Cap. 1– Funções reais de variável real

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

outubro 2017

Derivadas

Definições
- Derivada de uma função (real de uma variável real) num ponto
- Derivadas Laterais

Interpretação geométrica da derivada
- Retas tangente e normal

Funções deriváveis

Propriedades das funções deriváveis
- Teoremas de Fermat, de Rolle, de Lagrange e de Darboux

Derivadas de ordem superior

Parte V

Derivada de uma função em um ponto

Derivada de uma função (real de uma variável real) num ponto

Sejam $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$, um ponto de acumulação de D

- Diz-se que a função f é derivável no ponto $a \in D \cap D'$ quando existe o limite da "razão incremental", isto é, existe o seguinte limite
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Este limite representa-se por $f'(a)$ e diz-se derivada de f no ponto a.

Observações

- Uma forma equivalente de definir a derivada de f em a é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

e que resulta imediatamente quando se toma $x = a + h$, na definição anterior.

- Usando a notação $y = f(x)$ existem notações alternativas para a derivada; por exemplo

$$f'(x);\ y';\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df}{dx}$$

Definição de derivada lateral

- derivada à esquerda de f em a (quando a é ponto de acumulação à esquerda)

$$f'_{-}(a) = \lim_{x \to a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

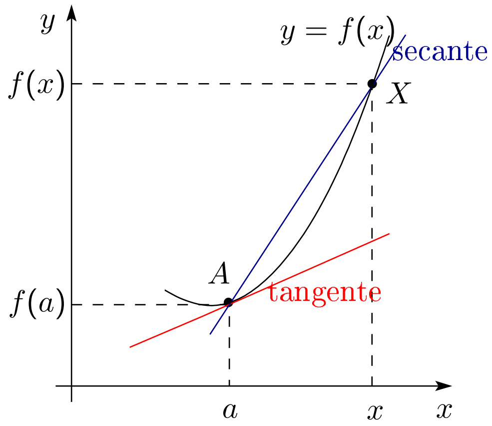
- derivada à direita de f em a (quando a é ponto de acumulação à direita)

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nota

Quando $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'_{-} \cap D'_{+}$ tem-se, naturalmente e uma vez que estamos a lidar com "limites", que f é derivável em a se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais $f'_{-}(a)$ e $f'_{+}(a)$.

Interpretação geométrica da derivada



O declive m da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é o limite dos sucessivos declives das retas secantes definidas por A e X, à medida que X se aproxima de A, isto é,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

[Nota] O ponto X pode estar à direita (como representado na figura) ou à esquerda de A.

Retas tangente e normal ao gráfico da função

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in D$.

- A reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ está definida pela equação
$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a).$$
- A reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ define-se por
  - quando $f'(a) \neq 0$,
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x - a)$$
  - quando $f'(a) = 0$,
$$x = 0$$

[Nota] A reta normal ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é a reta perpendicular à reta tangente ao gráfico nesse ponto.

Quando f é derivável em a

i) a curva definida por $y = f(x)$ não apresenta nenhum "bico" em $x = a$, isto é, o ponto $(a, f(a))$ é um ponto anguloso;
Ex.: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $a = 0$.

ii) a reta tangente definida por $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$ "confunde-se" com a curva numa vizinhança de a;

iii) o polinómio definido por $f(a) + f'(a)\,(x - a)$, de grau ≤ 1, pode usar-se como aproximação para f perto de a.

Função derivável e função derivada

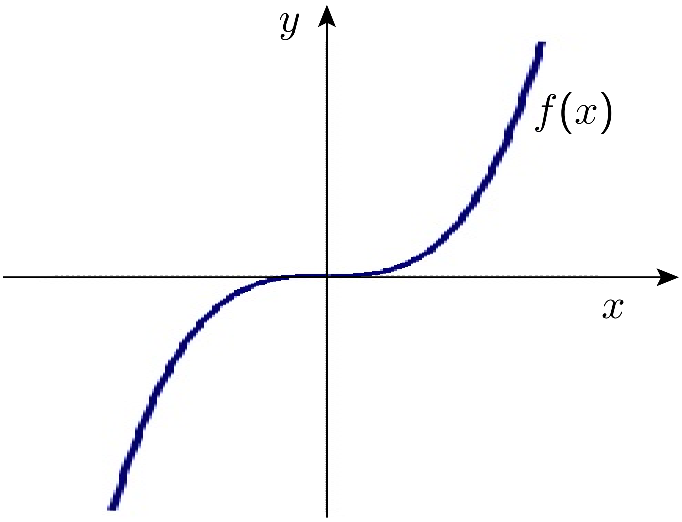
Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in D$ e $A \subset D$.

