Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

novembro de 2017

2.2 Integral de Riemann

Definição de integral (de Riemann)

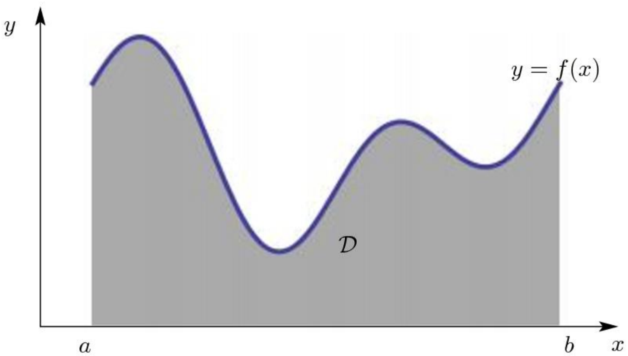
Propriedades do integral definido

Teorema fundamental do cálculo

Métodos de integração
- Integração por decomposição
- Integração imediata
- Integração por partes
- Integração por substituição

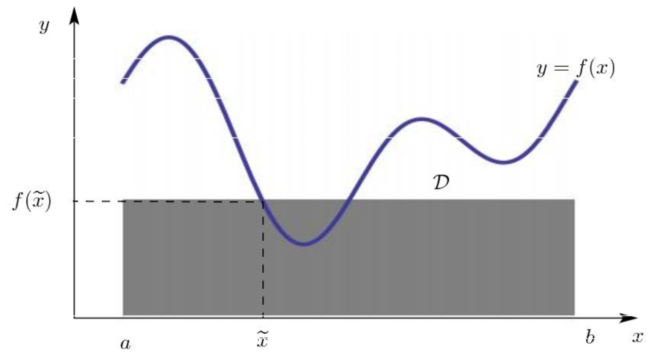
Problema: sobre a noção intuitiva de área de uma região plana

Que número deve representar a área de $\mathcal{D}$?



($\mathcal{D}$ é a região do plano delimitada superiormente pelo gráfico da função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, inferiormente pelo eixo das abcissas e lateralmente pelas retas verticais definidas por $x = a$ e $x = b$)

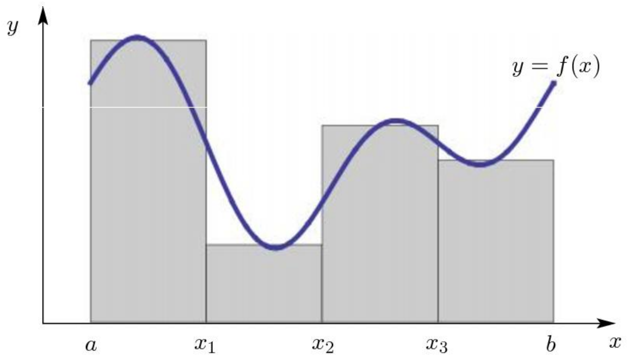
Uma aproximação para a área de $\mathcal{D}$ é, por exemplo, a área de um retângulo cuja base mede $b - a$ e cuja altura mede $f(\widetilde{x})$, com $\widetilde{x} \in [a, b]$



Neste caso

$$\text{área do retângulo} = f(\widetilde{x})(b - a)$$

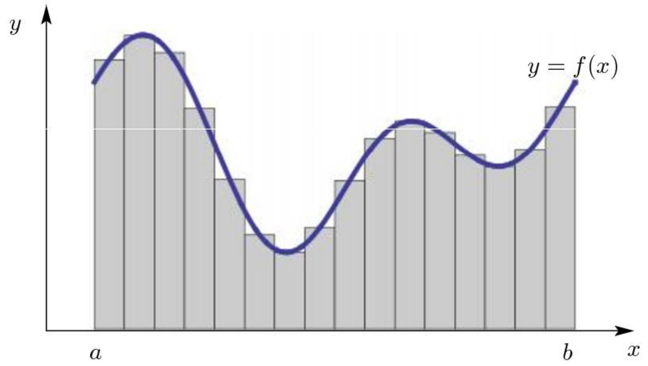
Mas, a aproximação anterior pode ser melhorada...
Dividamos $\mathcal{D}$ em subregiões, estimemos a área de cada subregião e adicionem-se os resultados. Por exemplo



