Transportes - parte I (grafos bipartidos)

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

29 de outubro de 2019

Transportes

antes

- O algoritmo simplex resolve problemas de programação linear.

Guião

- O problema de transportes é um caso particular do problema de programação linear em que o modelo é definido num grafo (rede).
- O algoritmo para o problema de transportes é uma especialização do algoritmo simplex que tira partido dessa estrutura em rede.
- A sua implementação, usando estruturas de dados adequadas, pode traduzir-se em resoluções muito mais rápidas.
- Na Parte I, aplicaremos o algoritmo em grafos bipartidos.

depois

- Na Parte II, aplicaremos o algoritmo em grafos (redes) gerais.

Problema de Transportes em Rede: modelo geral

- Dado um grafo $G = (V, A)$, pretende-se:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\text{suj. a} \quad & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j, \ \forall j \in V \qquad (1) \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado (i,j);

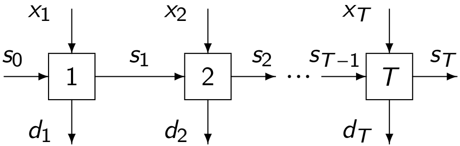
Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j.

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

Exemplo: Lotes de Produção

- Determinar a dimensão dos lotes a fabricar em cada período, dentro de um horizonte de planeamento.
- Em cada período j, se o número de unidades disponíveis (*i.e.*, as unidades produzidas no período, x_j, mais as existentes em stock, s_{j-1}) for superior à procura nesse período, d_j, as unidades remanescentes, s_j, podem ser armazenadas em stock para entrega em períodos subsequentes:



- Objectivo: minimização da soma dos custos de produção e dos custos de armazenagem, satisfazendo a procura em cada período.

Exemplo: modelo de Lotes de Produção

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{T}(c_j x_j + h_j s_j) & \\ \text{suj. a} & x_j + s_{j-1} - s_j = d_j \ , \ j = 1, \ldots, T \\ & 0 \leq x_j \leq x_j^{max} \ , \ j = 1, \ldots, T \\ & 0 \leq s_j \leq s_j^{max} \ , \ j = 1, \ldots, T \end{array}$$

Variáveis de decisão:

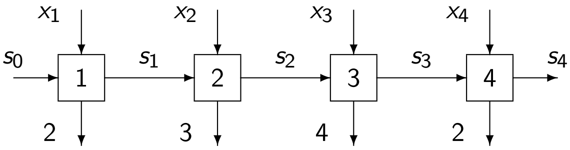
- x_j : número de unidades produzidas no período j,
- s_j : stock existente após o período j.

Dados:

- T : número de períodos do horizonte de planeamento
- d_j : procura existente no período j
- c_j : custo unitário de produção dos artigos no período j
- h_j : custo unitário de posse de inventário no período j
- x_j^{max} : número máximo de unidades produzidas no período j
- s_j^{max} : nível máximo de stock no período j
- s_0 e s_n : stocks inicial e final, respectivamente

Lotes de Produção: Exemplo I

- Horizonte de planeamento (T): 4 períodos



- Procura em cada período de 2, 3, 4 e 2, respectivamente.
- Capacidade máxima de produção, x_j^{max} : 4 unidades em cada período.
- Nível máximo de stock, s_{max} : 2 unidades.
- Custos unitários de armazenagem, h_j : 1 U.M./ artigo x período.
- Custos de produção: custo variável proporcional ao número de artigos, p_j.
- Valores dos coeficientes de custo de produção:

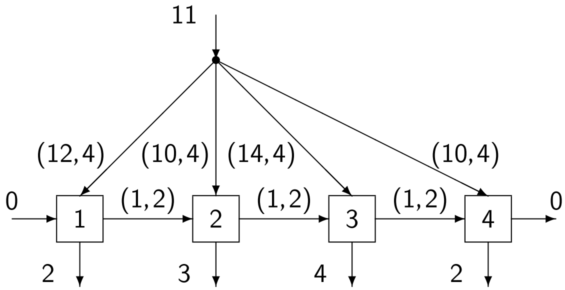
j	1	2	3	4
p_j	12	10	14	10

Lotes de Produção: transporte em rede geral

Rede com capacidades associadas aos arcos:

- valores associados aos arcos, (c_{ij}, u_{ij}), representam o custo unitário de transporte e a capacidade do arco, respectivamente,
- valores associados aos vértices representam ofertas e procuras.

