# Programação Linear - soluções básicas

## Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

6 de setembro de 2019

# Programação Linear - soluções básicas

## antes

- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução óptima de um problema de programação linear que é um vértice $^{(*)}$.

## Guião

- Cada vértice corresponde a uma *solução básica* do sistema de equações,
- que resulta de transformar as restrições dos modelos de programação linear em equações.
- As soluções básicas do sistema de equações (vértices) podem ser representadas em quadros.

## depois

- Os quadros são usados no algoritmo simplex.
- O algoritmo simplex escolhe a sequência de vértices a explorar.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre quando há restrições do tipo $\geq 0$) e quando a solução óptima não é ilimitada.

# Conteúdo

- Transformação de inequações em equações
- Sistemas de equações
- Soluções básicas do sistema de equações indeterminado
  - Variáveis básicas
  - Variáveis não-básicas
- Correspondência entre soluções básicas e vértices
- Representação do vértice num quadro: *o quadro simplex*

# Exemplo: modelo de programação linear

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

- Vamos transformar as inequações em equações, porque é mais fácil tratar um sistema de equações do que um sistema de inequações.

## Transformação na forma canónica

$$
\begin{array}{rcl}
\max z & = & cx \\
 & & Ax \leq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
\max z & = & cx \\
 & & Ax + s = b \\
 & & x, s \geq 0
\end{array}
$$

sendo $s \in \mathrm{IR}_+^{m \times 1}$ um vector da mesma dimensão que $b$.

- Há um método de resolução que usa sistemas de inequações (Fourier-Motzkin) que não iremos ver.

# Transformação Inequações → Equações

- Qualquer inequação do tipo $\leq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.
- Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120 \\ x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- O valor da função linear $3x_1 + 2x_2$ é a quantidade de recurso usado na solução $(x_1, x_2)^\top$;
- o valor de $s_1$ (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso disponível (no exemplo, 120).

- Quando, numa solução $\tilde{x}$, a restrição é obedecida como igualdade (*i.e.*, a variável de folga é nula), diz-se que a *restrição é activa em* $\tilde{x}$.

# Exemplo: transformação na forma canónica

## Modelo original

- Variáveis de decisão: $x_1, x_2$.

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}$$

## Modelo na forma canónica (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: $x_1, x_2$.
- Variáveis de folga: $s_1, s_2, s_3$.

$$\begin{array}{rrcrrrrcl}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
 & 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
 & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}$$

# Soluções admissíveis e poliedro

- No modelo canónico, usam-se as designações **Variáveis de decisão** e **Variáveis de folga** para distinguir o tipo de variáveis.
- No algoritmo simplex, todas essas variáveis são simplesmente tratadas como variáveis (semelhantes) de um sistema de equações.
- Vamos passar a designá-las todas indiferenciadamente por $x$.

- O sistema de equações $Ax = b$,
- em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $x \in \mathbb{R}_{+}^{n \times 1}$,
- é tipicamente indeterminado (tem várias soluções). $^{(*)}$

- As soluções do sistema de equações $Ax = b$ em que $x \geq 0$ são as *soluções admissíveis*, que formam um poliedro convexo.
- O poliedro pode ser representado no espaço a $(n - m)$ dimensões.

(*) - vamos assumir que existe pelo menos uma solução admissível (*i.e.*, o problema não é impossível) e que a *característica da matriz* $A$ (número de linhas linearmente independentes) é $m$, porque se houver linhas linearmente dependentes podemos retirá-las antes.

