



Exercício 4.1 Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x, y)$;
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$;
- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (xye^{xy}, x \sin y, 5xy^2)$;
- d) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$;
- e) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + e^z, x^2y)$.

Exercício 4.2 Considere as funções

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y + z, x^2yz, xyz) \quad (x, y, z) \mapsto (xy, yz, 2x, xyz)$$

- a) Calcule $Df((-1, 0, -1); (2, 3, -1))$ e $Dg((-1, 0, -1); (2, 3, -1))$.
- b) Calcule $Df(-1, 0, 1)$ e $Dg(-1, 0, 1)$.

Exercício 4.3 Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (3x, x + 2y)$$

- a) Calcule a matriz jacobiana de f .
- b) Justifique que a função f é derivável.
- c) Calcule a derivada da função f no ponto $(1, 2)$; compare a função $Df(1, 2)$ com a função f .
- d) Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, calcule $Df(x_0, y_0)$.

Exercício 4.4 Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \mapsto (2x^2, 3y, 2xy)$$

- a) Calcule a matriz jacobiana de f .
- b) Justifique que a função f é derivável e calcule a derivada da função f no ponto $(1, 1)$.
- c) Determine $Df(1, 1)(2, 3)$.

Exercício 4.5 Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

- a) $f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$;
- b) $f(x, y) = \cos(xy^2)$;
- c) $f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$;
- d) $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

Exercício 4.6 Mostre que a função $g(x, t) = 2 + e^{-t} \sin x$, satisfaz a equação do calor $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

Exercício 4.7 Verifique que $f_{xzw} = f_{zwx}$ para $f(x, y, z, w) = e^{xyz} \sin(xw)$.

Exercício 4.8 Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

- a) $f_x(x, y) = 2x^3$, $f_y(x, y) = yx^2 + x$;
- b) $f_x(x, y) = x \sin y$, $f_y(x, y) = y \sin x$.

Exercício 4.9 Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Determine f_x e f_y .
- b) Calcule $f_{xy}(0, 0)$ e $f_{yx}(0, 0)$.
- c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

Exercício 4.10 Considere as funções

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & v: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & w: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto xy & (x, y) &\mapsto \sin(xy) & (x, y) &\mapsto e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} & \text{e} & h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}. \\ (x, y, z) &\mapsto x^2y + y^2z & (x, y) &\mapsto f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \end{aligned}$$

Determine $\nabla h(x, y)$.

Exercício 4.11 Considere a função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

$$(x, y, z) \mapsto x^2y - xz$$

- a) Calcule $Df(1, 0, 0)(1, 2, 2)$.
 - b) Determine a de modo que a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenha derivada nula.
- $$t \mapsto f(at^2, at, t^3)$$

Exercício 4.12 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Considere a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y) = f(xy)$. Mostre que $x \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\partial F}{\partial y}$.

Exercício 4.13 Calcule:

- a) $\frac{du}{dt}$, onde $u = \ln\left(\sin \frac{x}{y}\right)$ e $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1+t^2}$;
- b) $\frac{\partial w}{\partial p}$ e $\frac{\partial w}{\partial q}$, onde $w = r^2 + s^2$ e $r = pq^2$, $s = p^2 \sin q$;
- c) $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $z = x^2 \sin y$ e $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$.

Exercício 4.14 Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções duas vezes deriváveis e seja

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x+y) + g(x-y) \end{aligned}$$

Verifique que $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$.