

PROBABILIDADES



Definição clássica



Se uma experiência aleatória tiver N resultados mutuamente exclusivos e igualmente prováveis, e se um acontecimento A contiver N_A desses resultados ($N_A \leq N$), então a probabilidade do acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

A probabilidade de um acontecimento A é a razão entre o número de resultados (ou casos) favoráveis (à ocorrência de A , naturalmente) e o número de resultados possíveis.



- **Exemplo:** Qual a probabilidade de tirar um ás dum baralho de cartas?

$$N_A = 4 \qquad N = 52 \qquad P(A) = 4/52$$

Existem muitas situações onde as diferentes possibilidades não são igualmente prováveis.

A probabilidade de um acontecimento (evento ou resultado) é a proporção de vezes que eventos da mesma espécie ocorrerão a longo prazo.

Profª Ana Cristina Braga

3



Definição Axiomática

As probabilidades são definidas como “objetos matemáticos”, que se comportam segundo regras bem definidas.

Profª Ana Cristina Braga

4

ESPAÇOS AMOSTRAIS



Experiência: qualquer processo de observação ou medida.

Resultados: resultados de uma experiência, contagens, respostas sim/não, valores.

Espaço Amostral (S): é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência.

Elemento ou Ponto Amostral: cada resultado do espaço amostral.

Exemplo 1: Lançamento de um dado

$$S1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S2 = \{\text{par, ímpar}\}$$

Exemplo 2: Espaço amostral constituído pelo lançamento de dois dados de cores diferentes.

$$S1 = \{(x, y): x = 1, 2, 3, 4, 5, 6; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S2 = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

Profª Ana Cristina Braga

5

ESPAÇOS AMOSTRAIS



Espaço Amostral {
Discreto
Contínuo

Espaço Amostral Discreto: contém um número finito de elementos aos quais é possível fazer corresponder números inteiros.

Espaço Amostral Contínuo: contém um número infinito de elementos constituindo um espaço contínuo.

Acontecimento ou Evento: subconjunto do espaço amostral.

Profª Ana Cristina Braga

6



DEFINIÇÕES

- A união dos acontecimentos A e B, $A \cup B$, é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos.
- A intersecção dos acontecimentos A e B, $A \cap B$, é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A e B.
- O complemento do acontecimento A, \bar{A} , é o acontecimento em S que contém todos os elementos de S que não estão em A.

Profª Ana Cristina Braga

7



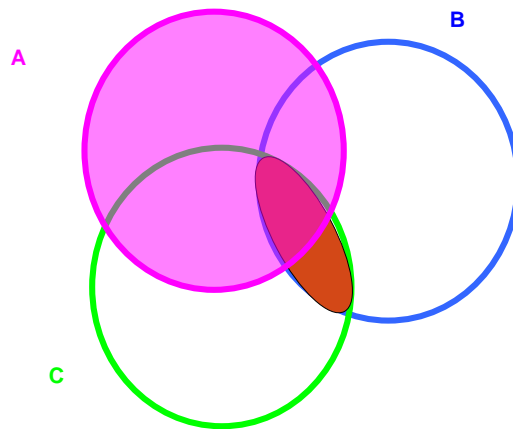
POSTULADOS DA ÁLGEBRA DE BOOLE

1. Para cada par de acontecimentos A e B no espaço amostral S, há um único acontecimento $A \cup B$ e um único acontecimento $A \cap B$ em S.
2. $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap S = A$, para cada acontecimento A no espaço amostral S; existe um único acontecimento \emptyset tal que $A \cup \emptyset = A$ para cada acontecimento A em S.
6. Para cada acontecimento A em S existe um único acontecimento \bar{A} em S que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$.

Profª Ana Cristina Braga

8

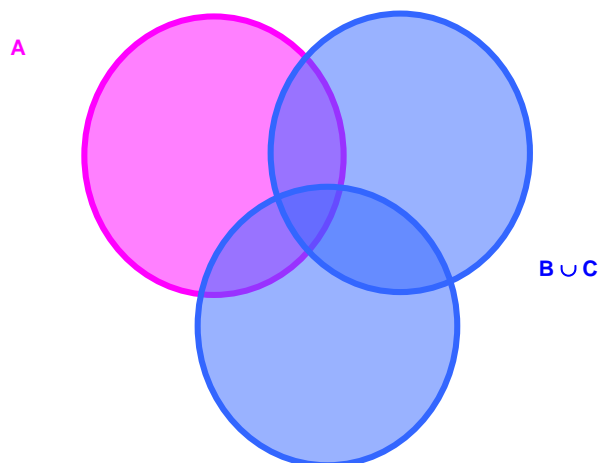
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Profª Ana Cristina Braga

