Cap. 1– Funções reais de variável real

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

outubro de 2017

1.6 Aplicações do cálculo diferencial[1]

Limites: levantamento de Indeterminações

Monotonia e extremos de funções

Concavidade e ponto de inflexão

Aproximação polinomial de funções

[1]Nesta secção consideramos só funções reais cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos.

Limites: levantamento de Indeterminações

- [Regra de L'Hôpital]

  Sejam $f, g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis num intervalo aberto I exceto, eventualmente, no ponto $c \in I$ tais que que verificam

  $$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = 0.$$

  Admita-se que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$, exceto, eventualmente, no ponto $c \in I$. Se o limite

  $$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \qquad L \in \mathbb{R},$$

  então o limite

  $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  também existe e tem o mesmo valor.

Observação

- A regra de l'Hôpital

  - ainda é válida quando o limite do quociente $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ é um infinitamente grande ($L = \infty$)
  - estende-se aos limites no infinito (caso em que $c = +\infty$ ou $c = -\infty$)
  - pode ser aplicada recursivamente
  - recorrendo a manipulações algébricas, é aplicável a outras formas de indeterminação

Outras Indeterminações

$$\frac{\infty}{\infty}$$

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

  - [Exemplo] $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$

Outras Indeterminações

$$0 \times \infty$$

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

  - [Exemplo] $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x} \times \frac{x+1}{x^2-4x+4} \right)$

Outras Indeterminações

$\infty - \infty$

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} + \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \times \frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

  - [Exemplo] $\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right)$

Outras Indeterminações

1^∞, 0^0 e ∞^0

Uma vez que $\ln x^p = p \ln x$, o logaritmo pode ser usado para converter cada uma destas indeterminações em $0 \times \infty$.

- [Exemplo] $\lim_{x\to 0^+} x^x$

$$\lim_{x\to 0^+}[\ln(x^x)] = \lim_{x\to 0^+}[x \ln(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dots = 0$$

Donde,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\{\lim_{x\to 0^+}[\ln(x^x)]\}} = e^0 = 1$$

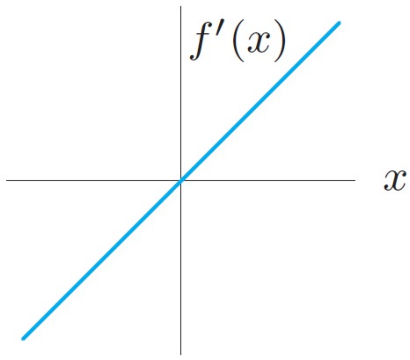
Monotonia e extremos de funções

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I um intervalo fechado, uma função derivável

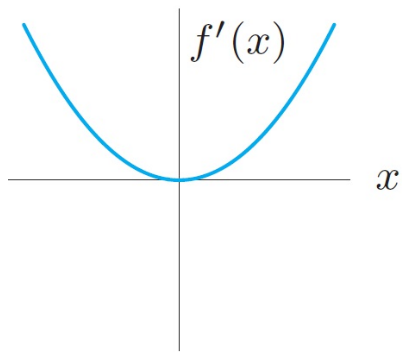
- Já vimos que
  - se $f'(x) > 0$ em I, então f é crescente em I
  - se $f'(x) < 0$ em I, então f é decrescente em I
- [Ponto Crítico] Um ponto $x_0 \in I$ diz-se um ponto crítico de f quando $f'(x_0) = 0$
- Como encontrar os extremantes?
- [Teste da 1.ª derivada] Seja x_0 um ponto crítico de f.
  - Se f' muda de sinal negativo para positivo em x_0, então x_0 é um minimizante local de f (e $f(x_0)$ diz-se um mínimo)
  - Se f' muda de sinal positivo para negativo em x_0, então x_0 é um maximizante local de f (e $f(x_0)$ diz-se um máximo)

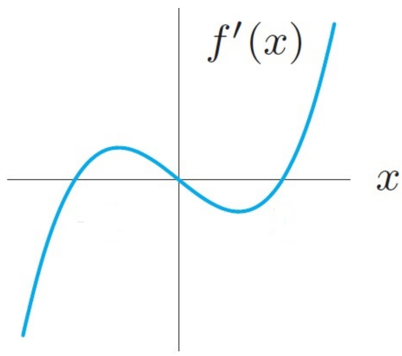
Exemplos

a)



b)





c)