A área a sombreado na figura é,

$$f(\widetilde{x_1})(x_1-a)+f(\widetilde{x_2})(x_2-x_1)+f(\widetilde{x_3})(x_3-x_2)+f(\widetilde{x_4})(b-x_3)$$

E uma outra aproximação (ainda melhor) para a área de $\mathcal{D}$ é



$$f(\widetilde{x_1})(x_1-a)+f(\widetilde{x_2})(x_2-x_1)+\cdots+f(\widetilde{x_{15}})(x_{15}-x_{14})+f(\widetilde{x_{16}})(b-x_{15})$$

Integral de Riemann

Seja $f:\ [a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função limitada.

- Consideramos uma partição, $\mathcal{P}$, do intervalo $[a,b]$, isto é, subdividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos que não se sobrepõem e que reunidos são $[a,b]$.
  Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ os extremos desses subintervalos, com
  $$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$
- Chamamos soma(s) de Riemann de f no intervalo $[a,b]$, para a partição $\mathcal{P}$, a
  $$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,(x_{k+1}-x_k), \qquad \text{onde} \quad \widetilde{x_k}\in[x_k,x_{k+1}]$$
  ou
  $$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,\Delta\,x_{k+1}, \qquad \text{com} \quad \Delta\,x_{k+1}=x_{k+1}-x_k$$

Em particular,

Em cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, de $\mathcal{P}$, a função f tem um máximo $\widetilde{M_k}$ e um mínimo $\widetilde{m_k}$.

Designamos por soma superior de f, relativa a $\mathcal{P}$, o número

$$U_f(\mathcal{P})=\widetilde{M_1}(x_1-a)+\widetilde{M_2}(x_2-x_1)+\ldots+\widetilde{M_n}(b-x_{n-1})$$

e

Chamamos soma inferior de f, relativa a $\mathcal{P}$, ao número

$$L_f(\mathcal{P})=\widetilde{m_1}\Delta x_1+\widetilde{m_2}\Delta x_2+\ldots+\widetilde{m_n}\Delta x_n$$

Integral de Riemann/definido: definição

- [Integral definido] O integral definido de f em $[a,b]$ é o limite da(s) soma(s) de Riemann de f, quando $n \longrightarrow \infty$, isto é

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,\Delta\, x_{k+1}$$

  - O integral definido de f em $[a,b]$ representa-se por

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

  - A função f diz-se integrável no intervalo $[a,b]$ (no sentido de Riemann).
  - $n \longrightarrow \infty$ equivale a $\Delta\, x_{k+1} \longrightarrow 0$

Terminologia

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

- $[a,b]$ é o intervalo de integração
- a e b são, respetivamente, o limite inferior e o limite superior de integração
- f é a função integranda
- x é a variável de integração
- $\int$ representa uma "soma" ("S" alongado porquanto limite, com $n \longrightarrow \infty$, de um somatório de n parcelas); $f(x)$ representar –no contexto do problema inicial– a "altura"do retangulo e dx representa a "largura" que é infinitamente pequena
- quando $f \geq 0$, é a medida da área da região do plano delimitada pelo eixo dos x, as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o gráfico da função f

Propriedades do integral

- Para cada partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, tem-se

$$L_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U_f(\mathcal{P})$$

- [Aditividade]: Sejam f limitada em $[a,b]$ e $c \in]a,b[$.

