

Estimação de parâmetros



ESTIMAÇÃO



- ESTIMAÇÃO PONTUAL
- ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Objetivo da estimação pontual

Consiste em tentar encontrar a “estatística”, cujo valor numérico, obtido através dos dados da amostra, esteja próximo do parâmetro da população, que é constante mas desconhecido.

$\theta \rightarrow$ parâmetro da população

$\hat{\theta} \rightarrow$ estimador pontual para θ



PROPRIEDADES DE UM ESTIMADOR

- TENDÊNCIA NULA (NÃO TENDENCIOSO, CENTRADO, NÃO ENVIESADO)
- MÉDIA QUADRÁTICA DO ERRO MÍNIMA
- EFICIENTE
- CONSISTENTE
- SUFICIENTE
- ROBUSTO

Profª Ana Cristina Braga, DPS

3



TENDÊNCIA $t_T(\theta)$

$$t_T(\theta) = E[T] - \theta$$

Diz-se que uma estatística T é um estimador não tendencioso (ou centrado) em relação ao parâmetro θ , se e só se:

$$t_T(\theta) = 0 \Leftrightarrow E[T] = \theta$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

4



Exemplo:

$X \sim \text{Bin}(n, \pi)$. Mostrar que $\frac{X}{n}$ é um estimador não tendencioso de π .

Resolução:

$$E[X] = n \cdot \pi$$

$$E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n} E[X] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \pi = \pi$$

$\therefore T = \frac{X}{n}$ é um estimador não tendencioso para π

Profª Ana Cristina Braga, DPS

5



Exemplo:

Se X_1, X_2, \dots, X_n constituem uma amostra aleatória duma população dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Mostre que $T = \bar{X}$ é um estimador tendencioso de θ .

RESOLUÇÃO:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \Rightarrow E[T] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} \cdot E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E[X_i] = E[X_i]$$

$$\mu = E[X_i] = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot e^{-(x-\theta)} dx = \left[-x \cdot e^{-(x-\theta)} \right]_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} -e^{-(x-\theta)} dx = 1 + \theta$$

$$E[T] = E[X_i] = 1 + \theta$$

$$t_r(\theta) = E[T] - \theta \Leftrightarrow t_r(\theta) = 1 \neq 0 \Rightarrow T \text{ é um estimador tendencioso para } \theta.$$

SE SE CONSIDERAR $T' = \bar{X} - 1$ ENTÃO T' É NÃO TENDENCIOSO, POIS $E[T'] = E[\bar{X}] - 1 = \theta$.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

6



MÉDIA QUADRÁTICA DO ERRO (MQE)

A medida, do desempenho de um estimador, mais utilizada é a média quadrática do erro, definida por:

$$MQE = E[(T - \theta)^2]$$

$$E[(T - \theta)^2] = \text{var}[T] + \underbrace{(E[T] - \theta)^2}_{i_T(\theta)}$$

QUANDO O ESTIMADOR É NÃO TENDENCIOSO A MQE RESUME-SE À VARIÂNCIA DO ESTIMADOR.

UM "BOM" ESTIMADOR CORRESPONDE ÀQUELE QUE POSSUIR MENOR MQE.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

7



EFICIÊNCIA

Se T_1 e T_2 são dois estimadores não tendenciosos do parâmetro θ duma população e se $\text{var}[T_1] < \text{var}[T_2]$, diz-se que T_1 é relativamente mais eficiente que T_2 .

$$ef(T_1, T_2) = \frac{\text{var}[T_1]}{\text{var}[T_2]}$$

Se T é um estimador tendencioso dum dado parâmetro θ , as comparações devem ser feitas com base na média quadrática do erro.

$$ef(T_1, T_2) = \frac{MQE[T_1]}{MQE[T_2]}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

8



CONSISTÊNCIA

A estatística T é um estimador consistente do parâmetro θ se e só se para cada $c > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T - \theta| < c) = 1$$

De notar que a consistência é uma propriedade assintótica.

Se T é um estimador não tendencioso do parâmetro θ e $\text{var}[T] \rightarrow 0$ à medida que $n \rightarrow \infty$, então T é um estimador consistente de θ .

