# Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$: Integrais Duplos

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

abril 2018



# Integrais Duplos

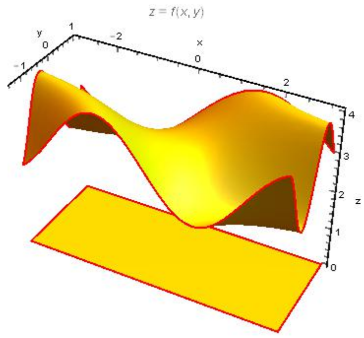


**Obs**: Nesta secção, a função $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é,

$$|f(x, y)| < M, \qquad \text{para algum } M \in \mathbb{R}.$$

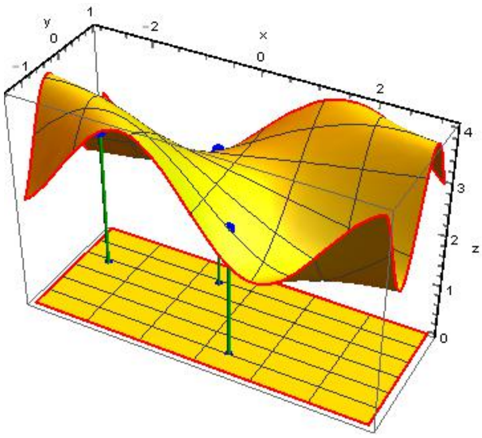
# O Cálculo de Volume(s)

- [Problema] Determinar o volume de um sólido.




Seja $\mathcal{R}$ o retângulo $[a,b] \times [c,d]$ e $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) \geq 0$$



- o retângulo (definido por) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$,
- a superfície (definida por) $z = f(x,y)$ e
- os planos (definidos por)
  $x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$

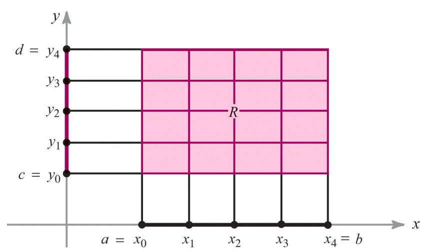
definem um sólido (de $\mathbb{R}^3$) cujo volume se busca.



# Definição de integral duplo

A. Seja $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ e $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Particione-se $\mathcal{R}$:

1. Considera-se uma partição de $[a,b]$ em $n$ subintervalos
   $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
2. Considera-se uma partição $[c,d]$ em $m$ subintervalos
   $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$;
3. As partições anteriores estabelecem uma partição do retângulo $\mathcal{R}$ em $n \times m$ subretângulos




$$\mathcal{R}_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

.

- Denote-se $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$
- A área do subretângulo $R_{ij}$ é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$

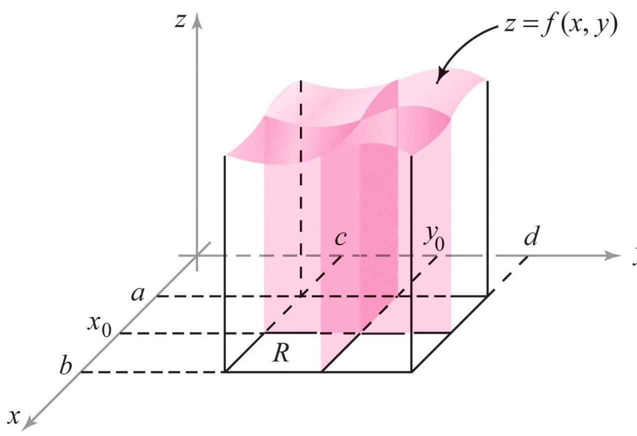
B. Em cada subretângulo $\mathcal{R}_{ij}$ escolha-se um ponto $({x^*}_i, {y^*}_j)$ e calcule-se $f({x^*}_i, {y^*}_j)$

- O volume do paralelipípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f({x^*}_i, {y^*}_j)$ é

$$f({x^*}_i, {y^*}_j)\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por $\mathcal{R}$ e pelo gráfico de $f$ (e lateralmente pelos planos definidos por $x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$) pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f({x^*}_i, {y^*}_j)\, \Delta A_{ij}$$






## Integral Duplo: definição

- A soma de Riemann de $f$ relativa à partição de $\mathcal{R}$ é o número

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f({x^*}_i, {y^*}_j)\, \Delta A_{ij}$$

