estado $f(x_0)$ no tempo 1, no estado $f^2(x_0) = f(f(x_0))$ no tempo 2,

...

As iteradas de f são definidas indutivamente do seguinte modo:

$$\boxed{f^0 = \mathrm{id}_X \quad \text{e} \quad f^{n+1} = f \circ f^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.}$$

Uma propriedade simples, mas crucial, das iteradas de uma transformação é:

$$f^k \circ f^n = f^{k+n}, \qquad k, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Se a transformação f for invertível, considerando a inversa $f^{-1} : X \to X$, faz sentido definir também

$$f^{-n} := (f^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Consequentemente, neste caso, a iterada f^n de ordem n está definida para todo o $n \in \mathbb{Z}$. É fácil verificar que para uma bijeção $f : X \to X$, a equação (1) é válida para quaisquer $k, n \in \mathbb{Z}$.

A órbita positiva da condição inicial $x_0 \in X$ é o conjunto de todos os estados da "história" futura do ponto x_0:

$$\mathcal{O}_f^+(x_0) := \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

Por simplicidade de notação, quando a transformação f estiver subentendida, escreveremos simplesmente $\mathcal{O}^+(x_0)$ em vez de $\mathcal{O}_f^+(x_0)$.

O ponto x_0 é chamado o estado inicial e os pontos x_n com $n > 0$ os estados futuros (desta órbita).

À sequência de pontos

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f^2(x_0), \cdots ,\ x_n = f^n(x_0), \cdots ,$$

isto é, à sequência $(x_n)_n$ chamamos trajetória de x_0.

Se f é bijetiva, então f é invertível e considerando a inversa f^{-1} podemos escrever

$$x_{-1} = f^{-1}(x_0)$$

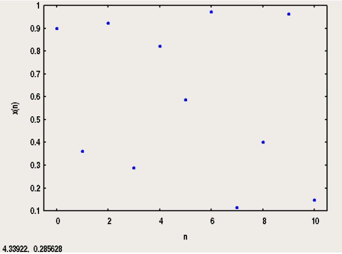
e, mais geralmente,

$$x_{-n} = f^{-n}(x_0) = f^{-1}(f^{-(n-1)}(x_0)) = f^{-1}(x_{-(n-1)}).$$

Podemos, então, definir a órbita completa de x_0 como

$$\mathcal{O}(x_0) := \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

$$\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & 4x(1-x) \end{array}$$



$\leadsto$ load("dynamics");

$\leadsto$ evolution(4*x*(1-x), 0.9, 11);

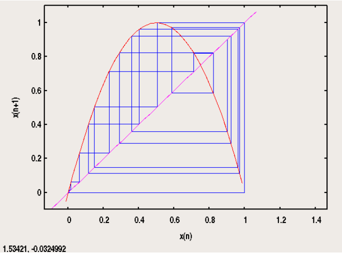
Iteração Gráfica

Um estudo geométrico das trajetórias pode fazer-se seguindo a história de um ponto x_0, traçando os segmentos verticais e horizontais

$$(x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \ldots$$

com a ajuda do gráfico da função identidade.

$$\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 4x(1-x) \end{array}$$



⇝ load("dynamics");

⇝ staircase(4*x*(1-x), 0.9, 11);

Questão:

Qual é a estrutura da órbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ de alguma condição inicial x_0?

Questão:

Será que as órbitas de condições iniciais próximas têm estruturas similares?

Questão:

Qual é a estrutura da órbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ para condições iniciais típicas x_0?

Questão:

Será que as órbitas típicas de transformações g próximas têm estruturas similares?

(X, f) sistema dinâmico topológico:

1. (X, d) é um espaço métrico;
2. $f\colon X \to X$ é uma transformação contínua.

