Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

lei

Álgebra Linear EI

teste **A** — 12 de janeiro de 2015

nome: ____________________ número: __________

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1∼(1.5+1.5+1.5+1.5), 2∼2; em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.

   (a) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

   (b) Encontre uma base do núcleo de A.

   (c) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A. Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.

   (d) Verifique se A é diagonalizável e em caso afirmativo diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal).

2. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule A^{-1} **ou** pelo algoritmo de Gauss-Jordan **ou** à custa dos complementos algébricos.

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente **à melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Seja A uma matriz 3×3 triangular superior, e com elementos diagonais $1, 2, -2$. Então
   (a) A é diagonalizável.
   (b) A é invertível.
   (c) $\text{car}(A) = 3$.
   (d) Todas as anteriores.

2. Seja A uma matriz com componentes reais do tipo 2×3. Então
   (a) O núcleo de A é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
   (b) $\text{nul}(A) \geq 1$.
   (c) $\text{nul}(A) \leq 1$.
   (d) Nenhuma das anteriores.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então
   (a) As colunas de A formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) A tem exactamente 2 valores próprios distintos.
   (c) A é diagonalizável.
   (d) Nenhuma das anteriores.

4. Dada uma matriz A do tipo 4×4 com $\det(A) = -2$,
   (a) A é invertível e $\det(A^{-1}) = 2$.
   (b) $N(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
   (c) 0 pode ser valor próprio de A.
   (d) Todas as anteriores.

5. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (d) Nenhuma das anteriores.

6. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vectores $u = (1,1,0), v = (0,1,1), w = (-1,-1,0)$.

   (a) u, v, w formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $(-1,-2,-1) \in \langle u, v, w \rangle$.

   (c) $\dim\langle u, v, w\rangle = 1$

   (d) Nenhuma das anteriores.

7. Dada uma matriz A do tipo 3×3 com $\text{car}(A) = 2$,

   (a) 0 é valor próprio de A.

   (b) $\dim N(A) = 1$.

   (c) A não é invertível.

   (d) Todas as anteriores.

8. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(1,0,0) = (-1,0,1),\ T(0,1,0) = (-1,2,1),\ T(0,0,1) = (2,0,0).$$

   (a) $T(1,1,1) = (0,2,2)$.

   (b) A matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à de $\mathbb{R}^3$ é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

   (c) T é um isomorfismo.

   (d) Todas as anteriores.

Respostas:

1. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
2. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
3. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
4. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
5. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
6. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
7. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
8. a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