Exemplo:



- Problema balanceado (soma das ofertas = soma dos procuras)

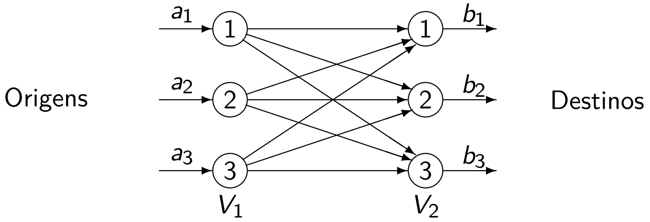
Plano

- Existe um algoritmo geral para o problema de transportes, que vamos aplicar a vários casos:
  1. Transportes em grafos bipartidos (parte I)
  2. Transportes em Redes (ainda sem limites superiores) (parte II)
  3. Transportes em Redes com Limites Superiores (parte II)

- Diferenças incrementais entre os casos:
  - Os grafos bipartidos são uma classe de grafos (redes) gerais, pelo que, no segundo caso, é preciso prestar atenção às variações dos valores das variáveis básicas no pivô.
  - No terceiro caso, há variáveis não-básicas no limite superior, pelo que, além das variáveis não-básicas atractivas no limite inferior a aumentar de valor, como antes, haverá variáveis não-básicas atractivas no limite superior a decrescer de valor.

Transportes em grafos bipartidos

- *Grafo bipartido* $G = (V_1, V_2, A) : \forall (i,j) \in A, i \in V_1, j \in V_2$ *i.e.*,
- grafo cujo conjunto de vértices é *partido* em V_1 e V_2, e em que todos os arcos ligam uma origem $i \in V_1$ a um destino $j \in V_2$.
- V_1 : pontos de produção (origens) ($|V_1| = m$)
- V_2: pontos de consumo (destinos) ($|V_2| = n$)



- A origem i produz a_i unidades e o destino j necessita de b_j unidades.
- Custo unitário de transporte entre a origem i e o destino j é c_{ij}.

- As unidades a transportar são entidades de um único tipo.

Transportes em grafos bipartidos: modelo

- Objectivo: minimizar o custo de transporte das unidades entre os pontos de produção (origens) e os pontos de consumo (destinos).

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i\in V_1}\sum_{j\in V_2} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{suj. a} & \displaystyle\sum_{j\in V_2} x_{ij} = a_i \ , & \forall i \in V_1 \\
 & \displaystyle\sum_{i\in V_1} x_{ij} = b_j \ , & \forall j \in V_2 \\
 & x_{ij} \geq 0 &
\end{array}
$$

Variáveis de decisão:

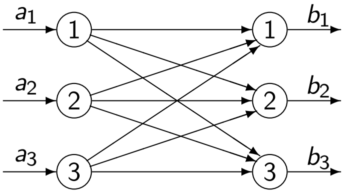
- x_{ij} - quantidade a transportar da origem i para o destino j.

Dados:

- $c_{ij:}$ custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- a_i : número de unidades oferecidas na origem i;
- b_j : número de unidades consumidas no destino j.

Diversas representações

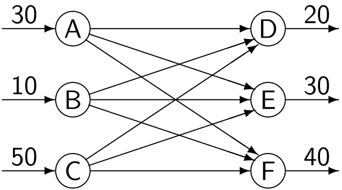
	1	2	3	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	a_3
	b_1	b_2	b_3	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}		
origem 1	1	1	1							=	a_1
origem 2				1	1	1				=	a_2
origem 3							1	1	1	=	a_3
destino 1	-1			-1			-1			=	$-b_1$
destino 2		-1			-1			-1		=	$-b_2$
destino 3			-1			-1			-1	=	$-b_3$
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}		

Exemplo

	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							= 30
B				1	1	1				= 10
C							1	1	1	= 50
D	-1			-1			-1			= -20
E		-1			-1			-1		= -30
F			-1			-1			-1	= -40
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

Conteúdo (transportes em grafos bipartidos)

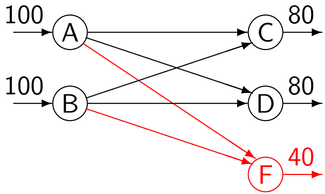
- Balanceamento e caracterização das soluções básicas
- Solução inicial
  - Método do canto NW
  - Método dos custos mínimos
- Pivôs
- Teste de optimalidade
  - Método do Stepping-stone
  - Método dos multiplicadores
- Resolução de um exemplo
- Apêndices
  - Degenerescência
  - Dual do problema de transportes
  - Justificação do método dos multiplicadores

Balanceamento

Condição necessária para o problema ter soluções admissíveis:

- Produção $= \sum_{i \in V_1} a_i$ deve ser **sempre** igual ao consumo $= \sum_{j \in V_2} b_j$

- Se (produção $>$ consumo), criar destino fictício que absorva excesso.



Destino fictício F absorve excesso. Geralmente, custos unitários de transporte dos novos arcos são nulos (*i.e.*, $c_{AF} = c_{BF} = 0$).

- Se (produção $<$ consumo), problema é impossível, porque não é possível satisfazer a procura (assumindo que não é possível recorrer a ofertas externas ao modelo).

Número de equações linearmente independentes

- Das $n+m$ equações, há $n+m-1$ equações linearmente independentes,
- porque qualquer equação pode ser expressa como uma combinação linear das restantes.

- Exemplo:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							= 30
B				1	1	1				= 10
C							1	1	1	= 50
D	-1			-1			-1			= -20
E		-1			-1			-1		= -30
F			-1			-1			-1	= -40
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

- A equação de F é igual ao simétrico da soma das equações de A, B, C, D e E.