Se X é um conjunto não vazio, uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ diz-se uma distância ou uma métrica se para todo $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

A estrutura mais simples para a órbita de uma dada condição inicial $x_0 \in X$ é obtida no caso em que x_0 é um ponto fixo de f, isto é,

$$\boxed{f(x_0) = x_0}$$

Neste caso,

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$$

e, em geral,

$$f^n(x_0) = x_0.$$

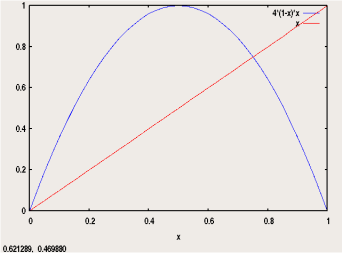
Portanto,

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0\}.$$

Vamos denotar o conjunto dos pontos fixos por Fix(f).

Pontos fixos

$$\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 4x(1-x) \end{array}$$



⇝ flogistic: 4*x*(1-x);

⇝ fixos: solve(flogistic-x);

$$[x = \frac{3}{4},\ x = 0]$$

Os pontos fixos são: 0 e $\frac{3}{4}$.

⇝ plot2d([flogistic,x],[x,0,1],[y,0,1]);

Teorema (do ponto fixo):

1. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma transformação contínua. Então f tem um ponto fixo.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \supset [a, b]$. Então f tem um ponto fixo.

Se a trajetória de x_0 é uma sucessão convergente para $p \in X$, então p é um ponto fixo da transformação contínua f.

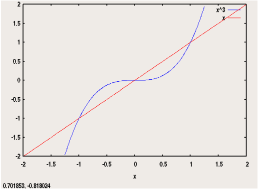
Com efeito, se $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = p$, a continuidade de f implica que

$$f(p) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

A bacia de atração ou conjunto estável de um ponto fixo p é o conjunto dos pontos cuja trajetória é assimptótica a p, isto é,

$$W^s(p) = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = p \right\}.$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$



Os pontos fixos de f são os pontos -1, 0 e 1.

$$W^s(0) =]-1,1[\,,\quad W^s(1) = \{1\} \text{ e } W^s(-1) = \{-1\}.$$

Um estado inicial $x_0 \in X$ é um ponto periódico se é um ponto fixo de alguma iterada de f, isto é, se existe um tempo $k \geq 1$ tal que

$$\boxed{f^k(x_0) = x_0}$$

O menor dos tempos $k \geq 1$ tal que $f^k(x_0) = x_0$ é chamado o período de x_0.

A órbita

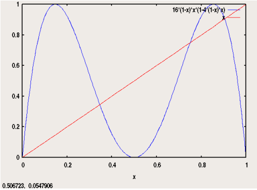
$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$$

é chamada uma órbita periódica de período k ou um k-ciclo.

Vamos denotar o conjunto dos pontos periódicos por Per(f).

Pontos fixos $\rightsquigarrow$ pontos periódicos de período $k = 1$.

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\quad\to\quad [0,1] \\ x &\quad\mapsto\quad 4x(1-x) \end{aligned}$$



⇝ flogistic: 4*x*(1-x);

⇝ flogistic2: flogistic, x=flogistic;

⇝ periodicos2: solve(flogistic2-x);

$$[x = -\frac{\sqrt{5}-5}{8},\ x = \frac{\sqrt{5}+5}{8},\ x = \frac{3}{4},\ x = 0]$$

Os pontos periódicos de período 2 são: $-\frac{\sqrt{5}-5}{8}$ e $\frac{\sqrt{5}+5}{8}$.

⇝ plot2d([flogistic2,x],[x,0,1],[y,0,1]);

Um ponto x_0 pode ter órbita finita sem ser periódico:

pode acontecer que exista $k \geq 1$ tal que $f^k(x_0)$ é um ponto periódico.

Tais pontos, que "caem" numa órbita periódica decorrido um tempo positivo, são chamados pontos pré-periódicos.

Exemplo: Considere a transformação $f(x) = |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$.

1. $\{0,1\}$ é uma órbita periódica
2. $f(2) = 1$ e $f^n(2) \neq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Logo, o ponto 2 é pré-periódico.

Um subconjunto $\Lambda \subset X$ diz-se:

1. (positivamente) invariante (sob f) se $f(\Lambda) \subset \Lambda$
2. (negativamente) invariante (sob f) se $f^{-1}(\Lambda) \subset \Lambda$
3. invariante (sob f) se $f(\Lambda) = \Lambda$

De modo claro, pontos fixos e órbitas periódicas são conjuntos invariantes.