# Identificação gráfica das variáveis

**Exemplo: o poliedro pode ser representado no espaço a 2 dimensões**

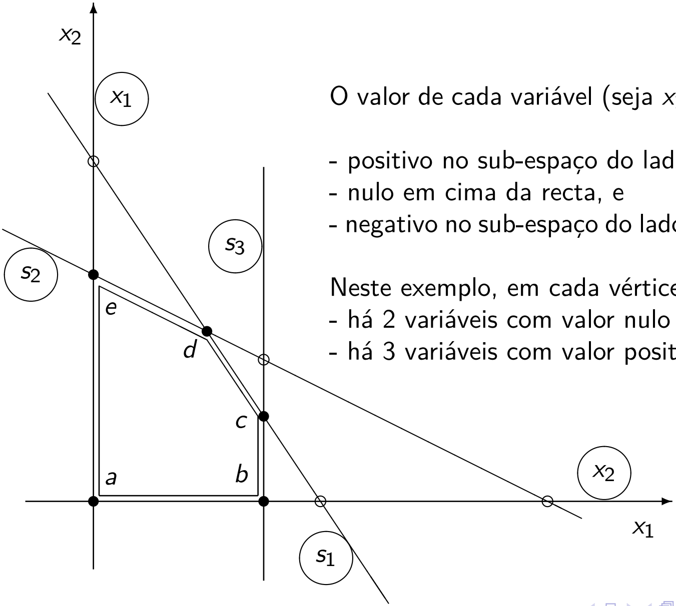
- número de variáveis $n = 5$.
- número de restrições $m = 3$.
- espaço a $(n - m) = 2$ dimensões.

**As variáveis são semelhantes:**

- Na recta que delimita o sub-espaço definido pela restrição $x_1 \geq 0$ (eixo (vertical) das ordenadas), o valor da variável $x_1 = 0$.
- Na recta que delimita o sub-espaço definido pela restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 120$, o valor da variável $s_1 = 0$.

- (nota: ambas as equações $3x_1 + 2x_2 = 120$ e $s_1 = 0$ descrevem a mesma recta).

# Representação do domínio com todas as variáveis

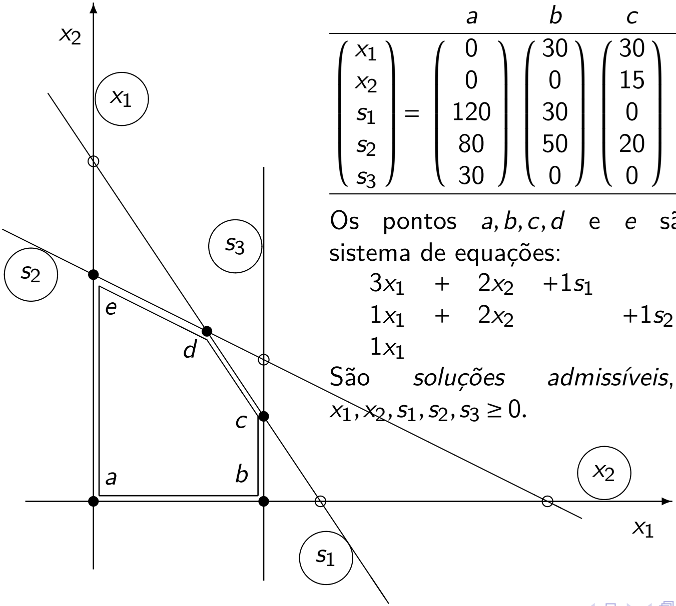



O valor de cada variável (seja $x_1, x_2, s_1, s_2$ ou $s_3$) é:

- positivo no sub-espaço do lado do círculo,
- nulo em cima da recta, e
- negativo no sub-espaço do lado oposto ao círculo.

Neste exemplo, em cada vértice:
- há 2 variáveis com valor nulo
- há 3 variáveis com valor positivo

# Representação do domínio: vértices admissíveis



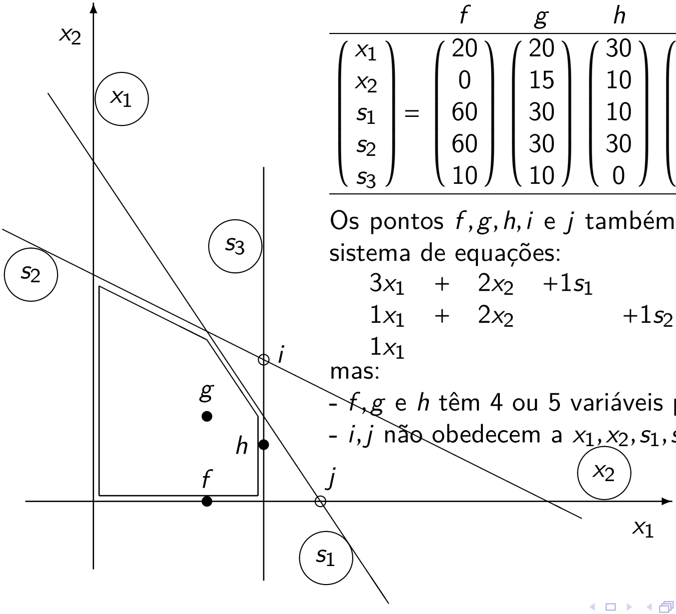

$$
\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ = \end{array}
\begin{array}{c} a \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} b \\ \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} c \\ \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} d \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} e \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Os pontos $a, b, c, d$ e $e$ são soluções do sistema de equações:

$$
\begin{array}{lllllll}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = 30
\end{array}
$$

