Equações de derivadas parciais e séries de Fourier

Maria Joana Torres

2018/19

Três equações do século XVIII

- equação das ondas (ou das cordas vibrantes)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$u(x,t) \rightsquigarrow$ posição do ponto x da corda, no instante t.

- equação do calor (ou da difusão)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$u(x,t) \rightsquigarrow$ temperatura do ponto x da barra, no instante t.

- equação de Laplace

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

$u(x,y) \rightsquigarrow$ função que aparece no problema do equilíbrio de uma membrana sob a ação de certas forças numa certa região do plano.

Definição:

Uma equação de derivadas parciais (edp) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uma função $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dessas variáveis e derivadas parciais em relação a essas variáveis.

Mais precisamente, uma edp é uma equação da forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} = 0\,,$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, com Ω um certo domínio de $\mathbb{R}^n$, F é uma função dada e $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a função que queremos determinar.

$$u_1(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{e} \qquad u_2(x,y) = e^x \cos y$$

são ambas soluções da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Notação:

$u_x, \quad \partial_x u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}$

$u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Em tudo o que se segue assumimos também que as derivadas parciais de u satisfazem condições que garantem a igualdade $u_{xy} = u_{yx}$.

Classificação:

- a ordem de uma edp é a ordem da derivada de mais alta ordem que ocorre na equação.
- uma edp é dita linear se é uma equação do primeiro grau em u e nas suas derivadas parciais.

Exemplos:

- a equação $z\, u_{xx} + xy^2 u_{yy} - e^x u_z = f(y, z)$ é linear em $u(x, y, z)$ e de 2^{a} ordem.
- a equação $u_{xx} + u\, u_y = x$ não é linear em $u(x, y)$ e é de 2^{a} ordem.
- as equações da onda, do calor e de Laplace são lineares e de 2^{a} ordem.

Equações lineares de 2^{a} ordem em duas variáveis independentes:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = G,$$

onde $A, \ldots, G$ são funções de x e y, mas não de u ou das suas derivadas parciais.

Se $G = 0$, a equação diz-se homogénea.

Solução geral:

A solução geral de uma edp é a coleção de todas as soluções da equação.

Exemplo (edp de 1^{a} ordem):

Consideremos a edp de 1^{a} ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \operatorname{sen} x$$

com $u = u(x,y)$. Integrando em ordem a x, vem

$$u(x,y) = -y \cos x + \phi(y)\,,$$

com $\phi(y)$ uma função arbitrária.
Vemos, portanto, que a solução geral envolve uma Função arbitrária (e não uma constante arbitrária).

Exemplo (edp de 2^{a} ordem):

Consideremos a edp de 2^{a} ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

em que supomos que $u = u(x,y)$.

Integrando em ordem a x, vem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + \phi(y)\,,$$

e, integrando novamente,

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\phi(y) + \psi(y)\,.$$

Esta família de funções que depende de duas funções arbitrárias é solução geral da equação.

Exemplo (edp de 2^{a} ordem):

Consideremos novamente a edp de 2^{a} ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

mas suponhamos agora que $u = u(x, y, z)$.

Procedendo como no caso anterior, obter-se-ia

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + x\phi(y, z) + \psi(y, z)\,.$$

Forma geral de uma edp linear de 2^{a} ordem em duas variáveis independentes é:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = G, \qquad (*)$$

onde $A, \ldots, G$ são funções de x e y, mas não de u ou das suas derivadas parciais.

Definição: A equação diferencial de derivadas parciais linear de 2^{a} ordem em duas variáveis $(*)$ diz-se:

- hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$
- parabólica se $B^2 - 4AC = 0$
- elíptica se $B^2 - 4AC < 0$

Note-se que, se os coeficientes A, B, C não forem constantes, a classificação da equação em tipos é LOCAL, isto é, pode variar de ponto para ponto. Assim, uma equação poderá, por exemplo, ser elíptica numa região e hiperbólica noutra região.

