

2. Filas de espera – introdução

Uma situação de espera ocorre quando a procura de recursos/serviços excede a disponibilidade do sistema.

As situações de espera são muito comuns no nosso dia-a-dia. Eis alguns exemplos típicos:

- Bancos/supermercados – espera pelo serviço de caixa,
- Computadores – espera por uma resposta,
- Trânsito – espera em semáforos e cruzamentos,
- Transporte público – espera nas estações e apeadeiros.

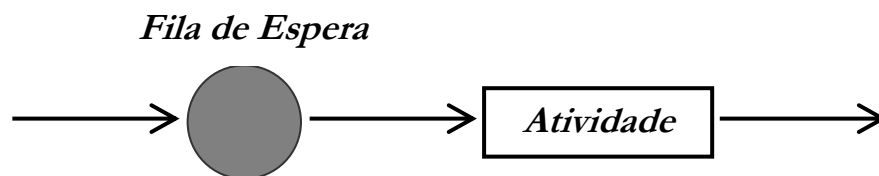
O problema consiste em encontrar uma solução que utilize um adequado nível de recursos para manter o sistema em operação económica. »» *Balanço entre o nível de serviço prestado aos clientes (“pequenas filas requerem muitos servidores”) e considerações económicas (“não demasiados servidores”).*

Exemplo: Chegada de barcos a um porto

- Cliente: Barco
- Serviço: Carga e descarga
- Facilidades: Cais de acostagem, guindastes
- Fator de variabilidade: Condições atmosféricas
- Fatores económicos: A paragem dos barcos (à espera de atendimento) é dispendiosa; o investimento em novas facilidades também pode ser volumoso.

Elementos básicos de um sistema de espera

Essencialmente, todos os sistemas de filas de espera podem ser reduzidos a subsistemas individuais consistindo em entidades (ou clientes) à espera por determinada atividade (ou serviço):



Três elementos básicos:

- (1) Processo de chegada – o modo pelo qual os clientes chegam ao sistema;
- (2) Disciplina da (fila) de espera – o modo como os clientes esperam até serem atendidos/servidos, (em Quantas filas? que Tipo de prioridade?)
- (3) Mecanismo de serviço.

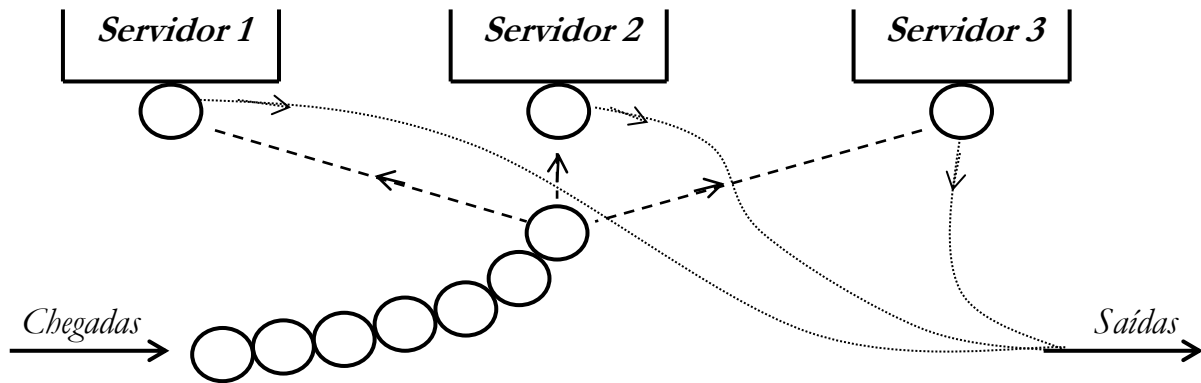
Processo de chegada (tipos de variações)

- Número de clientes potenciais
 - Finito ou infinito.
- Número de clientes que chegam simultaneamente
 - Único,
 - Em grupos de tamanho constante ou variável.
- Intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas
 - Constante,
 - Completamente aleatório (Poisson),
 - Outro tipo de distribuição estatística.
- Taxa média de chegadas
 - Constante,
 - Variável com o tempo,
 - Influenciada pelo estado da fila.
- Influência externa
 - Nenhuma,
 - Resultante do desempenho de um sistema a montante.

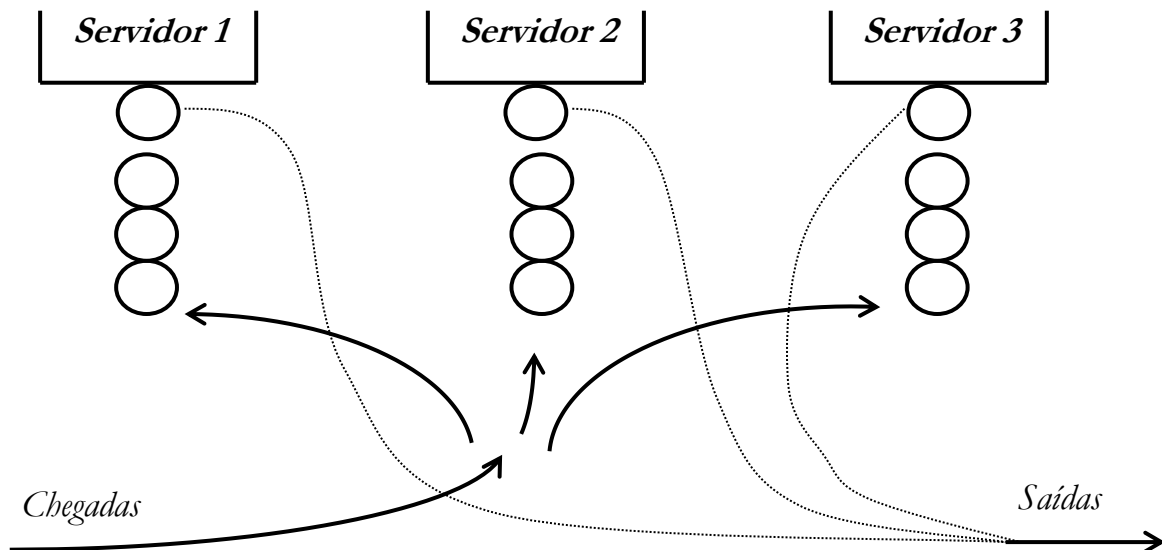
Disciplina da(s) fila(s) (Quantas?):

- **FIFO** (*First-In, First-Out*) – Os clientes são servidos pela ordem de chegada. O primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido.
» » *Exemplo: Caixa de Supermercado.*
- **LIFO** (*Last-In, First-Out*) – Os clientes são servidos pela ordem inversa à de chegada. O último a chegar é o primeiro a ser atendido. (Conceito de “*stack*”, pilha).
» » *Exemplo: Carga no porão de um navio.*
- **Prioridade** – Cada cliente tem associada uma prioridade específica.
» » *Exemplo: prioridade atribuída aos pacientes num serviço de urgência de um hospital.*
- **Remoção** (“*pre-emptive*”) – O cliente que chega é colocado à frente, removendo qq cliente que lá se encontre.
» » *Exemplo: chamada de emergência no serviço de urgência de um hospital.*
- **Prioridade aleatória.**

Quantas filas?