- Diz-se que
  - f é derivável em $[a, b]$ quando f é derivável em qualquer $x \in \,]a, b[$ e existem as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$;
  - f é derivável em A quando f é derivável em qualquer $a \in A$;
  - f é derivável quando f é derivável em todo o domínio D.
- Se f é derivável, a função

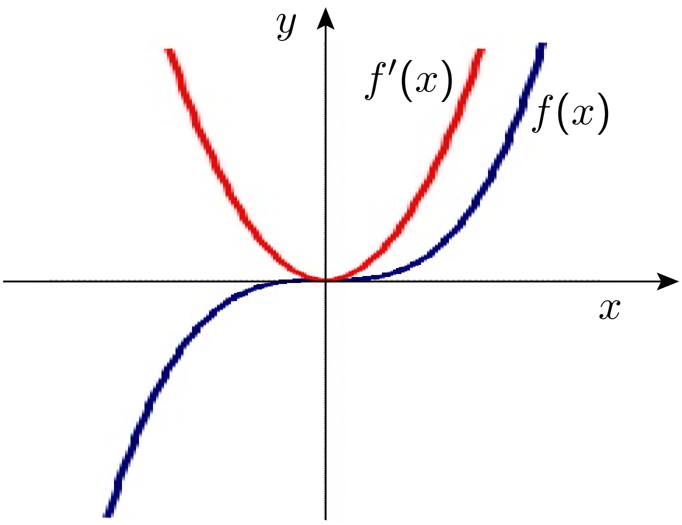
$$\begin{array}{rccc} f' : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

diz-se a função derivada de f.

Exemplo



Exemplo



Algumas propriedades das funções deriváveis

Teorema (Continuidade de funções deriváveis)

Se $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in D \cap D'$ então f é contínua em a.

[Regras básicas de derivação]

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de domínio D, deriváveis no ponto $a \in D$.

Então:

(a) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

(b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a) \neq 0$.

Exemplo: derivadas das funções hiperbólicas

Para $x \in \mathbb{R}$ tem-se

- $\text{sh}' \, x = \text{ch} \, x$;
- $\text{cosech}' \, x = -\,\text{cosech} \, x \; \text{coth} \, x$;
- $\text{ch}' \, x = \text{sh} \, x$;
- $\text{sech}' \, x = -\,\text{sech} \, x \; \text{th} \, x$
- $\text{th}' \, x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 \, x} = \text{sech}^2 \, x$;
- $\text{coth}' \, x = \dfrac{1}{\text{sh}^2 \, x} = \text{cosech}^2 \, x$, $\qquad x \neq 0$.

[Sugestão:] Demonstre as igualdades anteriores.

Teorema (Derivada da função composta / Regra da Cadeia)

Sejam $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $u(D) \subset B \subset \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$ e $b = u(a) \in B$.

Se u é derivável em a e g é derivável em b então $g \circ u$ é derivável em a, tendo-se

$$(g \circ u)'(a) = g'(u(a)) \cdot u'(a) \, .$$

Exemplo: derivadas de funções trigonométricas

Dada uma função derivável $u = u(x)$, tem-se

- $[\text{sen}\, u(x)]' = u'(x) \cos u(x)$;
- $[\text{cosec}\, u(x)]' = -u'(x)\ \text{cosec}\, u(x)\ \text{cotg}\, u(x)$;
- $[\cos u(x)]' = -u'(x)\, \text{sen}\, u(x)$;
- $[\sec u(x)]' = u'(x)\ \sec u(x)\ \text{tg}\, u(x)$;
- $[\text{tg}\, u(x)]' = u'(x) \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} = u'(x)\ \sec^2 u(x)$;
- $[\text{cotg}\, u(x)]' = -u'(x) \dfrac{1}{\text{sen}^2\, u(x)} = -u'(x)\, \text{cosec}^2\, u(x)$.

Exercício

- Calcular a derivada das funções
  1. $f(x) = 2^x, \quad x \geq 0$;

  2. $g(x) = x^x, \quad x > 0$.

Teorema (Derivada da função inversa)

Seja $f\colon D \longrightarrow B$, com $D, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijectiva. Se f

- é derivável no ponto $a \in D \cap D'$,
- $f'(a) \neq 0$
- f^{-1} é contínua em $b = f(a)$,

então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} .$$

Exemplo: derivada da função logaritmo natural

- A função logaritmo natural é a função inversa da função exponencial de base e.
- Temos
  - $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[, \quad f(x) = e^x$ é bijectiva e $f'(x) = e^x \neq 0$;
  - $f^{-1}(y) = \ln y, \quad y \in]0, +\infty[$ é contínua
- Pelo teorema da derivada da função inversa, sendo $y = f(x)$, vem

$$(\ln y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Assim

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad y \in]0, +\infty[.$$

Exemplo: derivadas de funções trigonométricas inversas

- $\text{arcsen}' \, x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,, \quad x \in \,]-1,1[\,;$
- $\text{arccosec}' \, x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \,, \quad x \notin \, [-1,1] \,;$
- $\text{arccos}' \, x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \,, \quad x \in \,]-1,1[\,;$
- $\text{arcsec}' x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \,, \quad x \notin \, [-1,1] \,;$
- $\text{arctan}' \, x = \dfrac{1}{1+x^2} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,;$
- $\text{arccotg} \, x = \dfrac{-1}{1+x^2} \,, \quad x \in \mathbb{R}.$

Derivada da função arco-seno

- Pelo teorema da derivada da função inversa tomando

$$f(x) = \text{sen}\, x, \qquad f^{-1}(y) = \text{arcsen}\, y$$

  vem

$$\text{arcsen}' \, y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}\, y)};$$

- Como $\cos z = \sqrt{1 - \text{sen}^2 z}$ (porquê?) tem-se

$$\cos(\text{arcsen}\, y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}\, y)} = \sqrt{1-y^2}.$$

- Assim,

$$\text{arcsen}' \, y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \text{para } y \in \,]-1,1[.$$

Teorema (Fermat)

Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D \cap D'$. Se a é um extremante de f então $f'(a) = 0$.