**Definição**: Quando $n, m \longrightarrow +\infty$ (isto é, quando $\Delta x_i$ e $\Delta y_j$ tendem para 0), o valor da soma de Riemann de $f$ designa-se por integral duplo de $f$ em $\mathcal{R}$ e denota-se por[1]

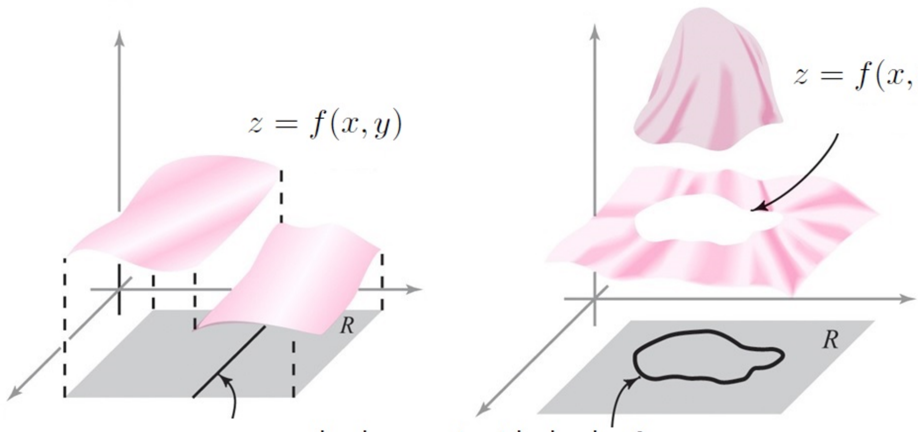
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA$$

- Se existir o integral duplo de $f$ em $\mathcal{R}$, diz-se que $f$ é integrável em $\mathcal{R}$.

[1] Também se escreve
$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dx\, dy$ ou $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dy\, dx$ ou $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, d(x,\, y)$

## Funções integráveis

1. Toda a função contínua definida num retângulo fechado é integrável.
2. Seja $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $\mathcal{R}$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de $f$ pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então $f$ também é integrável.






## Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no retângulo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Então:

1. $\iint_{\mathcal{R}} [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \pm \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA$;
2. $\iint_{\mathcal{R}} \lambda\, f(x,y)\, dA = \lambda\, \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x,y)\, dA + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x,y)\, dA$;
4. $f \geq g \Longrightarrow \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \geq \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA$;
    - $f \geq 0 \Longrightarrow \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \geq 0$;
5. $\left|\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA\right| \leq \iint_{\mathcal{R}} |f(x,y)|\, dA$.

# Como calcular um integral duplo?

- [Teorema 1 (de Fubini)]

  Seja $f$ uma função contínua no retângulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$. Então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

**Exemplo**

- Calcular o integral duplo, onde $\mathcal{R}$ é o retângulo $[0,1] \times [1,2]$,

$$\iint_{\mathcal{R}} (x^3 + y^2)\,d(x,y).$$



- [Teorema 2 (de Fubini)]

  Seja $f$ uma função limitada no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de $f$ pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas.

  Se $\int_c^d f(x,y)\,dy$ existe para cada $x \in [a,b]$ então o integral duplo

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \quad \text{existe e} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

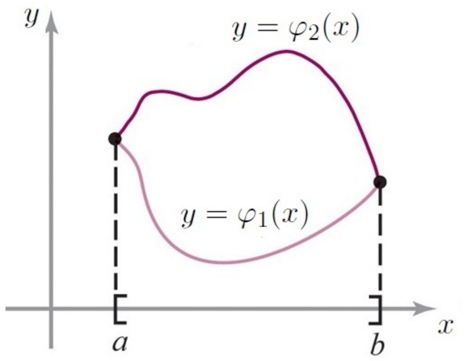
  De modo análogo, se $\int_a^b f(x,y)\,dx$ existe para cada $y \in [c,d]$ então o integral duplo

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \quad \text{existe e} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

