Universidade do Minho MIEInf

Departamento de Matemática e Aplicações

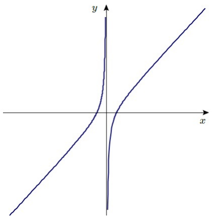
Cálculo

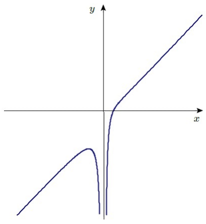
folha 4 2017'18

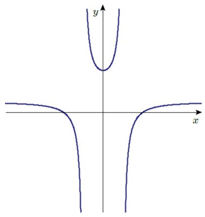
Funções racionais.

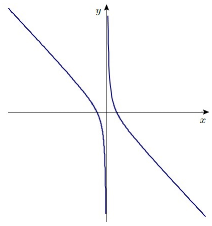
1. Considere a e b dois números reais tais que $0 < b < a$. Nestas condições, estabeleça a correspondência devida entre cada uma das expressões seguintes e a respetiva representação gráfica.

(a) $y = \dfrac{a}{x} - x$ (b) $y = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x}$ (c) $y = \dfrac{(x-a)(x^2+a)}{x^2}$ (d) $y = \dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-b)(x+b)}$

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


Funções trigonométricas diretas e inversas.

2. Expresse, usando o conceito de função composta, a diferença entre $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

NOTA: As notações $\operatorname{sen}^2 x$ **e** $(\operatorname{sen} x)^2$ **são equivalentes, isto é,** $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$.

3. Estabeleça as seguintes igualdades, válidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ (b) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ (c) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

4. Resolva as equações seguintes:

(a) $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{1}{2}$ (b) $\sqrt{3}\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x) = 2$ (c) $4\cos^3 x - 3\cos x = \dfrac{1}{2}$

5. A baía de Fundy, no Canadá, tem as maiores marés do mundo. Aí a diferença entre o **nível máximo e o mínimo das águas** é igual a $15\,m$. Num local particular da baía a profundidade da água (y, em metros) define-se em função do tempo (t, medido em horas a partir da meia-noite) por

$$y(t) = D + A\cos\left[B(t - C)\right].$$

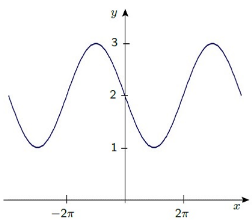
(a) Qual o significado físico do parâmetro D?

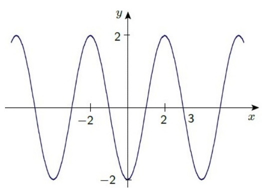
(b) Qual o valor de A?

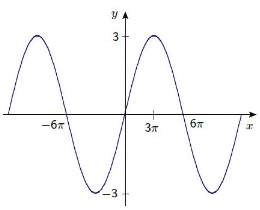
(c) Admitindo que o tempo decorrido entre duas marés consecutivas é de 12.4 horas, qual o valor de B?

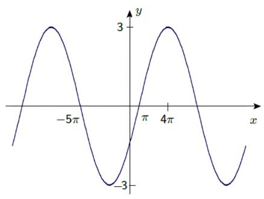
(d) Qual o significado físico de C?

6. Identifique, através de uma fórmula, as funções trigonométricas que a seguir se representam

(a)


(c)


(b)


(d)


7. Calcule

(a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2}))$

(b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(7\frac{\pi}{6}))$

(c) $\cos(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$

(d) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$

(e) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}))$

(f) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1))$

8. Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{sen}(\arccos x) & = & \sqrt{1-x^2} \\ \operatorname{tg}(\arccos x) & = & \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\operatorname{arcsen} x) & = & \sqrt{1-x^2} \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) & = & \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\operatorname{arctg} x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) & = & \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}\right.$

9. Calcule

(a) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $\operatorname{cotg}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

(c) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}-\arccos\frac{3}{5}\right)$

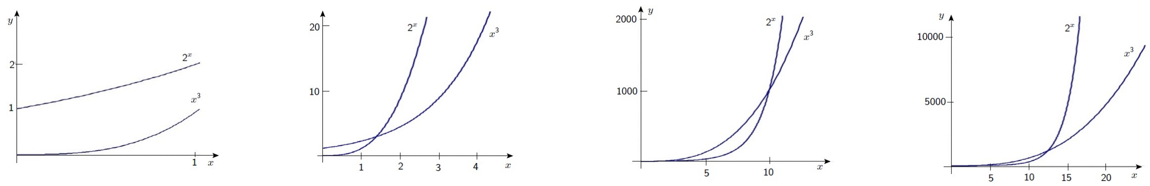
(d) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)+4\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(e) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$

(f) $\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)-\operatorname{cotg}^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$

Funções exponenciais e logarítmicas.

10. Em linguagem corrente usa-se a expressão "crescimento exponencial" como sinónimo de um crescimento muito rápido. Analise as seguintes representações gráficas e reflita sobre o que pode, em rigor, dizer-se quando comparamos uma função exponencial com uma função potência.



11. Resolva as seguintes equações:

(a) $e^x = e^{1-x}$

(b) $e^{2x}+2e^x-3=0$

(c) $e^{3x}-2e^{-x}=0$

(d) $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$

Funções hiperbólicas diretas e inversas.

12. Demonstre as seguintes igualdades:

(a) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$

(b) $\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^x$

(c) $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x$

(d) $\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x$

(e) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

(f) $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

(g) $\operatorname{th}^2 x+\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1$

(h) $\operatorname{coth}^2-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}=1$

(i) $\operatorname{argsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad x\in\mathbb{R}$

(j) $\operatorname{argch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\quad x\in[1,+\infty[$

(k) $\operatorname{argth} x=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}},\quad x\in]-1,1[$

(l) $\operatorname{argcth} x=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}},\quad x\in\mathbb{R}\setminus]-1,1[$