

Nota: **Justifique** adequadamente cada uma das suas respostas.

1. Seja  $A = \{a, b\}$  e seja  $L$  a linguagem sobre  $A$  definida indutivamente como se segue:
  - (1)  $a \in L$ ;
  - (2)  $b \in L$ ;
  - (3) se  $x \in L$  então  $axa \in L$ , para todo  $x \in A^*$ ;
  - (4) se  $x \in L$  então  $bx b \in L$ , para todo  $x \in A^*$ .
  - (a) Dê exemplo de  $u \in L$  que tenha, pelo menos, duas ocorrências da letra  $a$  e, pelo menos, duas ocorrências da letra  $b$ . Justificando, apresente uma sequência de formação da palavra  $u$  que indicar.
  - (b) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para  $L$ .
  - (c) Prove por indução estrutural que, para todo  $x \in L$ , o número de ocorrências de  $a$  em  $x$  é ímpar ou o número de ocorrências de  $b$  em  $x$  é ímpar.
2. Sem justificar, defina por recursão estrutural em  $\mathcal{F}^{CP}$  uma função  $f : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$  tal que, para todo  $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ ,  $f(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$  e os conectivos de  $f(\varphi)$  pertencem ao conjunto  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ .
3. Indique uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula  $((p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3) \rightarrow (p_2 \vee \perp)$ . Justifique.
4. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
  - (a) Para todo  $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ ,  $p_0 \notin \text{var}((p_0 \rightarrow p_1)[\varphi/p_0])$ .
  - (b)  $\neg p_1 \wedge p_2, p_2 \rightarrow p_3 \models p_1 \leftrightarrow \neg p_3$ .
5. Considere as seguintes afirmações:
  - Se o défice público está acima do previsto, então o Presidente Resende mente.
  - Se o Presidente Resende não mente, então o Ministro Evaristo percebe disto se e só se o défice público não está acima do previsto.
  - O Ministro Evaristo não percebe disto ou o défice público está acima do previsto.
  - (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.
  - (b) As três afirmações acima podem ser simultaneamente verdadeiras? Justifique.
  - (c) Supondo que apenas uma das afirmações acima é verdadeira, o que pode concluir sobre o Ministro Evaristo? Justifique.
6. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
  - (a) Para todo  $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ ,  $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ ,  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  é inconsistente ou  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é inconsistente.
  - (b) Para todo  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ ,  $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ , se  $\Gamma, \varphi \models \psi$  e  $\varphi$  é tautologia, então  $\Gamma \models \psi \wedge \varphi$ .

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	1,75+1,5+1,75	1,75	1,75	1,75+1,75	1,5+1,5+1,5	1,75+1,75