Universidade do Minho MIEInf

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

folha 9 2017'18

1. Calcule os seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - 2x^5)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x}+2)^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\ \mathrm{sen}(x^2)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ \mathrm{sen}\ x\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x+2)\cos x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\ \mathrm{sen}\,x\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,e^{x^2}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \mathrm{arcsen}\ x\,dx$

(m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, com
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

(n) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\ \mathrm{sen}\,x\,|\,dx$

(o) $\displaystyle\int_{-3}^5 |x-1|\,dx$

(p) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$, com
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

(q) $\displaystyle\int_{-3}^2 \sqrt{|x|}\,dx.$

2. [Mudança de variável universal]

(a) Mostre que, se $x = 2\,\mathrm{arctg}\,t$, então

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

(b) Usando a substituição $x = 2\,\mathrm{arctg}\,t$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\mathrm{sen}\,x + \cos x}\,dx.$$

3. Usando a substituição indicada, calcule

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{arcsen}\,x\,dx, \quad x = \mathrm{sen}\,t$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\mathrm{arcsen}\,x}\,dx, \quad x = \mathrm{sen}\,t$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad t = \mathrm{sen}\,t$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx, \quad x = 3\ \mathrm{sen}\,t$

(e) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx, \quad x = \mathrm{sh}\,t$

(f) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx, \quad t = x-1$

(g) $\displaystyle\int_0^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad x = \frac{t^2-1}{2}$

(h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx, \quad t = e^x.$

4. Considere a seguinte definição de "logaritmo"(em termos de uma função algébrica): $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$

Nestas condições, prove (usando a substituição $s = x\,t$) que

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$

5. Usando integrais definidos, calcule

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

6. Seja $f:[-1,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1+x^2$. Determine o valor médio da função e, se possível, o valor $c\in[-1,2]$ tal que $f(c)$ é o valor médio da função.

7. Sabe-se que o crescimento anual da população de um dado país é modelado por $f(t)=2.02.036^t$, com a unidade de $f(t)$ fixada em milhões e t iniciado no ano 2000. Seja $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Nestas condições,

(a) O que representa $F(20)$?

(b) Qual a população média do país, entre os anos 2000 e 2020?

8. Justifique, sem efetuar o cálculo do respetivo integral

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\text{sen}(x^2)\,dx\leq\sqrt{\pi}$ (b) $\displaystyle 2\leq\int_0^2\sqrt{1+x^3}\,dx\leq 6$

9. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a,b]$ cujas curvas de intersetam neste intervalo. Nestas condições, qual o significado geométrico de cada um dos integrais?

(a) $\displaystyle\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$ (b) $\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$

10. Determine a área da região limitada por $y=\sqrt{x}$, pela tangente a esta curva em $x=4$ e pelo eixo das ordenadas.

11. Represente graficamente o conjunto A dado e calcule a sua área.

(a) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x=1$, $x=4$, $y=0$ e pela curva de $f(x)=\sqrt{x}$.

(b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x}\leq y\leq -x+2\}$.

(c) A é o conjunto do plano limitado superiormente pela parábola de equação $y=-x^2+\dfrac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola de equação $y=x^2-1$.

(d) A é o conjunto de todos os pontos (x,y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2-1\leq y\leq x+1$.

12. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

(a) $x=0,\ \ x=1,\ \ y=3x,\ \ y=-x^2+4$

(b) $x=0,\ \ x=\pi/2,\ \ y=\text{sen}\,x,\ \ y=\cos x$

(c) $x=-1,\ \ y=|x|,\ \ y=2x,\ \ x=1$

(d) $y=-x^3,\ \ y=-(4x^2-4x)$

(e) $y=0,\ \ x=2-y-y^2$

(f) $y=2-x^2,\ \ y^3=x^2$

13. Defina a reta horizontal ($y=k$) que divide a área da região entre $y=x^2$ e $y=9$ em duas partes iguais.

14. Mostre, geometricamente, que $\displaystyle\int_{-2}^2\pi(\sqrt{4-x^2})^2\,dx=\frac{4}{3}\pi\times 2^3$.

15. Encontre o comprimento da curva definida por $y=2x$ entre os pontos de coordenadas $(1,2)$ e $(2,4)$:

(a) usando o teorema de Pitágoras;

(b) usando um integral definido em ordem a x;

(c) usando um integral definido em ordem a y;

16. Determine o comprimento da curva definida pelas equações apresentadas, entre os pontos a e b indicados:

(a) $y=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $A=(1,\frac{2}{3})$, $B=(8,\frac{8}{3})$

(b) $y=5-\sqrt{x^3}$, $A=(1,4)$, $B=(4,-3)$

(c) $y=6\sqrt[3]{x^2}+1$, $A=(-1,7)$, $B=(-8,25)$

(d) $y=\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{3}$, $A=(-2,\frac{67}{24})$, $B=(-3,\frac{109}{12})$.

17. Seja A a área limitada por $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=1$ e $x=b, b>1$. Calcule A e $\lim\limits_{b\longrightarrow+\infty}A$.