



---

sistemas dinâmicos discretos

---

Exercício 1. Determine o conjunto estável do ponto fixo zero da transformação  $x \mapsto \lambda x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ao variar o parâmetro  $\lambda$ .

Exercício 2. Em cada alínea, apresente um exemplo de uma transformação contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- (a)  $W^s(0) = ] - 1, 1[$ .
- (b)  $\omega(x) = \{1\}$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c)  $\omega(x) = \emptyset$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- (d)  $\omega(2) = \{-2, 2\}$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- (e) O conjunto  $[-1, 1]$  não contém pontos periódicos.
- (f)  $\sqrt{3}$  é um ponto periódico de período 2.
- (g)  $f$  tem um único ponto fixo  $x$  e  $W^s(x) = \mathbb{R}$ .
- (h) Todo o ponto da reta é periódico.
- (i) Todo o ponto da reta é recorrente.
- (j) Todo o ponto da reta é não-errante.
- (k) Nenhum ponto da reta é periódico.
- (l) Nenhum ponto da reta é recorrente.
- (m) O conjunto dos pontos recorrentes é  $[0, 2]$ .

Exercício 3. Dê exemplo de, ou justifique por que não existe:

1. Uma transformação  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que não tenha pontos fixos.
2. Uma transformação contínua  $f : ]0, 3[ \rightarrow ]0, 3[$  que não tenha pontos fixos.
3. Um homeomorfismo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que não tenha pontos fixos.

Exercício 4. Apresente um exemplo de uma contração  $f : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  sem pontos fixos.

Exercício 5. Determine os pontos fixos e use a iteração gráfica para estudar o comportamento de pontos próximos dos pontos fixos para as seguintes transformações:

1.  $f(x) = x - x^2, x \in [0, 1]$ .

2.  $g(x) = 2x - x^2, x \in [0, 1]$ .

Exercício 6. Em cada alínea estude a dinâmica da transformação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

(a)  $f(x) = x^3$       (b)  $f(x) = -x^3$       (c)  $f(x) = x^{1/3}$       (d)  $f(x) = x^3 + x$

(e)  $f(x) = x^3 - x$       (f)  $f(x) = x^2 + 1/4$       (g)  $f(x) = |x - 1|$       (h)  $f(x) = \sin x$

Utilize o Maxima para simular a evolução da dinâmica de cada um dos sistemas.

Exercício 7. Considere a transformação  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Mostre que  $W^s(1) = \mathbb{R}^+$ .

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Exercício 8. Para cada uma das seguintes transformações  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  determine os pontos fixos e indique quais são atrativos e quais são repulsivos:

(a)  $f(x) = x^2 - x/2$       (b)  $f(x) = 4x - x^2$       (c)  $f(x) = x^2 - 1$

(d)  $f(x) = \sin x$       (e)  $f(x) = x + x^3$       (f)  $f(x) = x - x^3$

(g)  $f(x) = x + x^2$       (h)  $f(x) = x - x^2$       (i)  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$

Exercício 9. Em cada alínea, apresente um exemplo de uma transformação contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

(a)  $\sqrt{2}$  é um ponto fixo repulsivo.

(b)  $\sqrt{3}$  é um ponto fixo atrativo.

(c)  $\pi$  e  $-\pi$  são pontos fixos repulsivos.