9

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Profª Ana Cristina Braga

10



PROBABILIDADE DE UM ACONTECIMENTO

Axioma 1

Para qualquer acontecimento A (isto é, qualquer subconjunto de um espaço amostral S), a probabilidade desse acontecimento satisfaz a relação:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axioma 2

A probabilidade associada ao acontecimento certo (S) é

$$P(S) = 1$$

Axioma 3

Se A_1, A_2, A_3, \dots , é uma sequência finita ou infinita de acontecimentos *mutuamente exclusivos* de S, então:

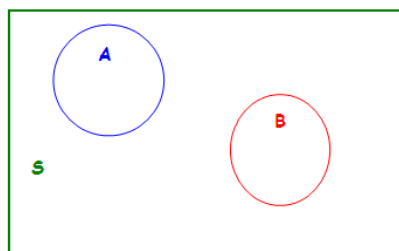
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Profª Ana Cristina Braga

11



Acontecimentos mutuamente exclusivos



$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ e } B \text{ são}$
mutuamente exclusivos

Profª Ana Cristina Braga

12



Exemplo 1

Se uma moeda equilibrada é lançada duas vezes, qual a probabilidade de obter pelo menos uma cara?

Resolução:

$S = \{FF, FC, CF, CC\}$ F - cara, C - coroa

$A = \{FF, FC, CF\}$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(FF) + P(FC) + P(CF) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Profª Ana Cristina Braga

13



Exemplo 2

Um dado está viciado de forma que números ímpares são duplamente mais prováveis que os números pares. Se o acontecimento E é definido como um número maior que 3 ocorre num simples lançamento, encontre $P(E)$.

Resolução:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

w – probabilidade de um número par

$2.w$ – probabilidade de um número ímpar

$$P(S) = 1 \Leftrightarrow 2.w + w + 2.w + w + 2.w + w = 1 \Leftrightarrow 9.w = 1 \Leftrightarrow w = \frac{1}{9}$$

$E = \{\text{saír um número} > 3\} = \{4, 5, 6\}$

$$P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Profª Ana Cristina Braga

14



Algumas regras de probabilidade

1. Se A e \bar{A} são acontecimentos complementares num espaço amostral S , então:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. $P(\emptyset) = 0$, para qualquer espaço amostral.

3. Se A e B são acontecimentos num espaço amostral S e $A \subseteq B$, então:

$$P(A) \leq P(B).$$

4. Para qualquer acontecimento A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

5. Se A e B são dois quaisquer acontecimentos num espaço amostral S , então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Se A , B e C são três quaisquer acontecimentos num espaço amostral S , então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Profª Ana Cristina Braga

15



PROBABILIDADE CONDICIONAL

Podem surgir dificuldades quando as probabilidades são referidas sem especificação do espaço amostral.

Uma vez que a escolha do espaço amostral (nomeadamente o conjunto de todas as possibilidades em análise) não é sempre evidente, usa-se $P(A|S)$ para referir a probabilidade condicional do acontecimento A em relação ao espaço amostral S ; lê-se a probabilidade de A dado S .

Se A e B são dois acontecimentos quaisquer no espaço amostral S e $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B dado A é:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Profª Ana Cristina Braga

16



Exemplo

Qual é a probabilidade de que um número de pontos do dado viciado seja um quadrado perfeito? E qual a probabilidade de ser um quadrado perfeito dado que é maior que 3?

Resolução: $A = \{\text{sair} > 3\} = \{4, 5, 6\}$ $B = \{\text{sair quadrado perfeito}\} = \{1, 4\}$

$A \cap B = \{4\}$

$P(A) = 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9$ $P(B) = 2/9 + 1/9 = 3/9$ $P(A \cap B) = 1/9$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

Profª Ana Cristina Braga

17



Se A e B são dois acontecimentos quaisquer no espaço amostral S e $P(A) \neq 0$, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Se A, B e C são três acontecimentos quaisquer no espaço amostral S tal que $P(A) \neq 0$ e $P(A \cap B) \neq 0$, então:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B)$$

Demonstração:

$$P(A \cap B \cap C) = P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \cdot P(C | A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B)$$

Profª Ana Cristina Braga

18



Exemplo

Três lâmpadas defeituosas foram inadvertidamente misturadas com seis lâmpadas boas. Escolhidas duas lâmpadas ao acaso, calcule-se a probabilidade de serem ambas boas.

