



Cálculo

Folha 1

2017'18

Revisões.

1. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes relações:

(a) $x^2 < y^2$

(c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad (x, y \neq 0)$

(b) $x^3 < y^3$

(d) $\frac{1}{x^3} > \frac{1}{y^3} \quad (x, y \neq 0)$

2. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 4| = 3\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x+1} = 2x\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x+2|\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : |x||x+3| = 4\}$

3. Em cada uma das alíneas seguintes encontre números reais a e ε de modo a que a solução da inequação $|x - a| < \varepsilon$ seja o intervalo dado.

(a) $] - 2, 2[$

(c) $]0, 4[$

(b) $] - 4, 0[$

(d) $] - 3, 7[$

4. Exprima cada um dos conjuntos seguintes na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos de números reais.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$

(l) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x - 2|\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$

(m) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\right\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$

(n) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| < 10\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$

(o) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$

(p) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$

(q) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \leq 1\}$

(r) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\right\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$

(s) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2|x|\}$

(i) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$

(t) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| > |x-3|\}$

(j) $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| \leq 1\}$

(k) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$

5. Qual o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 7 \implies |x| > 7$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1 \implies x \geq 1$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, |1 + 4x| < 1 \implies x \geq -\frac{1}{2}$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 5| \leq 2 \implies 3 < x < 7$

6. Assinale o que está errado na seguinte demonstração.

Sejam a e b números reais tais que $a = b$. Então

$$\begin{aligned} a^2 = ab &\implies a^2 - b^2 = ab - b^2 \\ &\implies (a - b)(a + b) = b(a - b) \\ &\implies a + b = b \\ &\implies 2b = b \\ &\implies 2 = 1. \end{aligned}$$

7. Sejam x e y dois números reais quaisquer e $n \in \mathbb{N}$.

De entre as seguintes relações, identifique quais são as verdadeiras, justificando a verdade da afirmação ou apresentando um contra-exemplo quando a relação for falsa.

(a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(d) $(xy)^n = x^n y^n$

(b) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

(e) $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(c) $(x+y)^n = x^n + y^n$

(f) $|x+y| = |x| + |y|$