## Grupo II
(5 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique, justificando, se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

**1.** Se $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)\,dt\,.$$

A afirmação é falsa. Pela 1.ª parte do TFC

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

enquanto, pela fórmula de Barrow

$$\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)\,dt = \int_a^x f'(t)\,dt = \Big[f(t)\Big]_{t=a}^{x} = f(x) - f(a).$$

**2.** Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

A afirmação é verdadeira. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, nas condições do enunciado, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \iff 0 = f(c)(b-a)$$

Assumindo $a \neq b$, pela lei do anulamento do produto, resulta $f(c) = 0$.

**3.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2\,.$

A afirmação é falsa. A função integranda não está definida para $x = 0$ que é um ponto do intervalo de integração. Assim, está-se perante um integral impróprio do tipo 2. Uma vez que a função integranda é par e que o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem pode-se escrever

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{1} = \lim_{a\to 0^+}\left[-\frac{1}{a}+1\right]$$

como o limite não existe, o integral é divergente.

**4.** Se $\lim\limits_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$, então $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

A afirmação é falsa. Por definição, a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é convergente se existir o limite da sucessão das somas parciais, isto é, se existir $\lim\limits_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$. Ora, neste caso, o limite existe (e é igual a 1).

**5.** Se $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge quando $x = 2$, então converge quando $x = 1$.

A afirmação é verdadeira. Esta é uma série de potências em $x$ e existe sempre um $R$, $R \geq 0$ ou $R = +\infty$, tal que o intervalo de convergência desta serie é da forma $-R < x < R$ (podendo ou não convergir para $x = \pm R$). Ora se a série converge quando $x = 2$, então $2 < R$ e como $1 < 2 < R$ a série também converge quando $x = 1$.

---

| $x$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen} x$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$


Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações


MIEInf
05 de Janeiro de 2017
[duração 2h]

# Cálculo
## Teste 2

| Nome ~~completo~~ PROPOSTA DE RESOLUÇÃO | ~~Número~~ |
|---|---|

## Grupo I
(15 valores)

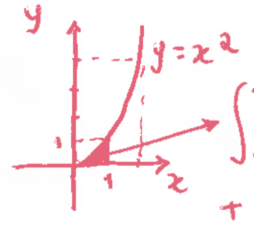
**JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.**

**1.** (2 valores)

Considere a região plana cuja área se pode calcular por $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$. Nestas condições,

(a) forme a soma de Riemann para $f$, onde $f(x) = x^2$, relativa à partição $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ do intervalo $[0, 1]$ e com $\tilde{x}_1 = \frac{1}{8}$, $\tilde{x}_2 = \frac{3}{8}$, $\tilde{x}_3 = \frac{5}{8}$ e $\tilde{x}_4 = \frac{7}{8}$.

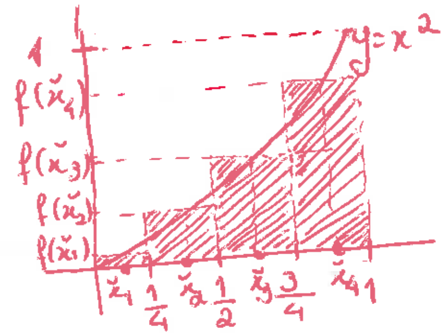
(b) esboce uma figura que ilustre o que representa a soma de Riemann da alínea anterior.




$\int_0^1 x^2\,dx$

a) $S_P(f) = \sum\limits_{i=1}^{4} f(\tilde{x}_i)\,\Delta x_i = f(\tilde{x}_1)\,.\,\Delta x_1 + f(\tilde{x}_2)\,\Delta x_2 + f(\tilde{x}_3)\,\Delta x_3 + f(\tilde{x}_4)\,\Delta x_4 = f\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}-0\right) + f\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1+9+25+49}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{64}$

b)




$\tilde{x}_1 = \frac{1}{8}$ ; $\tilde{x}_2 = \frac{3}{8}$ ; $\tilde{x}_3 = \frac{5}{8}$ ; $\tilde{x}_4 = \frac{7}{8}$

$S_P(f)$ é representada pela região sombreada da figura

**2.** (3 valores)

Calcule $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$, usando $t^2 = x - 1 \iff x = t^2 + 1$ ; $\frac{dx}{dt} = 2t \iff dx = 2t\,dt$

e

Se $x = 1 \Rightarrow t = 0$

Se $x = 2 \Rightarrow t = 1$

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_0^1 (t^2+1)\,.\,t\,.\,2t\,dt = \int_0^1 (2t^4 + 2t^2)\,dt = 2\left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{16}{15}$$

⊛ $\overset{\text{ou}}{=} 2\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{\frac{x+4}{2}}-\sqrt{x}\right)dx \overset{\text{ou}}{=}$ (∗∗) $2\int_{0}^{2}\left[y^2-(2y^2-4)\right]dy$

**3.** (2 valores)

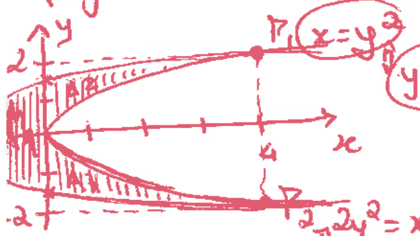
Seja $\mathcal{A}$ a região plana limitada pelas curvas definidas por $x=y^2$ e $2y^2=x+4$.