Fila de espera única



Três filas de espera independentes

Mecanismo de serviço (tipos de variações)

- Número de servidores
 - Um, vários ou variável.
- Número de clientes servidos simultaneamente
 - Um de cada vez,
 - Em grupos de tamanho constante ou variável.
- Disponibilidade do serviço
 - Permanente ou intermitente.
- Duração do serviço
 - Constante,
 - Distribuído exponencialmente (instantes de começo e finalização distribuídos independente e aleatoriamente),
 - Outras distribuições estatísticas,
 - Dependente do tempo despendido na fila.
- Taxa média de serviço
 - Constante,
 - Variável no tempo ou com o estado do sistema.

Medidas de desempenho mais comuns

- Medidas relativas a médias:
 - Número de clientes no sistema,
 - Número de clientes na fila (comprimento da fila),
 - Tempo de espera.
- Medidas relativas a probabilidades:
 - De haver n clientes no sistema,
 - De haver mais do que n clientes no sistema,
 - De se ter um tempo de espera entre t e $t+dt$,
 - De se ter um tempo de espera maior do que t ,
 - De os canais de serviço estarem inativos,
 - De se ter um período de ocupação de um serviço superior a t unidades de tempo.

Notação de Kendall

$$A/B/S(d|e)$$

- A – distribuição de probabilidade relativa ao intervalo de tempo entre chegadas ao sistema,
- B – distribuição de probabilidade relativa às durações de serviço,
- S – Número de canais de serviço,
- d – Número máximo de clientes permitidos no sistema em qualquer instante,
- e – Disciplina associada à fila de espera.

Exemplos:

$$»» M/M/1(\infty|FIFO) \text{ ou } M/M/1$$

(M significa exponencial negativa)

$$»» D/M/2, G/M/2(100|LIFO)$$

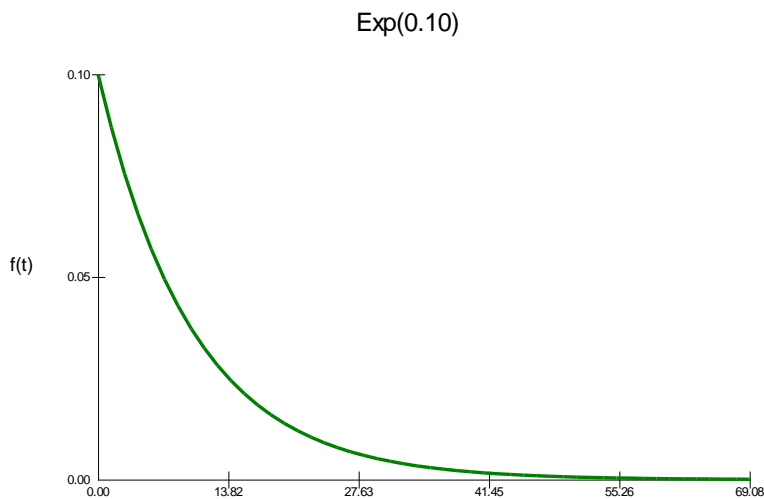
(D significa constante, G significa distribuição genérica)

Características da distribuição Exponencial Negativa

Função densidade de probabilidade (FDP):

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

α é o chamado parâmetro da distribuição, ex. $\alpha = 0.10$:



Função cumulativa de probabilidade:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

Média: $E(T) = \frac{1}{\alpha}$

Variância: $Var(T) = \frac{1}{\alpha^2}$

Características da distribuição de Poisson

Função densidade de probabilidade (FDP):

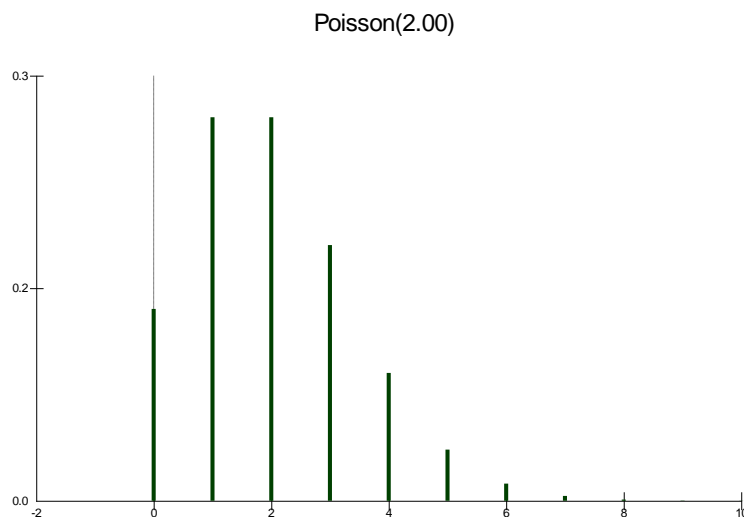
$$f(k) = \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

α n° médio de acontecimentos por unidade de tempo (taxa)

t intervalo de tempo

k n° de acontecimentos durante o intervalo t

αt é o chamado parâmetro da distribuição, por exemplo $\alpha t = 2$:



Média: $E(X) = \alpha t$

Variância: $Var(X) = \alpha t$

Fila de espera $M / M / 1$ (“fila de espera simples”)

»» Definições

Para as chegadas:

- Intervalo médio entre chegadas = a
- Taxa de chegada de clientes = λ (nº de clientes / u. tempo)

- $\lambda = 1/a$

- Função Densidade de Probabilidade (FDP) é $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Analogamente, para os serviços:

- Duração média de serviço = s
- Taxa de serviço = μ

- $\mu = 1/s$

- FDP é $g(t) = \mu e^{-\mu t}$

Fila de espera $M / M / 1$ »» *Taxa de chegadas*

Seja $P_n(t)$ a probabilidade de haver n clientes no sistema no instante t .

Se $n > 0$, então haverá $n - 1$ clientes à espera de ser atendidos (na fila) e 1 cliente a ser atendido.

Sendo o intervalo entre chegadas ao sistema uma variável aleatória que segue uma distribuição exponencial negativa, então o número de chegadas no intervalo de tempo dt segue uma distribuição de Poisson de média $\lambda \cdot dt$:

$$P_n = \frac{(\lambda \cdot dt)^n}{n!} e^{-\lambda dt}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= (\lambda \cdot dt) \cdot e^{-\lambda dt} \\ &= (\lambda dt) \cdot \left(1 - \lambda dt + \frac{(\lambda dt)^2}{2!} + \dots \right) \\ &\approx \lambda \cdot dt \quad (\text{para } dt \text{ suficientemente pequeno}) \end{aligned}$$

Fila de espera $M / M / 1$

»» Equações de probabilidade (1)

Considerando dt suficientemente curto para não haver mais do que uma chegada, nem mais do que uma saída do sistema, resulta o seguinte quadro de transições possíveis $t \rightarrow t+dt$.