  Se todas as condições se verificam em simultâneo

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

# Integração em regiões gerais




Região do tipo I

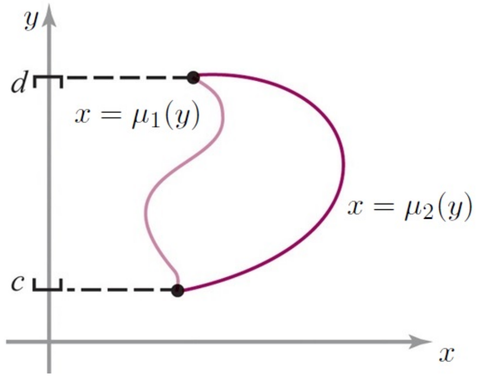
$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

Região do tipo II

$c \leq y \leq d$

$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$



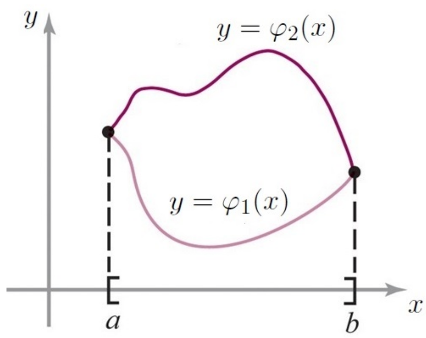



# Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]

$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$




- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ tais que

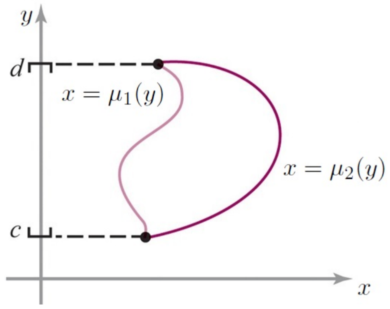
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

- [Região do tipo II]

$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$




  - $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

    $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^1(]c, d[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$$

  - Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[ \int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- [Região do tipo III] $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo II.



# Exemplo

- [7.3a)] Calcular

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\, dx\, dy$$

quando $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq x^2\}$.

1. Usando uma região verticalmente simples.
2. Usando uma região horizontalmente simples.

# Mudança da ordem de Integração

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{OU} \qquad \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dy\,dx$$

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.
- A ordem de integração é muito importante!
  - $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \neq \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dy\,dx$
  - $dx\,dy$ corresponde a uma subdivisão "vertical"da região, enquanto que em $dy\,dx$ a subdivisão é "horizontal".
  - A alteração da ordem de integração pode, em particular, permitir o cálculo de um integral que, de outra forma, não seria possível; por exemplo:
    - $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy.$



# Volumes e áreas

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em $B$ e $\mathcal{S}$ é a região do espaço definida por

  $$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in B,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

  define-se o volume de $\mathcal{S}$ por

  $$\text{vol}(\mathcal{S}) = \iint_B f(x,y)\,dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x,y) = 1$ a área de $B$, é dada por

  $$\text{área}(\mathcal{S}) = \iint_B 1\,dA$$

# Exercícios

1. Calcular a área da região definida pelo conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq x^2\}$$

2. Sejam
   - $\mathcal{D}$ o círculo unitário de centro na origem;
   - $\mathcal{R}$ a região de $\mathcal{D}$ em que $x \geq 0$;
   - $\mathcal{B}$ a região de $\mathcal{D}$ na qual $y \leq 0$

   Em cada uma das alíneas indique, justificando sem efetuar cálculos e nos casos em que for possível, se o valor do integral é positivo, negativo ou nulo.

   2.1 $\iint_{\mathcal{R}} dA$;

   2.2 $\iint_{\mathcal{B}} 5x\, dA$;

   2.3 $\iint_{\mathcal{D}} 5x\, dA$;

   2.4 $\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{sen} y\, dA$.



# Mudança de variáveis: *Jacobianos*

Relembre-se como (e para quê) se mudava de variável no caso do integral definido de uma função de 1 variável real... E no caso da integração dupla?

## Teorema

*Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, regiões nos planos $XY$ e $UV$, relacionadas por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, de tal modo que cada ponto de $\mathcal{R}$ é imagem de um único ponto de $\mathcal{S}$.*

*Se $f$ é contínua em $\mathcal{R}$, $g$ e $h$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $\mathcal{S}$ e o **Jacobiano**[2] $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ for não nulo em $\mathcal{S}$, então*

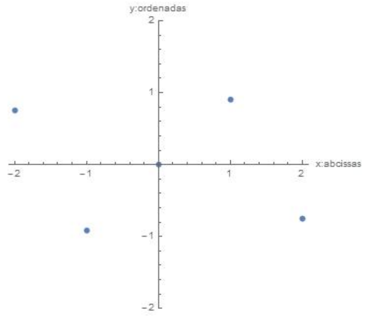
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, d(x, y) = \iint_{\mathcal{S}} f\left(g(u, v), h(u, v)\right) . \left|\frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}\right| d(u, v)$$

[2] Se $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, o **Jacobiano** de $x$ e $y$ em relação a $u$ e $v$ denota-se por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ e é igual a $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$, isto é, o determinante de uma matriz quadrada cujos elementos são...