Caracterização das soluções básicas

- O grafo associado a uma solução básica é uma *árvore*$^{(*)}$ que suporta todos os vértices.

Uma *árvore de suporte* é um grafo com as seguintes propriedades$^{(**)}$:

- ***ligado*** (existe um caminho entre cada par de vértices),
- **sem ciclos**,
- com um **número de arcos = número de vértices -1.**

Independência e dependência linear num grafo

- Os arcos de uma árvore correspondem a um conjunto de vectores linearmente independentes (base) do modelo de programação linear.
- Os arcos de um ciclo correspondem a um conjunto de vectores linearmente dependentes: um arco do ciclo pode ser expresso como uma combinação linear dos restantes arcos.

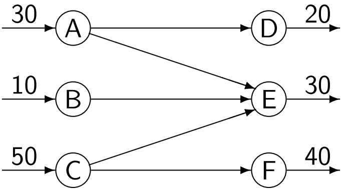
(*) Uma árvore é um grafo com arcos não-orientados (ou arestas); iremos considerar os arcos sem a sua orientação.

(**) Pode ser provado que quaisquer 2 das propriedades caracterizam uma árvore e implicam a terceira.

Exemplo: resolver sistema em ordem às variáveis básicas

- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.

	D	E	F	
A	? 3	? 6	5	30
B	2	? 5	5	10
C	1	? 2	? 3	50
	20	30	40	

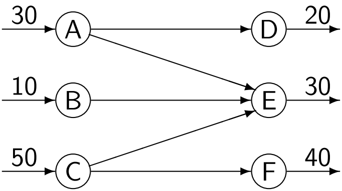


- Resolvendo o sistema de equações em ordem às variáveis básicas, obtém-se uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis,
- sendo as variáveis não-básicas iguais a 0,

Solução básica (vértice do poliedro de transportes)

- Solução básica é admissível, porque $x_{ij} \geq 0, \forall i,j$.
- Há $m+n-1$ variáveis básicas (exemplo, quadro tem 5 casas básicas).
- As restantes variáveis são não-básicas.

	D	E	F	
A	20 $_{3}$	10 $_{6}$	$_{5}$	30
B	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	10 $_{2}$	40 $_{3}$	50
	20	30	40	



Custo da solução básica:

- custo $= 20(3)+10(6)+10(5)+10(2)+40(3)=310$

Algoritmo (simplex) de transportes

Algoritmo

Obter uma quadro básico inicial (*i.e.*, solução básica inicial)
Enquanto (quadro básico não óptimo)
    mudar para um quadro básico adjacente melhor

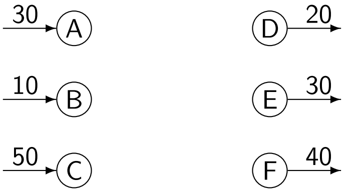
Dois métodos para obter um quadro básico inicial:

- Método do canto NW
- Método dos custos mínimos

Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

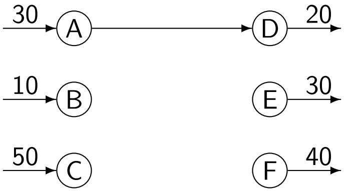
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

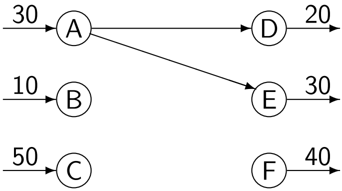
	D	E	F	
A	20 3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

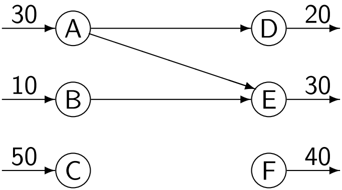
	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

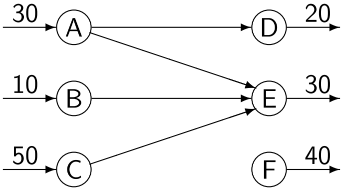
	D	E	F	
A	20 (3)	10 (6)	(5)	30
B	(2)	10 (5)	(5)	10
C	(1)	(2)	(3)	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

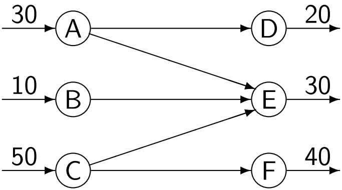
	D	E	F	
A	20 (3)	10 (6)	(5)	30
B	(2)	10 (5)	(5)	10
C	(1)	10 (2)	(3)	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 (3)	10 (6)	(5)	30
B	(2)	10 (5)	(5)	10
C	(1)	10 (2)	40 (3)	50
	20	30	40	

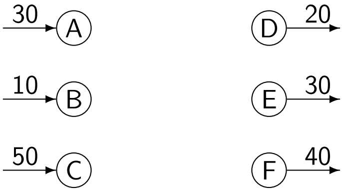


- Desvantagem: não toma em consideração os custos das casas, que podem ser muito elevados nas casas a NW.

Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

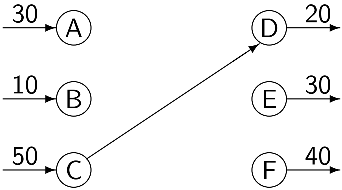
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

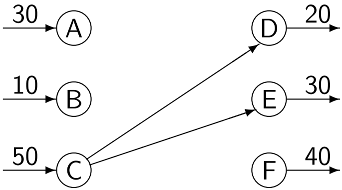
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

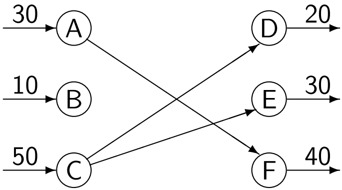
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

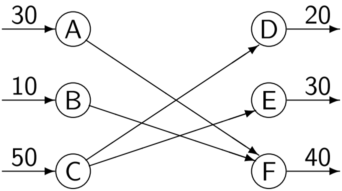
1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	3	6	30 / 5	30
B	2	5	5	10
C	20 / 1	30 / 2	3	50
	20	30	40	



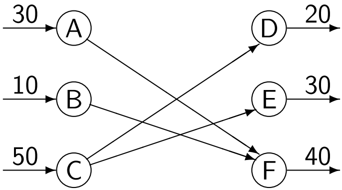
1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

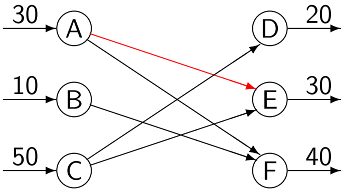


- Solução básica deve ter 5 variáveis básicas. Esta solução é admissível, mas ...

Solução inicial ... deve ter 5 variáveis básicas

- Considerar uma variável com valor nulo como variável básica.
- (neste caso, seleccionamos x_{AE}).
- A solução básica admissível é uma solução degenerada.

	D	E	F	
A	3	0 6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

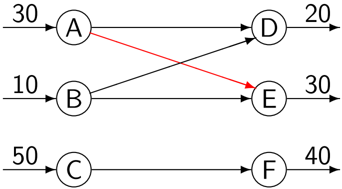


- Grafo associado à solução básica é uma árvore (depois de adicionar o arco).
- Desta forma, quando há vários componentes (floresta), em soluções degeneradas, também se pode associar à solução básica uma árvore.

Nota: selecção da variável básica com valor 0

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*



- Os arcos associados às variáveis formam um ciclo (*i.e.*, as colunas do modelo de PL são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base)

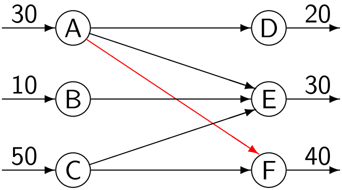
Pivô: variação das variáveis não-básicas

- Pivô: quadro inicial → quadro adjacente

- No movimento ao longo de uma aresta do poliedro do modelo de programação linear (de transportes):
- todas as variáveis não-básicas permanecem nulas, excepto uma **única** que aumenta de valor.

- Exemplo: quando a variável x_{AF} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

	D	E	F	
A	20 $_3$	10 $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50
	20	30	40	



Propriedades das árvores:

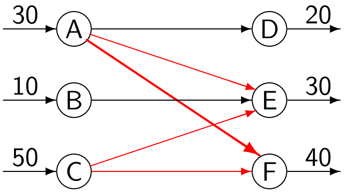
- Há 1 caminho (e 1 só) entre cada par de vértices. Porquê?
- A adição de 1 arco a uma árvore dá origem a 1 (e 1 só) ciclo. Porquê?

Pivô: variação dos valores das variáveis básicas

- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).

- Os arcos do ciclo formam um conjunto linearmente dependente.

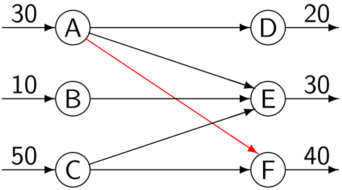
	D	E	F	
A	$20 \quad {}_{3}$	$10-\theta \quad {}_{6}$	$+\theta \quad {}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \quad {}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$10+\theta \quad {}_{2}$	$40-\theta \quad {}_{3}$	50
	20	30	40	



- As variáveis básicas do ciclo são designadas por *Stepping-stones.*
- Os valores das variáveis básicas que ficam fora do ciclo não mudam.

Pivô: qual o aumento máximo de x_{AF}?

