Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Maria Joana Torres

2018/19

Nesta secção iremos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$y' = f(x, y),$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$.

Chamamos a Ω o domínio da equação diferencial.

Definição:

Uma **solução de uma equação do tipo $y' = f(x,y)$** é uma função

$$y : I \to \mathbb{R},$$

em que I é um intervalo aberto da reta real, tal que

$$\forall x \in I, \quad (x, y(x)) \in \Omega \quad \text{e} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

Diremos que a solução y passa por um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se

$$x_0 \in I \quad \text{e} \quad y(x_0) = y_0\,.$$

$$(x,y) \underset{f}{\rightsquigarrow} f(x,y) = \operatorname{tg}\theta$$

A função f atribui a cada ponto de Ω um número real $f(x,y)$; a equação diferencial diz que a solução que passa por esse ponto deve ter inclinação igual a esse número real: $\operatorname{tg}\theta = f(x,y)$, onde θ é o ângulo da tangente T à solução com o eixo horizontal.

$$(x,y) \underset{f}{\rightsquigarrow} v(x,y) = (1, f(x,y))$$

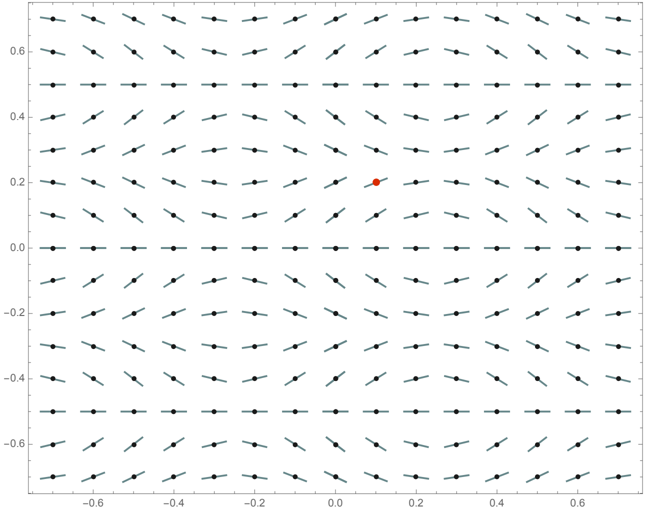
Em cada ponto $(x,y) \in \Omega$, consideramos o vetor $v(x,y) = (1, f(x,y))$ que determina a tangente T. Assim, temos um campo de vetores definido em Ω.

As soluções da equação $y' = f(x,y)$ são as curvas cujos vetores tangentes em cada ponto (x,y) são os vetores $v(x,y)$.

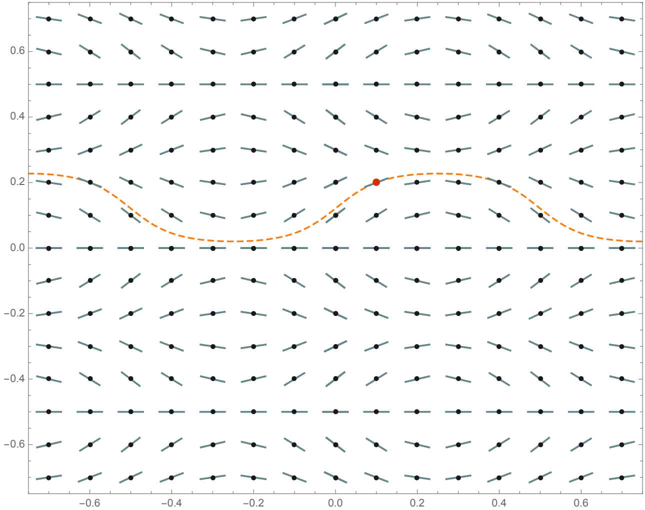
Definição:

O **campo de direções tangentes** de uma equação do tipo $y' = f(x,y)$, onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano, é a representação gráfica das retas tangentes às soluções da equação em cada ponto $(x,y) \in \Omega$.

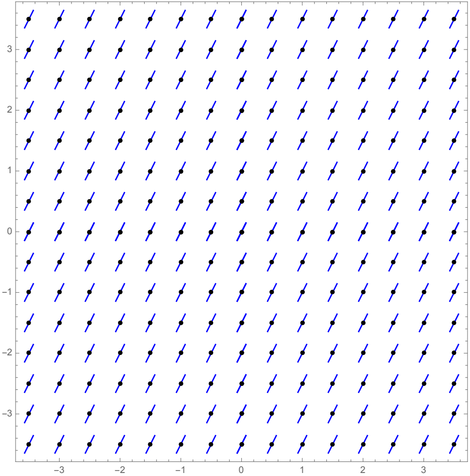
Exemplo 1: Equação $y' = \cos(2\pi x)\,\mathrm{sen}\,(4\pi y)$