O comportamento dinâmico mais simples de um dado $x_0 \in X$ é a convergência para um ponto (fixo) p.

As trajetórias podem não ser convergentes mas pelo menos ter subsucessões convergentes.

Definição:

Um ponto $y \in X$ é um ponto $\omega-$limite de x_0 se existe uma subsucessão de tempos $n_k \to \infty$ tal que $x_{n_k} \to y$ quando $k \to \infty$.

Definimos o conjunto $\omega-$limite de x_0 por

$$\omega(x_0) := \{\text{pontos } \omega - \text{ limite de } x_0\}.$$

Se f é invertível, então podemos definir o conjunto $\alpha-$limite de x_0, $\alpha(x_0)$, exactamente da mesma forma mas tomando $n_k \to -\infty$.

Definição:

Um ponto x_0 é recorrente se

$$\boxed{x_0 \in \omega(x_0)}$$

Isto significa que, apesar da órbita do ponto x_0 poder não ser periódica, ela "passa" arbitrariamente perto de x_0 .

Vamos denotar o conjunto dos pontos recorrentes por R(f).

Observemos que, x_0 é recorrente se, dada uma vizinhança arbitrária $\mathcal{U}$ de x_0 , existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x_0) \in \mathcal{U}$, ou seja, se a trajetória de x_0 volta a visitar toda a vizinhança de x_0 . Isto implica que a trajetória de x_0 visita infinitas vezes uma vizinhança arbitrária de x_0.

Exercício: Mostre que se x_0 é periódico, então é recorrente.

Definição:

Um ponto x_0 é não-errante se para qualquer vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 existe um tempo $n \geq 1$ tal que

$$f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing.$$

Isto significa que apesar do ponto x_0 poder não voltar a "passar" arbitrariamente perto dele próprio, algum ponto arbitrariamente perto de x_0 o fará.

Vamos denotar o conjunto dos pontos não-errantes por $\Omega(f)$.

Se $\Omega(f) = X$, o sistema dinâmico (X, f) diz-se não-errante.

A ideia informal é que o conjunto dos pontos não-errantes é onde acontece a dinâmica interessante, enquanto que o conjunto dos pontos errantes (um ponto x_0 diz-se errante se não for não-errante) é o conjunto dos pontos que a dinâmica esquece.

Exercício: Mostre que se x_0 é recorrente, então é não-errante.

Questão:

Como comparar duas transformações $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$?

Dizemos que f e g são conjugadas se existe uma bijecção $h : X \to Y$ tal que

$$g \circ h = h \circ f.$$

Se h for um homeomorfismo (transformação contínua com inversa contínua) dizemos que é uma conjugação topológica.

A noção de conjugação topológica é natural e central: duas transformações topologicamente conjugadas são obtidas uma da outra por uma mudança de coordenadas contínua. Consequentemente, todas as propriedades que são independentes de tal mudança de coordenadas permanecem inalteradas, tais como o número de órbitas periódicas de um dado período, a densidade dos pontos periódicos, a transitividade topológica, a dependência sensível das condições iniciais, etc.

Exercício: Mostre que uma conjugação envia órbitas de f em órbitas de g. Em particular, envia pontos fixos em pontos fixos e órbitas periódicas em órbitas periódicas.

Modelo exponencial, onde uma população cresce (ou decresce), em cada unidade de tempo, com uma certa taxa relativa que depende da fertilidade e da mortalidade da espécie.