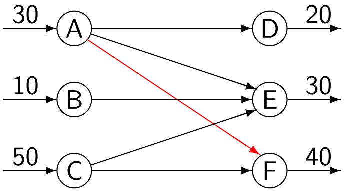
	D	E	F	
A	20 (custo 3)	$10-\theta$ (custo 6)	$+\theta$ (custo 5)	30
B	(custo 2)	10 (custo 5)	(custo 5)	10
C	(custo 1)	$10+\theta$ (custo 2)	$40-\theta$ (custo 3)	50
	20	30	40	



- Quanto pode aumentar a variável não-básica x_{AF} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

Pivô: exemplo

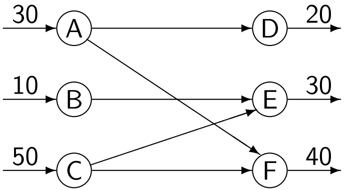
	D	E	F	
A	$20 \ _{3}$	$10-\theta \ _{6}$	$+\theta \ _{5}$	30
B	$_{2}$	$10 \ _{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta \ _{2}$	$40-\theta \ _{3}$	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	$20 \ _{3}$	$_{6}$	$10 \ _{5}$	30
B	$_{2}$	$10 \ _{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$20 \ _{2}$	$30 \ _{3}$	50
	20	30	40	



Teste de optimalidade

Um vértice não é óptimo se existir

- uma *variável não-básica atractiva*, cujo aumento melhore o valor da função objectivo.
- caso contrário, a solução é óptima.

Dois métodos para fazer o teste de optimalidade:

- método do *stepping-stone*.
- método dos multiplicadores.

- O *método dos Multiplicadores* é o mais eficiente: identifica todas as variáveis não-básicas atractivas.
- O método do *stepping-stone* deve ser repetido para cada variável não-básica; ajuda a esclarecer como se calculam os valores.

Teste de optimalidade: método do *stepping-stone*

Identifica-se se uma dada variável não-básica é atractiva:

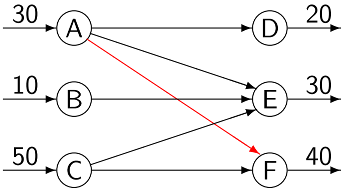
- analisando a variação do valor da função objectivo,
- que resulta da soma das variações dos custos quando os valores das variáveis do ciclo (a variável não-básica e as variáveis do *stepping-stone*) mudam.

Um pivô no problema de transportes corresponde a

- caminhar ao longo de uma aresta do poliedro do problema de transportes, aumentando uma variável não-básica e mantendo as restantes iguais a 0.

Exemplo: variável não-básica x_{AF}

	D	E	F	
A	20 $_3$	$10-\theta$ $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	$10+\theta$ $_2$	$40-\theta$ $_3$	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

Por cada unidade de aumento da variável não-básica x_{AF},

- gastam-se mais 5 unidades em (A, F),
- economizam-se 3 unidades em (C, F),
- gastam-se mais 2 unidades em (C, E),
- economizam-se 6 unidades em (A, E),
- pelo que o valor da função objectivo diminui 2 unidades: $\delta_{AF} = +5 - 3 + 2 - 6 = -2$.

Teste de optimalidade: método dos multiplicadores

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todas as variáveis não-básicas ij.

- Vantagem: mais eficiente do que calcular as variações de custo para todos os ciclos.

Validade do método: resulta da teoria da dualidade (ver Apêndice)

- Os multiplicadores são variáveis duais associadas às restrições.

Teste de optimalidade: método dos multiplicadores (cont.)

Multiplicadores associados às restrições:

- há um multiplicador u_i associado a cada linha i, $i = 1, \ldots, m$;
- há um multiplicador v_j associado a cada coluna j, $j = 1, \ldots, n$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas ($ij \in \mathscr{B}$), fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

2. Para as casas não-básicas ($ij \in \mathscr{N}$), fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j)$$

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todas as casas não-básicas.

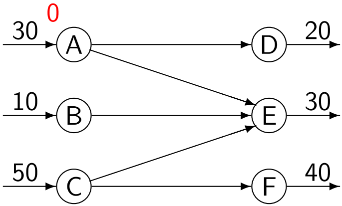
Nota: há livros que usam $c_{ij} = u_i + v_j$ em grafos bipartidos, o que equivale a usar os valores simétricos de v_j. É fácil de verificar que o cálculo dos δ_{ij} dá o mesmo resultado.

Exemplo: passo 0 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).

u_i \ v_j				
0	20 $_3$	10 $_6$	$_5$	30
	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50



- fixar um multiplicador: $u_A = 0$.

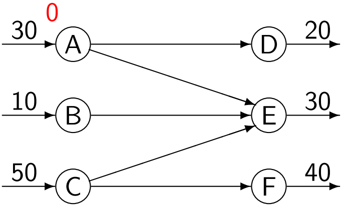
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j				
$\color{red}{0}$	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A - v_D = 3$ $\Rightarrow v_D =$
-
-
-
-
-

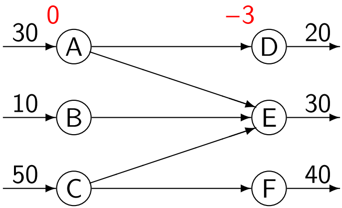
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3			
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
	(2)	10 (5)	(5)	10
	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \qquad \Rightarrow v_E =$
-
-
-
-

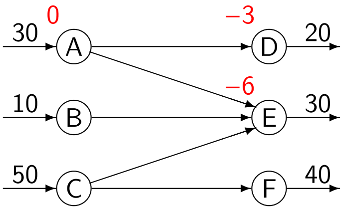
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
	(2)	10 (5)	(5)	10
	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B =$
-
-
-