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = G,$$

Exemplo 1: A equação diferencial

$$u_{xx} + x\,u_{yy} = 0$$

é elíptica quando $x > 0$, parabólica quando $x = 0$ e hiperbólica quando $x < 0$, uma vez que $B^2 - 4AC = -4x$.

Exemplo 2: A equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

com α uma contante não nula, é uma equação diferencial hiperbólica.

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = G,$$

Exemplo 3: A equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

com σ uma constante não nula, é uma equação diferencial parabólica.

Exemplo 4: A equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bem como a chamada equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y)\,,$$

com $g(x,y) \neq 0$, são equações elípticas.

As equações elípticas estão associadas a problemas de equilíbrio ou problemas de estado estacionário, isto é, a problemas cuja solução não depende do tempo.

No caso de equações em duas variáveis, essas duas variáveis são, portanto, variáveis espaciais.

A solução é, geralmente, pretendida numa região Ω limitada do plano, os valores de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, ou uma combinação linear destes, são, geralmente, especificados na fronteira $\partial\Omega$ de Ω.

Assim, as equações elípticas estão normalmente associadas a problemas de valores de fronteira (PVF).

As equações parabólicas estão associadas a problemas de difusão ou problemas de condução do calor, sendo a solução dependente do tempo. No caso de equações de duas variáveis, haverá apenas uma variável espacial, representando a outra variável o tempo.

Neste caso, a solução é, em geral, pretendida no semi-plano

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon t > 0,\ -\infty < x < +\infty\}$$

ou numa faixa

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon t > 0,\ a < x < b\}$$

No primeiro caso, são dados os valores de u ao longo da reta $t = 0$, i.e., u é especificada no instante inicial. Trata-se de um problemas de valores iniciais (PVI).

No segundo caso, é dada uma condição do tipo

$$u(x,0) = f(x), \qquad a \le x \le b$$

juntamente com condições de fronteira do tipo

$$\begin{cases} u(a,t) = \alpha(t) \\ u(b,t) = \beta(t), \qquad t \ge 0 \end{cases}$$

Trata-se de um problema de valores iniciais e de fronteira (PVIF).

As equações hiperbólicas estão associadas a problemas de vibração e propagação de ondas. Tal como para as equações parabólicas a solução é dependente do tempo pelo que, para equações de duas variáveis, haverá uma única variável espacial.

A solução é também pretendida num dos domínios anteriores.

Quando Ω é o semi-plano são dadas, em geral, condições iniciais do tipo

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Quando Ω é a faixa são dadas condições iniciais do tipo das anteriores, para $a \leq x \leq b$, mas há necessidade de se especificarem também condições de fronteira, por exemplo, do tipo

$$\begin{cases} u(a,t) = \alpha(t) \\ u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0 \end{cases}$$

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0 & \text{(pc 1)} \\[2em]
u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 & \text{(pc 2)} \\[2em]
u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(pc 3)}
\end{array}
}
$$

Fisicamente, as equações $(\text{pc}\,1) - (\text{pc}\,3)$ descrevem a variação da temperatura u de uma barra de secção uniforme e comprimento L, feita de material homogéneo com constante de difusividade térmica σ ($\sigma > 0$ e dependendo apenas do material), satisfazendo as seguintes hipóteses:

1. a barra é suficientemente fina de modo a ser razoável admitir que a temperatura é constante em cada secção reta, i.e., admitir que a temperatura depende apenas do tempo e da posição ao longo da barra; é também suposto que o eixo dos xx foi colocado ao longo da barra e que esta tem uma das extremidades na origem;

2. a superfície da barra está termicamente isolada, de modo que não há troca de calor com o exterior através dessa superfície;

3. as extremidades da barra estão em contacto com reservatórios térmicos à temperataura zero (este é o significado das condições de fronteira (pc 2));

4. no instante incial, $t = 0$, a barra tem uma distribuição de temperatura conhecida, $f(x)$ (é este o significado da condição inicial (pc 3)).

