Universidade do Minho MIEInf

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

Formulário 2017'18

Critérios sobre séries de números reais

[Condição necessária de convergência] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim u_n = 0$.

[Condição suficiente de divergência] Se $\lim u_n \neq 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

[1.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

(a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

(b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\implies$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

[2.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim_n \dfrac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty]$.

(a) $\ell \neq 0$ ou $\ell \neq +\infty$ $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) Se $\ell = 0$

- (i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
- (ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\implies$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

(c) Se $\ell = +\infty$

- (i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- (ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\implies$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

[Critério da razão (ou D'Alembert)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos positivos e $\ell = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

(a) $\ell < 1$ $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) $\ell > 1$ $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) $\ell = 1$ $\implies$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos não negativos e $\ell = \lim \sqrt[n]{u_n}$.

(a) $\ell < 1$ $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) $\ell > 1$ $\implies$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) $\ell = 1$ $\implies$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério do integral] Se $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja, $f(n) = u_n$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ têm a mesma natureza.

[Convergência absoluta] Se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.

[Critério de Leibnitz] Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Então $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ é convergente.

Algumas propriedades das funções trigonométricas

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

3. $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

4. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (sen é ímpar)

5. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x$ (cos é par)

6. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

7. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ (sen tem período 2π)

8. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$ (cos tem período 2π)

9. $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$

10. $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x$

11. $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R} \quad \cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \operatorname{sen} \frac{x+y}{2}$

12. $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

Recorde-se que

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Algumas propriedades das funções hiperbólicas

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \operatorname{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

2. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

3. $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \operatorname{coth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$

4. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ (a função sh é ímpar)

5. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ (a função ch é par)

6. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$

7. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x$

8. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$

Regras de derivação

(Omitem-se os domínios das funções e considera-se a uma constante apropriada.)

$(a)' = 0$	$(x^a)' = a\,x^{a-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen}' x = \cos x$	$\cos' x = -\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$	$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$	$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$
$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$
$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x$	$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x$
$\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec}' x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosec}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{argsech}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argcosech}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

Recorde-se ainda que

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$[g \circ u]'(x) = g'(u(x))\,u'(x)$
$[f^{-1}]'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$	

Primitivas imediatas

($u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo I e $\mathcal{C}$ denota uma constante real arbitrária)

$\displaystyle\int a\,dx = ax + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u'\,u^\alpha\,dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C} \quad (\alpha \neq -1)$
$\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int a^u\,u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + \mathcal{C} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$\displaystyle\int u' \cos u\,dx = \operatorname{sen} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \sec^2 u\,dx = \operatorname{tg} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{cosec}^2 u\,dx = -\operatorname{cotg} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \operatorname{tg} u\,dx = -\ln\lvert\cos u\rvert + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{cotg} u\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \sec u\,dx = \ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{cosec} u\,dx = \ln\lvert\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u\rvert + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arccos u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{-u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arccotg} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \operatorname{ch} u\,dx = \operatorname{sh} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{sh} u\,dx = \operatorname{ch} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int u' \operatorname{sech}^2 u\,dx = \operatorname{th} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int u' \operatorname{cosech}^2 u\,dx = -\operatorname{coth} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\,dx = \operatorname{argsh} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,dx = \operatorname{argch} u + \mathcal{C}$
$\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{argth} u + \mathcal{C}$	$\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{argcth} u + \mathcal{C}$