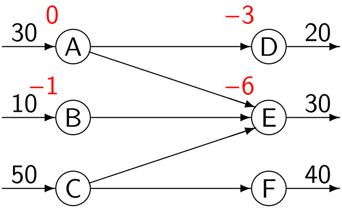
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
-1	(2)	10 (5)	(5)	10
	(1)	10 (2)	40 (3)	50



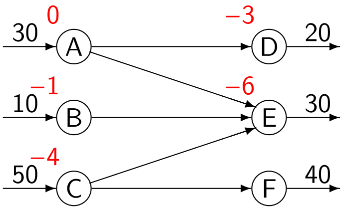
- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C =$
-
-

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
-1	(2)	10 (5)	(5)	10
-4	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C - v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F =$
-

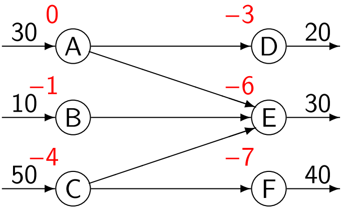
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6	-7	
0	20 (3)	10 (6)	(5)	30
-1	(2)	10 (5)	(5)	10
-4	(1)	10 (2)	40 (3)	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C - v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F = -7$
- Será sempre possível calcular todos os multiplicadores? Porquê?

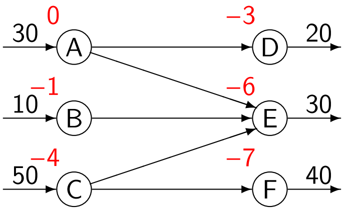
Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j) = c_{ij} - u_i + v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6	-7	
0	20 (3)	10 (6)	-2 (5)	30
-1	0 (2)	10 (5)	-1 (5)	10
-4	$+2$ (1)	10 (2)	40 (3)	50



- $\delta_{AF} = 5 - 0 - 7 = -2$
- $\delta_{BD} = 2 - (-1) + (-3) = 0$
- $\delta_{BF} = 5 - (-1) + (-7) = -1$
- $\delta_{CD} = 1 - (-4) + (-3) = +2$
- A variável não-básica x_{AF} é a mais atractiva.

Variável não-básica que entra na base: selecção

- Seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica, ou seja:

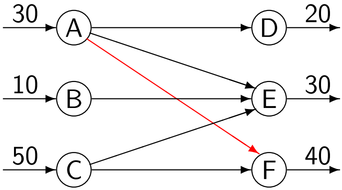
A variável não-básica a entrar na base é:

- a variável não-básica com δ_{ij} mais negativo (em problemas de minimização).

- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
- Em caso de empate, a escolha é arbitrária.

Resolução do exemplo: diapositivo repetido da iteração 1

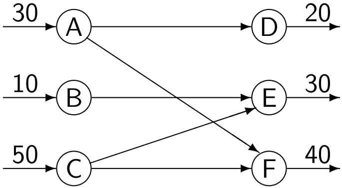
	D	E	F	
A	20 $_{3}$	$10-\theta$ $_{6}$	$+\theta$ $_{5}$	30
B	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta$ $_{2}$	$40-\theta$ $_{3}$	50
	20	30	40	



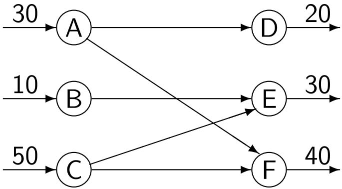
$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	20 $_{3}$	$_{6}$	10 $_{5}$	30
B	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	20 $_{2}$	30 $_{3}$	50
	20	30	40	

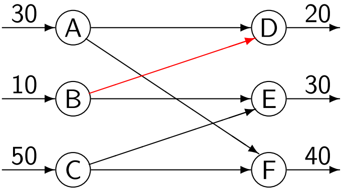


	-3	-4	-5	
0	20 (3)	$+2$ (6)	10 (5)	30
1	-2 (2)	10 (5)	-1 (5)	10
-2	0 (1)	20 (2)	30 (3)	50
	20	30	40	



- A variável não-básica mais atractiva é a variável $x_{BD} : \delta_{BD} = -2$.

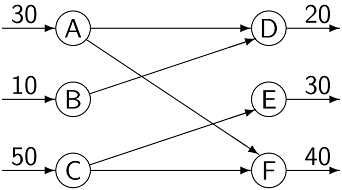
	D	E	F	
A	$20-\theta$ 3	6	$10+\theta$ 5	30
B	$+\theta$ 2	$10-\theta$ 5	5	10
C	1	$20+\theta$ 2	$30-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20, 30\} = 10$

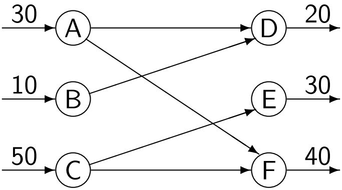
- A variável x_{BD} entra na base e x_{BE} sai da base.