São *soluções admissíveis*, dado que $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

# Representação do domínio: outros pontos




$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & f & g & h & i & j \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} & = &
\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

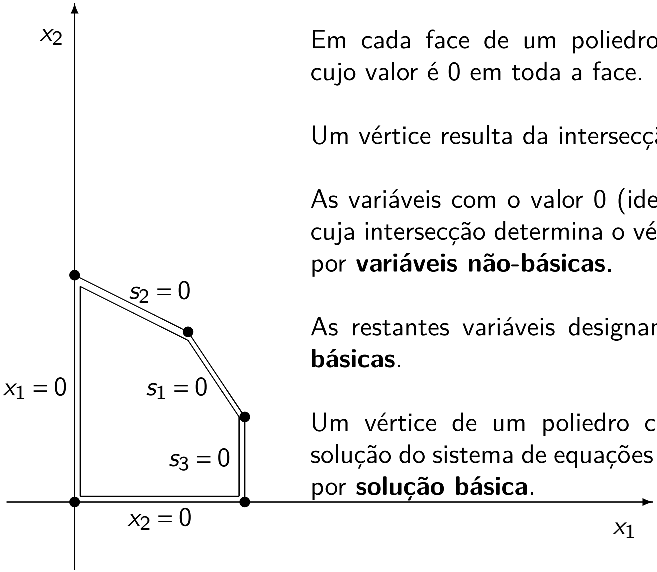
Os pontos $f, g, h, i$ e $j$ também são soluções do sistema de equações:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30
\end{array}
$$

mas:

- $f, g$ e $h$ têm 4 ou 5 variáveis positivas;
- $i, j$ não obedecem a $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

# Vértices de um poliedro e soluções básicas




Em cada face de um poliedro, há uma variável cujo valor é 0 em toda a face.

Um vértice resulta da intersecção de faces.

As variáveis com o valor 0 (identificando as faces cuja intersecção determina o vértice), designam-se por **variáveis não-básicas**.

As restantes variáveis designam-se por **variáveis básicas**.

Um vértice de um poliedro corresponde a uma solução do sistema de equações que será designada por **solução básica**.

# Soluções básicas de um sistema de equações

- Dado o sistema de equações $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $x \in \mathbb{R}_+^{n \times 1}$,
- numa *solução básica*, há $(n - m)$ *variáveis não-básicas* com valor igual a 0.

## Determinam-se os valores das variáveis:

- resolvendo o sistema de $m$ equações em ordem a $m$ *variáveis básicas* (correspondentes a um conjunto de $m$ colunas que devem ser linearmente independentes, *a base)*.
- Dado que este sistema de equações é determinado, a solução é única,
- e sabemos que as $(n - m)$ *variáveis não-básicas* têm valor igual a 0.

- $n$ : número de variáveis (nota: inclui as variáveis $x$ e $s$)
- $m$ : número de variáveis básicas = número de restrições (não contam as restrições $x \geq 0$ e $s \geq 0$)
- $n - m$ : número de variáveis não-básicas

# Exemplo: solução básica 1

- $n = 5$ : número de variáveis
- $m = 3$ : número de variáveis básicas = número de restrições
- $n - m = 2$ : número de variáveis não-básicas