Estado no instante t	n $P_n(t)$	n $P_n(t)$	$n+1$ $P_{n+1}(t)$	$n-1$ $P_{n-1}(t)$
Chegadas ocorridas em dt	0 $1 - \lambda dt$	1 λdt	0 $1 - \lambda dt$	1 λdt
Serviços terminados em dt	0 $1 - \mu dt$	1 μdt	1 μdt	0 $1 - \mu dt$

$$\begin{aligned}
 P_n(t+dt) = & P_n(t) \cdot (1 - \lambda dt) \cdot (1 - \mu dt) \\
 & + P_n(t) \cdot \lambda dt \cdot \mu dt \\
 & + P_{n+1}(t) \cdot (1 - \lambda dt) \cdot \mu dt \\
 & + P_{n-1}(t) \cdot \lambda dt \cdot (1 - \mu dt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_n(t+dt) = & P_n(t) \cdot (1 - \lambda dt - \mu dt + \lambda \cdot \mu \cdot dt^2) \\
 & + P_n(t) \cdot \lambda \cdot \mu \cdot dt^2 \\
 & + P_{n+1}(t) \cdot (\mu dt - \lambda \cdot \mu \cdot dt^2) \\
 & + P_{n-1}(t) \cdot (\lambda dt - \lambda \cdot \mu \cdot dt^2)
 \end{aligned}$$

Fila de espera $M / M / 1$ »» *Equações de probabilidade (2)*Desprezando os termos em dt^2 , obtém-se:

$$P_n(t + dt) = P_n(t) \cdot (1 - \lambda dt - \mu dt) + P_{n+1}(t) \cdot \mu dt + P_{n-1}(t) \cdot \lambda dt$$

Em particular, para $n = 0$, obtém-se:

$$P_0(t + dt) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda dt) + P_1(t) \cdot \mu dt$$

Podemos desenvolver a equação acima no sentido de obter:

$$\frac{P_n(t + dt) - P_n(t)}{dt} = -P_n(t) \cdot (\lambda + \mu) + P_{n+1}(t) \cdot \mu + P_{n-1}(t) \cdot \lambda$$

$$(\text{N.B. } \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P_n(t + dt) - P_n(t)}{dt} = \frac{dP_n(t)}{dt})$$

Então fica:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu) \cdot P_n(t) + \mu \cdot P_{n+1}(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t) & (n > 0) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu \cdot P_1(t) - \lambda \cdot P_0(t) & (n = 0) \end{aligned}$$

Fila de espera $M / M / 1$

»» *Comportamento a longo prazo (estado estacionário) (1)*

A solução geral das equações anteriores é do tipo:

$$P_n(t) = P_n + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} e^{-C_k t}$$

sendo P_n , $A_{n,k}$ e C_k constantes ($C_k \geq 0$ para $A_{n,k} \neq 0$).

Quando $t \rightarrow \infty$, o termo exponencial tornar-se-á desprezável, e então as probabilidades deverão convergir para a probabilidade invariante P_n — diz-se que o processo atingiu o estado estacionário.

[Contudo, o nº de clientes no sistema continuará a variar!]

Estado estacionário: $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

$$-(\lambda + \mu) \cdot P_n + \mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

$$\mu \cdot P_1 - \lambda \cdot P_0 = 0 \quad (n = 0)$$

Fila de espera $M / M / 1$ »» *Comportamento a longo prazo (estado estacionário) (2)*

$$-(\lambda + \mu) \cdot P_n + \mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

$$\mu \cdot P_1 - \lambda \cdot P_0 = 0 \quad (n = 0)$$

Da primeira equação tira-se sucessivamente que:

- $P_1 = (\lambda/\mu) \cdot P_0$
- $P_2 = (\lambda/\mu)^2 \cdot P_0$
-

$$\bullet \quad P_n = (\lambda/\mu)^n \cdot P_0$$

Ao somar todas as probabilidades, obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^n = P_0 \cdot \frac{1}{1 - \lambda/\mu}$$

(com o pressuposto de que $(\lambda/\mu) = \rho < 1$)Mas como $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, vem que $P_0 \cdot \frac{1}{1 - \lambda/\mu} = 1 \Leftrightarrow P_0 = 1 - \rho$

Finalmente, substituindo na equação acima enquadrada, fica:

$$P_n = \rho^n \cdot (1 - \rho)$$

Fila de espera $M / M / 1$

»» *Medidas de desempenho (1)*

- Utilização do servidor ou taxa de ocupação:

$$1 - P_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

(Probabilidade de o servidor estar ocupado)

- $\rho \geq 70\%$ são típicos de sistemas congestionados.
- $\rho \geq 90\%$ não são geralmente aceitáveis na prática.

- Número médio de clientes no sistema (L):

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n &= 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + \dots \\
 & &= \rho \cdot (1 - \rho) + 2\rho^2(1 - \rho) + \dots \\
 & &= \rho \cdot (1 - \rho)(1 + 2\rho + \dots) \\
 & &= \frac{\rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)^2} \\
 & &= \boxed{\frac{\rho}{(1 - \rho)}}
 \end{aligned}$$

Fila de espera $M / M / 1$

» » *Medidas de desempenho (2)*

- Número médio de clientes na fila (L_q):
(considerando que existe alguém no sistema)

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot P_n &= 1 \times P_2 + 2 \times P_3 + \dots \\
 & &= \rho^2 (1-\rho) + 2\rho^3 (1-\rho) + \dots \\
 & &= \rho^2 \cdot (1-\rho) (1 + 2\rho + \dots) \\
 & &= \frac{\rho^2 (1-\rho)}{(1-\rho)^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

- Probabilidade de haver mais do que k clientes no sistema:

$$\begin{aligned}
 P(n > k) &= \sum_{n=k+1}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^n \\
 &= (1-\rho) \rho^{k+1} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) \\
 &= \rho^{k+1}
 \end{aligned}$$

Fila de espera $M / M / 1$ »» *Medidas de desempenho (3)*

- Probabilidade de haver mais do que k clientes na fila:

$$\begin{aligned}
 P(n > k+1) &= \sum_{n=k+2}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^n \\
 &= (1-\rho) \rho^{k+2} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) \\
 &= \boxed{\rho^{k+2}}
 \end{aligned}$$

- Número médio na fila durante todo o tempo:

$$(1-\rho) \times 0 + \rho \left(\frac{\rho^2}{1-\rho} \right) = \boxed{\frac{\rho^3}{1-\rho}}$$

Fila de espera $M / M / 1$

»» Exemplo 1

Uma ponte rolante tem um tempo médio de elevação de 10 minutos, seguindo uma distribuição exponencial negativa.

Este serviço é solicitado, em média, 4 vezes por hora. A procura ocorre aleatoriamente, seguindo também uma distribuição exponencial negativa.

$(\lambda = 4 / \text{hora}, \mu = 6 / \text{hora})$

a) Utilização do servidor: $\rho = \lambda / \mu = 66\%$

b) N° médio no sistema: $\frac{\rho}{1 - \rho} = 2$

c) N° médio na fila (desde que esta exista): $\frac{\rho^2}{1 - \rho} = 1.33$

d) Probabilidade de haver mais do que 5 clientes no sistema:
 $\rho^{k+1} = \rho^6 = 0.088$

e) Probabilidade de haver mais do que 5 clientes na fila:
 $\rho^{k+2} = \rho^7 = 0.059$

f) N° médio na fila durante todo o tempo: $\frac{\rho^3}{1 - \rho} = 0.888$

Relações fundamentais de Little

Estas relações são extremamente úteis, pois permitem determinar as quatro medidas de desempenho a partir da expressão analítica de uma delas.

L Número (médio) de elementos no sistema,

L_q Número (médio) de elementos na fila,

W Tempo (médio) de espera/permanência no sistema,

W_q Tempo (médio) de espera na fila.

Admitindo uma taxa de chegadas constante (λ), as relações são:

- $L = \lambda W$ (ex, 10 clientes/h, cada demora 0.2h --> $L=2$ clientes em média no sistema)
- $L_q = \lambda W_q$
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ (válida qq que seja o nº de servidores, desde que a taxa de serviço seja igual para todos)
- $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ (deduz-se das anteriores...)

Filas de espera com comprimento limitado (K)

(ver págs. 76-77)

Devido a fatores diversos, tais como:

- Limitações físicas (ex., bomba de gasolina na via pública);
- Limitações administrativas (ex., estação de serviço/oficina).