	D	E	F	
A	10 3	6	20 5	30
B	10 2	5	5	10
C	1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



Quadro 3: teste de optimalidade

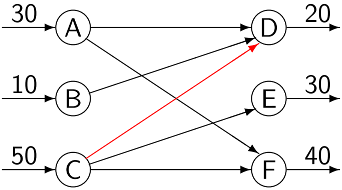
	−3	−4	−5	
0	10 3	+2 6	20 5	30
−1	10 2	+2 5	+1 5	10
−2	0 1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



- Solução óptima.
- Custo da solução óptima: 10(3)+20(5)+10(2)+30(2)+20(3)=270
- Há soluções óptimas alternativas, porque $\delta_{CD} = 0$.

Uma solução óptima alternativa

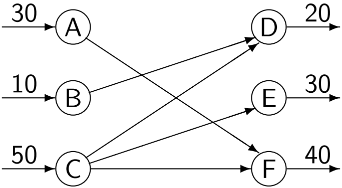
	D	E	F	
A	$10-\theta$ 3	6	$20+\theta$ 5	30
B	10 2	5	5	10
C	$+\theta$ 1	30 2	$20-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$

- O custo da seguinte solução é o mesmo. Porquê?

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	10 2	5	5	10
C	10 1	30 2	10 3	50
	20	30	40	



Conclusão

- O algoritmo apresentado é uma especialização do algoritmo simplex para um problema que é representado num grafo bipartido.
- Este problema é, por vezes, designado por problema de Hitchcock[(†)], que apresentou um modelo matemático e um procedimento para a sua resolução.
- Os grafos bipartidos são uma classe de grafos, e o algoritmo pode ser generalizado para grafos gerais.

(†) - Frank. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Physics, 20 (1941), 224-230.

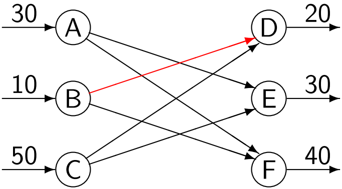
Apêndices

1. Degenerescência
2. Dual do problema de transportes
3. Justificação do método dos multiplicadores

Degenerescência: pivô degenerado

- Com degenerescência, regras são semelhantes, mas θ_{max} pode ser 0.

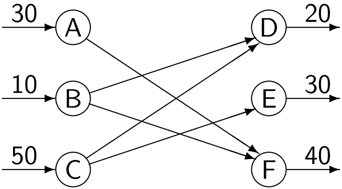
	-5	-6	-5	
0	-2 ; 3	$0\text{-}\theta$; 6	$30+\theta$; 5	30
0	-3 ; $+\theta$; 2	-1 ; 5	$10-\theta$; 5	10
-4	$20-\theta$; 1	$30+\theta$; 2	$+2$; 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{0, 10, 20\} = 0$

- A variável x_{BD} entra na base (com valor nulo) e x_{AE} sai da base.

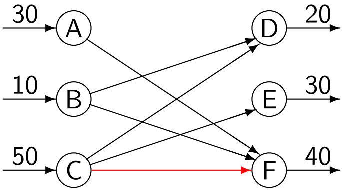
3	6	30 ; 5	30
0 ; 2	5	10 ; 5	10
20 ; 1	30 ; 2	3	50
20	30	40	



Degenerescência: saída do vértice degenerado

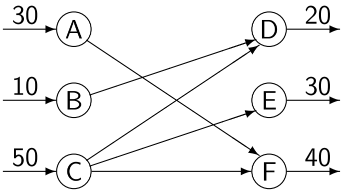
- O pivô anterior designa-se por *pivô degenerado:*
  a base é diferente, mas a solução básica (vértice) é a mesma.

	-2	-3	-5	
0	$+1$ 3	$+3$ 6	30 5	30
0	$0+\theta$ 2	$+2$ 5	$10-\theta$ 5	10
-1	$20-\theta$ 1	30 2	-1 $+\theta$ 3	50
	20	30	40	



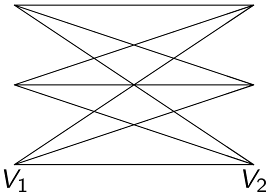
$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$

	-2	-3	-5	
0	$+1$ 3	$+3$ 6	30 5	30
0	10 2	$+2$ 5	5	10
-1	10 1	30 2	-1 10 3	50
	20	30	40	



Dual do problema de transportes

Grafo bipartido, $G = (V_1, V_2, A)$, em dois conjuntos de vértices V_1 e V_2.



Modelo primal do problema de transportes

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{ij: i \in V_1, j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
suj. \quad & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\
& - \sum_{i \in V_1} x_{ij} = -b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de transportes: estrutura

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}			Variáveis duais
	1	1	1							=	a_1	u_1
				1	1	1				=	a_2	u_2
							1	1	1	=	a_3	u_3
	-1			-1			-1			=	$-b_1$	v_1
		-1			-1			-1		=	$-b_2$	v_2
			-1			-1			-1	=	$-b_3$	v_3
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}			

variáveis duais (multiplicadores) do problema de transportes

- u_i : variável dual associada à restrição do vértice $i \in V_1$
- v_j : variável dual associada à restrição do vértice $j \in V_2$
- Cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0, um $+1$ na posição i do bloco de cima e um -1 na posição j do bloco de baixo, respectivamente.
- Podemos associar uma coluna desse tipo a um arco do grafo.

