Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

novembro de 2017

2.1 Funções Primitivas (de uma função real de uma variável real)

Definição

Primitivas fundamentais

Algumas Propriedades do Integral Indefinido
- Primitivação “por decomposição”
- Primitivação “imediata”
- Primitivação “por substituição”
- Primitivação por partes

Primitivação de funções racionais

Até agora...

- Dada uma função derivável

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida num intervalo I, sabemos determinar uma função

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\boxed{g(x) = f'(x), \quad \forall x \in I}$$

Problema

- Dada uma função f (real de uma varivel real) definida num intervalo I, determinar uma função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável e tal que

$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I}$$

- Este problema é dito o da primitivação da função f no intervalo I.

Definição de primitiva

- [Função primitiva] Uma função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se função primitiva de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para qualquer $x \in I$, F é derivável e
$$F'(x) = f(x)$$

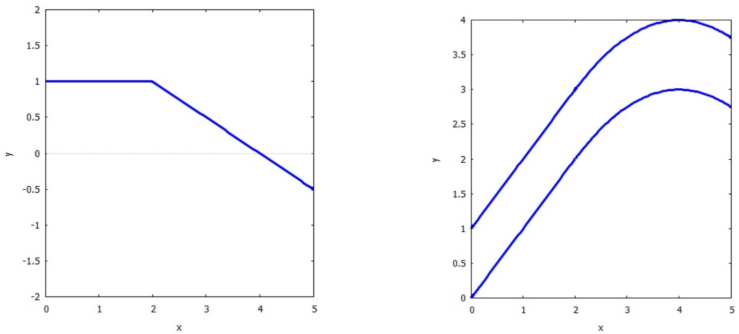
- Neste caso, dizemos também que
  - f é primitivável em I
  - F é uma (função) primitiva ou antiderivada de f em I e escrevemos
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Em suma

F é uma primitiva de f sse f é a derivada de F

Exemplo

1. Esboço gráfico de f e de duas possíveis funções primitivas F:



Exemplos

1. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x$
2. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$$
também é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x$

Mas

nem todas as funções admitem primitiva!

Por exemplo,

3. a função definida por
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
não admite primitiva no intervalo $[0, 4]$

(porque não é a derivada de nenhuma função)

Consequências da definição

- Teorema

  Se, no intervalo I, f e F são uma função e uma sua primitiva (respetivamente), então
$$\frac{d}{dx}F(x) = \left(\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]\right) = f(x)$$

  Se derivarmos uma primitiva de f obtemos, novamente, f.

- Teorema

  Se, no intervalo I, F_1 e F_2 são duas funções primitivas de f, então a diferença $F_1 - F_2$ é uma função constante.

  Isto é,

  Se F é uma primitiva de f no intervalo I então qualquer função definida por
$$F(x) + \mathcal{C}, \quad \forall x \in I$$
  e com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária,

  também é uma função primitiva de f.

  Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$

Denotar-se-á

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

- $\int$ representa um "S" alongado
- f diz-se função integranda
- dx é o símbolo que especifica a variável independente
- $\mathcal{C}$ diz-se constante de integração
- $\int f(x)\,dx$ designa-se por integral indefinido da função f.[1]

[1] "Indefinido" porque o membro direito da equação não é uma função definida, mas sim uma família de funções.

Recordar...

Função f	Derivada de f : $\frac{df}{dx}$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
x^k	kx^{k-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

com $k \in \mathbb{R}$

Primitivas "fundamentais"

(tabeladas)

Função f	Primitivas: $\int f(x)\,dx$
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
x^k	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$

com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nota

- Comparem-se as linhas respetivas, nas duas tabelas: a das derivadas com a correspondente das primitivas.

Exemplos

1. $\int 1\,dx = x + \mathcal{C}$ porque $\frac{d}{dx}(x+\mathcal{C}) = (x+\mathcal{C})' = \ldots$
2. $\int x\,dx$
3. $\int x^3\,dx$
4. $\int \sqrt{x}\,dx$
5. $\int e^x\,dx$
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx$
7. $\int \frac{1}{x}\,dx$

Algumas regras de primitivação

Recorde-se:
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

- [Primitivação "por decomposição"]

Teorema
Se $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (constantes); então
$$\int [\alpha\, f(x) \pm \beta\, g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx$$

porque...

Exemplos

1. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + 2\cos x)\,dx$

2. $\displaystyle\int (3x^2 - 2x^5)\,dx$

3. $\displaystyle\int (\sqrt{x} + 2)^2\,dx$

- [Primitivação "imediata"]

Teorema
Se as funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis e tais que a função composta, $g \circ f$, também está definida, então
$$\int [g'(f(x)) \times f'(x)]\,dx = g[f(x)] + \mathcal{C}$$

Nota

- Recorde-se a derivada da função composta
$$[g(f(x))]' = g'[f(x)] \times f'(x)$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int (2x + 10)^{20}\,dx$
2. $\displaystyle\int x^4 (x^5 + 10)^9\,dx$
3. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$
4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\,dx$

- [Primitivação “por substituição”]:é uma consequência direta da primritivação "imediata" (isto é, da derivada da função composta)