Ideia: procurar soluções $u(x,t)$ do problema que possam ser escritas na forma

$$\boxed{u(x,t) = F(x)G(t)} \qquad (1)$$

Calculando as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ da função u dada por (1), vem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x)G'(t) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = F''(x)G(t)$$

Assim, substituindo estas expressões na equação $(\text{pc}\,1)$, obtemos a equação

$$F(x)G'(t) = \sigma F''(x)G(t)$$

pelo que, separando as variáveis, vem

$$\frac{1}{\sigma}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}\,.$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}\,.$$

Observemos que as funções do lado esquerdo dependem apenas de t, enquanto que as do lado direito dependem apenas de x. Então os dois quocientes têm de ser iguais a uma certa constante, que denotaremos por λ, i.e.,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma}\frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda\,,$$

onde λ é um parâmetro independente de ambas as variáveis x e t. Temos então

$$\boxed{F''(x) - \lambda\, F(x) = 0} \qquad (*)$$

e

$$\boxed{G'(t) - \sigma\lambda\, G(t) = 0} \qquad (*)$$

Consideremos as condições de fronteira (pc 2):

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{(pc } 2)$$

Como $u(x,t) = F(x)G(t)$, essas condições determinam que, para todo o $t \geq 0$,

$$F(0)G(t) = 0\,,$$

$$F(L)G(t) = 0\,.$$

Assim, ou $G(t) = 0$, para todo o $t \geq 0$, o que implica que $u(x,t) \equiv 0$, ou

$$F(0) = F(L) = 0 \qquad (2)$$

Ignorando a solução trivial (note-se que $u(x,t) \equiv 0$ será solução se e só se $f(x) = 0$, caso em que não teríamos verdadeiramente nenhum problema de condução do calor) e combinando as condições de fronteira (2) com a equação diferencial ordinária $(*)$, obtemos o seguinte problema de valores de fronteira:

$$F''(x) - \lambda\, F(x) = 0 \qquad (*)$$

$$F(0) = F(L) = 0 \qquad (**)$$

com λ uma constante.

$$F''(x) - \lambda\, F(x) = 0 \qquad (*)$$
$$F(0) = F(L) = 0 \qquad (**)$$

Note-se que a função $F(x) = 0$ é uma solução do problema $(*)$-$(**)$, qualquer que seja o valor de λ e, dependendo do valor de λ, poderá ser a única solução. Assim, se procuramos uma solução não trivial $u(x,t) = F(x)G(t)$ para o nosso problema, deveremos determinar os valores de λ para os quais o PVF $(*)$-$(**)$ admite soluções não triviais.

Esses valores de λ são chamados valores próprios do problema e as correspondentes soluções não triviais são chamadas funções próprias.

Para resolver o problema

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \qquad (*)$$

$$F(0) = F(L) = 0 \qquad (**)$$

consideramos a equação característica

$$r^2 - \lambda = 0$$

e consideramos os seguintes três casos, tendo em conta o sinal de λ.

Caso 1: $\boxed{\lambda > 0}$

Neste caso, as raízes da equação característica são $\pm\sqrt{\lambda}$, pelo que a solução geral de $(*)$ é dada por

$$F(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\,.$$

Substituindo em $(**)$ $(F(0) = F(L) = 0)$ vem

$$F(0) = C_1 + C_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$F(L) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

De (i) vem $C_1 = -C_2$ pelo que (ii) pode escrever-se como

$$C_1(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0$$

ou, de forma equivalente,

$$C_1(e^{2\sqrt{\lambda}L} - 1) = 0\,.$$

Como estamos a considerar $\lambda > 0$, segue-se que $e^{2\sqrt{\lambda}L} - 1 > 0$, pelo que $C_1 = 0$. Assim $C_1 = C_2 = 0$, ou seja, não existe solução não trivial de $(*)$-$(**)$ quando $\lambda > 0$.

Caso 2: $\boxed{\lambda = 0}$

Neste caso $r = 0$ é raiz dupla da equação característica $r^2 - \lambda = 0$ e a solução geral da equação diferencial $(*)$ é dada por

$$F(x) = C_1 + C_2 x \,.$$

De novo, facilmente se conclui que as condições de fronteira $(**)$ implicam $C_1 = C_2 = 0$, ou seja, que também neste caso há apenas a solução trivial.

