tópicos de matemática discreta – MIEInf

carla mendes | cláudia m. araújo

UM | 2017/2018

conceitos básicos

A noção de conjunto é uma noção fundamental na Matemática. O estudo de conjuntos (designado por **Teoria de Conjuntos**) foi introduzido por Georg Cantor, nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de uma forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se, hoje, essencial não só em muitos campos da matemática, mas também noutras áreas como as ciências da computação.

Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

definição 2.1

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados **elementos** ou **membros** do conjunto.

conceitos básicos

exemplo 2.2

São exemplos de conjuntos as coleções de:

i | *unidades curriculares do primeiro ano do plano de estudos do MIEInf;*

ii | *pessoas presentes numa festa;*

iii | *estações do ano;*

iv | *todos os números naturais.*

Representamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z, eventualmente com índices.

Os elementos de um conjunto são habitualmente representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z, também eventualmente com índices.

conceitos básicos

definição 2.3

Sejam A um conjunto e x um objeto.

Dizemos que x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A.

Caso x não seja um dos objetos de A, dizemos que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

exemplo 2.4

Sejam A o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Temos, por exemplo, que $3 \in A$ e $1 \in B$.

Por outro lado, $1 \notin A$ e $3 \notin B$.

conceitos básicos

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas.

definição de um conjunto por extensão

Podemos descrever um conjunto enumerando explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por extensão**.

exemplo 2.5

Se A é o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, então A e B podem ser descritos por extensão do seguinte modo:

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$;

$B = \{-4, 1\}$.

conceitos básicos

Numa descrição por extensão, nem sempre é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos. Nesse caso, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

exemplo 2.6

O conjunto dos números naturais é usualmente representado por extensão utilizando a seguinte notação:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

O conjunto dos números inteiros pode ser escrito por extensão recorrendo à seguinte notação:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

conceitos básicos

definição de um conjunto por compreensão

Podemos descrever um conjunto indicando um predicado $p(x)$, com domínio de variação U para a variável x, tal que os valores possíveis a em U para os quais $p(a)$ é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto em causa.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por compreensão**.

exemplo 2.7

O conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser descrito, por extensão, por $\{1, 2, 3, 4\}$.

Em alternativa, podemos definir esse conjunto por compreensão como se segue:

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 5\}.$$

conceitos básicos

exercício 2.8

Seja $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. *Indique os elementos de cada um dos seguintes conjuntos:*

i | $\{x \in X : x \in \mathbb{N}\}$;

ii | $\{x \in X : |x| < 2\}$;

iii | $\{x \in X : \sqrt{x} \in X\}$;

iv | $\{x \in X : x^2 \in X\}$;

v | $\{x^2 : x \in X\}$.

conceitos básicos

definição 2.9

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio**, e representamo-lo por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo,

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 28\} = \{x : x \neq x\}.$$

subconjuntos

definição 2.10

Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, e escreve-se $A = B$, se têm os mesmos elementos, ou seja, se

$$\forall x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Se existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, então A e B dizem-se **diferentes**.

exemplo 2.11

1 | *O conjunto de todos os divisores naturais de 4 é igual ao conjunto* $A = \{1, 2, 4\}$ *e também é igual ao conjunto* $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$*.*

2 | *Os conjuntos* $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$ *e* $D = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$ *são diferentes, pois* $3 \in C$ *e* $3 \notin D$*.*

subconjuntos

definição 2.12

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está contido em** B ou que A **é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, ou seja, se

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in B).$$

Se existir um elemento de A que não é elemento de B, ou seja, se $\exists_{x \in A} \ x \notin B$, diz-se que A **não está contido em** B ou que A **não é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \not\subseteq B$.

exemplo 2.13

1 | $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que tanto -1 como 1 são soluções da equação.*

2 | $\{0, -1, 1\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que 0 não é solução da equação.*

subconjuntos

definição 2.14

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está propriamente contido em** B ou que A **é um subconjunto próprio de** B, e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, se

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in B) \quad \wedge \quad \exists_{x \in B} \ x \notin A.$$

exemplo 2.15

$\{-1, 1\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que, para além de 1 e -1, 2 também é solução da equação.*

subconjuntos

proposição 2.16

Sejam A, B e C conjuntos. Então,
1 | $\emptyset \subseteq A$;
2 | $A \subseteq A$;
3 | Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;
4 | $A = B$ se e só se $(A \subseteq B$ e $B \subseteq A)$.

demonstração

1 | Mostremos, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$. Nesse sentido, assumamos que $\emptyset \not\subseteq A$. Então, existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Ora, $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de supormos que $\emptyset \not\subseteq A$. Logo, $\emptyset \subseteq A$.