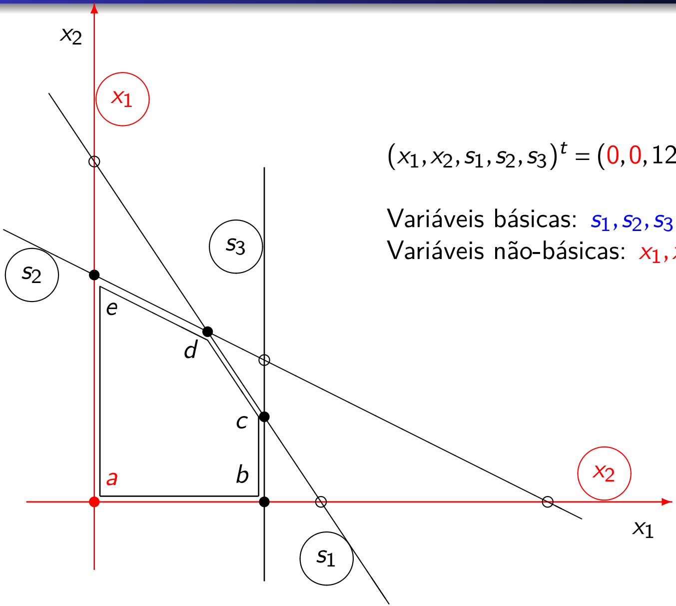
- Reordenando as colunas, o sistema de equações:

$$
\underbrace{\boxed{\begin{array}{ccc} +1s_1 & & \\ & +1s_2 & \\ & & +1s_3 \end{array}}}_{\text{Vars básicas}}
\quad
\underbrace{\boxed{\begin{array}{ccc} +3x_1 & + & 2x_2 \\ +1x_1 & + & 2x_2 \\ +1x_1 & & \end{array}}}_{\text{Vars não-básicas}}
\quad
\begin{array}{cr} = & 120 \\ = & 80 \\ = & 30 \end{array}
$$

- já está resolvido em ordem a $s_1, s_2$ e $s_3$ (*variáveis básicas*).
- Sendo $x_1$ e $x_2$ (*variáveis não-básicas*) iguais a 0,
- obtém-se a solução básica $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 120, s_2 = 80$ e $s_3 = 30$.

- Esta *solução básica* corresponde ao vértice origem dos eixos, $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (0, 0, 120, 80, 30)^t$.
- A função objectivo é $z = 12x_1 + 10x_2$, e o valor desta solução é 0.

# ... que corresponde ao vértice $a: (x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top$




$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (0, 0, 120, 80, 30)^t.$

Variáveis básicas: $s_1, s_2, s_3$
Variáveis não-básicas: $x_1, x_2$

# Exemplo: solução básica 2

- Reordenando as colunas, para $x_1, x_2$ e $s_3$ serem variáveis básicas:

$$\boxed{\begin{array}{lll} 3x_1 & +2x_2 & \\ 1x_1 & +2x_2 & \\ 1x_1 & & +1s_3 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lll} +1s_1 & & \\ & + & 1s_2 \\ & & \end{array}} \quad \begin{array}{rr} = & 120 \\ = & 80 \\ = & 30 \end{array}$$

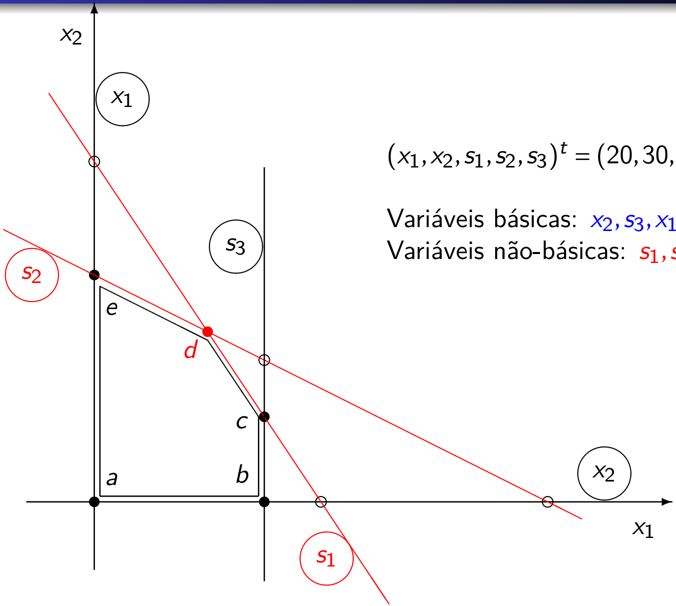
- e pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$, obtém-se $^{(*)}$:

Vars básicas — Vars não-básicas

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1x_1 & & \\ & 1x_2 & \\ & & 1s_3 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{rrrr} + & 0.5\ s_1 & - & 0.5\ s_2 \\ - & 0.25\ s_1 & + & 0.75\ s_2 \\ - & 0.5\ s_1 & + & 0.5\ s_2 \end{array}} \quad \begin{array}{rr} = & 20 \\ = & 30 \\ = & 10 \end{array}$$

- Sendo $s_1$ e $s_2$ (variáveis não-básicas) iguais a 0, a solução básica é:
- $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (20, 30, 0, 0, 10)^t$.
- O valor desta solução é 540 $(= 12 \times 20 + 10 \times 30)$.