O estimador é **consistente** quando suas estimativas se aproximam do valor verdadeiro que se quer estimar, à medida que a amostra cresce.



SUFICIÊNCIA

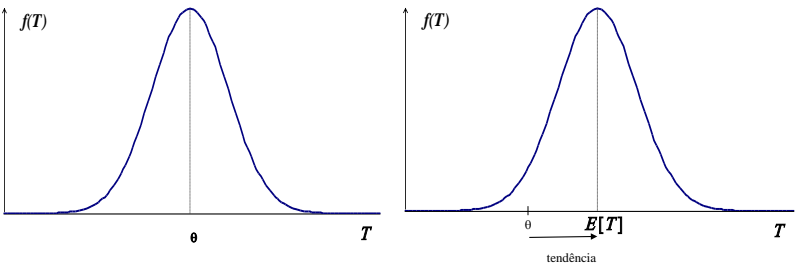
Um estimador é suficiente se toda a informação na amostra relevante para a estimação de θ , isto é, se todo o conhecimento acerca de θ que pode ser ganho a partir dos valores individuais e da sua ordem, pode também ser ganho pelo valor de T por si só.

A estatística T é um estimador suficiente do parâmetro θ se e só se para cada valor de T a probabilidade condicional da amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n dado $T = t$ é independente de θ .