2 | Dado um elemento arbitrário a de A, é claro que $a \in A$. Logo, $\forall_x \ (x \in A \to x \in A)$, ou seja, $A \subseteq A$.

subconjuntos

3 | Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, ou seja,

$$(*)\ \forall_x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \qquad \text{e} \qquad (**)\ \forall_x\ (x \in B \rightarrow x \in C).$$

Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$, isto é, $\forall_x\ (x \in A \rightarrow x \in C)$. Seja $x \in A$. Por $(*)$, podemos concluir que $x \in B$. Logo, de $(**)$, vem que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

4 | Pretendemos mostrar a veracidade da equivalência $A = B$ se e só se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$). Iremos fazê-lo provando as duas implicações.

subconjuntos

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A = B$. Então,

$$\forall_x \; (x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall_x \; ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)).$$

Logo, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então, todo o elemento de A é elemento de B e todo o elemento de B é elemento de A. Por outras palavras, A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$. $\square$

operações com conjuntos

definição 2.17

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (dito o **universo**). Chama-se **união** ou **reunião de A com B**, e representa-se por $A \cup B$, o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B, ou seja,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

exemplo 2.18

1 | *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 | *Sejam* $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \cup D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 10\}$.

operações com conjuntos

definição 2.19

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Chama-se **interseção de A com B**, e representa-se por $A \cap B$, o conjunto cujos elementos pertencem a ambos os conjuntos A e B, ou seja,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

exemplo 2.20

1 | *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \cap B = \{3\}$.

2 | *Sejam* $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

operações com conjuntos

definição 2.21

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Chama-se **complementar de B em A**, e representa-se por $A \setminus B$, o conjunto cujos elementos pertencem a A mas não pertencem a B, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O complementar de B em A também se designa por **diferença de A com B** e representa-se por $A - B$.

Quando A é o universo X, o conjunto $A \setminus B = X \setminus B$ diz-se o **complementar de B** e representa-se por $\overline{B}$ ou B'.

operações com conjuntos

exemplo 2.22

1 | *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \setminus B = \{1, 2\}$.

2 | *Sejam* $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \wedge n > 10\}\}$ *e* $\mathbb{N} \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$.

3 | *Dados os subconjuntos* $E = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ *e* $F =]-\infty, 3]$ *de* $\mathbb{R}$, *temos:*

i | $E \cup F =]-\infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$;

ii | $E \cap F = \{-2, 0, 2\}$;

iii | $E \setminus F = \{\pi, 7\}$;

iv | $\overline{E \cup F} = [3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$.

operações com conjuntos

Na proposição que se segue, apresentam-se algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

proposição 2.23

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$;
2 | $A \cup \emptyset = A$;
3 | $A \cup A = A$;
4 | $A \cup X = X$;
5 | $A \cup B = B \cup A$;
6 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
7 | se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$.

operações com conjuntos

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2, 4, 6 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \subseteq A \cup B$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \rightarrow x \in A \cup B).$$

Seja $x \in A$. Então, é verdadeira a proposição $x \in A \vee x \in B$, pelo que $x \in A \cup B$. Logo, $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$ e, portanto, $A \subseteq A \cup B$.

A prova de $B \subseteq A \cup B$ é análoga.

2 | Mostremos que $A \cup \emptyset = A$. Da propriedade 1, vem que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Resta, pois, provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$.

operações com conjuntos

Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então, $x \in A \vee x \in \emptyset$.

Ora, a proposição $x \in \emptyset$ é falsa, pois $\emptyset$ não tem elementos. Logo, podemos concluir que $x \in A$ e, portanto,

$$x \in A \cup \emptyset \to x \in A.$$

Por outras palavras, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Assim, $A \cup \emptyset = A$.

4 | Provemos agora que $A \cup X = X$. Da propriedade 1, vem que $X \subseteq A \cup X$. Basta mostrar que $A \cup X \subseteq X$.

Seja $x \in A \cup X$. Então, $x \in A \vee x \in X$. Pretendemos mostrar que $x \in X$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in X$.

No caso (I), como A é um subconjunto de X, temos que todo o elemento de A é também elemento de X. Portanto, $x \in X$. No caso (II), é imediato que $x \in X$.

Logo, $x \in A \cup X \to x \in X$, donde $A \cup X \subseteq X$ e, assim, $A \cup X = X$.

operações com conjuntos

6 | Mostremos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Por definição de união de conjuntos,

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C.$$

Uma vez que é válida a propriedade associativa para a disjunção (ver proposição 1.32), temos que

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C).$$

Novamente pela definição de união de conjuntos, temos

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C).$$

Logo, $x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$, pelo que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

operações com conjuntos

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Da propriedade 1, vem que $B \subseteq A \cup B$. Falta, pois, provar que $A \cup B \subseteq B$.

Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A \vee x \in B$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in B$.