Nota

- O recíproco do Teorema de Fermat é falso, isto é,

$$f'(a) = 0 \not\Longrightarrow \quad f(a) \text{ extremo local de } f\,.$$

- Exemplo?

Teorema (Rolle)

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ então

$$\exists c \in \,]a,b[\,:\quad f'(c) = 0\,.$$

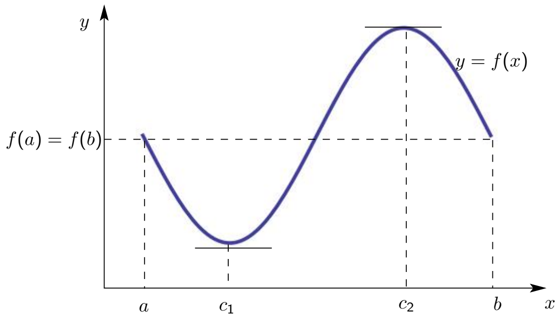


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

Corolários do teorema de Rolle

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $]a,b[$.

1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.
2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.
3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

Teorema (Teorema do valor médio de Lagrange)

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Então

$$\exists c \in\ ]a,b[\ : \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

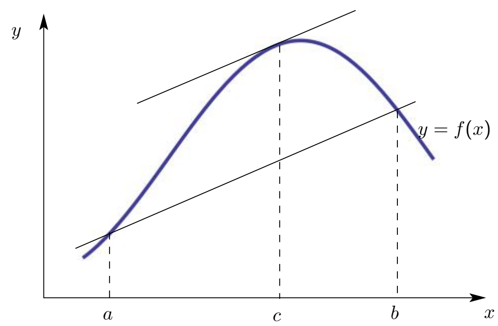


Figura: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

[Nota.] Veremos uma aplicação deste teorema no estudo do comprimento de uma curva (Cap. 3)

Corolários do teorema de Lagrange

[Ideia: olhar para f' como o declive de uma reta]

1. Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$, então f é constante.

2. Se $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a,b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in]a,b[$.

   [Nota.] Veremos uma aplicação deste corolário no Cap. 2.

3. [Monotonia das funções reais]

   Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Tem-se:

   3.1 $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é crescente em I;

   3.2 $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é decrescente em I;

   3.3 se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I;

   3.4 se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.

Teorema (de Darboux[1])

Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I para a qual existem $a, b \in I$ tais que $f'(a) < f'(b)$. Seja ainda $k \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) < k < f'(b)$. Então

$$\exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = k\,.$$

Nota

- também vale se $f'(a) > f'(b)$;
- não é exigida a continuidade de f'.

[1] é o análogo, para funções deriváveis, ao teorema do valor intermédio para funções contínuas

Exemplo

1. $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

   Esta função apresenta uma descontinuidade de salto. Claramente ela não possui a propriedade do valor intermédio. Então g não pode ser a derivada de função alguma $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. $h(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

   Esta função é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ tendo-se

$$h'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x}) + \text{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

   A função $h' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua, no entanto, verifica o teorema de Darboux.

Derivadas de ordem superior

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'$.

Seja D^1 o subconjunto de D formado por todos os pontos onde f é derivável; isto é D^1 é o domínio de f'.

- Diz-se que f é duas vezes derivável em $a \in D^1$, ponto interior de D^1, se f' for derivável em a.
- Chama-se segunda derivada de f em a à derivada$(f')'(a)$;
- Usam-se, ainda, as notações

$$f''(a), \qquad f^{(2)}(a) \qquad \text{ou} \qquad D^2 f(a)$$

Nota

- De modo análogo define-se a derivada de ordem n de uma função que se denota por

$$f^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad D^{(n)}f \,.$$

- Por convenção, considera-se

$$f^{(0)} = f \,.$$

Funções de classe $\mathcal{C}^k$

Seja $D \subset \mathbb{R}$, não vazio, tal que $D \subseteq D'$.

- Dado $k \in \mathbb{N}_0$, chama-se conjunto das funções de classe $\mathcal{C}^k$ de D em $\mathbb{R}$ ao conjunto

$$\mathcal{C}^k(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } D \text{ e } f^{(k)} \text{ é contínua} \,\}$$

- Chama-se conjunto das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ de D em $\mathbb{R}$ ao conjunto

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \{\, f : D \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } D \,\}$$