Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$: Integrais Triplos

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

maio 2018

Integrais Triplos

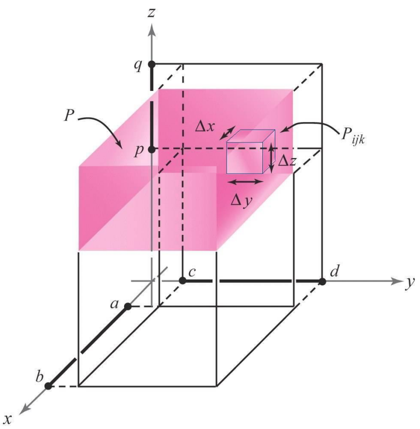
Obs: Nesta secção, a função $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é,

$|f(x, y, z)| < M,$ para algum $M \in \mathbb{R}$.

O Cálculo de Massa(s) de Sólido(s)

- [Problema] Determinar a massa de um sólido.

Seja $\mathcal{S}$ o paralelipípedo $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ e $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.



- Uma partição de $\mathcal{S}$, com $[a, b]$ dividido em n partes, $[c, d]$ em m e $[p, q]$ em l.
- Sendo $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$; o volume de cada "pequeno"paralelipípedo é $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$.
- A massa do paralelipípedo cuja densidade é f –e com $({x^*}_i, {y^*}_j, {z^*}_k) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$– pode ser aproximada por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f({x^*}_i, {y^*}_j, {z^*}_k) \, \Delta V_{ijk}$$

Integral Triplo: definição

- Uma soma de Riemann de f relativa a uma determinada partição de $\mathcal{S}$ é o número

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f({x^*}_i, {y^*}_j, {z^*}_k) \, \Delta V_{ijk}$$

Definição: Quando $n, m, l \longrightarrow +\infty$ (isto é, quando Δx_i, Δy_j e Δz_k tendem para 0), o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral triplo de f em $\mathcal{S}$ e denota-se por[1]

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \, dV$$

- Se existir o integral triplo de f em $\mathcal{S}$, diz-se que f é integrável em $\mathcal{S}$.

[1] Também se escreve $\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ OU $\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz, \cdots$ OU $\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \, d(x, \, y, \, z)$

Funções integráveis

1. Toda a função contínua definida num paralelipípedo fechado é integrável.

2. Seja $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $\mathcal{S}$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então f também é integrável.

Propriedades dos integrais triplos

Sejam $f,\, g : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no retângulo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Então:

1. $\iiint_{\mathcal{S}} [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\; dV =$ $\iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, dV \pm \iiint_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\, dV$;

2. $\iiint_{\mathcal{S}} \lambda\; f(x,y,z)\, dV = \lambda\; \iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, dV, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, dV = \iiint_{\mathcal{S}_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint_{\mathcal{S}_2} f(x,y,z)\, dV$;

4. $f \geq g \Longrightarrow \iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, dV \geq \iint_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\, dV$;

   - $f \geq 0 \Longrightarrow \iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, dV \geq 0$;

5. $\left| \iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, dV \right| \leq \iiint_{\mathcal{S}} |f(x,y,z)|\; dV$.

Como calcular um integral triplo?

- [Teorema: Integral Triplo, enquanto integral iterado]

  Seja f uma função contínua no paralelipípedo $\mathcal{S} = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Então

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dV = \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz$$

Exemplo [2] Um cubo, cujos lados medem $4\,cm$, é feito de um material de densidade variável. Qual a massa desse cubo, sabendo que a função densidade é δ definida por $\delta(x, y, z) = 1 + xyz \quad g/cm^3$?

[2]Observe-se que também é possível calcular volumes de sólidos, com recurso a um integral triplo!

Problema

Construir um integral triplo que permita calcular a massa de um cone definido por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e por $z = 3$ e cuja densidade é determinada por $\delta(x, y, z) = z$.

Subdivide-se o cone em minicubos de volume ΔV_{ijk}...