No caso (I), como A é um subconjunto de B, sabemos que todo o elemento de A é também elemento de B. Portanto, $x \in B$. No caso (II), é imediato que $x \in B$.

Assim, $x \in A \cup B \rightarrow x \in B$.

Logo, $A \cup B \subseteq B$, pelo que $A \cup B = B$. $\square$

operações com conjuntos

Em seguida, apresentamos algumas propriedades relativas à interseção de conjuntos.

proposição 2.24

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$;
2 | $A \cap \emptyset = \emptyset$;
3 | $A \cap A = A$;
4 | $A \cap X = A$;
5 | $A \cap B = B \cap A$;
6 | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
7 | se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$.

operações com conjuntos

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \cap B \subseteq A$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \cap B \to x \in A).$$

Seja $x \in A \cap B$. Então, por definição de interseção de conjuntos, $x \in A \wedge x \in B$.

Logo, são verdadeiras ambas as proposições $x \in A$ e $x \in B$.

Em particular, $x \in A$ é uma proposição verdadeira.

Logo, $x \in A \cap B \to x \in A$ e, portanto, $A \cap B \subseteq A$.

A prova de $A \cap B \subseteq B$ é análoga.

operações com conjuntos

2 | Mostremos que $A \cap \emptyset = \emptyset$. Façamo-lo por redução ao absurdo, admitindo que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Então, existe um objeto x tal que $x \in A \cap \emptyset$.

Logo, $x \in A \wedge x \in \emptyset$. Em particular, $x \in \emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, pelo que temos um absurdo, que resultou de supormos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cap B = A$. Da propriedade 1, vem que $A \cap B \subseteq A$. Falta, pois, provar que $A \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in A$. Então, como $A \subseteq B$, podemos concluir que $x \in B$.

Logo, temos $x \in A \wedge x \in B$. Vimos, portanto, que $x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$, ou seja, $x \in A \rightarrow x \in A \cap B$.

Assim, $A \subseteq A \cap B$. $\square$

operações com conjuntos

Vejamos algumas propriedades relacionadas com a complementação.

proposição 2.25

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ e $A \cup \overline{A} = X$;

2 | $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus X = \emptyset$;

3 | se $A \subseteq B$, então $A \setminus B = \emptyset$;

4 | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5 | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

6 | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

7 | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

8 | $\overline{(\overline{A})} = A$.

operações com conjuntos

demonstração Iremos provar as propriedades 1, 2 e 5. As restantes ficam como exercício.

1 | Comecemos por mostrar que $A \cap \overline{A} = \emptyset$ por redução ao absurdo. Suponhamos, pois, que existe $x \in A \cap \overline{A}$.

Então,

$$x \in A \wedge x \in \overline{A}.$$

Logo, por definição de complementar de um conjunto,

$$x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A).$$

Chegamos, desta forma, a uma contradição, $x \in A \wedge x \notin A$, que resultou de supormos que $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Portanto, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

operações com conjuntos

Verifiquemos, agora, que $A \cup \overline{A} = X$.

Dado $x \in A \cup \overline{A}$, temos $x \in A \vee x \in \overline{A}$. Temos, deste modo, dois casos a considerar: (I) $x \in A$; (II) $x \in \overline{A}$. Como A e $\overline{A}$ são subconjuntos de X, os elementos de cada um desses conjuntos são, ainda, elementos de X. Assim, em ambos os casos podemos afirmar que $x \in X$.

Portanto, $A \cup \overline{A} \subseteq X$.

Resta mostrar que $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Nesse sentido, tomemos $x \in X$.

É claro que a proposição $x \in A \vee x \notin A$ é verdadeira. Ora, se $x \in X$ e $x \notin A$, então $x \in \overline{A}$.

Logo,

$$x \in X \rightarrow (x \in A \vee x \in \overline{A}),$$

ou seja,

$$x \in X \rightarrow x \in A \cup \overline{A}.$$

Portanto, $X \subseteq A \cup \overline{A}$ e a igualdade pretendida segue.

operações com conjuntos

2 | Comecemos por mostrar que $A \setminus \emptyset = A$.

Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a $\emptyset$. Ora, nenhum elemento pertence a $\emptyset$.

Logo, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A, ou seja, $A \setminus \emptyset = A$.

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $A \setminus X = \emptyset$, tomemos $x \in A \setminus X$.

Então, x é tal que $x \in A \wedge x \notin X$.

