Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Folha 2

Exercício 2.1 Mostre, recorrendo à definição, que:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x+y) = 1$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Exercício 2.2 Mostre que:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;

Exercício 2.3 Calcule, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x^3y$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to1} (x^2, e^x)$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cos x}{x^2+y^2+1}, e^{x^2}\right)$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$;

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y^2-x^2}{x-y}$;

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$;

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$;

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$;

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} + x$;

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2-y^2}$;

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^5}{x^2+y^4}$;

n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2y^2}$;

o) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} (xe^{xz}, x^2yz)$.

Exercício 2.4 Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$; b) $f(x,y) = \dfrac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$; c) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^2+3y^2}$.

Exercício 2.5 Estude a continuidade de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0); \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0); \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } x\neq -y, \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x=-y; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0); \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x\geq y, \\ y & \text{se } x<y; \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0); \end{cases}$

g) $f(x,y,z) = \left(\ln(1+y^2), xz, \cos\sqrt[3]{x+y}\right)$.