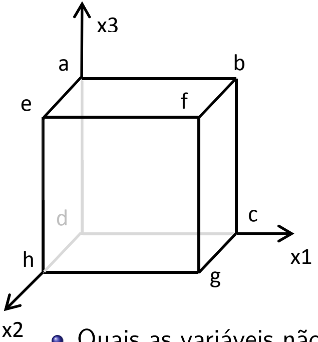
(*) - em alternativa, pode usar-se eliminação de Gauss.




$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (20, 30, 0, 0, 10)^t.$

Variáveis básicas: $x_2, s_3, x_1$
Variáveis não-básicas: $s_1, s_2$

# Exemplo no espaço a 3 dimensões

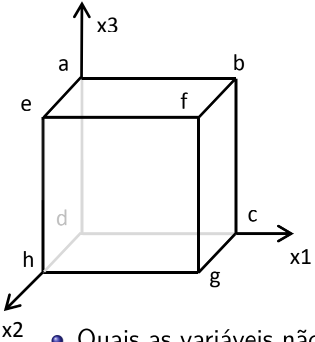



Região admissível é o cubo:

$$\begin{array}{llllllll} x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}$$

- Quais as variáveis não-básicas na solução básica correspondente ao vértice $g$?

# Exemplo no espaço a 3 dimensões




Região admissível é o cubo:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Quais as variáveis não-básicas na solução básica correspondente ao vértice $g$?
- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações $(n = 6, m = 3)$.
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas: espaço com 3 dimensões.
- As variáveis não-básicas são as variáveis com valor 0 nas 3 faces que definem o vértice $g$ : $x_3, s_1$ e $s_2$.
- As variáveis básicas são $x_1 = x_2 = s_3 = 1$ (fácil de resolver).

Caso geral

# Representação do vértice num quadro: *o quadro simplex*

- Cada *quadro simplex* apresenta o sistema de equações resolvido em ordem a um conjunto de variáveis básicas.
- Associando valores nulos às variáveis não-básicas, obtemos uma solução básica do sistema de equações, *i.e.*, um vértice do poliedro.

**Linhas do quadro simplex:**

- O quadro simplex apresenta as $m$ equações das restrições, e
- a equação da função objectivo, na última linha.

- Exemplo: a função objectivo $z = 12x_1 + 10x_2$ é representada como a equação:

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0$$

**O quadro simplex tem uma matriz identidade $I_{m+1,m+1}$ formada:**

- pelas $m$ colunas das variáveis básicas, e
- pela coluna de $z$, a variável que representa a função objectivo.

# Exemplo

$$
\begin{array}{llllllll}
\max z & & & & & & & \\
z & -12x_1 & - & 10x_2 & & & & = & 0 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
 & 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| $s_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| $z$ | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- As $m$ variáveis básicas e a f. obj. são identificadas na 1.ª coluna.
- Os respectivos valores aparecem na última coluna (lado direito).
- As restantes $(n-m)$ variáveis não-básicas têm valor 0.

# A matriz identidade do quadro simplex: necessidade

- Deve existir sempre uma matriz identidade no quadro simplex para cada equação mostrar, de uma forma independente:
  - o valor de cada variável básica e
  - o valor da função objectivo