Tipicamente, a taxa de chegadas depende do estado do sistema:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{se } n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0, & \text{se } n \geq K \end{cases}$$

Então, a taxa média (ponderada) é: $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$

Importante: As relações fundamentais (de *Little*) mantêm-se válidas se se substituir λ por $\bar{\lambda}$.

Neste caso, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ representa a “taxa de pressão”, e o equilíbrio é possível mesmo que $\rho > 1$. (Porquê?)

- $\frac{\bar{\lambda}}{\mu}$ representa a taxa de ocupação, e
- P_K representa também a probabilidade de desistência por falta de capacidade do sistema!

Sistemas de filas de espera com população finita (N)

(ver págs. 78-79)

Por exemplo, situações industriais em que existe um pequeno número de máquinas sujeitas a avarias mais ou menos frequentes. Nestes casos, os clientes representam as máquinas, enquanto os servidores representam os elementos da equipa de manutenção/reparação.

A taxa de chegadas depende do estado do sistema:

$$\lambda_n = \begin{cases} (N - n)\lambda, & \text{se } n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}$$

sendo, neste caso, λ a taxa de chegadas “unitária” (i.e., a taxa de chegada(s) quando existe apenas uma máquina não avariada).

Então, a taxa média (ponderada) de chegadas é:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^N (N - n)\lambda P_n = \lambda(N - L)$$

Como $\lambda_n = 0$ quando $n = N$, o sistema atingirá sempre o estado

de equilíbrio qualquer que seja o valor de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Processos de vida e morte ($M/M/1$)

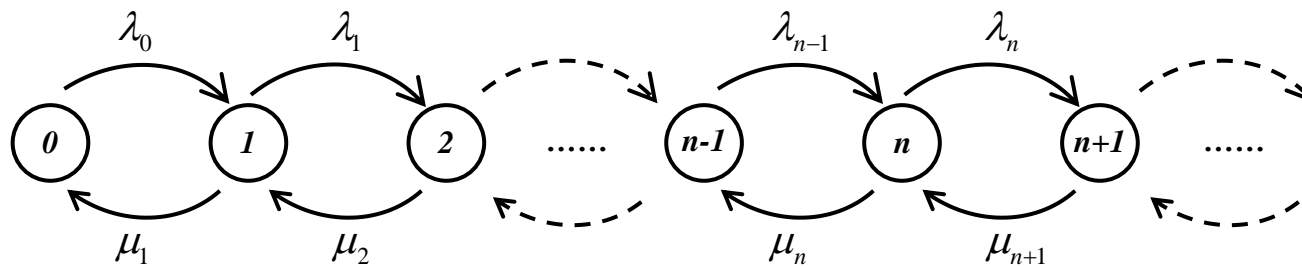


Diagrama do processo de vida e morte (genérico)

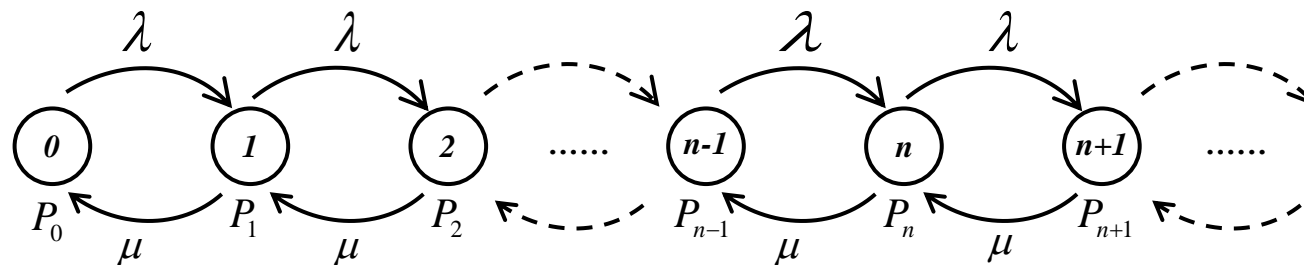


Diagrama do processo de vida e morte p/ processo ($M/M/1$)

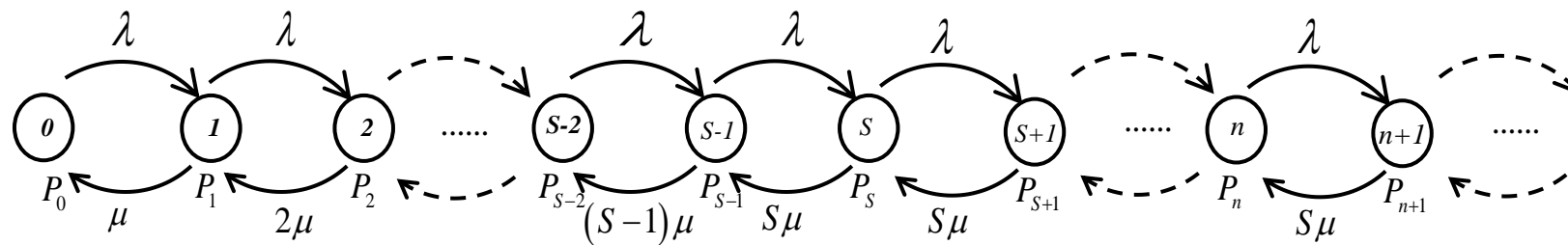
Processos de vida e morte (M/M/S)

Diagrama do processo de vida e morte p/ processo (M/M/S)

Características do modelo ($M / M / 1$) → “fila de espera simples”

Chegada: Poisson

Taxa = λ clientes / u. tempo

População = ∞

Fila máxima = ∞

Tempo de atendimento: Exponencial Negativo

Taxa = μ clientes / u. tempo

Nº servidores = 1

Taxa de ocupação = $\rho = (\lambda/\mu) < 1$

Taxa de desocupação = $1 - \rho$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho \quad (\text{taxa de desocupação})$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0$$

$$P_n = \rho^n P_0$$

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0$$

$$P(W_q = 0) = P_0$$

(Fonte deste resumo e dos seguintes: L.Valadares Tavares et al., *Investigação Operacional*, McGraw-Hill, 1996).

Características do modelo ($M / M / S$) → “fila de espera simples, com S servidores”

Chegada: Poisson

Taxa = λ clientes / u. tempo

População = ∞

Fila máxima = ∞

Tempo de atendimento: Exponencial Negativo

Taxa = μ clientes / u. tempo, servidor

Nº servidores = S

Taxa de ocupação = $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$

Taxa de desocupação = $1 - \rho$

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty} (n - S) P_n = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^S \rho}{S! (1 - \rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$P_0 = 1 / \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!} \frac{1}{1 - \rho} \right]$$

$$P(W > t) = e^{-\mu t} \left[1 + \frac{P_0 (\lambda/\mu)^S}{S! (1 - \rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu t (S - 1 - \lambda/\mu)}}{S - 1 - \lambda/\mu} \right) \right], \quad t \geq 0$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & \text{se } 0 \leq n \leq S \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{S! S^{n-S}} P_0, & \text{se } n \geq S \end{cases}$$

$$P(W_q > t) = \left[1 - P(W_q = 0) \right] e^{-S\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

Características do modelo ($M / M / 1(K)$) → “fila de espera c/ comprimento limitado”

Chegada: Poisson

Taxa = λ clientes / u. tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{se } n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0, & \text{se } n \geq K \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$$

População = ∞

Nº máx. no sistema = K e **Fila máxima** = $K-1$

Tempo de atendimento: Exponencial Negativo

Taxa = μ clientes / u. tempo, servidor

Nº servidores = 1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \quad (\text{taxa de desocupação})$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0, & \text{se } n = 1, \dots, K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = P_0$$