A equação recursiva, que determina a população P_n no tempo n dada uma população inicial P_0, é

$$\boxed{P_{n+1} = \lambda P_n}$$

Uma solução explícita é imediata:

a população no tempo 1 será λP_0, no tempo 2 será $\lambda^2 P_0$, no tempo 3 será $\lambda^3 P_0$, $\cdots$ e no tempo n será

$$\boxed{P_n = \lambda^n P_0}$$

O significado físico do parâmetro do modelo pode ser explicado assim:

- α - taxa relativa de natalidade na unidade de tempo dt
- β - taxa relativa de mortalidade na unidade de tempo dt
- P_t - população no tempo t

então

- o incremento $P_{t+dt} - P_t$ é igual a

$$P_{t+dt} - P_t = \alpha P_t - \beta P_t$$

e, portanto,

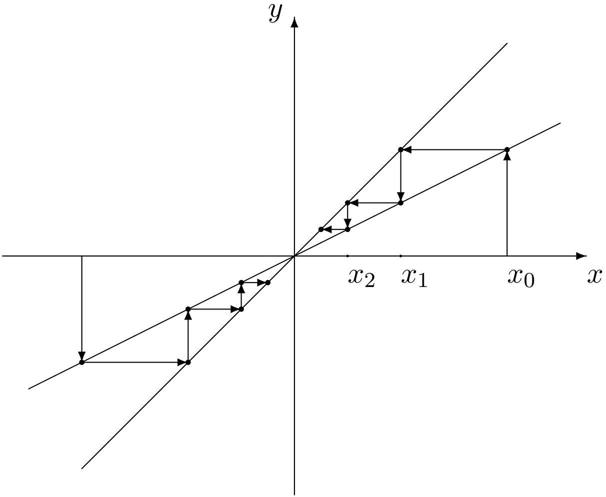
$$P_{t+dt} = \lambda P_t \quad \text{se} \quad \lambda = 1 + (\alpha - \beta).$$

A dinâmica do modelo populacional $P_{n+1} = \lambda\, P_n$ (com $\lambda > 0$) é simples:

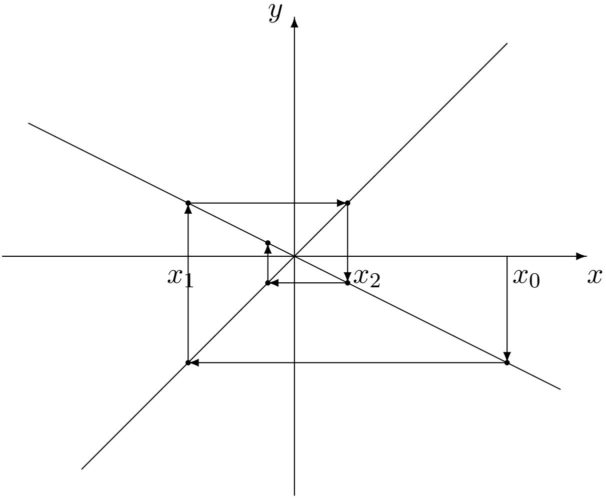
- $\lambda < 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ as trajetórias convergem para zero
- $\lambda > 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ as trajetórias são divergentes

O comportamento assimptótico é independente da condição inicial.

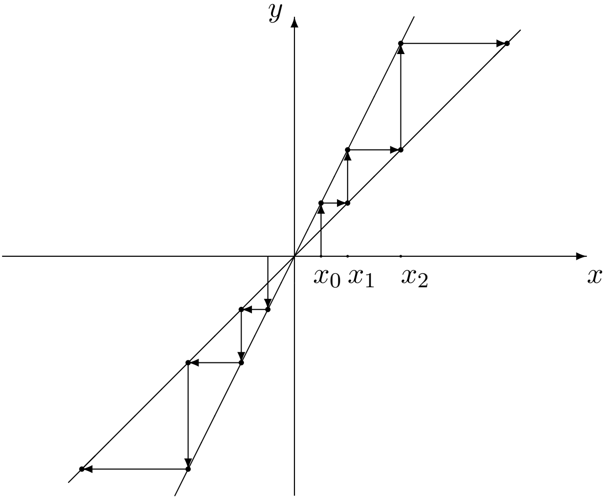
Todos os comportamentos assimptóticos permitidos são simples.