Problema dual

Dual

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{i \in V_1} a_i u_i - \sum_{j \in V_2} b_j v_j \\ \text{suj. a} & u_i - v_j \leq c_{ij} \ , \ \forall i \in V_1, j \in V_2 \\ & u_i, v_j \text{ sem restrição de sinal} \end{array}$$

- as variáveis duais não têm restrição de sinal; iremos justificar esse facto já a seguir.

Construção do dual do problema de transportes - I

Regra:

- Uma restrição de igualdade no problema primal tem associada uma variável dual sem restrição de sinal.

- Há autores que, para construir o modelo dual, não reduzem o modelo a uma das formas indicadas ((max,≤) ou (min,≥)), e que usam directamente regras para saber o tipo de variáveis duais.
- Usando o procedimento apresentado nos diapositivos sobre Dualidade, todas essas regras podem ser derivadas.

Para exemplificar, com este exemplo do problema de transportes,

- Vamos colocar o problema na forma canónica: problema de *min* com restrições de ≥,
- vamos construir o problema dual,
- e obter justamente a regra acima apresentada.

Construção do dual do problema de transportes - II

Problema primal na forma canónica:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}			Variáveis duais
	1	1	1							$\geq$	a_1	u_1^+
	-1	-1	-1							$\geq$	$-a_1$	u_1^-
				1	1	1				$\geq$	a_2	u_2^+
				-1	-1	-1				$\geq$	$-a_2$	u_2^-
							1	1	1	$\geq$	a_3	u_3^+
							-1	-1	-1	$\geq$	$-a_3$	u_3^-
	-1			-1			-1			$\geq$	$-b_1$	v_1^+
	1			1			1			$\geq$	b_1	v_1^-
		-1			-1			-1		$\geq$	$-b_2$	v_2^+
		1			1			1		$\geq$	b_2	v_2^-
			-1			-1			-1	$\geq$	$-b_3$	v_3^+
			1			1			1	$\geq$	b_3	v_3^-
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}			

sendo todas as variáveis $u_i^+, u_i^- \geq 0, \forall i$ e $v_j^+, v_j^- \geq 0, \forall j$.

Construção do dual do problema de transportes - III

Problema dual correspondente:

	u_1^+	u_1^-	u_2^+	u_2^-	u_3^+	u_3^-	v_1^+	v_1^-	v_2^+	v_2^-	v_3^+	v_3^-		
	1	-1					-1	1					$\leq$	c_{11}
	1	-1							-1	1			$\leq$	c_{12}
	1	-1									-1	1	$\leq$	c_{13}
			1	-1			-1	1					$\leq$	c_{21}
			1	-1					-1	1			$\leq$	c_{22}
			1	-1							-1	1	$\leq$	c_{23}
					1	-1	-1	1					$\leq$	c_{31}
					1	-1			-1	1			$\leq$	c_{32}
					1	-1					-1	1	$\leq$	c_{33}
max	a_1	$-a_1$	a_2	$-a_2$	a_3	$-a_3$	$-b_1$	b_1	$-b_2$	b_2	$-b_3$	b_3		

As variáveis u_i e v_j definidas do seguinte modo não têm restrição de sinal:

$$u_i = u_i^+ - u_i^-, \quad \forall i$$

$$v_j = v_j^+ - v_j^-, \quad \forall j$$

Construção do dual do problema de transportes - IV

Modelo dual com variáveis sem restrição de sinal:

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3		
	1			-1			$\leq$	c_{11}
	1				-1		$\leq$	c_{12}
	1					-1	$\leq$	c_{13}
		1		-1			$\leq$	c_{21}
		1			-1		$\leq$	c_{22}
		1				-1	$\leq$	c_{23}
			1	-1			$\leq$	c_{31}
			1		-1		$\leq$	c_{32}
			1			-1	$\leq$	c_{33}
max	a_1	a_2	a_3	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$		

As variáveis u_i e v_j não têm restrição de sinal.

Método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores: passo 1

- Para cada variável básica x_{ij}, fazer: $u_i - v_j - c_{ij} = 0$,
- porque a variável dual correspondente (variável de folga da restrição dual) deve ser nula.

Solução dual: $c_B B^{-1} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$.

Método dos multiplicadores: passo 2

- Para cada variável não-básica x_{ij}, calcular: $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j)$.
- Como cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0,
- $(c_B B^{-1})A_{ij} - c_{ij} = u_i - v_j - c_{ij}$,
- que é simétrico de δ_{ij}, *i.e.*, $\delta_{ij} = -(c_B B^{-1})A_{ij} + c_{ij}$

O valor de δ_{ij} serve para avaliar se a variável não-básica é atractiva.

Fim