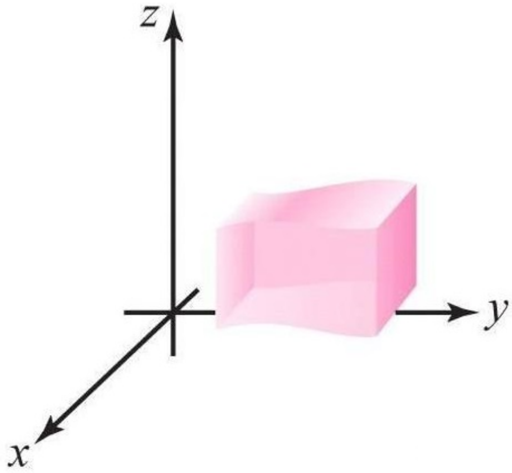
1. Empilhando os cubinhos verticalmente acima do ponto de coordenadas $(x, y, 0)$ e a partir da superfície cónica (definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$), até ao plano (definido por $z = 3$), obtemos o integral interno

$$\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=3} \delta(x, y, z)\, dz$$

2. Há uma pilha, para cada ponto do plano XOY que esteja na "sombra"do cone; isto é, há uma pilha para qualquer ponto de coordenadas(x, y) do círculo de finido por $x^2 + y^2 = 9$. Alinhe-se, então, cada pilha paralelamente ao eixo YY', isto é, no integral intermédio temos cada x desde $y = -sqrt9 - x^2$ até $\sqrt{9 - x^2}$:

$$\int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{y=\sqrt{9-x^2}} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=3} \delta(x, y, z)\, dz \right) dy$$

3. Finalmente,... há uma "fatia"para cada x, entre -3 e 3, isto é.....



Região Sólida: EXEMPLO

$$\gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)$$
$$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$$
$$c \le y \le d$$

Em um Integral triplo (cujo resultado é sempre um número):

- Os limites de integração para o integral externo são constantes.
- Os limites de integração para o integral intermédio podem, quando muito, envolver 1 variável (a relativa ao integral externo).
- Os limites de integração para o integral interno podem envolver 2 variáveis (as relativas aos integrais intermédio e externo).

Mudança de variáveis: *Jacobianos*

Teorema

Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$, sólidos em XYZ e UVW, relacionadas por $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$ e $z = t(u,v,w)$, de tal modo que cada ponto de $\mathcal{D}$ é imagem de um único ponto de $\mathcal{S}$.

Se f é contínua em $\mathcal{D}$, g, h e t tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $\mathcal{S}$ e o ***Jacobiano***[3] $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ *for não nulo em $\mathcal{S}$, então*

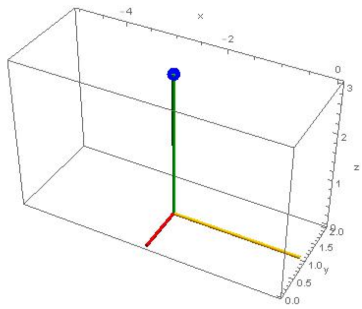
$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\, d(x,y,z) =$$
$$= \iiint_{\mathcal{S}} f\left(g(u,v,w), h(u,v,w), t(u,v,w)\right) . \left| \frac{\partial(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}{\partial(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})} \right| d(u,v,w)$$

[3] Se $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$ e $z = t(u,v,w)$, o **Jacobiano** de x, y e z em relação a u, v e w denota-se por $J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ e é igual ao determinante de uma matriz cujas linhas são $L1 : \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial w}$; $L2 : \frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial y}{\partial v}\ \frac{\partial y}{\partial w}$; $L3 : \frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial z}{\partial w}$.