Características do modelo ($M/M/S(K)$) → “fila de espera c/ comprimento limitado e S servidores”**Chegada:** Poisson**Tempo de atendimento:** Exponencial Negativo**Taxa** = λ clientes / u. tempo**Taxa** = μ clientes / u. tempo, servidor

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{se } n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0, & \text{se } n \geq K \end{cases}$$

Nº servidores = S

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

População = ∞

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{S\mu}$$

Nº máx. no sistema = K e **Fila máxima** = $K - S$

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{S\mu}$$

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty} (n - S) P_n = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^S \rho}{S! (1 - \rho)^2} [1 - \rho^{K-S} - (K - S) \rho^{K-S} (1 - \rho)]$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = 1 / \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!} \sum_{n=S}^K \rho^{n-S} \right]$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & \text{se } n = 1, \dots, S \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{S! S^{n-S}} P_0, & \text{se } n = S, \dots, K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$$

Características do modelo ($M/M/1/N$) \rightarrow “fila de espera simples, mas população finita”**Chegada:** Poisson**Tempo de atendimento:** Exponencial Negativo**Taxa** = λ clientes / u. tempo**Taxa** = μ clientes / u. tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & \text{se } n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}$$

Nº servidores = 1

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n)\lambda P_n = \lambda(N-L)$$

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

População = N **Fila máxima** = ∞

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = 1 / \sum_{n=0}^N \left[\frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \quad (\text{taxa de desocupação})$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, & \text{se } n = 1, \dots, N \\ 0, & \text{se } n > N \end{cases} \quad P(W_q = 0) = P_0$$

Características do modelo ($M/M/S/N$) → “fila de espera simples c/ S servidores e população finita”**Chegada:** Poisson**Tempo de atendimento:** Exponencial Negativo**Taxa** = λ clientes / u. tempo**Taxa** = μ clientes / u. tempo, servidor

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & \text{se } n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}$$

Nº servidores = S

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n)\lambda P_n = \lambda(N-L)$$

$$\text{Taxa de ocupação} = \frac{\bar{\lambda}}{S\mu}$$

População = N **Fila máxima** = ∞

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{S\mu}$$

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S) P_n$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = 1 / \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=S}^N \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, & \text{se } n = 1, \dots, S \\ \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, & \text{se } n = S, \dots, N \\ 0, & \text{se } n > N \end{cases}$$

Características do modelo ($M/G/1$) → “fila de espera com distribuição genérica”

Chegada: Poisson

Taxa = λ clientes / u. tempo

População = ∞

Fila máxima = ∞

Tempo de atendimento: qualquer variável aleatória

$$\text{Média} = \frac{1}{\mu}$$

$$\text{Variância} = \sigma^2$$

Nº servidores = 1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Taxa de ocupação = ρ

Taxa de desocupação = $1 - \rho$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho \text{ (taxa de desocupação)}$$

Modelo $M/M/1$: Exemplo 2

Um armazém recebe camiões com encomendas que são descarregadas usando empilhadores.

- Os camiões chegam segundo um processo de Poisson à taxa de 16 camiões/dia;
- Os tempos médios de descarga são variáveis (seguindo uma distribuição Exponencial Negativa):

Nº empilhadores	1	2	3	4	5
Tempo médio de descarga (min)	50	20	15	12	10

- A operação de empilhadores custa 7.5 €/h;
- A imobilização dos camiões acarreta um custo de 15 €/h;
- 1 dia = 8 horas.

Pretende-se dimensionar a equipa de empilhadores de modo a minimizar os custos globais do sistema.

Modelo $M/M/1$: Exemplo 2 (resolução)

Taxa de chegada, $\lambda = 2$ camiões/h

Nº de empi- lhadores	Tempo médio de descarga [min]	Taxa de serviço [camiões/h]	Taxa de ocupação	Tempo médio no sistema por camião [h]	Tempo total dos camiões por hora [h]	Custo de imobilização dos camiões [€/h]	Custo dos empi- lhadores [€/h]	Custo total [€/h]
n	$1/\mu$	μ	λ/μ	W	λW	$15\lambda W$	$7.5n$	
1	50	1.20	1.67					
2	20	3.00	0.67	1.00	2.00	30.00	15.00	45.00
3	15	4.00	0.50	0.50	1.00	15.00	22.5	37.50
4	12	5.00	0.40	0.33	0.67	10.00	30.00	40.00
5	10	6.00	0.33	0.25	0.50	7.50	37.50	45.00

Exponencial Negativa? (teste do χ^2 - Qui-Quadrado)

Será razoável admitir que, por exemplo, os intervalos de tempo entre duas chegadas consecutivas (inter-chegadas) seguem aproximadamente uma distribuição Exponencial Negativa?

Suponhamos que se observou a seguinte sequência: t_1, t_2, \dots, t_m

Uma estimativa razoável para a taxa de chegadas é: $\hat{\lambda} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m t_i}$

Mas será que t_1, t_2, \dots, t_m é consistente com a densidade de probabilidades $f(t) = \hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda}t}$?

Teste do χ^2 - Qui-Quadrado

Dividindo a amostra em k categorias, podemos determinar o número de t_i (s) que caem em cada uma delas: e_j - número esperado, e o_j - número observado.

Então a estatística $\chi^2(obs) = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$ deverá seguir uma distribuição χ^2 com $(k-r-1)$ graus de liberdade (onde $r=1$).

- Se $\chi^2(obs)$ é pequeno, será razoável admitir que os t_i (s) representam uma amostra da distribuição $f(t) = \hat{\lambda}e^{-\hat{\lambda}t}$.
(N.B. idealmente todos os $e_j = o_j$).
- Se $\chi^2(obs)$ é grande, esta consideração não será razoável.

Teste do χ^2 : (conjeturas)

- Hipótese $H_0: t_1, t_2, \dots, t_m$ é uma amostra aleatória da variável aleatória com densidade $f(t)$.
- Hipótese $H_a: t_1, t_2, \dots, t_m$ não é uma amostra aleatória da variável aleatória com densidade $f(t)$.

Dado um valor de α (erro Tipo I), aceitar H_0 se $\chi^2(obs) \leq \chi^2_{k-r-1}(\alpha)$

Exemplo:

(Tempos em minutos.)

Obs.(s)	$m=25$ observações.
0.01	Sum(t)=9.19 minutos. $\rightarrow \hat{\lambda} = 25/9.19 = 2.72$ /minuto.
0.07	
0.03	
0.08	
0.04	
0.1	Consistente com $f(t) = 2.72e^{-2.72t}$?
0.05	
0.1	
0.11	
1.17	
1.5	Escolhendo $k=5$ categorias, a probabilidade de cair em cada uma delas é 0.2, logo $e_j = 0.2 \times 25 = 5$.
0.93	
0.54	
0.19	
0.22	
0.36	Determinam-se as fronteiras das categorias a partir da função acumulada $F(t) = P(A \leq t) = 1 - e^{-2.72t}$:
0.27	
0.46	
0.51	
0.11	
0.56	Cat. 1: $0 \leq t < l_1$ minutos
0.72	Cat. 2: $l_1 \leq t < l_2$ minutos
0.29	Cat. 3: $l_2 \leq t < l_3$ minutos
0.04	Cat. 4: $l_3 \leq t < l_4$ minutos
0.73	Cat. 5: $l_4 \leq t$ minutos
<u>T=9.19</u>	$F(l_1) = 0.2$, $F(l_2) = 0.4$, $F(l_3) = 0.6$ e $F(l_4) = 0.8$
	Logo tiram-se: $l_1 = 0.08$, $l_2 = 0.19$, $l_3 = 0.34$, $l_4 = 0.59$