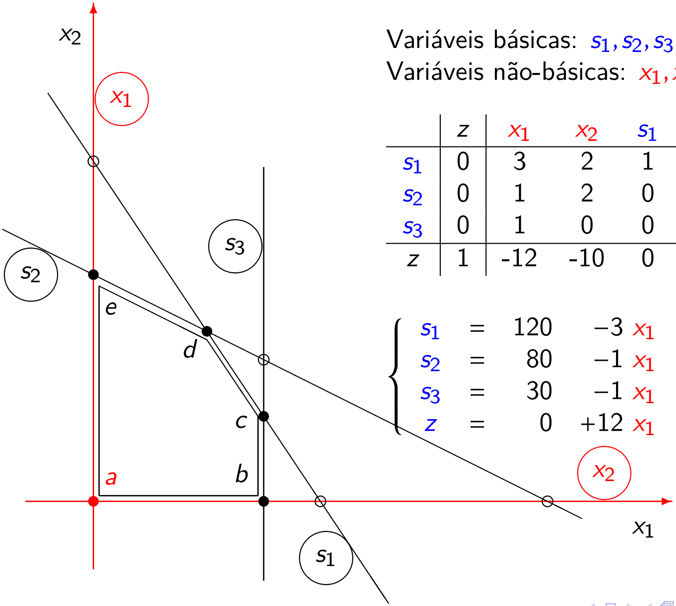
  em função apenas dos valores das variáveis não-básicas.
- Isso é usado para tomar decisões no método simplex.

Exemplo: Variáveis básicas: $x_B = (s_1, s_2, s_3)^\top$
Variáveis não-básicas: $x_N = (x_1, x_2)^\top$

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| $s_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| $z$ | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Vértice $a : (x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top$

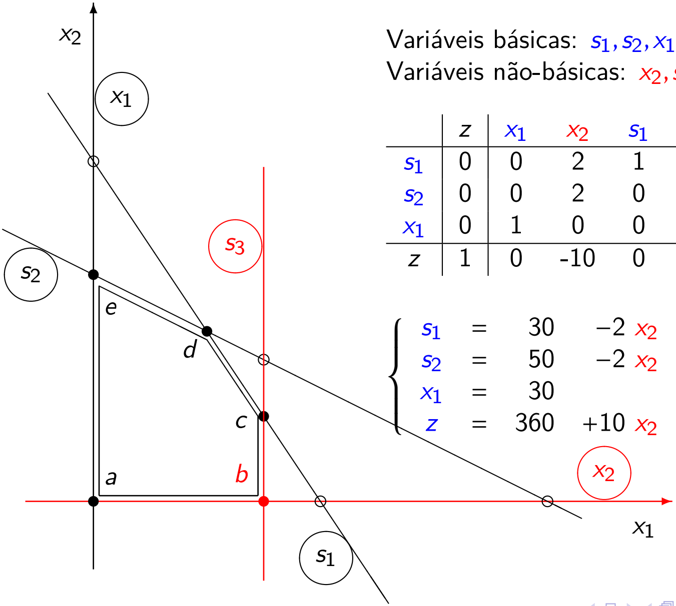



Variáveis básicas: $s_1, s_2, s_3$
Variáveis não-básicas: $x_1, x_2$

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| $s_2$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 80 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| $z$ | 1 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

# Vértice $b : (x_1, x_2)^\top = (30, 0)^\top$

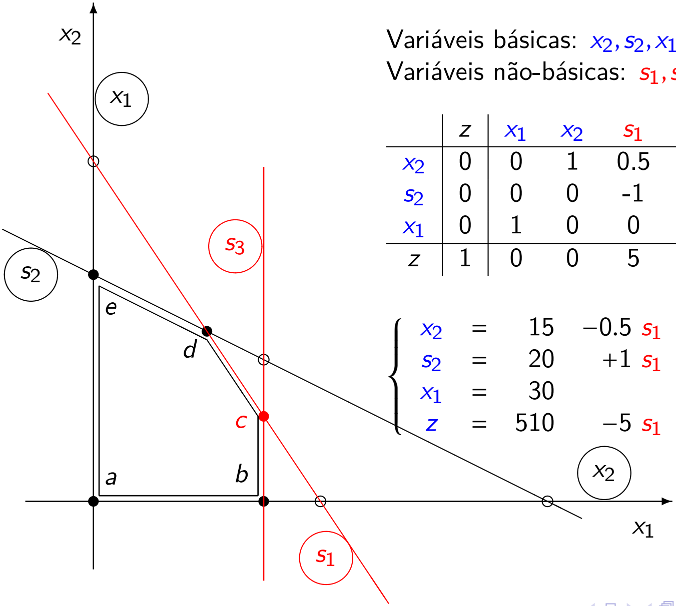



Variáveis básicas: $s_1, s_2, x_1$
Variáveis não-básicas: $x_2, s_3$

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | -3 | 30 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 50 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| $z$ | 1 | 0 | -10 | 0 | 0 | 12 | 360 |

$$\left\{ \begin{array}{lclll} s_1 & = & 30 & -2\ x_2 & +3\ s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2\ x_2 & +1\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \\ z & = & 360 & +10\ x_2 & -12\ s_3 \end{array} \right.$$

