Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações MIEInf

Cálculo

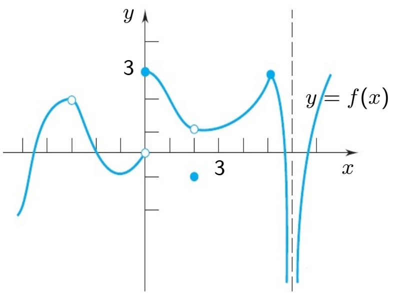
folha 3 2017'18

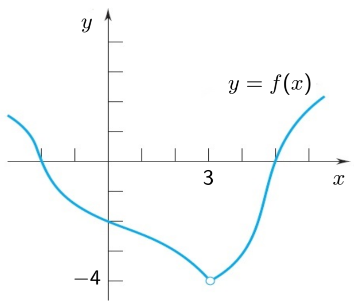
Limites e continuidade.

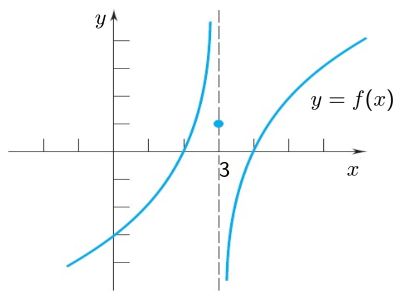
1. Prove que $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$

2. Para cada uma das figuras e com o respetivo valor de c, use o gráfico de f para calcular $\lim_{x \to c} f(x)$

(a) $c = 0$, $c = 2$, $c = 6$ (b) $c = 3$ (c) $c = 3$







3. Calcule se existir ou prove que não existe o limite:

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3}{x+1}$

(b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2 - 6x + 9}$

(c) $\lim_{x \to 0} \left(x + \dfrac{1}{x} \right)$

(d) $\lim_{x \to 4} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 4 \\ x, & x = 4 \end{cases}$

(e) $\lim_{x \to 1} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ é racional} \\ 2, & x \text{ é irracional} \end{cases}$

(f) $\lim_{x \to 0} f(x)$, quando $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

4. Sabendo que $f(x) = x^2 - 4x$, calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

(b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 3}$

(d) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

5. Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ sabendo que $0 \leq f(x) \leq |x|$, se $0 < |x| < 1$.

6. Calcule $\lim_{x \to 3} f(x)$ sabendo que $1 \leq f(x) \leq (x-3)^2 + 1$, para $x \neq 3$.

7. Determine se a função é ou não contínua, no ponto indicado. No caso de descontinuidade, conclua se se trata de uma descontinuidade removível ou não.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x^3, & x>2 \end{cases}$; $\quad a=2.$

(b) $g(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$; $\quad a=0.$

(c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ -2, & x=-1 \end{cases}$; $\quad a=-1.$

8. Em que pontos (se existirem) são contínuas as funções que a seguir se definem

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ é racional} \\ 0, & x \text{ é irracional} \end{cases}$

(b) $h(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ é inteiro} \\ x^2, & x \text{ nos outros casos} \end{cases}$

9. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas

(a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua

(b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua

(c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta?

10. Considere a função contínua $f : [0,1[\, \cup [2,3] \longrightarrow [1,3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(a) A função f é bijectiva. Justifique.

(b) Determine a função inversa de f.

(c) f^{-1} é contínua?

(d) O teorema da continuidade da função inversa foi posto em causa?