Resolução: Imagine-se que as lâmpadas são retiradas, uma após a outra, e considerem-se os acontecimentos seguintes:

A_1 : a primeira lâmpada é boa A_2 : a segunda lâmpada é boa

A probabilidade de as duas lâmpadas serem boas é dada por:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = 6/9 \cdot 5/8 = 5/12$$

Profª Ana Cristina Braga

19



Exemplo

Uma caixa contém 20 fusíveis, dos quais 5 são defeituosos. Se três fusíveis são seleccionados e removidos sucessivamente sem reposição, qual a probabilidade que os três fusíveis sejam defeituosos?

Resolução:

A - 1º fusível defeituoso B - 2º fusível defeituoso C - 3º fusível defeituoso

$$P(A) = 5/20 \quad P(B|A) = 4/19 \quad P(C|A \cap B) = 3/18$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) = 5/20 \cdot 4/19 \cdot 3/18 = 60/6840$$

$$= 0.0088$$

Profª Ana Cristina Braga

20

ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES



Dois acontecimentos são independentes se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Isto é:

$$\bullet P(B|A) = P(B)$$

$$\bullet P(A|B) = P(A)$$

$$\bullet P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

Dois acontecimentos são independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Profª Ana Cristina Braga

21

Uma moeda é lançada três vezes, e os oito resultados possíveis

FFF FFC FCF CFF FCC CFC CCF CCC

são igualmente prováveis. Considere os seguintes acontecimentos:

A – Uma cara (F) ocorre em cada um dos dois primeiros lançamentos

B – Uma coroa (C) ocorre no 3º lançamento

C – Exactamente duas coroas ocorrem nos três lançamentos

Mostre que A e B são independentes, enquanto B e C são dependentes.

Resolução:

$$A = \{FFF, FFC\} \quad P(A) = 2/8 = 1/4$$

$$B = \{FFC, FCC, CFC, CCC\} \quad P(B) = 4/8 = 1/2$$

$$C = \{FCC, CFC, CCF\} \quad P(C) = 3/8$$

$$A \cap B = \{FFC\} \quad P(A \cap B) = 1/8 = P(A) \cdot P(B)$$

$$B \cap C = \{FCC, CFC\} \quad P(B \cap C) = 2/8 \neq P(B) \cdot P(C)$$

Exemplo

Profª Ana Cristina Braga

22





Se dois acontecimentos A e B são independentes, então os dois acontecimentos A e \bar{B} são também independentes.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad A = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap S = A$$

$(A \cap B)$ e $(A \cap \bar{B})$ são acontecimentos mutuamente exclusivos

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$= P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \bar{B}) \quad \text{com } P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)]$$

$$P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot [1 - P(B)]$$

$$= P(A) \cdot [P(B) + 1 - P(B)] \Rightarrow P(A) = P(A) \text{ c.q.d.}$$

Profª Ana Cristina Braga

23



Os acontecimentos A_1, A_2, \dots, A_k são independentes se e só se a probabilidade da intersecção de quaisquer 2, 3 ou k destes acontecimentos igual o produto das respectivas probabilidades

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \prod_{i=1}^k P(A_i)$$

Se os acontecimentos B_1, B_2, \dots, B_k constituem uma partição do espaço amostral S e $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, então para qualquer acontecimento A em S

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Profª Ana Cristina Braga

24



$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j$$

Partição do espaço amostral

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = S \quad \text{e} \quad A \cap S = A$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + \dots + P(B_k) \cdot P(A | B_k)$$

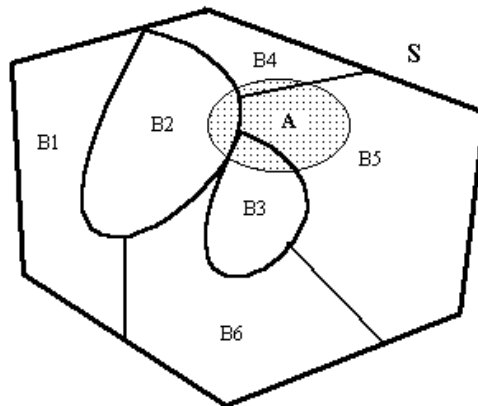
$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A | B_i)$$

Profª Ana Cristina Braga

25



Partição do Espaço



Profª Ana Cristina Braga

26



TEOREMA DE BAYES

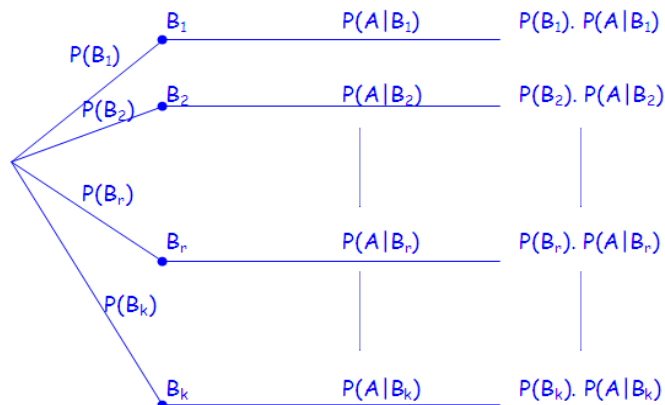
Se os acontecimentos B_1, B_2, \dots, B_k constituem uma partição do espaço amostral S e $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$, então para qualquer acontecimento A em S tal que $P(A) \neq 0$:

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A | B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$$

para $r = 1, 2, \dots, k$.