# Vértice $c : (x_1, x_2)^\top = (30, 15)^\top$

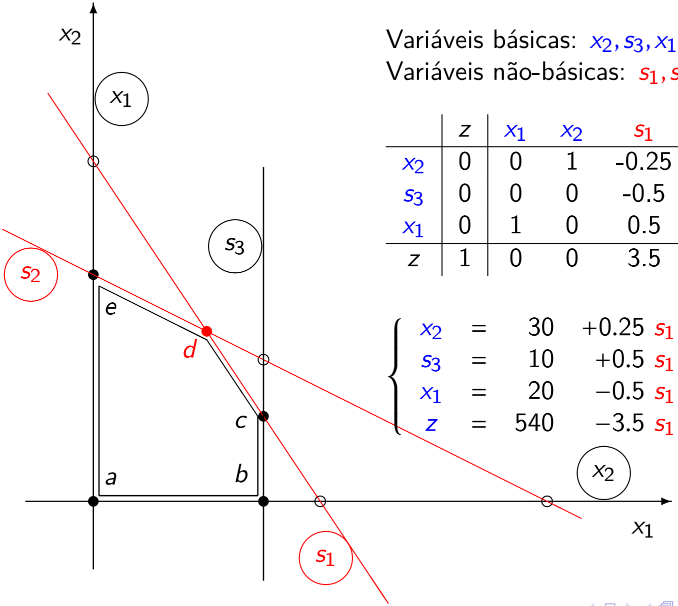



Variáveis básicas: $x_2, s_2, x_1$
Variáveis não-básicas: $s_1, s_3$

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | -1.5 | 15 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 20 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 30 |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | -3 | 510 |

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & +1\ s_1 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \\ z & = & 510 & -5\ s_1 & +3\ s_3 \end{array}\right.$$

# Vértice $d : (x_1, x_2)^\top = (20, 30)^\top$




Variáveis básicas: $x_2, s_3, x_1$
Variáveis não-básicas: $s_1, s_2$

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -0.25 | 0.75 | 0 | 30 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0.5 | 1 | 10 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 20 |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 3.5 | 1.5 | 0 | 540 |

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 30 & +0.25\ s_1 & -0.75\ s_2 \\ s_3 & = & 10 & +0.5\ s_1 & -0.5\ s_2 \\ x_1 & = & 20 & -0.5\ s_1 & +0.5\ s_2 \\ z & = & 540 & -3.5\ s_1 & -1.5\ s_2 \end{array}\right.$$

# Conclusão

- Um vértice de um poliedro convexo é caracterizado algebricamente por ser uma solução básica de um sistema de equações.
- Cada quadro simplex representa uma solução básica do sistema de equações das restrições e a função objectivo.
- O quadro simplex fornece toda a informação (algébrica) necessária ao algoritmo simplex.
- O pivô é a mudança de uma solução básica (vértice) para uma solução básica adjacente.
- Veremos o método simplex que define as regras para percorrer uma sequência de vértices admissíveis sucessivamente melhores até atingir a solução óptima.

# Apêndices

# Determinação dos valores das vars numa solução básica

- Reordenando as colunas e fazendo uma partição do conjunto de variáveis, as restrições $Ax = b, x \geq 0$ são equivalentes a:

$$\begin{aligned} Bx_B \quad + \; Nx_N \quad &= b \\ x_B, x_N \geq 0 & \end{aligned}$$

- após partir o vector de variáveis de decisão $x$ em dois subvectores:

$x_B \in \mathrm{IR}_+^{m\times 1}$ : subvector de variáveis básicas
$x_N \in \mathrm{IR}_+^{(n-m)\times 1}$ : subvector de variáveis não-básicas

- e a matriz $A$ em duas submatrizes:

$B \in \mathrm{IR}^{m\times m}$ : submatriz de $A$ das variáveis básicas (não-singular),
$N \in \mathrm{IR}^{m\times(n-m)}$ : submatriz de $A$ das variáveis não-básicas.