(a) Recorrendo a integrais definidos, exprima de duas formas distintas– integrando em ordem em $x$ e integrando em ordem a $y$– a área de $\mathcal{A}$.

(b) Calcule a área de $\mathcal{A}$.

Intersecção das curvas:

$\begin{cases} x=y^2 \\ 2y^2=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 2x=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2 \\ x=4 \end{cases}$, $P_1=(4,2)$ e $P_2(4,-2)$




$x=y^2$, $y=\pm\sqrt{x}$

$x=2y^2-4$, $2y^2=x+4$, $y=\pm\sqrt{\frac{x+4}{2}}$

(a) (i) em ordem a $x$

$A=A_1+A_2+A_3=\int_{-4}^{0}\sqrt{\frac{x+4}{2}}-\left(-\sqrt{\frac{x+4}{2}}\right)dx + \int_{0}^{4}\sqrt{\frac{x+4}{2}}-\sqrt{x}\,dx + \int_{0}^{4}-\sqrt{x}-\left(-\sqrt{\frac{x+4}{2}}\right)dx$ ⊛

(ii) em ordem a $y$

$A=\int_{-2}^{2}\left[y^2-(2y^2-4)\right]dy$ (∗∗)

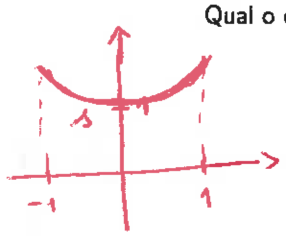
b)

$$A=\int_{-2}^{2}y^2-(2y^2-4)\,dy=\int_{-2}^{2}(-y^2+4)\,dy=-\frac{y^3}{3}+4y\Big]_{y=-2}^{2}=$$

$$=-\frac{8}{3}+8-\left(-\frac{-8}{3}-8\right)=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

**4.** (3 valores)

Qual o comprimento de uma *catenária* –definida por $y=\cosh x$ $\left(=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$– entre os pontos de abcissas $-1$ e $1$?




$$s=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad y'=\operatorname{senh}x \qquad \cosh^2x=\operatorname{senh}^2x+1$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\operatorname{senh}^2x}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\cosh^2x}\,dx=\int_{-1}^{1}\cosh x\,dx$$

$$=\operatorname{senh}x\Big]_{-1}^{1}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big]_{x=-1}^{1}=\frac{e-e^{-1}}{2}-\frac{e^{-1}-e}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+e\right)=\frac{1}{2}\left(2e-\frac{2}{e}\right)$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

**5.** (2 valores)

Estude a natureza de

(a) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$ : Integral Impróprio

(b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$ : Série Numérica

a) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}x\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{artg}b-\operatorname{arctg}1\right]=\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}b-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ ∴ o integral é convergente (para $\frac{\pi}{4}$)

b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$ Pelo critério do Integral

Seja $f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

- $f$ é contínua (pq é o quociente de 2 polinómios, s/ zeros no do denominador)
- $f$ é positiva (pq é o quociente de 2 quantidades positivas) ex $\frac{1}{1+x^2}>0 \Leftrightarrow 1\geq 0 \wedge 1+x^2\geq 0$ ...
- $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}<0$ ... ∴ $f$ é decrescente
- $f(n)=\frac{1}{n^2+1}=u_n$

∴ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$ e $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ têm a mesma natureza, isto é, a série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$ converge também

**6.** (3 valores)

Considere a série de potências

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(2x)^n}{n} \quad (*)$$

Determine o raio e o intervalo de convergência desta série.

Seja $u_n=\frac{(2x)^n}{n}$ e estude-se a série dos módulos $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(2x)^n}{n}\right|$, usando o critério da razão

$$\lim_n\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_n\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right|=|2x|\cdot\lim_n\frac{n}{n+1}=|2x|$$

Donde

Para $|2x|<1$, a série converge

$\Updownarrow$

$|x|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, a série converge (e diverge qd $x<-\frac{1}{2}$ ou $x>\frac{1}{2}$)

Para $x=-\frac{1}{2}$ tem-se $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ que converge (pelo critério de Leibniz)

Para $x=\frac{1}{2}$ tem $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ que é a série harmónica que diverge (pelo critério do integral)

Em suma: o raio de convergência da série (∗) é $\frac{1}{2}$ e o intervalo de convergência da série (∗) é $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$