Caso 3: $\boxed{\lambda < 0}$

Sendo $\lambda < 0$, escrevamo-lo como $\lambda = -k^2$, $k \neq 0$. Neste caso, as raízes da equação característica são $\pm ik$. Assim, a solução geral da equação $(*)$ é

$$F(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \operatorname{sen}(kx)\,.$$

Desta vez, as condições de fronteira $(**)$ ($F(0) = F(L) = 0$) conduzem ao sistema

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ \\ C_1 \cos(kL) + C_2 \operatorname{sen}(kL) = 0\,. \end{cases}$$

Mas

$$\begin{aligned} C_2 \operatorname{sen}(kL) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad C_2 = 0 \vee \operatorname{sen}(kL) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad C_2 = 0 \vee kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Assim o problema $(*)$-$(**)$ admite soluções não triviais se $C_2 \neq 0$ e $k = \frac{n\pi}{L}$, com $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Essas soluções são da forma

$$\boxed{F_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \quad n \in \mathbb{N}} \qquad (1)$$

com c_n constantes não nulas (arbitrárias).

Tendo concluído que

$$\lambda = -k^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, consideremos agora a equação em $(*)$, i.e., a equação

$$G'(t) - \sigma\lambda G(t) = 0\,,$$

com $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, i.e.,

$$G'(t) + \sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a solução geral da equação é dada por

$$\boxed{G_n(t) = d_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}} \qquad (2)$$

Combinado (1) e (2), obtemos, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, uma função

$$\begin{aligned} u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) &= c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= b_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

com b_n uma constante arbitrária.

Facilmente se verifica que cada uma das funções (3) satisfaz a equação do calor (pc 1) e as condições de fronteira (pc 2). Assim, cada uma das funções $u_n(x,t)$ dadas por (3) quase resolve o nosso problema. A dificuldade está em que, sendo

$$u_n(x,t) = b_n \, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ,$$

teremos

$$u_n(x,0) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ,$$

pelo que $u_n(x,t)$ só será solução de (pc 1)-(pc 3) se a função $f(x)$ tiver a forma

$$\boxed{f(x) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

para alguma constante b_n e algum valor de n.

- $f(x) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
- $u_n(x,t) = b_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Exemplo: por exemplo, se o problema considerado fosse

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 2,\ t > 0 & (1) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t \geq 0 & (2) \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right), & 0 \leq x \leq 2 & (3) \end{array}}$$

então como é fácil de verificar, a função

$$u(x,t) = 3\, e^{-\left(\frac{25\pi^2}{4}\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right),$$

é, de facto, solução desse problema.

Um cálculo simples mostra que se u_n e u_m são soluções de (pc 1)-(pc 2), também será solução qualquer combinação linear, isto é, qualquer função da forma $\alpha u_n + \beta u_m$, com α, β constantes arbitrárias.

Isto significa, então, que qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{N} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

é solução de (pc 1)-(pc 2). Assim, se a condição inicial $f(x)$ for da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \text{(i)}$$

a solução do problema será dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Questão: E se a função f não tiver a forma simples indicada em (i)?

Questão: E se a função f não tiver a forma simples indicada em (i)?

Aí uma ideia que surge é a de considerarmos séries.

Supondo que a função f possa ser expressa por uma série da forma

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \qquad \text{(ii)}$$

então um candidato natural para a solução do problema (pc 1)-(pc 3) seria a função dada por

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \qquad (*)$$

Questão 1: Será que qualquer função f definida em $[0, L]$ pode expressar-se como uma série do tipo (ii) e, em caso afirmativo, como encontrar as constantes b_n?