	Tira-se que $\chi^2(obs) = 0.4$, e escolhendo $\alpha = 0.05$, então $\chi^2_3(0.05) = 7.81$ (tabela).
	Conclusão: ACEITAR H_0 ! (erro 5%)

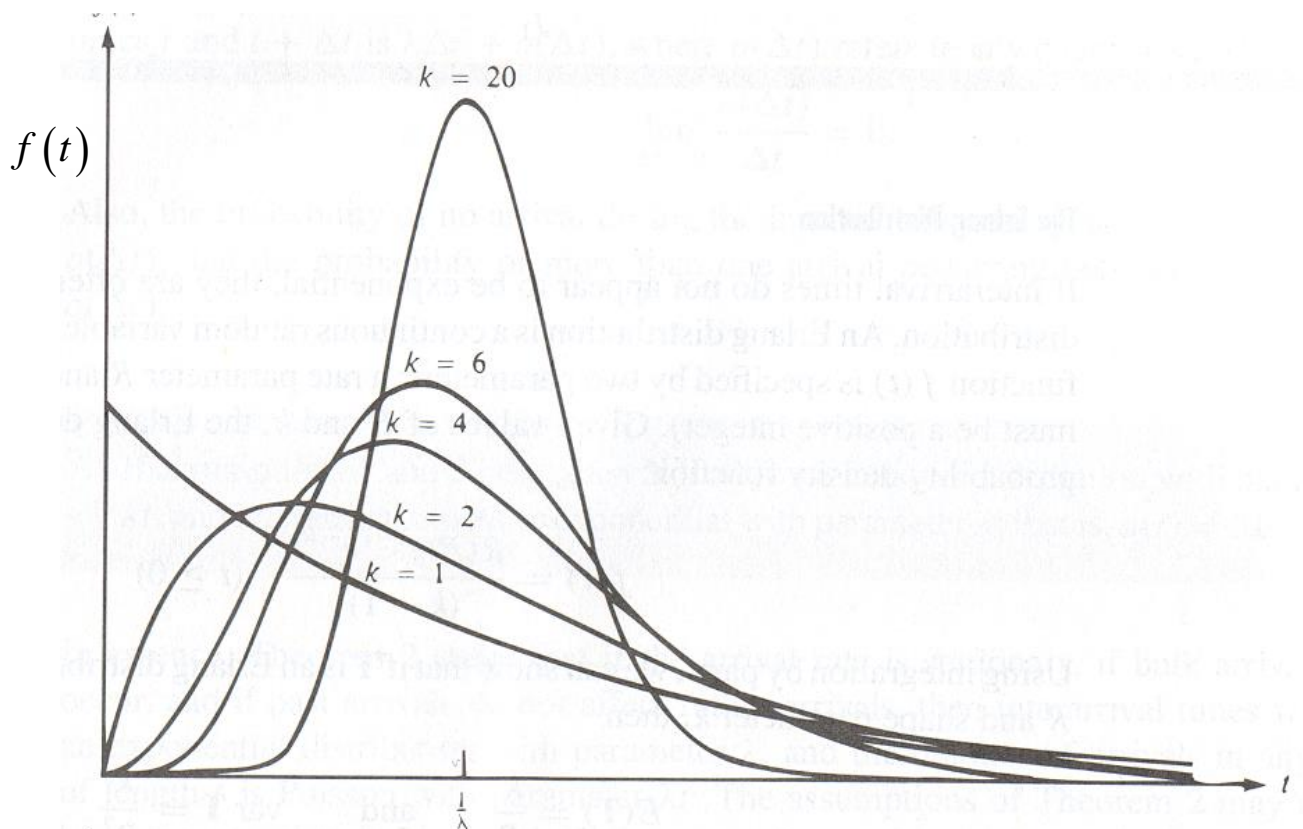
Características da Distribuição k -Erlang (E_k)

Função densidade de probabilidade (FDP):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha t)^{k-1} e^{-\alpha t}}{(k-1)!} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

Dois parâmetros: α é a taxa ou escala da distribuição

k é o parâmetro de forma ($k > 0$)



Média: $E(T) = \frac{k}{\alpha}$

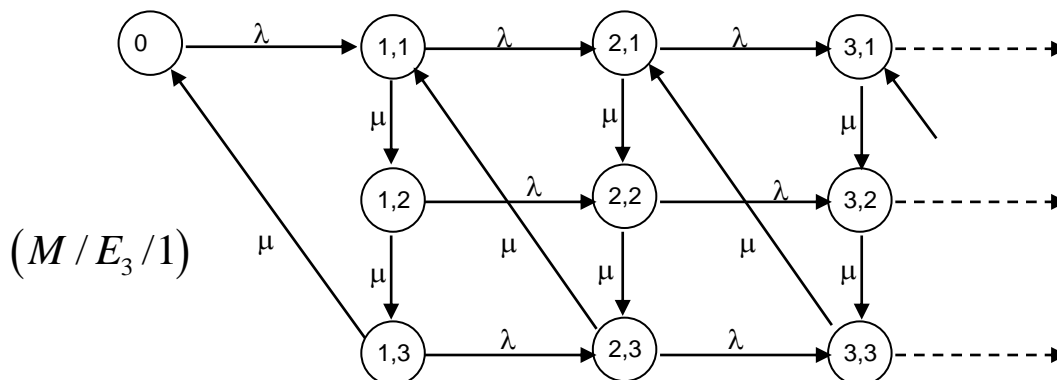
Variância: $Var(T) = \frac{k}{\alpha^2}$

Características da Distribuição k -Erlang (E_k) – cont.

Dependendo do valor de k , a distribuição de Erlang pode adaptar-se a um largo espectro de formas:

- $k=1$, a Erlang coincide com a Exponencial Negativa (assimétrica, “alongada para a direita”);
- à medida que k aumenta, a distribuição torna-se mais e mais similar à Normal;
- $k \rightarrow \infty$, a Erlang aproxima-se de uma constante ($\text{Var} = 0$)!

Se X é uma variável aleatória *IID* segundo uma Erlang $(k, k\alpha)$, então esta pode ser representada pela soma $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, na qual as variáveis Y_i são *IID* Exponenciais Negativas com taxa $(k\alpha)$. Diz-se que o processo (ex., de chegada) de Erlang é equivalente a um processo Exponencial com k fases. Exemplo:



Modelos Analíticos vs. Técnica da Simulação

Os modelos de Filas de Espera que apresentados anteriormente, baseados em distribuições Exponenciais Negativas, foram resolvidos por via analítica. Recorrendo a manipulações matemáticas de reduzida complexidade, foi possível chegar a fórmulas sintéticas para calcular as suas medidas de desempenho fundamentais.

Em muitos casos em que não é razoável admitir uma Exponencial Negativa, pode ser, no entanto, possível admitir outro tipo de distribuição, como por exemplo a Erlang. Porém, a complexidade da via de resolução analítica frequentemente cresce severamente ou torna-se mesmo inviável. (Em alguns casos muito particulares, é possível ainda assim recorrer a tabelas estatísticas para determinar algumas medidas de desempenho em função dos parâmetros admitidos.) Em resumo, apesar da complexidade que as expressões possam aparentar, a abordagem analítica permite obter resultados rápidos e económicos, exatos ou aproximados.