Como A é um subconjunto de X,

$$x \in A \to x \in X.$$

Portanto, x é tal que $x \in X \wedge x \notin X$, uma contradição. Assim, $A \setminus X = \emptyset$.

operações com conjuntos

5 | Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Precisamos, pois, de mostrar que $x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
Ora, pelas leis de De Morgan e pela propriedade distributiva da operação lógica $\wedge$ em relação à operação $\vee$, temos que

$$\begin{array}{rcl} x \in A \setminus (B \cap C) & \leftrightarrow & x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\ & \leftrightarrow & x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\ & \leftrightarrow & x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\ & \leftrightarrow & x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\ & \leftrightarrow & x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ & \leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ & \leftrightarrow & (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ & \leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{array}$$

Logo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\square$

operações com conjuntos

observação Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de um conjunto X. Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

A união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é usualmente notada por $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e a interseção por $\bigcap_{i=1}^n A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in X : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}.$$

operações com conjuntos

Vejamos, agora, outros processos para construir conjuntos a partir de conjuntos dados.

definição 2.26

Seja A um conjunto. Chamamos **conjunto das partes de** A ou **conjunto potência de** A, que representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

exemplo 2.27

Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, \{2\}\}$ e $D = \emptyset$. Então,

1 | $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

2 | $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

3 | $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$

4 | $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

operações com conjuntos

proposição 2.28

Sejam A e B dois conjuntos. Então,

1 | $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;

2 | se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

3 | se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

demonstração

1 | Para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$, pelo que $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

operações com conjuntos

2 | Suponhamos que $A \subseteq B$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou seja,

$$\forall X\ (X \in \mathcal{P}(A) \to X \in \mathcal{P}(B)).$$

Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então, $X \subseteq A$.

Pela proposição 2.16.3, como $X \subseteq A$ e $A \subseteq B$, podemos concluir que $X \subseteq B$.

Logo, $X \in \mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

3 | consultar bibliografia adequada.

operações com conjuntos

Dados dois objetos a e b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não interessa.

Em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Para tal, recorremos ao conceito de par ordenado.

Dados dois objetos a e b, o **par ordenado de a e de b** será denotado por (a, b). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) dizem-se **iguais**, escrevendo-se $(a, b) = (c, d)$, quando $a = c$ e $b = d$.

Note-se que, dados dois objetos a e b, se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

operações com conjuntos

Num par ordenado (a, b), o objeto a é designado por **primeira coordenada** (ou **primeira componente**) e o objeto b é designado por **segunda coordenada** (ou **segunda componente**).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

definição 2.29

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o **produto cartesiano de A por B** e representa-se por $A \times B$. Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

operações com conjuntos

exemplo 2.30

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

É claro que $A \times B \neq B \times A$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Então,

$$C \times D = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

3 | Sejam $E = F = \mathbb{R}$. Os elementos de $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podem ser representados geometricamente como pontos de um plano munido de um eixo de coordenadas.

operações com conjuntos

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

definição 2.31

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos ($n \geq 2$). O *produto cartesiano de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto dos n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\big\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A \times A \times \ldots \times A$.

operações com conjuntos

observação

Dois n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e $\ldots$ e $a_n = b_n$.

exemplo 2.32

Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{7\}$. Temos que

$$A \times B \times C = \big\{(4, 1, 7), (4, 2, 7), (4, 3, 7), (5, 1, 7), (5, 2, 7), (5, 3, 7)\big\}$$

e

$$A^2 = \big\{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\big\}.$$

operações com conjuntos

Vejamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

proposição 2.33

Sejam A, B, C e D conjuntos. Então,

1 | $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$;

2 | sendo os conjuntos não vazios, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$;

3a | $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

3b | $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4a | $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

4b | $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

5a | $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

5b | $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

operações com conjuntos

demonstração

2 | Admitamos que todos os conjuntos são não vazios. Pretendemos mostrar que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ e procuremos provar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a, b) \in A \times B$.

Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$.

Portanto, $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$.

Provámos, assim, que

$$\forall_a \, (a \in A \rightarrow a \in C) \quad \text{e} \quad \forall_b \, (b \in B \rightarrow b \in D),$$

ou seja, $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

operações com conjuntos

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, admitamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$.

Por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento de B é elemento de D.

Logo, $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a, b) \in C \times D$. Assim,

$$\forall_{a,b} \; ((a, b) \in A \times B \rightarrow (a, b) \in C \times D)$$

e, portanto, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

operações com conjuntos

5a | Pretendemos mostrar que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Dado um par ordenado (x, y),

$$\begin{array}{rcl}
(x,y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) & \leftrightarrow & (x,y) \in C \times A \wedge (x,y) \notin C \times B \\
& \leftrightarrow & (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
& \leftrightarrow & ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \vee \\
& & \vee((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
& \leftrightarrow & (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
& \leftrightarrow & x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
& \leftrightarrow & x \in C \wedge y \in (A \setminus B) \\
& \leftrightarrow & (x,y) \in C \times (A \setminus B)
\end{array}$$

A demonstração das restantes propriedades fica ao cuidado dos alunos. $\square$

observação Se os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ têm $p_1, p_2, \ldots, p_n$ elementos, respetivamente, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ tem $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ elementos.