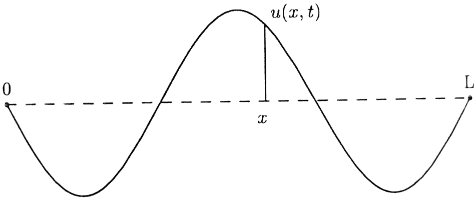
Questão 2: Será que a expansão $(*)$ define, de facto, uma função $u(x, t)$ e, caso isso aconteça, a função assim definida satisfaz o problema (pc 1)-(pc 3)?

Nota: Uma expansão de f na forma $(*)$ é chamada expansão em série de Fourier de senos para f.

Exercício: Proceda como na solução do problema $(\text{pc}\,1) - (\text{pc}\,3)$ e estude o problema da condução do calor quando as condições de fronteira se referem às derivadas, em ordem a x, da função, isto é, quando

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, & t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{array}}$$

- O problema das cordas vibrantes diz respeito ao estudo das vibrações transversais de uma corda esticada entre dois pontos (por exemplo, uma corda de uma guitarra).
- O objetivo é determinar a função $u(x,t)$ que dá o deslocamento vertical da corda num determinado ponto x, $0 \leq x \leq L$, e num determinado instante t, $t \geq 0$.



Ao desenvolver o modelo matemático para este problema, assumimos que:

1. a corda é perfeitamente flexível e tem densidade linear constante;
2. a tensão da corda é constante;
3. a ação da gravidade é negligenciável e não atuam quaisquer outras forças sobre a corda
4. a amplitude das vibrações é pequena, de modo que é lícito supor que o ponto x da corda se desloca apenas na vertical.

Sob estas condições, prova-se que o movimento da corda é governado pelo seguinte PVIF:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0 & (\text{pcv } 1) \\[2ex]
u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 & (\text{pcv } 2) \\[2ex]
u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & (\text{pcv } 3) \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L & (\text{pcv } 4)
\end{array}}$$

1. A constante α^2 é estritamente positiva e tem a ver com a densidade e tensão da corda.
2. As condições de fronteira (pcv 2) refletem o facto de a corda estar fixa nos pontos $x = 0$ e $x = L$.
3. As equações (pcv 3) e (pcv 4) especificam, repetivamente, a configuração inicial da corda e a velocidade inicial de cada ponto desta (ou seja, o modo como a corda é abandonada na posição inicial).
4. para que as condições iniciais e de fronteira sejam consistentes, devemos, natualmente, assumir que $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$.

Tentemos aplicar o método de separação das variáveis, de modo análogo ao que fizemos para o problema da condução do calor, ao problema (pcv 1) $-$ (pcv 4).

Suponhamos então, que (pcv 1) $-$ (pcv 4) tem uma solução da forma

$$\boxed{u(x,t) = F(x)G(t)}$$

com F uma função apenas de x e G uma função apenas de t. Temos, então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

pelo que, substituindo em (pcv 1) vem:

$$F(x)G''(t) = \alpha^2 F''(x)G(t)\,,$$

ou ainda, após separação das variáveis

$$\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{G''(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}\,.$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{G''(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Tal como no caso anterior, estes quocientes têm de ser iguais a uma certa constante λ, i.e.,

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda\,.$$

Além disso, como $u(x,t) = F(x)G(t)$, as condições de fronteira (pcv 2) exprimem-se, para todo $t \geq 0$ como

$$F(0)G(t) = 0 \quad \text{e} \quad F(L)G(t) = 0\,.$$

Assim, ou $G(t) = 0$, para todo o $t \geq 0$, o que, naturalmente, não nos interessa, pois levaria a que $u(x,t) = 0$, ou

$$F(0) = F(L) = 0$$

Obtemos desta forma o PVF já considerado na condução do calor:

$$F''(x) - \lambda\, F(x) = 0$$
$$F(0) = F(L) = 0$$

com λ uma constante.