Em última instância, perante um problema concreto que viola fortemente todas as hipóteses dos modelos analíticos disponíveis, recorre-se à técnica da SIMULAÇÃO. A simulação reproduz o funcionamento do sistema, é mais flexível relativamente ao modelo considerado, mas exige geralmente mais recursos computacionais, mais tempo, e um grande cuidado no tratamento estatístico e interpretação dos resultados obtidos.

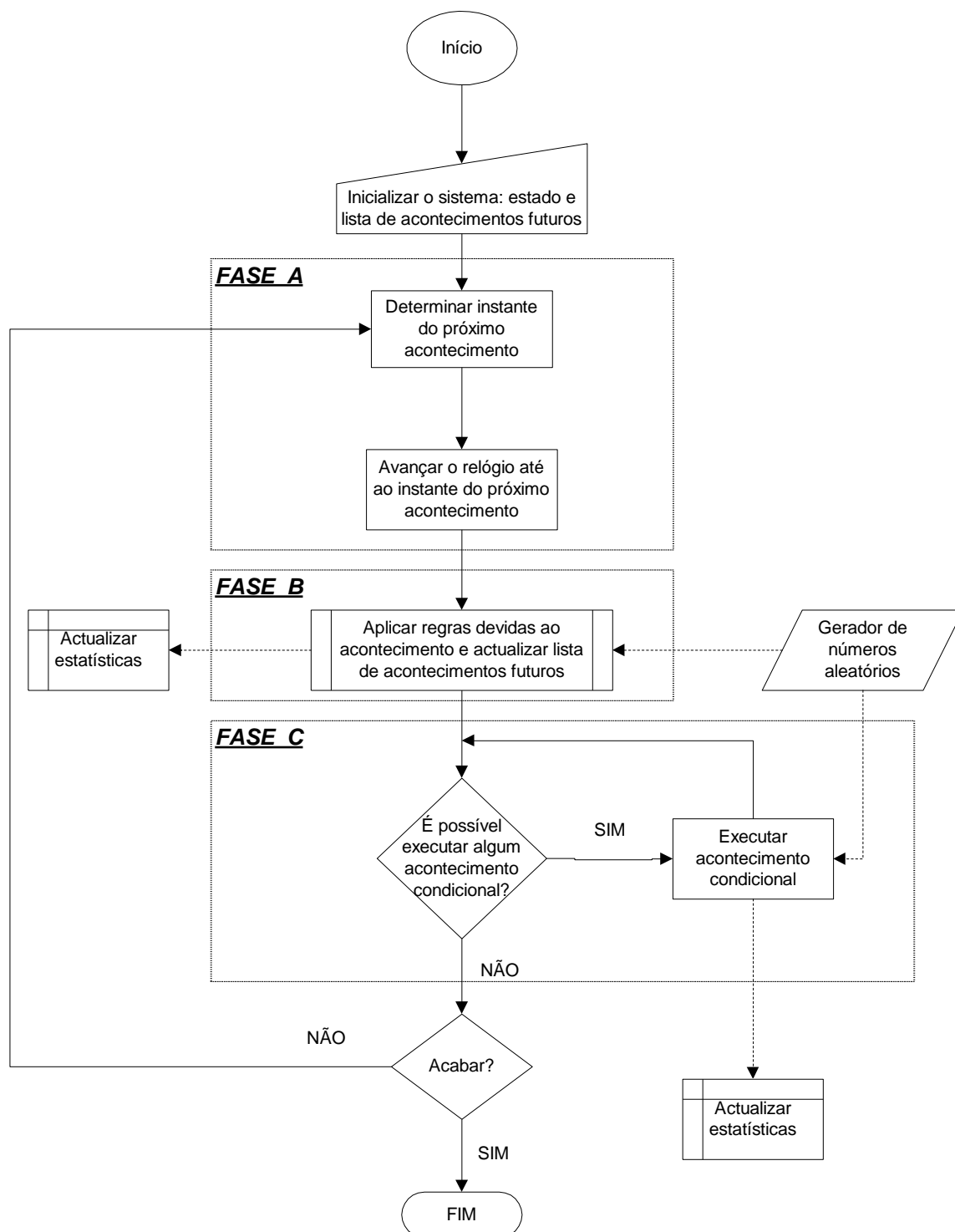
Técnica da Simulação – Elementos principais

Um modelo de simulação “por acontecimentos” inclui os seguintes elementos principais:

- Um relógio (p/ controlo do tempo);
- Um gerador de números aleatórios;
- Entidades;
- Acontecimentos e estados;
- Um conjunto de regras (para cada acontecimento);
- Uma lista atualizada de (instantes p/ futuros) acontecimentos;
- Um processo de coleção e gravação de estatísticas; e
- Um procedimento (fluxograma) que una e dinamize os elementos anteriores, garantindo a execução do processo de funcionamento.

Técnica da Simulação – Procedimento

O fluxograma de três fases (A-B-C) para uma simulação por acontecimentos discretos pode ser descrito da seguinte forma:



Técnica da Simulação – Gerador de aleatoriedade

Normalmente, um gerador de números aleatórios constrói-se a partir de um gerador *standard* de valores contínuos uniformemente distribuídos entre 0 e 1 ($U \in [0,1]$). Por exemplo, no *Excel*TM temos disponível a função geradora *RAND()* – ver anexo com outras fórmulas úteis.

Como obter então um gerador de valores aleatórios (ex, tempo t) geridos por uma...

...(1) Distribuição Exponencial Negativa?

A partir da Função Cumulativa da distribuição $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$,

resolvendo em ordem a t , tira-se que $t = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - F(t))$. Como

$0 \leq F(t) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1 - F(t)) \leq 1$, e supondo esta quantidade como uma variável aleatória U uniformemente distribuída, vem que

$t = -\frac{1}{\alpha} \ln(U)$ será uma variável aleatória distribuída segundo uma distribuição Exponencial Negativa com parâmetro α .

...(2) Distribuição k -Erlang?

Como a k -Erlang é a soma de k Exponenciais ($k\alpha$), vem que:

$$t(k, k\alpha) = -\frac{1}{k\alpha} [\ln(U_1) + \ln(U_2) + \dots + \ln(U_k)]$$

$$\therefore t(k, k\alpha) = -\frac{1}{k\alpha} \ln\left(\prod_{j=1}^k U_j\right)$$

Simulação discreta numa folha de cálculo (exemplo)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	<u>SIMULADOR M/M/1</u>			<u>Taxa de chegadas(λ) =</u>		<u>10</u>	<u>/h</u>												
2				<u>Taxa de serviço (μ) =</u>		<u>15</u>	<u>/h</u>												
3																			
4	<u>Acontecimento #</u>		<u>Relógio (t)</u>	δ	q	n	<u>Instantes Futuros</u>		<u>Auxiliares para estatísticas</u>				Comprimento da fila de espera						
5	<u>!</u>	<u>Tipo</u>	<u>(minutos)</u>	<u>#Serviço?</u>	<u>#Fila</u>	<u>#Sistema</u>	<u>Chegada</u>	<u>Partida</u>	<u>t(n+1)-t(n)</u>	$\delta * \Delta t$	$q * \Delta t$	$n * \Delta t$	0		1	2	3	4	5
6	0	Inicialização	0	0	0	0	0	9999	---	---		---							
7	1	Chegada	0	1	0	1	5.8004	1.21404	1.2140377	1.21404	0	1.21404							
8	2	Partida	1.21403768	0	0	0	5.8004	9999	4.5863589	0	0	0							
9	3	Chegada	5.80039653	1	0	1	6.52671	8.7367	0.7263095	0.72631	0	0.72631							
10	4	Chegada	6.52670601	1	1	2	6.85263	8.7367	0.3259222	0.32592	0.32592	0.65184							
11	5	Chegada	6.85262821	1	2	3	8.44028	8.7367	1.587652	1.58765	3.1753	4.76296							
12	6	Chegada	8.44028023	1	3	4	11.7345	8.7367	0.2964217	0.29642	0.88927	1.18569							
13	7	Partida	8.73670195	1	2	3	11.7345	11.1911	2.4543521	2.45435	4.9087	7.36306							
14	8	Partida	11.191054	1	1	2	11.7345	14.5348	0.5434916	0.54349	0.54349	1.08698							
15	9	Chegada	11.7345456	1	2	3	17.1644	14.5348	2.8002518	2.80025	5.6005	8.40076							
16	10	Partida	14.5347974	1	1	2	17.1644	15.6229	1.0881243	1.08812	1.08812	2.17625							
17	11	Partida	15.6229217	1	0	1	17.1644	16.0271	0.4042235	0.40422	0	0.40422							
18	12	Partida	16.0271452	0	0	0	17.1644	9999	1.1372183	0	0	0							

