Cálculo

1. Escreva na forma $\sum_{n=3}^{10} u_n$ e $\sum_{k=0}^{7} u_{k+3}$ as seguintes somas:

(a) $\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{10}}$; (b) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}+\cdots-\dfrac{10}{11}$.

2. Escreva na forma $\sum_{n\geq 1} u_n$ as séries cujos primeiros termos são:

(a) $1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{1000}+\cdots$; (b) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{25}+\dfrac{5}{125}-\dfrac{6}{625}+\dfrac{7}{3125}\cdots$.

3. Estude a convergência da série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3^n-2^n}{6^n}.$$

4. Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{7}{n}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\cos\frac{1}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

5. Considere a série geométrica onde $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $r\in\mathbb{R}$ são fixos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a\,r^{n-1}.$$

(a) Indique a sucessão geradora da série geométrica e a respetiva sucessão das somas parciais.

(b) Mostre que a série geométrica é convergente se e só se $|r|<1$.

6. Considere a soma $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}$, $n\in\mathbb{N}$, onde cada a_k é um número inteiro entre 0 e 9.

(a) Escreva a soma anterior, com $n=3$, na forma de uma fração decimal.

(b) Comente a afirmação "A convergência de séries geométricas de razão 1/10 permite atribuir um significado preciso a dízimas infinitas".

(c) Escreva as seguintes dízimas na forma de uma série e expresse a soma dessa série como quociente de dois números naturais:

i. 0.7(7) ii. 0.24(24) iii. 0.112(112) iv. 0.6245(45)

7. A extremidade de um pêndulo percorre um arco de 24 cm de comprimentos no seu primeiro movimento. Sabendo que cada movimento sucessivo é aproximadamente 5/6 do comprimento anterior, obtenha uma aproximação para a distância total percorrida até ao repouso.

8. Um relógio marca 2h. A que horas, entre as 2h e as 3h, se sobrepõem os ponteiros do relógio?

9. Determine a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, determine a soma correspondente:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2}{7^{n+1}}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}+3^n}{6^{n-1}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\pi^{n-1}}{3^{2n}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{e^{n-1}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{5n}}$; (f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}+2^{2n}}{3^{n-1}}$.

10. Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{5}{\sqrt[3]{n^7}}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3n^3+2n^2}{5n^5}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{5n^3-2}{3n^4}$.

Séries de termos não negativos.

11. Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{n+1}n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n-1}$

12. Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{3\times 6\times\cdots\times(3n+3)}$.

13. Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{n}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n^2+3}{1+n^2}\right)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

14. Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Séries de termos com sinal arbitrário.

15. Diga se cada uma das seguintes séries converge absolutamente:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^5+1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt[n]{3}}$; (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} 2n}{n!}$.

16. Diga se cada uma das seguintes séries é convergente:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{n}}$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\ln^n(n\pi)}$.

17. Verifique que o Critério de Leibnitz não é aplicável às seguintes séries e mostre que elas são divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n\frac{n}{n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$.

18. Considere a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$, com $a_n = \begin{cases} 1/n^2, & n \text{ par} \\ 1/n^3, & n \text{ ímpar} \end{cases}$.

Verifique que o Critério de Leibnitz não lhe é aplicável e que a série converge.

19. Apresente uma série convergente com soma $S = \dfrac{1}{\pi}$.

20. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se $(u_n)_n$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente;

(b) se $(u_n)_n$ é divergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente;

(c) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $(u_n)_n$ é convergente;

(d) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então $(u_n)_n$ é divergente;

(e) se $\lim_n u_n = 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente;

(f) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então $\lim_n u_n \neq 0$;

(g) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 0$;

(h) se $\lim_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente;

(i) se $\lim_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

21. Em cada uma das seguintes alíneas, apresente um exemplo nas condições indicadas, ou justifique porque não existe:

(a) uma série convergente;

(b) uma série divergente;

(c) uma série alternada divergente;

(d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n\geq 1} u_n$ seja divergente e $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ seja convergente;

(e) uma série divergente, $\sum_{n\geq 1} u_n$, tal que $\lim_n u_n = 0$;

(f) uma série convergente, $\sum_{n\geq 1} u_n$, tal que $\lim_n u_n = 1$;

(g) duas séries divergentes, $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$, tais que $\lim_n(u_n + v_n)$ seja convergente.