Equações Diferenciais Ordinárias

Maria Joana Torres

2018/19

Definição:

Chama-se **equação diferencial ordinária de ordem n** relativamente a $y(x)$ a toda a igualdade

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

em que F é uma função real definida num aberto U de $\mathbb{R}^{n+2}$. Uma vez que nessa equação a derivada de maior ordem presente na equação é a derivada de ordem n da variável y, dizemos que se trata de uma equação diferencial ordinária de ordem n.

Exemplos:

- $\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2$ – 1ª ordem
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = e^x$ – 2ª ordem

Notação:

- $\dfrac{d}{dx}y(x) = \dfrac{dy}{dx} = y'(x)$

- $\dfrac{d^2}{dx}y(x) = \dfrac{d^2y}{dx} = y''(x)$

$$\vdots$$

- $\dfrac{d^n}{dx}y(x) = \dfrac{d^ny}{dx} = y^{(n)}(x)$

Definição:

Uma **solução explicita da equação diferencial ordinária**

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

é uma função

$$y \colon I \to \mathbb{R},$$

em que I é um intervalo aberto da reta real, derivável até à ordem n tal que ao substituirmos y e as suas derivadas na equação, a igualdade é válida, qualquer que seja $x \in I$.

Exemplo:

$y = e^{-x}$ é solução explícita de $y'(x) + y(x) = 0$ em $\mathbb{R}$.

Definição:

Uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita da equação diferencial ordinária**

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

se define pelo menos uma função real $y = f(x)$ num intervalo aberto I que é solução explícita da equação.

Exemplo:

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ é solução implícita de $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ em $I =]-5, 5[$.

Definição:

A **solução (geral) de uma equação diferencial ordinária de ordem n** é uma família de soluções, dependente de n constantes arbitrárias, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral atribuindo-se valores às constantes.

Exemplo:

$g(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{2x}$ é solução da equação diferencial $y'' - y' - 2\,y = 0$, para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2.

• São necessárias n condições adicionais para determinar o valor das constantes.

Um **problema de valores iniciais (PVI)** consiste em determinar $y(x)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n \end{cases}$$

Definição:

Uma solução $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de uma equação diferencial diz-se **maximal** se não for prolongável a uma outra solução definida num intervalo aberto contendo propriamente I.

Exemplo: Para todo $c \in \mathbb{R}$ as funções,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (-c,+\infty) & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (-\infty,-c) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial $y' = -y^2$.

Exemplo: As funções

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

são duas soluções maximais (com o mesmo domínio) da equação $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, que passam no ponto $(0, 0)$.