B7 = IF(G6<H6;"Chegada";"Partida")

G7 = IF(B7="Chegada";C7-log(RAND())/F\$1;G6)

C7 = IF(B7="Chegada";G6;H6)

| H6 se aconteceu uma "Chegada";

F7 = IF(B7="Chegada";F6+1;F6-1)

H7 = | C7-log(RAND())/F\$2 se aconteceu uma "Partida" e n>0,

D7 = IF(F7>0;1;0)

| ou se aconteceu uma "Chegada" e H6=9999;

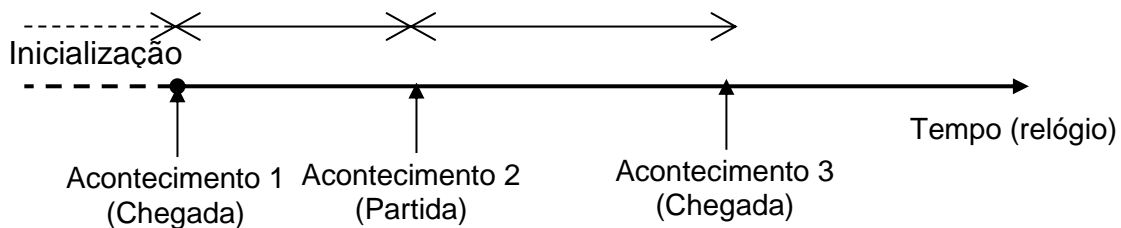
E7 = IF(F7>1;F7-1;0)

| "9999" se aconteceu uma "Partida" e n=0 (i.e, o sistema está vazio).

Notas sobre o exemplo de simulação

Entidades: Clientes que usam o sistema M/M/1
Estado (n): Nº de clientes no sistema
Acontecimentos: Chegadas e Partidas (ou fins de serviço)

O comportamento geral de um simples “run” (fazer F9) do modelo de simulação anterior (ver aplicativo “io2_simulador_ee1.xls” – folha de cálculo “M-M-1 demo”), pode ser esquematizado da seguinte forma:



Dado que os resultados finais de um único “run” podem vir influenciados pelas condições iniciais e pela própria duração da simulação, é conveniente realizar vários “runs” com durações razoavelmente longas, e basear as conclusões (sobre as medidas de desempenho do sistema) nos valores médios globais respectivos obtidos ao longo de todo o processo. Para isso, é aconselhável usar as outras folhas de cálculo do mesmo aplicativo.

Qual deverá ser a duração da simulação?

Problema:

Determinar qual a duração da simulação, para que o valor das variáveis do sistema (ex., medidas de desempenho) sejam estimadas com uma determinada acurácia, verificando um dado grau de confiança estatística.

Procedimento normalmente proposto:

- 1) Executar algumas simulações curtas, utilizando diferentes séries de números aleatórios (e.g. partindo de diferentes sementes);
- 2) Estimar a média e a variância da variável que se pretende medir (ex., o comprimento médio da fila, o tempo médio de permanência no sistema,...), e admitir para esta uma lei de distribuição Normal;
- 3) Sabendo que o desvio padrão dessa variável é inversamente proporcional à raiz quadrada da duração da simulação, calcular que duração deve ter uma experiência de simulação, para obter uma dada acurácia a um dado grau de confiança estatística.

Qual deverá ser a duração da simulação? (exemplo)

Valor médio

(obtido com curtas simulações de 10 horas) = 120 unidades

Desvio padrão = 40 unidades

Qual a duração mínima de uma simulação, para que o nível médio de inventário de 120 possa ser especificado com uma acurácia de ± 5 unidades, com uma confiança estatística de 90%?

Resposta:

Admitindo uma lei Normal: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow \sigma_D = \frac{X - \mu}{Z_{90\%}}$

tira-se que o desvio padrão a obter deve ser de:

$$\sigma_D = \frac{5}{1.6449} = 3.04 \text{ unidades.}$$

Fazendo então a proporcionalidade inversa: $\frac{\sigma_D}{40} = \sqrt{\frac{10}{D}}$

Obtém-se que a simulação deve corresponder a:

$$D = \frac{10 * 40^2}{(3.04)^2} = 1732 \text{ horas (ou mais).}$$

Qual é a acurácia obtida com a simulação? (exemplo)

No caso do exemplo anterior, se só fosse possível executar uma simulação de duração equivalente a 1000 horas, qual seria a acurácia da estimativa, com um grau de confiança de 90%?

Resposta:

O desvio padrão seria, proporcionalmente, de $\sigma_D = 40\sqrt{\frac{10}{1000}} = 4$ unidades.

Logo, a acurácia conseguida na estimativa do valor médio da variável, com uma confiança estatística de 90%, seria de $\pm 4 * 1.6449$, ou seja de aproximadamente ± 6.6 unidades.

ANEXO: Algumas funções de interesse no Excel™

Random Generation:	<u>RAND()</u>	0 to 1 random generator
	<u>RAND()*(b-a)+a</u>	a to b random generator
	e.g. <u>RAND()*100</u>	0 to 100 random generator
	<u>N.B.</u> Introducing RAND(), and then pressing F9, instead of ENTER, transforms formula into value.	
Normal Distribution:	<u>NORMDIST(x; mean; std; cumulative)</u>	
	Cumulative if cumulative=TRUE, mass if FALSE	
	e.g. <u>NORMDIST(1.65; 0; 1; TRUE)</u> = 0.9505	
	<u>NORMINV(prob; mean; std)</u> , the cumulative inverse	
	e.g. <u>NORMINV(0.95; 0; 1)</u> = 1.6449	
Conditional:	<u>IF(logical_test; value_if_true; value_if_false)</u>	
	<u>N.B.</u> Up to 7 IFs can be nested.	
Logical IS functions:	<u>ISBLANK(value)</u> , <u>ISTEXT(value)</u> , <u>ISERROR(value)</u>	
	e.g. <u>ISERROR(AVERAGE(B1:B5))</u>	
Maths/Stats:	<u>ABS</u> , <u>AVERAGE</u> , <u>LOG</u> , <u>POWER</u> , <u>ROUND</u> , <u>STDEV</u> , <u>SQRT</u> , <u>SUM</u> , <u>SUMIF</u>	
Tools → <u>Goal Seek...</u> → Set cell ... To value ... By changing cell ...	Adjusts the value of a cell (independent variable), so that the other cell (dependent variable or formula) equals the seek value.	