Estimadores Pontuais: Propriedades

Não Tendenciosos $t_r(\theta) = 0 \Leftrightarrow E[T] = \theta$

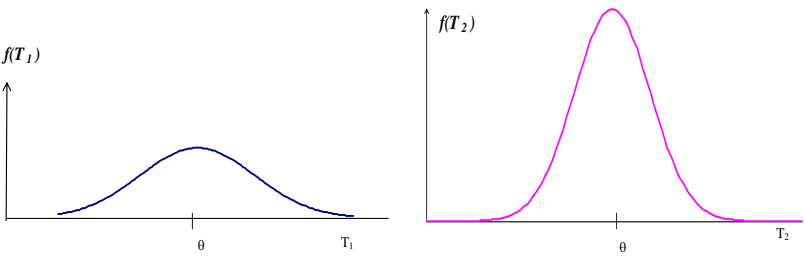


Profª Ana Cristina Braga, DPS

11

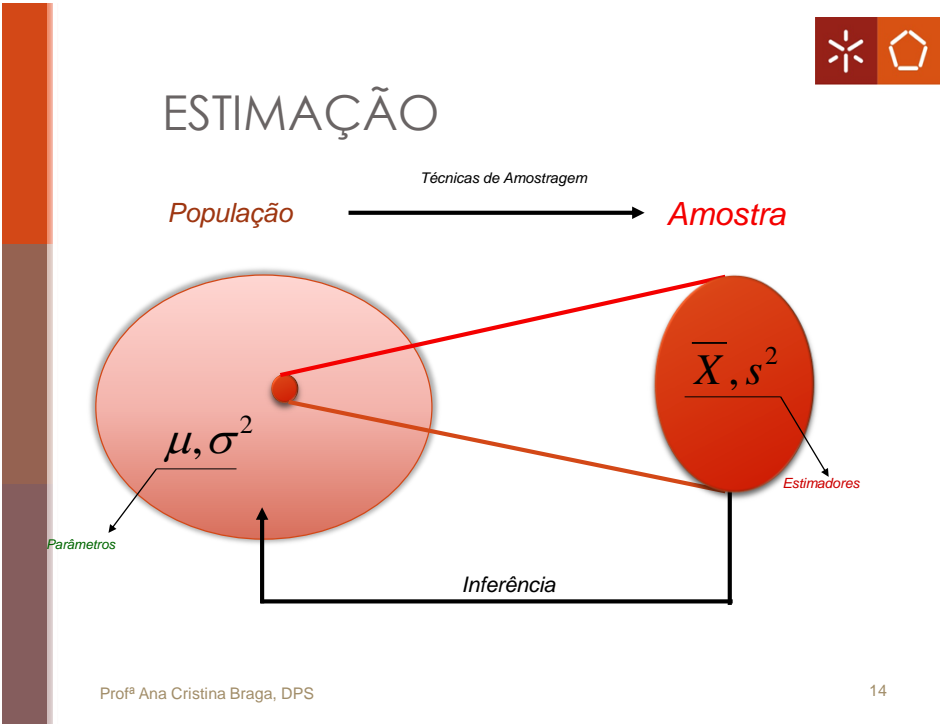
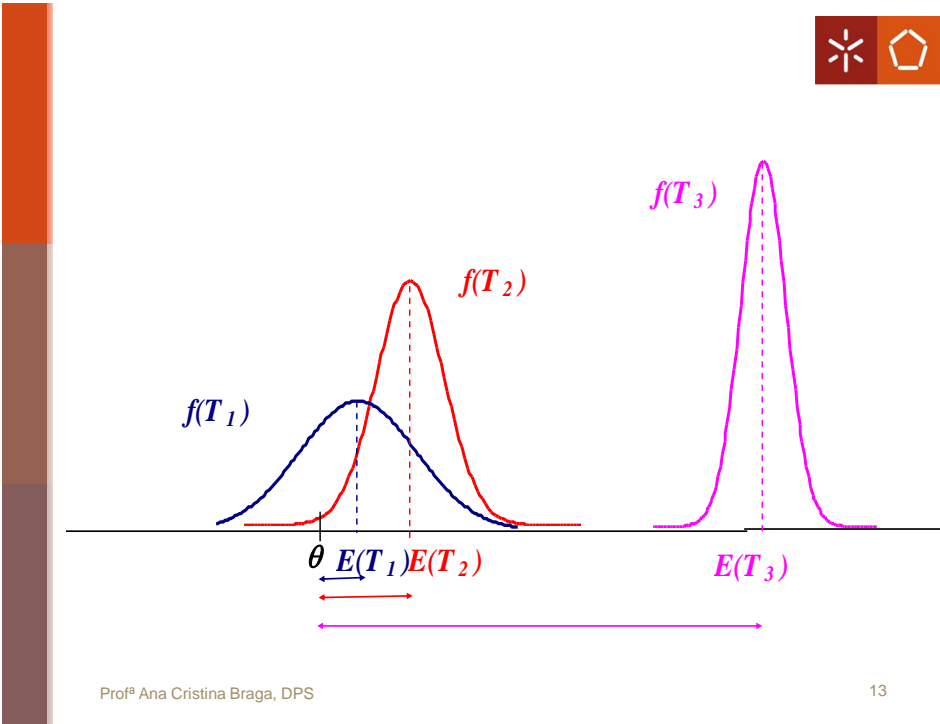


VARIÂNCIA MÍNIMA



Profª Ana Cristina Braga, DPS

12





TIPOS DE ERROS

Como as unidades de uma população variam, na estimacão, deve-se ter em conta essas variaes e calcular o possível erro cometido.

Erros Sistemáticos: Todas as medidas x_1, x_2, \dots, x_n da amostra diferem do valor verdadeiro μ por uma quantidade (ou sentido) constante, δ .

Erros Aleatórios ou Estatísticos: Todas as medidas x_1, x_2, \dots, x_n da amostra se distribuem de maneira aleatória em torno do valor verdadeiro μ .

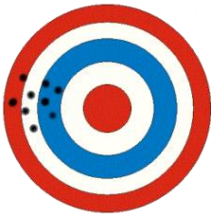


PRECISÃO vs EXATIDÃO

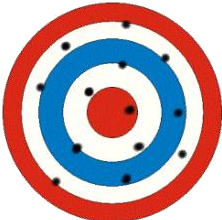
Preciso e Exato



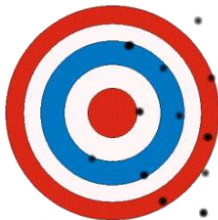
Preciso e Não Exato



Não Preciso e Exato



Não Preciso e Não Exato





PRECISÃO vs EXATIDÃO

Na prática, não vemos o alvo ...



... então, como avaliar a qualidade de sua estimativa?

Propriedades dos estimadores

- TENDÊNCIA NULA
- MÉDIA QUADRÁTICA DO ERRO MÍNIMA
- EFICIENTE
- CONSISTENTE
- SUFICIENTE
- ROBUSTO

Profª Ana Cristina Braga, DPS

17