Profª Ana Cristina Braga

27



$$P(B_r | A) = \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)} = \frac{P(B_r) \cdot P(A | B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$$

Profª Ana Cristina Braga

28



Exemplo 1: A urna I contém 3 fichas vermelhas e 2 fichas azuis, e a urna II contém 2 fichas vermelhas e oito fichas azuis. Joga-se uma moeda. Se sair “cara” (F), extraí-se uma ficha da urna I, se sair “coroa” (C), extraí-se uma ficha da urna II. Determine a probabilidade de escolha de uma ficha vermelha.

Resolução:

A – escolha de ficha vermelha

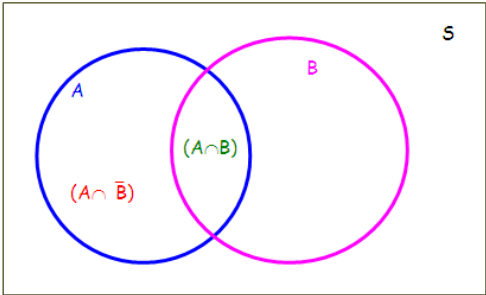
B –urna I $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A|B) = \frac{3}{5}$

\bar{B} – urna II $P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$ $P(A| \bar{B}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ A é a união de dois acontecimentos mutuamente exclusivos

$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A| \bar{B})$

$P(A) = \frac{1}{2} . \frac{3}{5} + \frac{1}{2} . \frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$



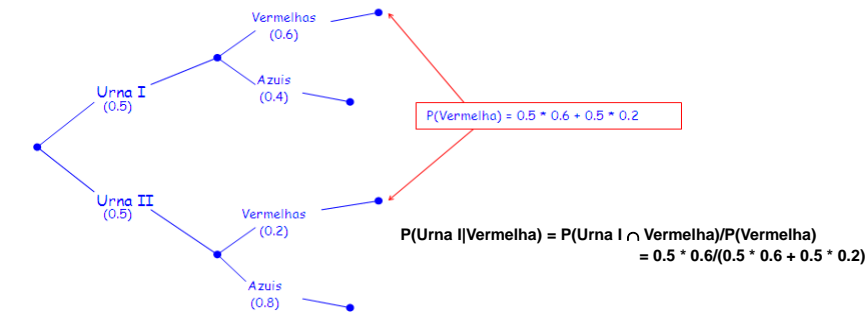
$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$



Exemplo 2 (teorema de Bayes): Considere-se o exemplo anterior. Suponha-se que não se sabe o resultado da jogada da moeda, mas que a ficha extraída é vermelha. Qual a probabilidade de ter sido extraída da urna I?

Resolução:

$$P(B | A) = \frac{P(B).P(A | B)}{P(B).P(A | B) + P(\overline{B}).P(A | \overline{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$



Profª Ana Cristina Braga

31

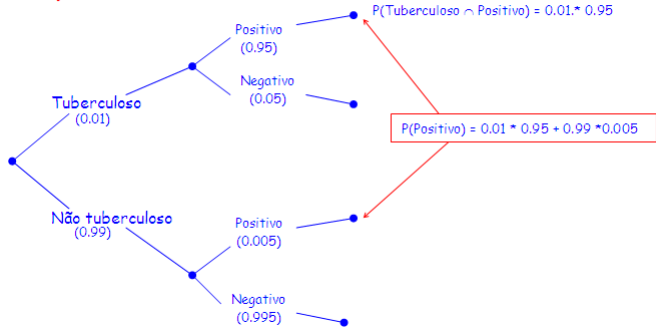


Exemplo 3: Admita-se que num determinado país, 1% da população tem tuberculose e, ainda, que:

- para uma pessoa que tenha de facto contraído a doença, uma microrradiografia tem um resultado positivo (isto é, detecta a tuberculose) em 95% dos casos e
- para uma pessoa não tuberculosa, esta percentagem é apenas de 0.5%.

Pretende-se saber qual a probabilidade de uma pessoa a quem a microrradiografia tenha dado resultado positivo estar tuberculosa.

Resolução:



Profª Ana Cristina Braga

32