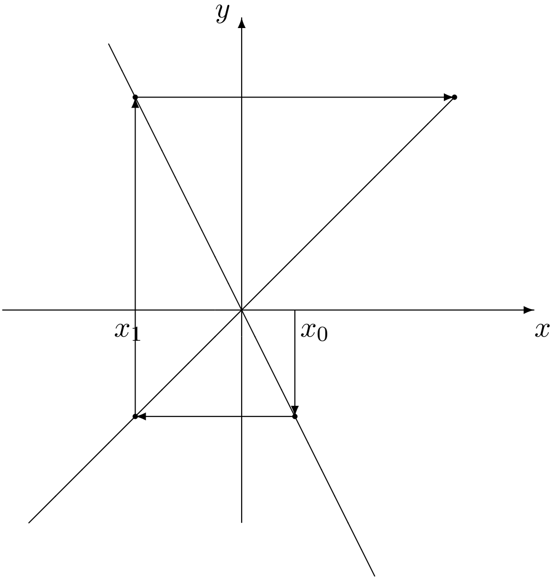

y
x_2
x_1
x_0
x

$-1 < \lambda < 0$



$\lambda > 1$





y
x_1
x_0
x

<u>**Definição**</u>:

Uma transformação $f : X \to X$ é uma λ-contração se é Lipschitz e tem constante de Lipschitz $\lambda < 1$, ou seja , se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

para todos $x, y \in X$.

A dinâmica das contrações é simples e é descrita pelo:

Teorema (Princípio das Contrações):

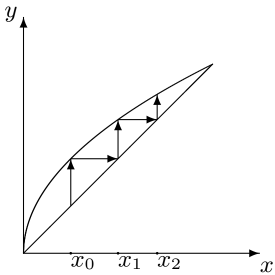
Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e $f : X \to X$ é uma λ-contração então

1. f tem um único ponto $\tilde{x}$ e
2. $d(x_n, \tilde{x}) \leq \lambda^n d(x_0, \tilde{x})$, para todo o $x_0 \in X$, isto é,

a trajetória de todo o ponto converge exponencialmente para o único ponto fixo de f.

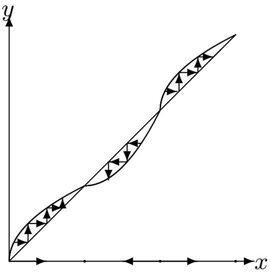
Lema:

Se $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma transformação contínua e crescente sem pontos fixos em $]a, b[$ então um dos extremos de $[a, b]$ é um ponto fixo e a trajetória de todo o ponto converge para esse ponto fixo, com a possível excepção do outro extremo do intervalo caso este seja também um ponto fixo.



Lema:

Se $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma transformação contínua e crescente então a trajetória de cada ponto converge para um ponto fixo de f.



Questão:

Qual é a natureza dos pontos fixos, isto é, qual é o comportamento das trajetórias de pontos próximos dos pontos fixos?

Definição:

Um ponto $p \in X$ é um ponto fixo atrativo se existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de p tal que

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = p,$$

para todo o $x \in \mathcal{B}$.

Definição:

Um ponto $p \in X$ é um ponto fixo repulsivo se existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de p tal que, para todo o $x \in \mathcal{B} \setminus \{p\}$, existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \notin \mathcal{B}$.

Teorema (condição suficiente para um ponto fixo ser atractivo / repulsivo):

Sejam $f : I \to I$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e p um ponto fixo de f pertencente ao interior de I.

1. Se $|f'(p)| < 1$ então p é um ponto fixo atrativo.

2. Se $|f'(p)| > 1$ então p é um ponto fixo repulsivo.

Dizemos que a órbita de um ponto periódico p de período n é atrativa se p é um ponto fixo atrativo de f^n.

Pelo Teorema anterior, sabemos que se $|(f^n)'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo atrativo de f^n.

Além disso, pela regra da cadeia,

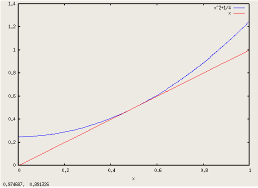
$$\boxed{(f^n)'(p) = f'(p).f'(f(p)).\cdots .f'(f^{n-1}(p))}$$

Portanto, se $\{p, f(p), \cdots, f^{n-1}(p)\}$ é uma órbita periódica de período n, a derivada de f^n é a mesma em todos os pontos da órbita. Em particular a definição acima faz sentido.