Como vimos, tal problema admite soluções não triviais

$$\boxed{F_n(x) = c_n \,\mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ; \quad n \in \mathbb{N}} \tag{1}$$

com c_n constantes não nulas (arbitrárias), apenas para certos valores da constante λ, nomeadamente, para

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 , \; n \in \mathbb{N} .$$

Consideremos agora a equação $\frac{1}{\alpha^2}\frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda$ para $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, com $n \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$G''(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2\, G(t) = 0\,.$$

Facilmente se verifica que para cada valor de n, a solução geral desta equação é dada por

$$\boxed{G_n(t) = c_{n,1}\cos\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) + c_{n,2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right)} \qquad (2)$$

Assim, combinando (1) com (2), obtemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= F_n(x)\, G_n(t) \\ &= c_n\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)\left(c_{n,1}\cos\left(\tfrac{n\pi\alpha}{L}t\right) + c_{n,2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{n\pi\alpha}{L}t\right)\right) \\ &= \left(b_n\cos\left(\tfrac{n\pi\alpha t}{L}\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) \qquad (3). \end{aligned}$$

Tal como no caso do problema da condução do calor, vamos considerar uma soma infinita de funções (3), i.e., considerar

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + B_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (\oplus)\,.$$

Para que $(\oplus)$ possa ser a solução do nosso problema, deveremos ter

$$u(x,0) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\alpha}{L} B_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L\,.$$

Reduzimos assim o problema das cordas vibrantes $(\text{pcv}\,1) - (\text{pcv}\,4)$ ao problema da determinação em série de Fourier de senos das funções $f(x)$ e $g(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

com

$$c_n = \frac{n\pi\alpha}{L}\, B_n\,.$$

Questão:

Que funções podem ser expressas na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)?$$

(A utilização de $\frac{1}{2}a_0$ em vez de a_0 é feita apenas por conveniência, como ficará claro posteriormente).

Se uma função puder ser expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \qquad (*)$$

é de esperar que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados a f.

Questão: Que expressão terão eles para f?

Para encontrar os coeficientes a_n e b_n vamos supor que a série do lado direito de $(*)$ converge uniformemente para $f(x)$.

- Nesse caso, f deverá ser uma função contínua que pode ser integrada, integrando cada termo da série do lado direito de $(*)$.
- Além disso, como $\cos(\pi x/L)$ e $\text{sen}(\pi x/L)$ são periódicas de período $2L$, e $2L$ é também um período para todas as outras funções seno e cosseno que aparecem na série, f deverá ser periódica de período $2L$.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \qquad (*)$$

Integrando ambos os lados de $(*)$ entre $-L$ e L, vem:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

- como $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função ímpar, vem imediatamente que $\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 0$
- além disso, para $n = 1, 2, \ldots$ facilmente se verifica que

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 2\int_{0}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{2L}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L = 0\,.$$

Assim, temos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} dx = a_0 L\,,$$

donde vem

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx}$$

Para obter os restantes coeficientes, vamos fazer uso das seguintes *relações de ortogonalidade*: dados $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \tag{1}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{se} \quad m = n \\ 0 & \text{se} \quad m \neq n \end{cases} \tag{2}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{se} \quad m = n \\ 0 & \text{se} \quad m \neq n \end{cases} \tag{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\qquad (*)$$

Assim, multiplicando $(*)$ por $\cos(\frac{m\pi x}{L})$, para um certo inteiro $m\geq 1$ fixo, e integrando, obtemos

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx=\frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-L}^{L}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx$$

ou seja, atendendo a (1) e (2),

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx=a_mL\,,$$

donde concluímos que

$$\boxed{a_m=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx\,;\quad m\geq 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \qquad (*)$$

De modo semelhante, multiplicando $(*)$ por sen$(\frac{m\pi x}{L})$ e integrando, obtemos que

$$\boxed{b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx\,; \quad m \geq 1}$$

Como se pode observar as seguintes duas fórmulas

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx}$$

e

$$\boxed{a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx\,; \quad m \geq 1}$$

podem ser agrupadas numa só, i.e., podemos escrever

$$\boxed{a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx\,; \quad m \geq 0}$$

daí a grande vantagem de termos escrito $\frac{1}{2}a_0$ na expressão $(*)$.