Mudança de coordenadas

- [CARTESIANAS] Representar pontos/curvas/superfícies no espaço $OXYZ$

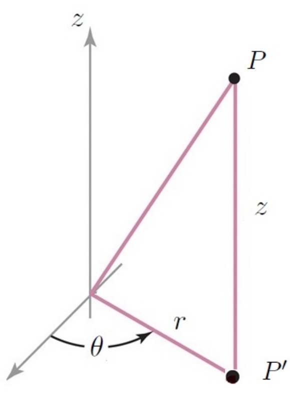
Em um sistema de coordenadas, no espaço, ditas CARTESIANAS (ou retangulares) há 3 eixos concorrentes (e, normalmente, ortogonais e normados) a partir dos quais se representa cada ponto $-\mathbf{P}-$ como terno ordenado $-(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (de três números reais), a que chamamos, respetivamente *abcissa*, *ordenada* e *cota*– cuja primeira coordenada é a distância ou o simétrico da distância desse ponto ao plano YOZ, cuja segunda coordenada é a distância ou o simétrico da distância do ponto ao plano XOZ e cuja terceira coordenada é a distância ou o simétrico da distância do ponto ao plano XOY.
Nestas condições tem-se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.



Mudança de coordenadas

- [CILÍNDRICAS] Representar pontos/curvas/superfícies no espaço "polar"

Em um sistema de coordenadas, igualmente no espaço, ditas CILÍNDRICAS há um (semi)eixo (que se diz "polar"e cuja origem se denomina *pólo*) e um eixo (das "cotas") a partir dos quais se representa um ponto $-\mathbf{P}-$ como terno ordenado $-(\mathbf{r}, \theta, \mathbf{z})$ (de três números reais), a que chamamos, *raio polar*, *ângulo polar* e *cota*– e que se definem, respetivamente, como a distância de $\mathbf{P}'$ –a projecção ortogonal de $\mathbf{P}$ no plano do semieixo polar– ao "pólo", a medida do ângulo formado pelo semieixo polar e o segmento que une o pólo a $\mathbf{P}'$ e a "cota"(definida, enquanto coordenada cartesiana).
Nestas condições tem-se $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.



Mudança de coordenadas: Cartesianas *vs.* Cilíndricas

Cilíndricas para Cartesianas	Cartesianas para Cilíndricas
$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$

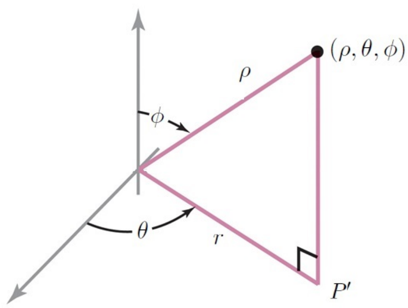
Exercício

- Qual o elemento de volume –**Jacobiano**– em coordenadas cilíndricas?

Mudança de coordenadas

- [ESFÉRICAS] Representar pontos/curvas/superfícies no espaço "esférico"

Em um sistema de coordenadas, igualmente no espaço, ditas ESFÉRICAS há um (semi)eixo "polar"e um eixo (das "cotas") a partir dos quais se representa um ponto –$\mathbf{P}$– como terno ordenado –(ρ, θ, ϕ) (de três números reais), a que chamamos, *raio esférico*, *ângulo polar* e *ângulo esférico*– e que se definem, respetivamente, como a distância de $\mathbf{P}$ ao "pólo", a medida do ângulo "polar"(já definido enquanto coordenada cilíndrica/polar) e a medida doângulo formado pelo semieixopositivo das cotas e o raio esférico.
Nestas condições tem-se $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$.



Mudança de coordenadas: Cartesianas *vs.* Esféricas

Esféricas para Cartesianas	Cartesianas para Esféricas
$\begin{cases} x = \rho \text{ sen}\,\phi \, \cos\theta \\ y = \rho \text{ sen}\,\phi \text{ sen}\,\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x} \\ \phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$

Exercício

- Mostre que $J(\rho,\theta,\phi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = -\rho^2 \text{ sen}\,\phi$.