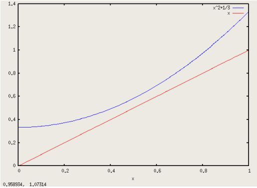
Questão:

Como é que os pontos fixos e os pontos periódicos podem ser criados ou destruídos quando mudamos a transformação?

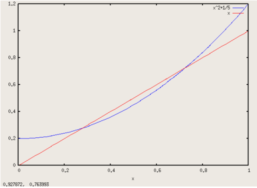
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + \lambda \end{array}$$



$\lambda = \frac{1}{4}$



$\lambda > \frac{1}{4}$



$\lambda < \frac{1}{4}$

Os pontos fixos que satisfazem a condição $f'(p) \neq 1$ são chamados transversais, porque a tangente ao gráfico $\text{graf}(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$ de f em p é transversal ao gráfico da função identidade.

Num meio ambiente finito, a escassez dos alimentos faz com que as populações não possam crescer sem limite.

Uma maneira de modelar a competição pela sobrevivência consiste em acrescentar à lei exponencial um termo que reduz a taxa de crescimento quando as populações atingem valores demasiado elevados.

A possibilidade mais simples é adicionarmos um termo negativo e quadrático. A equação recursiva

$$P_{n+1} = \lambda P_n$$

assume, deste modo, a forma

$$\boxed{P_{n+1} = \lambda P_n - \mu (P_n)^2}$$

- $\lambda/\mu = P_{\text{max}}$ $\rightsquigarrow$ valor máximo da população suportado pelo meio ambiente

  $P_n > P_{max} \Rightarrow P_{n+1} < 0$ $\rightsquigarrow$ extinção da população

- Tomando $x_n = P_n/P_{\text{max}}$ obtemos o:

Modelo logístico (do francês "logement", ou seja, alojamento)

$$\boxed{x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)}$$

$\lambda \in [0, 4]$ $\rightsquigarrow$ valores do parâmetro que não conduzem à extinção em tempo finito.

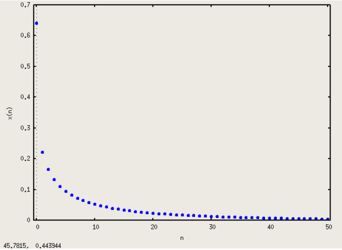
Experiências :

A dinâmica é agora muito mais complexa:

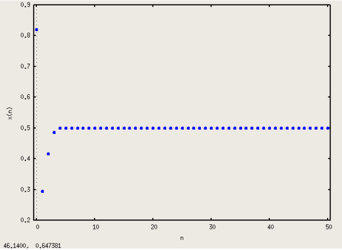
$0 \leq \lambda \leq 3 \quad \rightsquigarrow$ o comportamento assimptótico das trajetórias é independente do estado inicial:

- $\lambda \leq 1$: extinção assimptótica
- $1 < \lambda \leq 3$: convergência para uma população estacionária

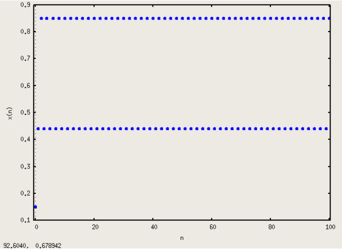
$\lambda > 3 \quad \rightsquigarrow$ o estado estacionário deixa de existir, e as populações começam a oscilar com período 2, depois 4, depois 8, $\cdots$