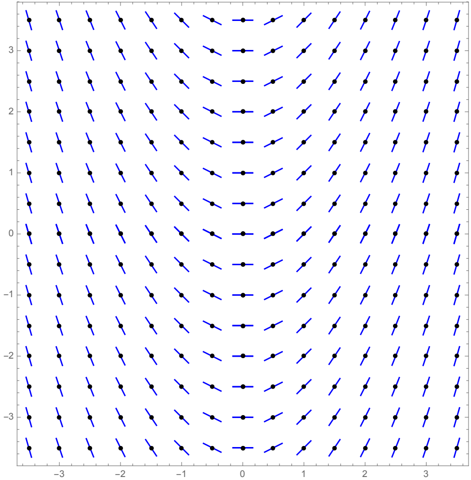
Exemplo 1: Equação $y' = \cos(2\pi x)\,\mathrm{sen}\,(4\pi y)$



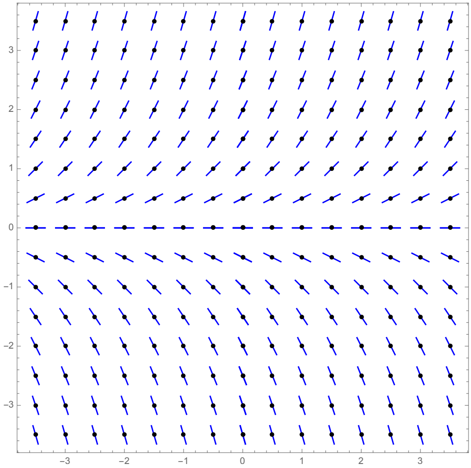
Exemplo 2: Equação $y' = 2$



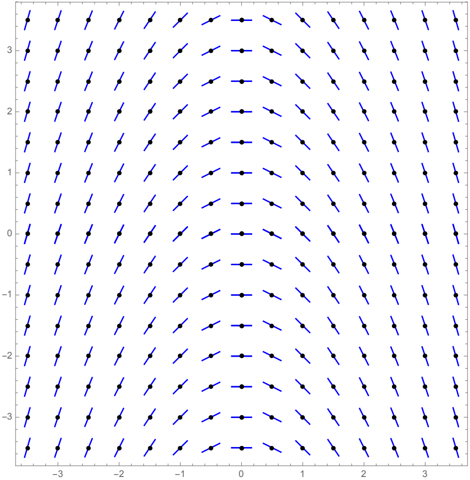
Exemplo 3: Equação $y' = x$



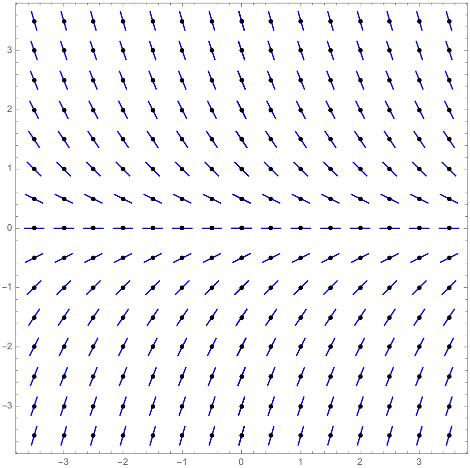
Exemplo 4: Equação $y' = y$



Exemplo 5: Equação $y' = -x$



Exemplo 6: Equação $y' = -y$



Teorema (Fundamental das Equações Diferenciais do tipo $y' = f(x, y)$) :

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que a derivada parcial de f com relação à segunda variável é contínua. Consideremos a equação diferencial $y' = f(x, y)$.

Então, se $(x_0, y_0) \in \Omega$:

1. existe uma e uma só solução maximal que passa por (x_0, y_0);
2. toda a solução pode ser prolongada a uma solução maximal;
3. se $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ são duas soluções da equação diferencial que passam em (x_0, y_0) então ${y_1}_{|I_1 \cap I_2} = {y_2}_{|I_1 \cap I_2}$.

A última alínea deste teorema é uma consequência simples das outras duas alíneas.

Definição:

Chamamos **equação separável** a uma equação que se pode escrever na forma

$$\boxed{y'(x) = g(x)p(y)}$$

em que $g(x)$, $p(y)$ são funções contínuas.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1} = x\,\frac{2 + y}{y^2 + 1}$$

Começamos com uma observação:

- Suponhamos que y é uma função de x e que queríamos calcular uma primitiva de uma função do tipo $h(y(x))y'$.

  Um modo de o fazer é encontrar $H(y)$, uma primitiva de $h(y)$ em ordem a y, e considerar a função $x \mapsto H(y(x))$.

  De facto, pelo Teorema da Derivação da Função Composta, tem-se que

  $$(H \circ y)' = H'(y(x))y'(x) = h(y(x))y'(x).$$

  Deste modo,

  calcular uma primitiva em ordem a x de $h(y(x))y'(x)$

  equivale a encontrar

  uma primitiva em ordem a y de $h(y)$.

Consideremos uma equação separável $y'(x) = g(x)p(y)$, $x \in U$, $y \in J$.

1. **Determinação das soluções constantes**.

   As soluções constantes da equação são as funções $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $y(x) = \lambda$ onde $\lambda \in J$ é um zero de p.

   Exemplos:

   - A função $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é a única solução constante da equação $y' = xy^3$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
   - A equação $(1 + x^2)y' = 1/y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0, +\infty[$ não tem soluções constantes.
   - A equação $y' = x \cos^2(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tem uma infinidade de soluções constantes: são as funções $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. **Determinação das soluções não constantes**.