  Então f é integrável em $[a,b]$ se e só se f for integrável separadamente em $[a,c]$ e $[c,b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Observe-se que
  - $\int_a^a f(x)\,dx = 0,$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$
- Por convenção, tem-se
  - $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,,$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$

- [Monotonicidade]: Se f e g são integráveis em $[a,b]$ e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

em particular, se $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$; então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

- Se f é integrável em $[a,b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

- Se f é limitada em $[a,b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a,b]$ exceto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0;$$

- Se f é integrável em $[a,b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a,b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplos

1. A função de Dirichlet não é integrável em intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ algum.
2. Se $\forall x\in[a,b],\quad f(x)=\alpha$; então

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \alpha(b-a)$$

3. Se $\forall x\in[a,b],\quad f(x)=x$; então

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

Observação: **O cálculo de $\int_a^b f(x)\,dx$ por definição ou a partir da desigualdade $L_f(\mathcal{P})\leq I\leq U_f(\mathcal{P})$ é, geralmente, trabalhosa/complicada.**

- [Caracterização das funções integráveis]

Nota: Só se define integral (de Riemann, no sentido próprio) de uma função limitada MAS nem todas as funções limitadas são integráveis

Seja $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Se f

- é contínua então f é integrável em $[a,b]$;
  MAS há funções descontínuas que são integráveis
- é monótona então f é integrável em $[a,b]$;
  MAS há funções que não são monótonas e que são integráveis
- é limitada possuindo apenas um número finito de pontos de descontinuidade então f é integrável em $[a,b]$.

Exemplos

1. A função g tal que $g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 2, & x\in[2,3]\end{cases}$ é integrável.
2. A função f tal que $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1]\\ -x, & x\in]1,5]\end{cases}$ é integrável.
3. A função h tal que $h(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ \dfrac{1}{n}, & \text{se } \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\end{cases}$

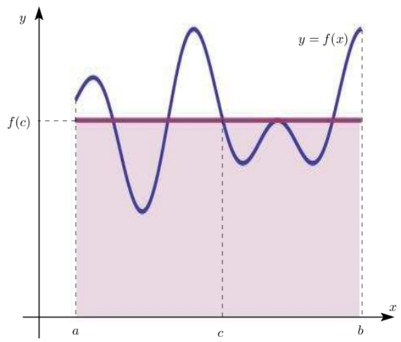
   é integrável.

Porquê?

- [Teorema do valor médio do cálculo integral]

  Se f é contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(c)(b-a).$$



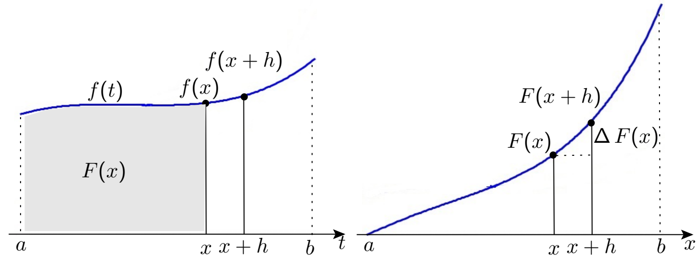
Observação: O ponto c não é necessariamente o ponto médio do intrevalo $[a, b]$, nem é necessariamente único. A $f(c)$ chamamos valor médio da funç ão f, em $[a, b]$.

Teorema fundamental do cálculo

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e, por simplicidade, assuma-se $f \geq 0$.
- Considere-se a área limitada pelo gráfico de f e o eixo das abcissas entre $t = a$ e $t = x$ $(x \leq b)$: para cada x o valor da área será dado por uma "função área" F

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Nota: Esta "função área"pode definir-se, mesmo sem estar garantida a continuidade de f



- Tem-se

$$f(x)\,h \leq \Delta F(x) \leq f(x+h)\,h$$

- Ou, dividindo a expressão anterior por h,

$$f(x) \leq \frac{\Delta F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

- Tomando o limite quando $h \longrightarrow 0$ nas desigualdades anteriores tem-se

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

e

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

- Então

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

isto é, a "função área"

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável, tendo-se que $\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$ o que equivale a dizer-se que **a "função área" é uma primitiva da função** f.