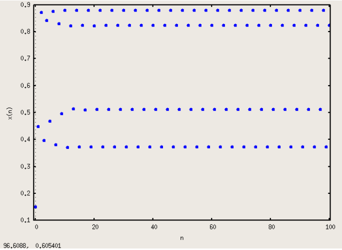
$\lambda < 1$



$1 < \lambda < 3$

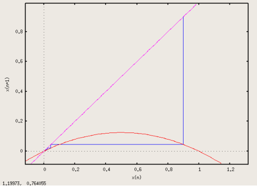


órbita de período 2

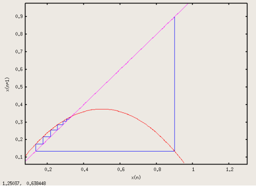


órbita de período 4

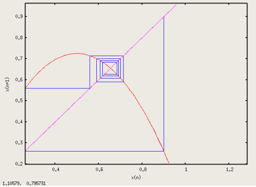
Modelo logístico



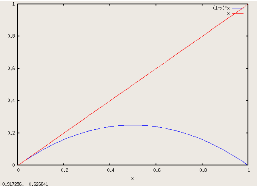
$\lambda = 0.5$

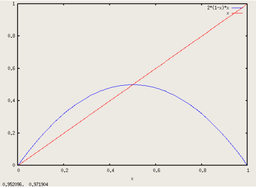


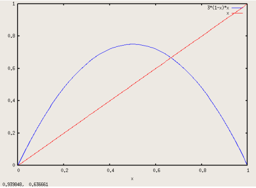
$\lambda = 1.5$



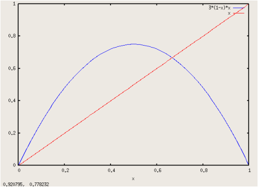
$\lambda = 2.9$



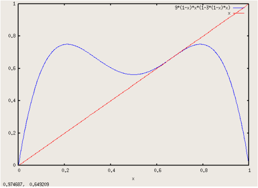




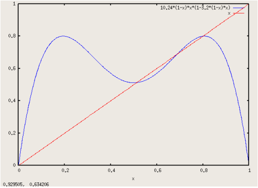
$\lambda = 1$ $\lambda = 2$ $\lambda = 3$



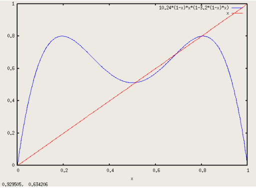
$\lambda = 3, \; f$



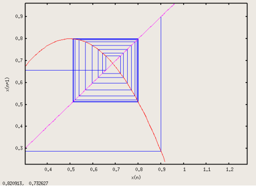
$\lambda = 3, \; f^2$



$\lambda = 3.2, \; f^2$

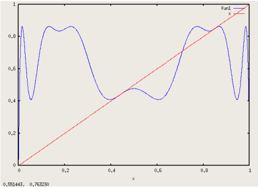


$\lambda = 3.2, \ f^2$

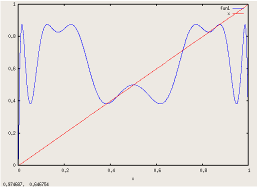


$\lambda = 3.2, \ f$

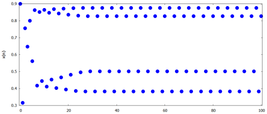
$3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6} \ \rightsquigarrow$ as trajetórias de todos os pontos, com excepção dos pontos fixos e das respectivas pré-imagens, são assimptóticas para uma única órbita de período 2.



$\lambda = 1 + \sqrt{6}, \ \ f^4$



$\lambda = 3.5, \ \ f^4$



$\lambda = 3.5, \ \ f$

A família logística produz uma "cascata" de duplicações do período:

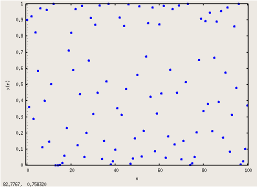
existe uma sucessão

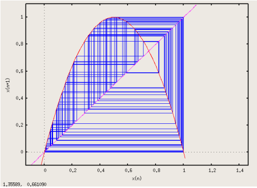
$$\lambda_1 = 3 < \lambda_2 = 1 + \sqrt{6} < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \cdots$$

de valores do parâmetro λ tal que ao passar λ_{n+1} nascem órbitas de período 2^{n+1} em proximidade das órbitas de período 2^n criadas pelo valor anterior λ_n.