Concavidade e ponto de inflexão

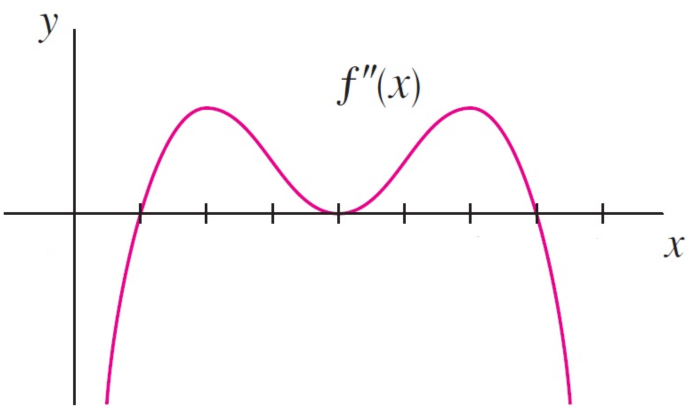
Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I um intervalo aberto.

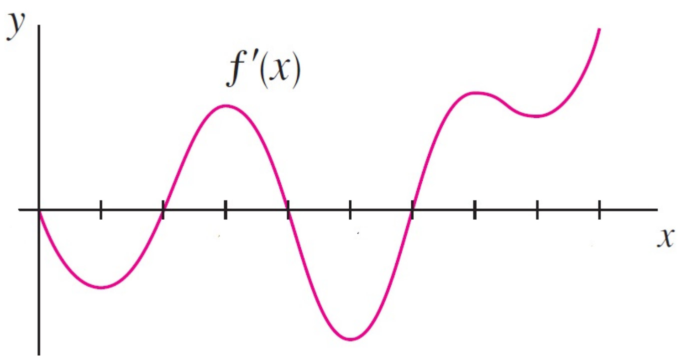
- [Concavidade] O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I quando
$$\forall x_1, x_2 \in I \; : \; x_1 < x_2$$
o gráfico de f em $[x_1, x_2]$ está abaixo do segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$.
- No caso de f ser derivável em I, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima quando f' for crescente neste intervalo.
- De forma análoga, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I quando para todos os $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ o gráfico de f em $[x_1, x_2]$ está acima do segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$.

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, e $I \subset D$ um intervalo, onde f é $\mathcal{C}^2(I)$.

- Se $f''(x) > 0$ em I, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I;
- Se $f''(x) < 0$ em I, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I;
- [Teste da 2.ª derivada] Seja x_0 um ponto crítico de f.
  - Se $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo local em x_0.
  - Se $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo local em x_0.
  - Se $f''(x_0) = 0$, então nada se pode concluir.
- [Ponto de inflexão] Um ponto do domínio de uma função contínua onde o gráfico muda de concavidade chama-se ponto de inflexão.
  - Se $f''(x_0) = 0$ então x_0 é um ponto de inflexão.

Exemplo

1. 

2. 

Exemplos

1. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ é derivável em $\mathbb{R}$ e tem um ponto crítico em $x_0 = 0$ pois $f'(0) = 0$.

   Usando o teste da 2.ª derivada, $f''(0) > 0$, $x_0 = 0$ é um maximizante local de f.

2. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$ é derivável em $\mathbb{R}$. Embora $x_0 = 0$ seja um ponto crítico, a função não tem aqui um extremo pois $f''(0) = 0$.

   $x_0 = 0$ é um ponto de inflexão da função g.

3. A função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |x|$ não é derivável em $\mathbb{R}$, pois não é derivável em $x_0 = 0$.

   À função h não é aplicável o teste da 1.ª derivada em $x_0 = 0$, porque a função não é derivável neste ponto. No entanto, f tem um extremo em $x_0 = 0$ pois é contínua neste ponto, é crescente em $]0, \varepsilon[$ e decrescente em $]-\varepsilon, 0[$.

Exemplo

1. Uma curva de resposta a um fármaco descreve o nível de medicamento na corrente sanguínea depois do fármaco ter sido administrado.
   Normalmente, neste tipo de problemas usa-se uma função, dita "onda", definida por

   $$S(t) = At^p e^{-kt}$$

   para modelar a curva de resposta, refletindo a concentração inicial acentuada do medicamento seguida de um declínio gradual.
   Se, para um certo medicamento se tiver $A = 1$, $p = 4$, $k = 1$ e t for medido em minutos, determine o momento de concentração máxima desse medicamento no sangue.

