Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$: Extremos Condicionados

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

abril 2018

Extremos Condicionados

Problema

- Determinar os extremantes da função

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

  quando as variáveis independentes estão sujeitas a restrições.

Falamos, neste caso, de

- Extremos condicionados

Enunciaremos 2 Métodos de abordagem ao Problema:

- Redução de dimensão
- Multiplicadores de Lagrange

Teorema (de Weierstrass)

Se f é um campo escalar de n variáveis, definido e contínuo num conjunto $D_f \subset \mathbb{R}^n$ que é fechado e limitado, então f tem um maximizante global e um minimizante global em D_f.

Obs: Os extremantes globais podem ocorrer nos pontos críticos de f, mas também podem pertencer à fronteira de D_f.

Localizar, nos casos mais simples, os extremantes globais de uma função f, nas condições do teorema, consiste em:

1. Identificar os pontos críticos de f e calcular o valor de f em cada um desses pontos.
2. Encontrar os extremantes de f, que estão na fronteira de D_f (isto é, que são condicionados).
3. Comparar os valores encontrados nos passos anteriores. Concluir que o maior valor encontrado é o máximo absoluto de f em D_f, enquanto que o menor destes valores é o seu mínimo absoluto.

Sobre os extremos, da fronteira

Com $B, U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$; considere-se a estrutura de nível k da função[1] g:

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in B \; : \; g(\mathbf{x}) = k\} \, .$$

- [Extremante condicionado] Um ponto $\mathbf{a} \in (U \cap \Sigma)$ diz-se um extremante de f condicionado pela condição $g(\mathbf{x}) = k$ quando é um extremante de $f\Big|_{\Sigma}$, isto é, da restrição de f ao conjunto Σ.

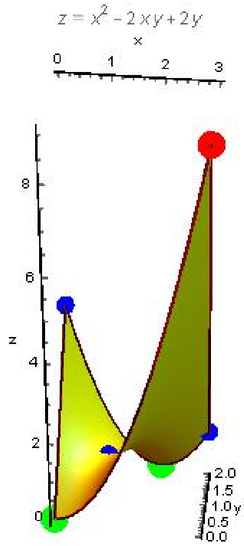
Obs: Usámos, nestes exemplos, um procedimento de “redução da dimensão".

[1] Caso se tenha $g(\mathbf{x}) = k$ também se poderia definir $G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - k$ e considerar $G(\mathbf{x}) = 0$.

Exemplos

1. Quais os extremos absolutos da função f em D, sabendo que

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y \text{ e}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 2\}?$$



1. Quais os pontos críticos?
2. Quais os extremantes de f na fronteira de D, isto é, nas retas definidas por $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 2$?
3. Resumindo:

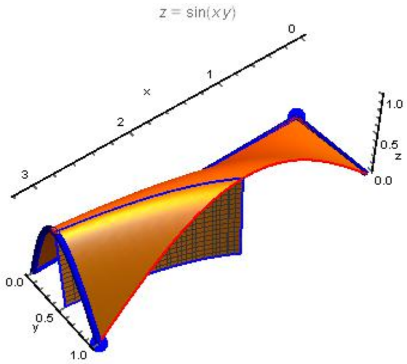
(a,b)	(1,1)	(0,2)	(0,0)	**(3,0)**	(3,2)	(2,2)
f(a,b)	1	4	0	**9**	1	0

Exemplos

2. Quais os extremos absolutos da função g em D, sabendo que

$$g(x, y) = \text{sen}(xy) \text{ e}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1\}?$$

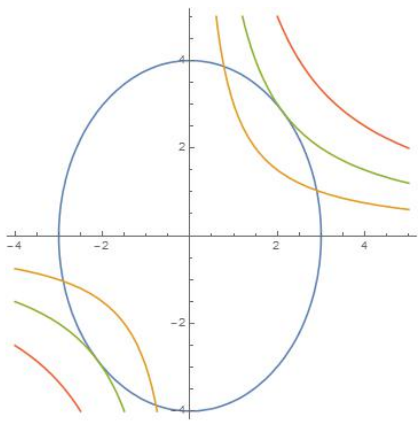


1. Quais os pontos críticos?
2. Quais os extremantes de f na fronteira de D, isto é, nas retas definidas por $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e $y = 1$?
3. Resumindo

(a,b)	(0,0)	(0,y)	(x,0)	**(x,y):**$xy = \frac{\pi}{2}$
f(a,b)	0	0	0	**1**

Exercício

Encontre um retângulo de área máxima que pode ser inscrito em uma elipse, $\mathcal{E}$, definida por $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.



- A função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$ é tal que a sua curva de nível 1 é $\mathcal{E}$, impõe a "restrição"ao problema (de otimização), isto é condiciona a função área...
- A função área pode definir-se como $A(x, y) = 4xy$, sendo que (x, y) designa um vértice de um retângulo, no primeiro quadrante.

Obs: Recorde-se que 2 curvas são tangentes em um ponto quando os respetivos vetores gradiente forem paralelos!

Multiplicadores de Lagrange

O problema da determinação de extremos de uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ significa resolver um sistema de $\underline{n \text{ equações}}$, definido por (com $i = 1, \cdots, n$):

$$\nabla f(x_i) = \vec{0}.$$

O método, denominado, de os Multiplicadores de Lagrange usa-se para encontrar **os extremos de** f, sob $\underline{m \text{ restrições}}$; a saber (com $j = 1, \cdots, m$):

$$g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{onde} \quad g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Seja $F : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_j \lambda_j g_j(\mathbf{x}),$$

cujos extremos são os extremos de f condicionados por g_j.
Encontrar os extremos de F, usando gradientes, consiste em resolver um sistema (de $n + m$ equações e $n + m$ incógnitas)

[Método dos multiplicadores de Lagrange:: algoritmo]

Para determinar os extremantes da função $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sujeitos a m restrições $g_j(\mathbf{x}) = 0$, supondo que esses valores extremantes existem (e que, nesses pontos $\nabla g_j \neq \vec{0}$)

1. Identificar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (e $\lambda_j \in \mathbb{R}$) resolvendo o sistema de $n + m$ equações

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}) \\ g_j(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

2. Calcular o valor de f em todos $\mathbf{x}$ encontrados no passo anterior. O maior desses valores é o máximo de f e o menor é o mínimo de f sujeita a $g_j(\mathbf{x}) = 0$.