- A cascata de duplicações de período foi conhecida no início dos anos 60.
- Steven Smale, em 1975: existe algo interessante na forma como as duplicações se acumulam num eventual parâmetro.
- Mitchell J. Feigenbaum observou, num computador, que o limite $\lambda_\infty = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ parece existir, é exponencial, isto é, $|\lambda_\infty - \lambda_n| \simeq \mathrm{const}\times\delta^{-n}$ onde
$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$
e que $\delta \simeq 4.66920160910299067185 3...$ independentemente da família f_λ!

Ausência de tranquilidade!





evolution$(4x(1-x), 0.9, 100)$

staircase$(4x(1-x), 0.9, 100)$

Ausência de tranquilidade!

Quando $\lambda = 4$ as simulações não mostram nenhuma regularidade no comportamento assimptótico de uma particular trajetória.

No entanto, não se observam diferenças qualitativas entre trajetórias.

Seja (X, d) um espaço métrico.

Definição :

Uma transformação contínua $f : X \to X$ diz-se topologicamente transitiva se existe um ponto $x \in X$ tal que a sua órbita (positiva) $\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é densa em X.

Teorema (um critério para a transitividade topológica):

Seja (X, d) um espaço métrico compacto.
Uma transformação contínua $f : X \to X$ é topologicamente transitiva se para quaisquer conjuntos abertos não-vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^N(U) \cap V \neq \emptyset.$$

A implicação recíproca verifica-se com a hipótese adicional de X não ter pontos isolados.

Definição :

Uma transformação contínua $f : X \to X$ diz-se topologicamente misturadora se para quaisquer conjuntos abertos não-vazios $U, V \subset X$ existe um tempo $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ para todo o tempo $n \geq N$.

Este conceito captura a ideia de que o futuro $f^n(U)$, com $n > 1$, de cada aberto U é assimptoticamente "independente" do seu presente.

Seja (X, d) um espaço métrico.

Definição :

Uma transformação contínua $f : X \to X$ diz-se caótica se for topologicamente transitiva e se o conjunto dos pontos periódicos for denso em X.

Definição :

Uma transformação $f : X \to X$ tem dependência sensível das condições iniciais se existe $\Delta > 0$ tal que para todo o $x \in X$ e todo $\epsilon > 0$ existe um ponto $y \in X$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ e $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \Delta$, para algum $N \in \mathbb{N}$.

$\Delta \rightsquigarrow$ constante de sensibilidade

Possuir dependência sensível das condições iniciais significa que o menor erro (ϵ) na condição inicial (x) pode conduzir a uma discrepância macroscópica (Δ) na evolução da dinâmica. A quantidade Δ diz-nos a que escala estes erros aparecem.

Δ não depende nem de x, nem de ϵ, mas apenas do sistema.

O mais pequeno erro em qualquer lugar pode conduzir eventualmente a discrepâncias de tamanho Δ.

Teorema :

As transformações caóticas exibem dependência sensível das condições iniciais excepto quando todo o espaço é constituído por uma única órbita periódica.

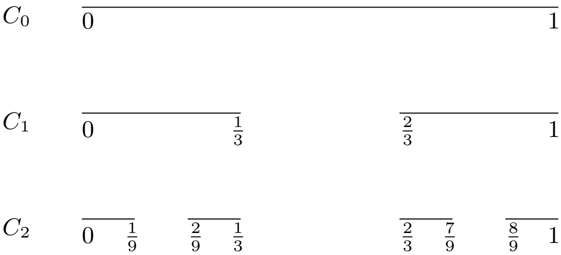
O metereologista Edward Lorenz descreveu este efeito como:

"o efeito borboleta"

muda uma coisa, muda tudo

O bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas

Conjunto de Cantor ternário: definição geométrica



$$\cdots$$

$$C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$$

O conjunto de Cantor ternário é o conjunto dos números em $[0, 1]$ que podem ser escritos em expansão ternária sem usar o dígito 1, isto é,

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \ \text{ com } \ x_n \in \{0, 2\} \right\} \subset [0, 1].$$

$$\begin{array}{rccl} f: & C & \to & [0,1] \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n/2\right)/2^n \end{array}$$

f é sobrejectiva