

### Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

novembro de 2017

[MIEInf] Cálculo-2017-18

1 / 12

### Algumas Aplicações do integral de Riemann

- ▶ Cálculo de áreas de domínios planos
- ▶ Cálculo de comprimento de curvas
- ▶ [Limite, Distância, Valor Médio, Volume de sólidos de revolução]

[MIEInf] Cálculo-2017-18

3 / 12

Áreas de domínios planos

Comprimentos de curvas

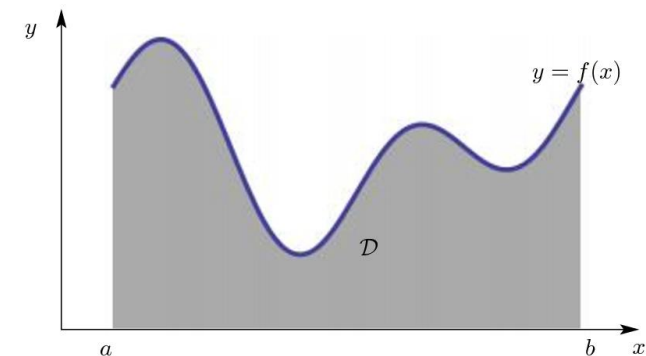
[MIEInf] Cálculo-2017-18

2 / 12

### Cálculo de áreas

- ▶ Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq 0$  para todo o  $x \in [a, b]$  então a **área da região sob o gráfico de  $f$**  entre  $x = a$  e  $x = b$  é

$$\text{área de } \mathcal{D} = \int_a^b f(x) dx$$



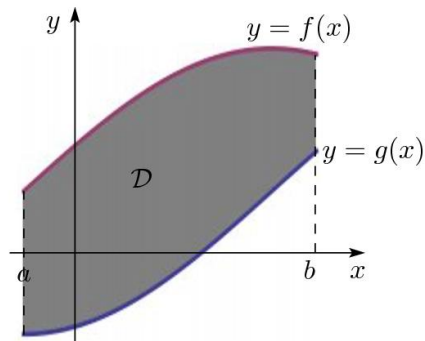
[MIEInf] Cálculo-2017-18

4 / 12

Em geral

- Se  $f$  e  $g$  são contínuas em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq g(x)$  para todo o  $x \in [a, b]$  então a **área da região limitada pelos gráfico de  $f$  e  $g$  entre  $a$  e  $b$**  é

$$\text{área} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



[MIEInf] Cálculo-2017-18

5 / 12

## Exemplo

- Calcular a medida da área da região limitada pelos gráficos das funções seno e cosseno entre quando  $x$  está entre 0 e  $\frac{\pi}{4}$ .

[MIEInf] Cálculo-2017-18

6 / 12

## Comprimento de curva

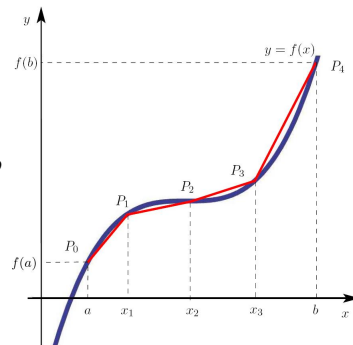
Sejam

- $f$  de classe  $C^1$  em  $[a, b]$ ;
- $\mathcal{P}$  uma partição de  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- $P_k$  o ponto de coordenadas

$$(x_k, f(x_k)).$$



- A medida do **comprimento da linha poligonal definida pelos pontos  $P_k$**  é a soma da medida dos comprimentos dos segmentos de reta  $\overline{P_k P_{k+1}}$ , isto é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

[MIEInf] Cálculo-2017-18

7 / 12

- Pelo teorema do valor médio de Lagrange (Cap. 1.5), existe  $\widetilde{x}_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  tal que

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\widetilde{x}_k)(x_{k+1} - x_k)$$

pelo que

$$\begin{aligned} [x_{k+1} - x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 &= [x_{k+1} - x_k]^2 + [f'(\widetilde{x}_k)(x_{k+1} - x_k)]^2 \\ &= (x_{k+1} - x_k)^2 (1 + [f'(\widetilde{x}_k)]^2). \end{aligned}$$

- Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 (1 + [f'(\widetilde{x}_k)]^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\widetilde{x}_k)]^2} (x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

[MIEInf] Cálculo-2017-18

8 / 12

► Mas

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\widetilde{x}_k))^2} (x_{k+1} - x_k)$$

é a soma de Riemann para a função

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

- A função  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  é contínua logo integrável.
- Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , a medida do comprimento da linha poligonal (soma de Riemann) tende para a medida do comprimento da curva (integral).

### ► [Comprimento de uma curva]

Seja  $f$  de classe  $C^1$  em  $[a, b]$ . A medida do **comprimento  $L$  da curva** definida pelo gráfico de  $f$  do ponto  $(a, f(a))$  ao ponto  $(b, f(b))$  é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

## Exemplos

- Calcular a medida do comprimento do gráfico da função

$$f(x) = (x-1)^{3/2} \quad \text{quando } x \in [1, 2]$$

Tem-se

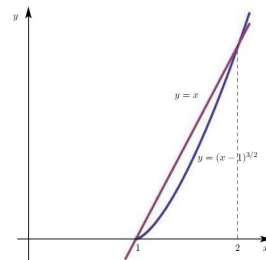
$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x-1}.$$

Com  $x-1 > 0$  para  $x \in [1, 2]$  vem

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2} \sqrt{x-1}\right]^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9x-5} \end{aligned}$$

Assim,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{9x-5} dx = \frac{1}{18} \frac{2}{3} (9x-5)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$



- Qual o comprimento de uma circunferência de raio  $r$ ?

## Cálculo de limites, distâncias, valores médios, volumes

- **Exemplo:** Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$
- Qual a distância percorrida por um objeto em movimento, com uma "função" velocidade conhecida e durante um dado intervalo de tempo?
- **Exemplo:** Sejam  $C$  o custo diário de aquecimento de uma residência e  $t$  o tempo (contado em dias a partir de 1 de janeiro de 2017). Como interpretar

$$\int_{t=0}^{90} C(t) dt \quad \text{e} \quad \frac{1}{90} \int_{t=0}^{90} C(t) dt \quad ?$$

- **Exemplo:** Fez-se rodar uma elipse, definida por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , em torno do eixo das ordenadas. Qual o volume do sólido obtido?