Se $p(y) \neq 0$, a equação $y'(x) = g(x)p(y)$ é equivalente à equação

$$\frac{1}{p(y)} y'(x) = g(x).$$

Sejam

- $G(x)$ uma primitiva de $g(x)$ e
- $H(y)$ uma primitiva de $\frac{1}{p(y)}$

Integrando em ordem a x e usando a observação acima,

$$\frac{1}{p(y)} y'(x) = g(x)$$

$\Longrightarrow$

$$H(y) = G(x) + C$$

Determinação das soluções não constantes.

Na prática "separamos as variáveis":

1. Se $p(y) \neq 0$, a equação $y'(x) = g(x)p(y)$ é equivalente à equação
$$\frac{1}{p(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$
2. $$h(y)\,dy = g(x)\,dx, \quad h(y) := \frac{1}{p(y)}$$
3. $$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$
4. $$\boxed{H(y) = G(x) + C}$$

$$\big(H'(y) = h(y), \quad G'(x) = g(x)\big)$$

Definição:

Uma **equação diferencial linear de primeira ordem** é uma equação que está ou pode ser escrita na forma

$$\boxed{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),}$$

onde a_0, a_1 e f são funções contínuas definidas num aberto U da reta real e $a_1(x) \neq 0$, para todo $x \in U$.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),$$

Dividindo ambos os membros da equação por $a_1(x)$, obtemos a **forma canónica** da equação, isto é,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{P(x)} y = \underbrace{x^2}_{Q(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

O método para encontrar a solução deste tipo de equações diferenciais inicia-se pela multiplicação de ambos os membros da igualdade por uma função, que é habitual designar por μ e chamar **fator integrante**.

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = \mu(x)Q(x). \tag{1}$$

O ponto fundamental do método é o seguinte: será possível escolher a função μ de modo que o lado esquerdo da igualdade anterior seja igual à derivada do produto das funções y e μ, isto é, existirá uma função μ tal que

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = (y(x)\mu(x))'? \tag{2}$$

Para responder à questão levantada temos apenas que desenvolver a derivada que se apresenta no lado direito da igualdade (2) e ver que condição daí resulta para a função μ:

$$y'(x)\mu(x) + y(x)\underbrace{P(x)\mu(x)} = (y(x)\mu(x))' = y'(x)\mu(x) + y(x)\underbrace{\mu'(x)}$$

ou seja,

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x). \tag{3}$$

Esta igualdade diz-nos que a função μ é tal que a sua derivada é proporcional a si própria, propriedade que imediatamente nos permite identificar μ como uma função exponencial. Neste caso, será uma função exponencial com uma função como expoente cuja derivada é igual à função P dada (notemos que a função P é contínua), ou seja,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{4}$$

A partir das igualdades (1) e (2), podemos escrever

$$(y(x)\mu(x))' = \mu(x)Q(x).$$

Integrando em ordem a x, vem

$$y(x)\mu(x) = \int \mu(x)Q(x) + C. \tag{5}$$

Resolvendo em ordem a y, obtemos

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right),$$

onde

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

1. Escrever a equação na forma canónica
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
2. Calcular o fator integrante $\mu(x)$ pela fórmula
$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right)$$
3. Multiplicar a equação na forma canónica por $\mu(x)$ e notar que se obtém
$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)Q(x)$$
4. Integrar esta última equação
5. Resolver em ordem a y, dividindo por $\mu(x)$.

Definição:

Uma equação diferencial diz-se **homogénea** se for da forma

$$\boxed{y' = f(x,y) \;\; \text{com} \;\; f(x,y) = G\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Exemplo:

A equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{x}$ é homogénea, pois pode escrever-se como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1 = G\left(\frac{y}{x}\right), \qquad G(v) := v - 1\,.$$

Teorema:

Uma equação $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é homogénea se e só se

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \colon M(tx,ty) = t^n M(x,y) \ \text{ e } \ N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

Consideremos a equação homogénea

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

e façamos a mudança de variável dependente

$$\boxed{v = \frac{y}{x}}$$

Então, $y = xv$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

Substituindo na equação diferencial, vem

$$x\frac{dv}{dx} + v = G(v)$$

a qual é uma equação separável, pois pode ser escrita como

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}[G(v) - v] .$$

1. Fazer a mudança de variável $y = xv$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

2. Resolver a equação separável resultante
3. Voltar à variável y.

Definição:

Uma equação diferencial diz-se de **Bernoulli** se for da forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n\,, \quad n \neq 0, 1}$$

A mudança de variável definida por

$$\boxed{v = y^{1-n}}$$

transforma a equação de Bernoulli numa equação linear.
Dividindo ambos os membros da equação por y^n, vem

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Fazendo $v = y^{1-n}$ $(\Rightarrow \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx})$, vem

$$\boxed{\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)}$$

que é uma equação linear.

1. Dividir a equação por y^n
2. Fazer a mudança de variável $v = y^{1-n}$
3. Resolver a equação linear resultante
4. Voltar à variável y.