Teorema

Se a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é primitivável –isto é $F(x) = \int f(x)\,dx$ existe– e φ é uma função derivável e invertível no intervalo J, com $\varphi(J) \subset I$, então fazendo (encontrando) $x = \varphi(t)$ tem-se

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Nota

- Recorde-se que a função f, que se pretende primitivar, é uma função de x pelo que a variável t será substituída –depois da integração do 2º membro– pela sua expressão resultante de

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

Exemplos

1. $\int (x^2+1)^{50}.2x\,dx$ Use-se $t = x^2+1$
2. $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx,$ com $\left[\begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \end{array}\right]$ tem-se
   $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^t\,dt = e^t + \mathcal{C} = e^{x^3} + \mathcal{C}$
3. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx$ Use-se $t = \operatorname{sen} x$
4. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ Use-se $t = \ln x$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx,$ com $\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array}\right]$ tem-se...

- [Primitivação por partes]

  Considerem-se as funções $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis.
  Então

$$\int [f'(x) \times g(x)]\,dx = f(x) \times g(x) - \int [f(x) \times g'(x)]\,dx$$

Nota

Como o produto de funções é comutativo, na primitivação por partes ESCOLHE-SE

- para f' a função adequada (por exemplo: da qual se conhece a primitiva)
- para g a função adequada (por exemplo: a que, por derivação, simplifica a expressão)

Exemplos

1. $\int x \cos x\,dx$
2. $\int e^x \cos x\,dx$
3. $\int \cos^2 x\,dx$
4. $\int \ln x\,dx$

Primitivação de funções racionais

As funções racionais $-f(x) = \dfrac{P(x)}{D(x)}$,...– são uma classe de funções cujas primitivas se podem exprimir em termos de funções elementares.

Teorema

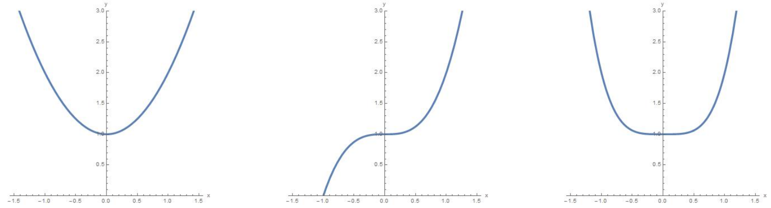
Fundamental da Álgebra (sobre os números reais):
Qualquer polinómio (de coeficientes reais) de grau ≥ 1 é fatorizável na forma de um produto de uma constante por fatores lineares de tipo $(x-a)$ e por fatores quadráticos irredutíveis do tipo (x^2+bx+c).

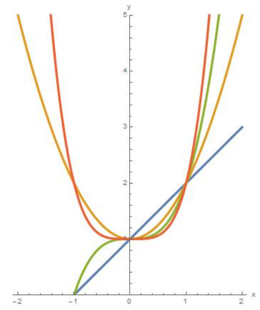
Nota

Considerem-se os seguintes polinómios: $p_1(x) = x+1$, $p_2(x) = x^2+1$, $p_3(x) = x^3+1$ e $p_4(x) = x^4+1$. Reflita-se:
De que grau é? Quantos e quais zeros tem? Qual a decomposição assegurada pelo teorema anterior?

Representação Gráfica de p_i,

com $i = 1, ..., 4$





- A primitivação das funções racionais

$$f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : D(x) \neq 0\},$$

onde P e D são dois polinómios, reduz-se à primitivação de

- polinómios e/ou
- frações (parciais) simples

A determinação de $\displaystyle\int \frac{P(x)}{D(x)}\,dx$, P, D polinómios, $D \neq 0$, divide-se nas seguintes etapas:

1. Usar, se necessário, a divisão de polinómios para escrever

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

2. Calcular os zeros de D e –usando o Teorema Fundamental da Álgebra– decompor D em fatores irredutíveis
3. Decompor a fração $\frac{R(x)}{D(x)}$ em frações simples
4. Determinar as primitivas das frações simples
5. Adicionar a primitiva de Q e as primitivas das frações simples

Primitivação de frações parciais

- Considerem-se os seguintes casos, com $A, B, \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
  - Caso 1: $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + \mathcal{C}$
  - Caso 2: $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx = A\frac{(x-\alpha)^{(-n+1)}}{-n+1} + \mathcal{C}$
  - Caso 3: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta}\,dx =$
  $\displaystyle\int \frac{Ax}{(x-\alpha)^2+\beta}\,dx + \int \frac{B}{(x-\alpha)^2+\beta}\,dx$
  - Caso 4: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta]^n}\,dx$

Resolução

Caso 3_i: $\displaystyle\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

$[\text{arctg}\, u(x)]' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta}dx = \int \frac{1}{\beta\left[\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1\right]}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}{\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\,\text{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right) + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

$$\int \frac{3x}{x-2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5}\,dx \qquad \int \frac{3x+5}{x^3+1}\,dx$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5(x+1)}\,dx \qquad \int \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

$$\int \frac{7x-1}{(x^2+1)(x+2)^2(x^2+4x+5)^2}\,dx$$