## Mudança de coordenadas

- [CARTESIANAS] Representar pontos/curvas em um plano $XOY$

Em um sistema de coordenadas, no plano, ditas CARTESIANAS (ou retangulares) há um par de eixos concorrentes (e, normalmente, ortogonais e normados) a partir dos quais se representa cada ponto –$\mathbf{P}$– como par ordenado –$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (de dois números reais), a que chamamos, respetivamente *abcissa* e *ordenada*– cuja primeira coordenada é a distância ou o simétrico da distância desse ponto ao eixo das ordenadas e cuja segunda coordenada é a distância ou o simétrico da distância do ponto ao eixo das abcissas.
Nestas condições tem-se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ ...

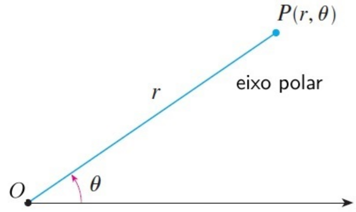





## Mudança de coordenadas

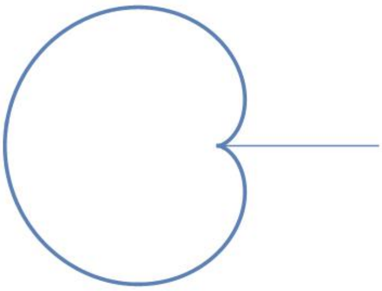
- [POLARES] Representar pontos/curvas em um plano "polar"

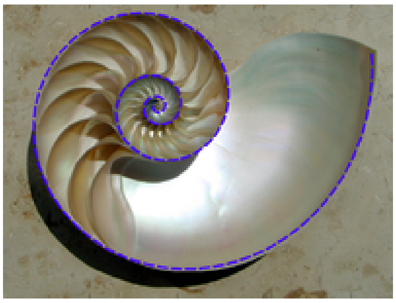
Em um sistema de coordenadas, igualmente no plano, ditas POLARES há um (semi)eixo (que se diz "polar"e cuja origem se denomina *pólo*) a partir do qual se representa um ponto –$\mathbf{P}$– como par ordenado –$(\mathbf{r}, \theta)$ (de dois números reais), a que chamamos, *raio polar* e *ângulo polar*– e que se definem, respetivamente, como a distância de $\mathbf{P}$ ao "pólo"e a medida do ângulo formado pelo semieixo polar e o segmento que une o pólo a $\mathbf{P}$.
Nestas condições tem-se $r \in \mathbb{R}_0^+$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ ...

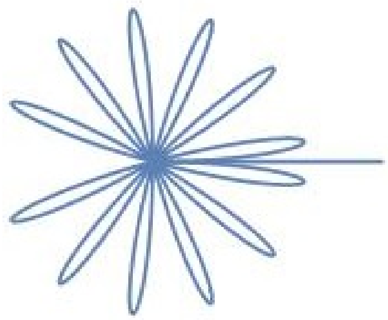


# Curvas em coordenadas polares

- [Curvas POLARES] Cardióides, Espirais, Lemniscatas, Rosáceas,...









# Mudança de coordenadas: Cartesianas *vs.* Polares

| Polares para Cartesianas | Cartesianas para Polares |
|---|---|
| $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ | $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x} \end{cases}$ |

**Exercícios**

1. Exprima-se em coordenadas polares e cartesianas
   - Uma circunferência de centro na origem e raio $R$.
   - Uma reta que passe pela origem.
2. Esboce
   - a curva polar $\mathcal{C}$ definida por $r = \theta$
   - Exprima $\mathcal{C}$ em coordenadas cartesianas.
3. Qual o **Jacobiano**, em coordenadas polares?
4. Use um integral duplo (em coordenadas polares) para calcular a área da figura limitada por uma rosácea de 3 pétalas, definda por $r = \text{sen}\,3\theta$.