RESOLUÇÃO 1º TESTE
2014/2015 22/abr/2014

1.

$A = \{a, b\}$

L:

(1) $a \in L$;
(2) $b \in L$;
(3) $x \in L \Rightarrow axa \in L, \forall x \in A^*$;
(4) $x \in L \Rightarrow bxb \in L, \forall x \in A^*$.

(a) $u = baaab$ tem 2 ocorrências da letra b e 3 da letra a.

Temos que

S: a, aaa, $baaab$

é uma sequência de formação de u, uma vez que u é o último elemento de S, sendo obtido do elemento aaa por aplicação da regra (4); além disso, aaa é obtido de a por aplicação da regra (3); mais, a é um elemento de L por (1).

(b) Seja $\mathcal{P}(x)$ uma propriedade sobre os elementos x de L.

Se

1) $\mathcal{P}(a)$;
2) $\mathcal{P}(b)$;
3) $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{P}(axa)$, $\forall x \in L$;
4) $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{P}(bxb)$, $\forall x \in L$;

então $\mathcal{P}(x)$, para todo $x \in L$.

(c) Seja $\mathcal{P}(x)$ a propriedade "o nº de ocorrências de a em x é ímpar ou o nº de ocorrências de b em x é ímpar".

(1) O nº de ocorrências da letra a em a é 1, pelo que é ímpar. Logo, $\mathcal{P}(a)$.

(2) O nº de ocorrências da letra b em b é 1, pelo que é ímpar. Assim, $\mathcal{P}(B)$.

(3) Seja $x \in L$ tal que $P(x)$, ou seja, tal que o nº de ocorrências de a em x é ímpar ou o nº de ocorrências de b em x é ímpar. Temos, assim, dois casos possíveis:

[1º CASO] o nº de ocorrências de a em x é ímpar

Então, o nº de ocorrências de a em axa é ímpar também, (por ser obtido do nº de ocorrências de a em x somado com 2) assim como o nº de ocorrências de a em bxb (por coincidir com o nº de ocorrências de a em x).

[2º CASO] o nº de ocorrências de b em x é ímpar

Neste caso, o nº de ocorrências de b em axa coincide com o nº de ocorrências de b em x e o nº de ocorrências de b em bxb é obtido somando 2 ao nº de ocorrências de b em x. Logo, são também nºs ímpares.

Assim, $P(axa)$ e $P(bxb)$.

Por (1), (2) e (3), pelo Princípio de Indução Estrutural em L, $P(x)$, para todo $x \in L$.

2. $f: \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ é definida por recursão estrutural do seguinte modo:

1) $f(p_i) = p_i$, $\forall i \in \mathbb{N}_0$;
2) $f(\perp) = p_0 \wedge \neg p_0$;
3) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
4) $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
5) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
6) $f(\varphi \to \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$
7) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = (\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \wedge (\neg f(\psi) \vee f(\varphi))$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

3.

$$((p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3) \rightarrow (p_2 \vee \bot)$$

$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$$\Leftrightarrow \neg((p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3) \vee (p_2 \vee \bot)$$

Leis de DeMorgan
$(\varphi \vee \bot) \Leftrightarrow \varphi$

$$\Leftrightarrow ((\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge p_3) \vee p_2$$

Distributividade

$$\Leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2) = \theta$$

θ é uma FNC logicamente equivalente à fórmula dada

4. a) Seja $\varphi = p_0$. Temos que

$$var((p_0 \to p_1)[\varphi/p_0])$$
$$= var(p_0 \to p_1) = \{p_0, p_1\}$$

Logo, $p_0 \in var((p_0 \to p_1)[\varphi/p_0])$ e a afirmação é FALSA.

b) Seja v uma valoração tal que

$$v(\neg p_1 \wedge p_2) = 1$$
e
$$v(p_2 \to p_3) = 1$$

Pretendemos mostrar que $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_3) = 1$.

Temos que

$v(\neg p_1 \wedge p_2) = 1$ se e só se $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 1$.

Se $v(p_2) = 1$ e $v(p_2 \to p_3) = 1$, então $v(p_3) = 1$.

Assim, $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_3) = 1$,

sendo a afirmação VERDADEIRA

5.

a) p_0: o dífice público está acima do previsto

p_1: o Presidente Resende mente

p_2: o Ministro Evaristo percebe disto

1ª afirmação: $\varphi = p_0 \to p_1$

2ª afirmação: $\psi = \neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow \neg p_0)$

3ª afirmação: $\sigma = \neg p_2 \vee p_0$

b)

p_0	p_1	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_2 \leftrightarrow \neg p_0$	$\varphi = p_0 \to p_1$	$\psi = \neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow \neg p_0)$	$\sigma = \neg p_2 \vee p_0$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1

Como podemos comprovar pelas linhas 1, 2 e 6 da tabela, as três afirmações podem ser simultaneamente verdadeiras.

c) Analisando a tabela apresentada em b), há apenas um caso em que somente uma das afirmações é verdadeira (que corresponde à linha 3, sendo φ e ψ falsas e σ verdadeira). Nesse caso, p_2 toma o valor lógico 1. Assim, podemos concluir que o Ministro Evaristo percebe disto.

6. a) Sejam $T = \{p_0\}$ e $\varphi = p_1$. Temos que $T \cup \{\varphi\}$ é consistente (se v for uma valoração que atribui o valor lógico 1 a todas as variáveis proposicionais então $v \models T \cup \{\varphi\}$) e $T \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente (se v' for uma valoração que atri-

tui o valor lógico 0 a p_1 e o valor lógico 1 às restantes variáveis proposicionais, então $v' \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$).

Logo, a afirmação é FALSA.

b) Admitamos que φ, ψ e Γ são tais que $\Gamma, \varphi \models \psi$ e $\models \varphi$.
Seja v uma valoração tal que $v \models \Gamma$
Como $\models \varphi$, temos que $v(\varphi) = 1$. Logo, $v \models \Gamma \cup \{\varphi\}$.
De $\Gamma, \varphi \models \psi$, segue que $v(\psi) = 1$. Assim, $v(\psi \wedge \varphi) = 1$. Logo, $\Gamma \models \psi \wedge \varphi$.

A afirmação é VERDADEIRA