Esboço do gráfico de funções

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Pretende-se fazer um esboço da curva definida $y = f(x)$. Os passos seguintes fornecem informações úteis para fazer o esboço pretendido:

1. Determinação do domínio e contradomínio;
2. Análise de alguns limites apropriados;
3. Interseção com os eixos: x tal que $f(x) = 0$ e y tal que $f(0) = y$;
4. Algumas características geométricas: simetria, periodicidade, $\ldots$;
5. Extremantes e intervalos de monotonia;
6. Pontos de inflexão e intervalos de concavidade.

Exemplos

1. Justifique as representações gráficas das funções hiperbólicas (c.f. Cap. 1.4)

2. Esboce graficamente a função definida por $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

Aproximação polinomial de funções

- [Polinómio de Taylor]

  Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in I$ tal que a n-ésima derivada de f existe em a. O polinómio

  $$P_{n,a}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

  é chamado polinómio de Taylor de f, de ordem n, em torno do ponto a.

Exemplo

1. $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad a = 0$

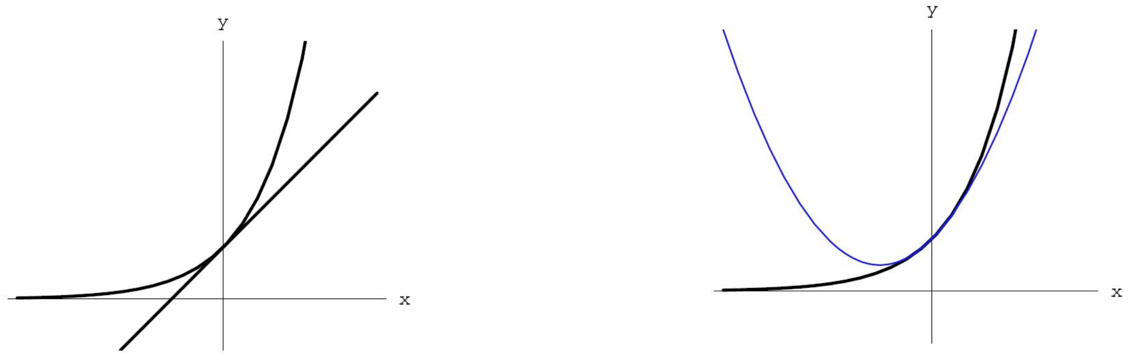


Figura: $P_{1,0}(x) = 1 + x \qquad P_{2,0}(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

Figura: $P_{3,0}(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \qquad P_{4,0}(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$

No caso de $f(x) = e^x$ demonstra-se que, para um qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, se tem

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Observação

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1. Os coeficientes de $P_{n,a}$ dependem das derivadas de f calculadas em a.

2. Se f é n vezes derivável em $a \in I$ está garantida a existência das constantes
$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a).$$

3. $P_{n,a}$ é um polinómio de grau não superior a n: grau $P_{n,a} \leq n$.

- [Teorema da Unicidade do Polinómio de Taylor]

  O polinómio de Taylor $P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n cujas derivadas no ponto a (desde a ordem 0 até à ordem n) coincidem com as correspondentes derivadas de f no ponto a.

- Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in I$. Dado $n \in \mathbb{N}_0$, diz-se que f e g são iguais até à ordem n em a se
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

- Quando existem $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$, $g'(a), \ldots, g^{(n)}(a)$. Então
  f é igual a g até à ordem n em a se e só se
$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Fórmula de Taylor

- [Fórmula de Taylor]

  Chamamos fórmula de Taylor de ordem n para a função f em torno do ponto a à expressão

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{com} \qquad \lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

- $R_{n,a}$ diz-se resto de Taylor de f de ordem n em a.

Exemplo

1. Calcule valores aproximados para $\ln 1.1$

- Consideremos, por exemplo, $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in]-1, +\infty[$. Neste caso tem-se que $\ln 1.1 = f(0.1)$
- Encontremos polinómios de Taylor de f em torno de $a = 0$.
  - De ordem $n = 1$: $P_{1,0}(x) = x$
  - De ordem $n = 2$: $P_{2,0}(x) = x - \frac{x^2}{2}$
  - De ordem $n = 3$: $P_{3,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
  - De ordem $\cdots$
  - Mostra-se que o Polinómio de Taylor de f, de ordem n, em torno de $a = 0$ é

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

- Assim, valores aproximados para ln(1.1) são
  - De ordem $n = 1$: $P_{1,0}(0.1) = 0.1$
  - De ordem $n = 2$: $P_{2,0}(0.1) = 0.95$
  - De ordem $n = 3$: $P_{3,0}(0.1) = 0.953$
  - De ordem $\cdots$
  - De ordem $n = 10$: $P_{10,0}(0.1) = 0.095310179803492$