- Pré-multiplicando por $B^{-1}$, obtém-se o seguinte sistema de equações (equivalente):

$$\begin{aligned} B^{-1}(Bx_B + Nx_N) &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

# Determinação da solução básica (cont.)

- Dado o sistema de equações escrito na forma $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$,
- o valor das variáveis básicas $\tilde{x}_B$ pode ser determinado, dado que o valor das variáveis não-básicas $\tilde{x}_N = 0$ :

**A *solução básica* $\tilde{x}$ é:**

- $$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$
- Se $\tilde{x}_B \geq 0$ então $\tilde{x}$ é uma *solução básica admissível*.

**Teorema**

$\tilde{x}$ é uma solução básica admissível $\iff$ $\tilde{x}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

▸ Intuicao ▸ Prova

# Valor de função objectivo da solução básica

- A função objectivo $z = cx$ é equivalente a:

$$z = c_B x_B + c_N x_N,$$

- após partir o vector de custos $c$ em dois subvectores:

$c_B \in \mathrm{IR}^{1\times m}$ : subvector de coef. de custo das variáveis básicas
$c_N \in \mathrm{IR}^{1\times (n-m)}$ : subvector de coef. de custos das variáveis não-básicas

$$\begin{aligned} z &= c_B x_B + c_N x_N = \\ &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = \\ &= c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N \end{aligned}$$

- pelo que o valor da função objectivo da solução básica $\widetilde{x}$ é:

$$\widetilde{z} = c_B B^{-1} b$$

Voltar

# O que significa o vector $B^{-1}b$?

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.
- Os elementos de $B^{-1}b$ são as coordenadas do vector $b$ em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$b = B\,(B^{-1}b)$$

$$\begin{array}{c} \\ \boxed{\begin{array}{c}120\\80\\30\end{array}} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc}3 & 2 & 0\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{array}} \end{array} * \begin{array}{c} \\ \boxed{\begin{array}{c}20\\30\\10\end{array}} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}120\\80\\30\end{array}} = 20 \boxed{\begin{array}{c}3\\1\\1\end{array}} + 30 \boxed{\begin{array}{c}2\\2\\0\end{array}} + 10 \boxed{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}}$$

$$b = 20\ \vec{v}_1 + 30\ \vec{v}_2 + 10\ \vec{v}_3$$

- ou seja, é a solução $x_B = B^{-1}b = (x_1, x_2, s_3)^\top = (20, 30, 10)^\top$.

# O que significa o vector $B^{-1}N$?

- Da mesma forma, os elementos das colunas das variáveis não básicas representam as coordenadas das respectivas colunas iniciais em relação à base $B$.

# Solução básica ≡ Vértice

## Intuição

- Uma solução com uma variável igual a 0 pertence à recta (ou, na generalidade, ao (hiper)plano) que delimita o sub-espaço definido por uma restrição.
- Uma solução com $(n - m)$ variáveis iguais a 0 pertence a $(n - m)$ (hiper)planos.
- A intersecção de $(n - m)$ (hiper)planos (linearmente independentes) no espaço com $(n - m)$ dimensões define um vértice do poliedro.

## Nota:

- Vértice é uma definição do âmbito da geometria.
- Solução básica é uma definição do âmbito da álgebra.

Voltar

# 1. Solução básica ≡ Vértice

**Teorema**

$\tilde{x}$ é uma solução básica admissível $\iff$ $\tilde{x}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

Esboço da prova:

($\Rightarrow$) Vamos considerar uma solução básica que não seja um vértice, e pode portanto ser expressa como combinação convexa estrita de 2 pontos $x^1$ e $x^2$ de $X$, ambos com $m$ coordenadas positivas e $(n-m)$ coordenadas nulas. $Ax^1 = Ax^2 = b$, pelo que $A(x^1 - x^2) = 0$, que é uma combinação linear não-nula dos $m$ vectores, pelo que necessariamente $x^1 = x^2$, por causa da independência linear dos $m$ vectores (contradição).

($\Leftarrow$) Vamos supor que a solução $\tilde{x}$ não é uma solução básica; temos $m$ vectores linearmente dependentes, e é possível arranjar 2 pontos admissíveis, e exprimir a solução como combinação convexa estrita desses 2 pontos admissíveis, pelo que a solução não é um vértice. $\square$

# Fim