Definição:

Uma função f real de variável real diz-se seccionalmente contínua num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se tiver, nesse intervalo, apenas um número finito de descontinuidades, todas elas de 1^{a} espécie.

Por outras palavras, existem

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

tais que f é contínua em cada intervalo aberto $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 1, \ldots, n-1$, e existem e são finitos os limites $f(a_i^+) = \lim_{h \to 0^+} f(a_i + h)$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $f(a_i^-) = \lim_{h \to 0^-} f(a_i + h)$, $i = 2, \ldots, n$.

(Note-se que nos pontos a_i a função pode assumir valores arbitrários ou nem sequer estar definida).

Uma função f real de variável real diz-se seccionalmente contínua, se for seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

As funções seccionalmente contínuas são, naturalmente, integráveis em qualquer intervalo limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição:

Seja f uma função real de variável real, seccionalmente contínua e periódica de período $2L$. Chama-se série de Fourier de f à série trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \qquad \text{(sf 1)}$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,; \quad n \geq 0\,, \qquad \text{(sf 2)}$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,; \quad n \geq 1\,. \qquad \text{(sf 3)}$$

Os coeficientes a_n e b_n definidos por (sf 2) e (sf 3) são chamados coeficientes de Fourier da função f.

As fórmulas (sf 2) e (sf 3) são conhecidas por fórmulas de Euler.

Nota: Se (sf 1) é a série de Fourier de f, é usual escrever-se

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \qquad (*)$$

para lembrar que a série está associada com a função f.

- Note-se que a hipótese de f ser seccionalmente contínua garante que se podem calcular os coeficientes a_n e b_n pelas fórmulas (sf 2) e (sf 3), mas não garante a priori, que a série (sf 1) convirja para $f(x)$, ou seja, que o símbolo $\sim$ possa ser substituído pelo símbolo de igualdade em $(*)$. Voltaremos à questão da convergência da série de Fourier mais à frente.

- Note-se também que se alterarmos o valor de f num número finito de pontos no intervalo $[-L, L]$, a sua série de Fourier não se altera. Em particular, f poderá nem sequer estar definida nalguns pontos do intervalo $[-L, L]$ e ser possível definir a sua série de Fourier.

Consideremos agora a questão importante da convergência da série de Fourier.

Como já referimos, dada uma certa função f, periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua, não podemos garantir que a série de Fourier de f, isto é, a série definida formalmente por (sf 1)-(sf 3), convirja, em cada ponto x_0, para $f(x_0)$.

Definição: Uma função f diz-se seccionalmente diferenciável se for seccionalmente contínua e se a derivada f' também for seccionalmente contínua.

Teorema (Convergência da série de Fourier): Seja f uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente diferenciável. Então a série de Fourier de f, dada por (sf 1)-(sf 3), converge, em cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, para o valor

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \, .$$

Nota:

- Se a função f estiver definida em x_0 e for contínua nesse ponto, então ter-se-á $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$, donde, virá

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = f(x_0) \, ,$$

  pelo que podemos concluir que, nesse caso,

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \, .$$

- Nos pontos onde f é descontínua, a sua série de Fourier converge para a média dos limites laterais à direita e à esquerda.

Seja f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e suponhamos que f é uma função par.

Então, os seus coeficientes de Fourier serão dados por:

$$a_n = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\,, \quad n \geq 0$$

e

$$b_n = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Assim, a série de Fourier de f terá a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,,$$

com a_n dados por

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\,, \quad n \geq 0\,.$$

Isto é, a sua série de Fourier será uma série de cossenos

De modo análogo, se f for uma função ímpar, ter-se-á:

$$a_n = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 0\,,\quad n \geq 0$$

e

$$b_n = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\,,\quad n \geq 1\,,$$

pelo que podemos concluir que a sua série de Fourier será uma série de senos.

Problema típico: encontrado ao usar separação de variáveis para resolver uma edp:

representar uma função definida num certo intervalo finito $[0, L]$ por uma série trigonométrica envolvendo apenas senos ou apenas cossenos.