- [Teorema fundamental do cálculo]

  Seja $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

  1) A função $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

  é derivável em $[a, b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

  2) (Fórmula de Barrow) Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(t)\;dt = F(t)\Big|_a^b \overset{def}{=} F(b) - F(a).$$

Observações e Exemplos

- Qualquer função contínua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é primitivável em $[a,b]$
  MAS, atenção,
  f pode não ser contínua (e, por conseguinte, não primitivável) e, mesmo assim, ser integrável, em $[a,b]$
- A "função área", F, pode até não ser derivável ou, mesmo sendo derivável, pode ser tal que a sua derivada não coincide com f nos pontos de descontinuidade de f.

1. Para $f(x) = 1$, com $x \in [0,2]$ tem-se $F(x) = \ldots$
2. Para $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 2\right] \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $F(x) = \ldots$

Outros Exemplos

1. Para $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$ $F(x) = \ldots$
2. Para $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$ $F(x) = \ldots$
3. Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$
4. Sabendo que $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,1[\\ 4 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$ calcule $\int_0^2 f(x)\, dx$

- [Consequências do TFC: derivação sob o sinal de integral]

  Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ derivável.
  - Então f é integrável, em particular, entre a e $\varphi(x)$, tendo-se
  $$\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt = F(\varphi(x)) - F(a)$$
  - Pelo teorema da derivação da função composta tem-se, então
  $$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,.$$
  - Por 1) do teorema fundamental do cálculo $F' = f$, pelo que se conclui que
  $$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\,.$$

- [Caso geral]

  Sendo $\varphi, \psi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ funções deriváveis, tem-se
  $$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\right)' = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$$
  Basta notar que
  $$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt = \int_a^{\psi(x)} f(t)\, dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$
  e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas.

Exemplos

1. Calcule $F'(x)$ quando $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

2. Calcule $G'(x)$ quando $G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t}\,dt.$

3. Defina f sabendo que $f\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que
$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4$$

Métodos de integração

- Integração por decomposição
- Integração imediata
- Integração por partes
- Integração por substituição

- [Integração por decomposição]: Linearidade do integral

Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $\alpha\,, \beta\, \in \mathbb{R}$ constantes. Então

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

- [cf. ALGA] O integral definido é um operador linear

Exemplo

1. $\int_0^{\pi} \left[\sqrt{2}\,x^2 + 2 \text{ sen } x\right] dx$

- [Integração imediata]

Sejam funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que a função composta está bem definida. Então

$$\int_a^b g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_a^b [g(f(x))]'\, dx = g(f(b)) - g(f(a)).$$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} \cos x\,(\operatorname{sen} x)^3\, dx.$

Já vimos que (*c.f.* Primitivação Imediata) que

$$\int \cos x\,(\operatorname{sen} x)^3\, dx = \frac{1}{4}\int 4\cos x\,(\operatorname{sen} x)^3\, dx = (\operatorname{sen} x)^4 + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \cos x\,(\operatorname{sen} x)^3\, dx = (\operatorname{sen} x)^4\Big|_{\pi/4}^{\pi} = (\operatorname{sen} \pi)^4 - \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)^4 = -\frac{1}{16}$$

- [Integração por partes]

Sejam funções $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$.

Então

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x\, dx$

- [Integração por substituição]

Sejam $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, I um intervalo, $f : I \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $\alpha, \beta \in I$ tais que

$$f(\alpha) = a \qquad \text{e} \qquad f(\beta) = b.$$

Então
$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(f(t))\, f'(t)\, dt.$$

- O método de integração por substituição também é referido como método de integração por mudança de variáveis.

Exemplo

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \text{arcsen}\, x\, dx$

Considere-se
$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \qquad \text{dada por} \qquad f(t) = \text{sen}\, t.$$

A função $f \in \mathcal{C}^1$ e
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad \text{e} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$