Por exemplo, no problema da condução do calor houve necessidade de expressar a função inicial $f(x) = u(x, 0)$, para $0 \leq x \leq L$, como uma série de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) .$$

Ideia: usar os resultados sobre funções ímpares, "estendendo" a função f, definida inicialmente apenas no intervalo $[0, L]$, a uma função periódica de período $2L$ e "ímpar".

Definição (Extensão ímpar $2L$-periódica de f):

Consideremos a função f_I, extensão de f, definida do seguinte modo:

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & \text{se} \quad -L < x < 0 \end{cases}$$

e

$$f_I(x+2kL) = f_I(x), \quad x \in [0,L], \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Note-se que a primeira condição estende f ao intervalo $]-L, L]$ e a segunda faz a extensão de f, de uma forma periódica (período $2L$), a toda a reta real.

A função f_I (que é seccionalmente contínua) terá uma expansão em série de Fourier consistindo apenas de termos com senos.

A função f_I chama-se extensão ímpar $2L$-periódica de f.

Definição (Extensão par $2L$-periódica de f):

De modo análogo ao anterior, pode definir-se a extensão par $2L$-periódica de f como sendo a função f_P, periódica de período $2L$ definida em $]-L, L]$ por:

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & \text{se} \quad -L < x < 0 \end{cases}$$

Às séries de Fourier das funções f_I e f_P acima definidas chamamos, respetivamente, série de Fourier de senos e série de Fourier de cossenos da função f definida no intervalo $[0, L]$. Mais precisamente:

Definição: Seja f uma função seccionalmente contínua no intervalo $[0, L]$.

(i) Chama-se série de Fourier de cossenos de f à série definida por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,, \quad n \geq 0\,.$$

(ii) Chama-se série de Fourier de senos de f à série definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde os coeficientes b_n são dados por

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,, \quad n \geq 1\,.$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0 & \text{(pc 1)} \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 & \text{(pc 2)} \\[2ex] u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(pc 3)} \end{array}}$$

Suponhamos que f é contínua e seccionalmente diferenciável em $[0, L]$ e, além disso, é tal que $f(0) = f(L) = 0$.

Então, a extensão ímpar $2L$-periódica de f é contínua e seccionalmente diferenciável, pelo que, sendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a sua série de Fourier (ou seja, sendo esta a série de Fourier de senos de f), se tem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L\,.$$

Recapitulando o estudo feito anteriormente, vemos que é "natural" considerar para solução do problema a série de funções

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (*)}$$

A esta série definida por $(*)$, onde b_n são os coeficientes da série de Fourier de senos da função f que define a condição inicial (pc 3), chamamos **solução formal** do problema (pc 1)-(pc 3).

No caso em que f satisfaz as condições atrás referidas (f contínua e seccionalmente diferenciável em $[0,L]$ e tal que $f(0)=f(L)=0$), pode provar-se que a solução formal do problema é uma solução genuína do problema, i.e., pode mostrar-se que a série definida formalmente por $(*)$ converge, para cada $(x,t)\in\overline{\Omega}$, e que a função soma $u(x,t)$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e de classe C^2 em Ω que satisfaz as condições (pc 1)-(pc 3). Pode mostrar-se ainda que o problema em causa admite apenas a solução definida pela série $(*)$.

Exercício (condução do calor (caso 2)):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \qquad) \end{array}}$$

Use o método de separação das variáveis para mostrar que

$$\boxed{u(x,t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

onde a_n são os coeficientes da série de Fourier de cossenos de f.

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0 & (\text{pcv } 1) \\[2ex]
u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 & (\text{pcv } 2) \\[2ex]
u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & (\text{pcv } 3) \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L & (\text{pcv } 4)
\end{array}
$$

Recordando o estudo que foi feito anteriomente, vemos que para encontrar uma sua solução formal bastar-nos-á encontrar a série de Fourier de senos para as funções iniciais f e g:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

vindo esta solução dada, então, por

$$\boxed{u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + B_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L}$$

onde $B_n = \frac{L}{n\pi\alpha} c_n$.