Capítulo 3

Sistemas de equações lineares

3.1 Formulação matricial

Uma *equação linear* em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sobre $\mathbb{K}$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$. Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares que é resolvido simultaneamente. Ou seja, que se pode escrever da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \qquad (1)$$

Este tipo de sistema pode ser representado na forma matricial

$$Ax = b,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A é a *matriz do sistema*, x é a *coluna das incógnitas* e b é a *coluna dos termos independentes*, também denominado por segundo membro do sistema.

De ora em diante não faremos distinção entre o sistema de equações lineares e a sua formulação matricial $Ax = b$.

Neste capítulo, vamo-nos debruçar sobre a resolução deste tipo de equação. Dizemos que v é solução de $Ax = b$ se $Av = b$, ou seja, quando v é uma realização possível para a coluna das incógnitas. Iremos ver em que condições a equação tem solução, e como se podem determinar. Entende-se por *resolver o sistema* $Ax = b$ encontrar o conjunto (ainda que vazio) de todas as realizações possíveis para a coluna das incógnitas. O sistema diz-se *impossível*

ou inconsistente se o conjunto é vazio e possível ou consistente caso contrário. Neste último caso, diz-se que é *possível determinado* se existir apenas um e um só elemento no conjunto das soluções, e *possível indeterminado* se for possível mas existirem pelo menos duas soluções distintas[1]. Entende-se por *classificar o sistema* a afirmação em como ele é impossível, possível determinada ou possível indeterminado.

Um caso particular da equação $Ax = b$ surge quando $b = 0$. Ou seja, quando a equação é da forma $Ax = 0$. O sistema associado a esta equação chama-se *sistema homogéneo*. Repare que este tipo de sistema é sempre possível. De facto, o vector nulo (ou seja, a coluna nula) é solução. Ao conjunto das soluções de $Ax = 0$ chamamos *núcleo*[2] de A, e é denotado por $N(A)$ ou ainda por $\ker(A)$. Ou seja, para A do tipo $m \times n$,

$$N(A) = \ker(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0_{m\times 1}\}.$$

Pelo que acabámos de referir, e independentemente da escolha de A, o conjunto $\ker(A)$ é sempre não vazio já que $0_{n\times 1} \in \ker(A)$.

Outro caso relevante no estudo da equação $Ax = b$ surge quando a matriz A é invertível. Neste caso, multiplicando ambos os membros de $Ax = b$, à esquerda, por A^{-1}, obtemos $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, e portanto $x = A^{-1}b$. Ou seja, a equação é possível determinada, sendo $A^{-1}b$ a sua única solução.

3.2 Resolução de $Ax = b$

Nesta secção, vamos apresentar uma forma de resolução da equação $Ax = b$, fazendo uso da factorização $PA = LU$ estudada atrás. Vejamos de que forma essa factorização é útil no estudo da equação.

Considere a equação $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. O sistema associado escreve-se como $\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_2 + 5x_3 = 8 \\ 6x_3 = 9 \end{array} \right.$. Calculando o valor de x_3 pela última equação, este é substituido na segunda equação para se calcular o valor de x_2, que por sua vez são usados na primeira equação para se obter x_1. Procedeu-se à chamada *substituição inversa* para se calcular a única (repare que a matriz dada é invertível) solução do sistema. Em que condições se pode usar a substituição inversa? Naturalmente quando a matriz dada é triangular superior com elementos diagonais não nulos. Mas também noutros casos. Considere a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. A matriz do sistema não é quadrada, mas o método da susbstituição inversa pode ainda ser aplicado. O sistema associado é

[1] Veremos, mais adiante, que se existem duas soluções distintas então existe uma infinidade delas.

[2] Iremos também usar a denominação *espaço nulo* de A.

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \qquad\qquad 4x_3 = 6 \end{cases}$, donde $x_3 = \frac{3}{2}$, e x_1 dependerá do valor de x_2. A solução geral do sistema é $(x_1, x_2, x_3) = (5 - \frac{9}{2} - 2x_2, x_2, \frac{3}{2}) = (5 - \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}) + x_2(-2, 1, 0)$. Mais à frente veremos qual a importância de escrevermos a solução na última forma apresentada. É fácil constatar que a substituição inversa é aplicável desde que a matriz do sistema seja uma matriz escada de linhas. A estatégia na resolução da equação irá, portanto, passar pela matriz escada obtida por Gauss, para depois se aplicar a substituição inversa. Desde que o sistema seja possível, claro.

Considere o sistema $Ax = b$ e a factorização $PA = LU$. Ou seja, $U = L^{-1}PA$. Recorde que $L^{-1}P$ reflecte as operações elementares efectuadas nas linhas de A por forma a se obter a matriz escada, percorrendo os passos do AEG. Multiplique ambos os membros de $Ax = b$, à esquerda, por $L^{-1}P$ para obter $L^{-1}PA = L^{-1}Pb$. Como $U = L^{-1}PA$ tem-se que $Ux = L^{-1}Pb$, e daqui podemos aplicar a substituição inversa... depois de se determinar o termo independente $L^{-1}Pb$. Recorde que $L^{-1}P$ reflecte as operações elementares efectuadas nas linhas de A, de modo que para se obter $L^{-1}Pb$ basta efectuar essas mesmas operações elementares, pela mesma ordem, nas linhas de b. Por forma a simplificar o raciocínio e evitar possíveis enganos, esse processo pode ser efectuado *ao mesmo tempo* que aplicamos o AEG nas linhas de A. Consideramos, para esse efeito, a *matriz aumentada do sistema* $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$, aplicamos o AEG para se obter a matriz $\left[\begin{array}{c|c} U & c \end{array}\right]$, onde U é matriz escada de linhas e $c = L^{-1}Pb$. Se o sistema for possível, aplica-se a substituição inversa a $Ux = c$.

As soluções de $Ax = b$ são *exactamente* as mesmas de $Ux = c$, e por este facto dizem-se equações equivalentes, e os sistemas associados são equivalentes. De facto, se v é solução de $Ax = b$ então $Av = b$, o que implica, por multiplicação à esquerda por $L^{-1}P$ que $L^{-1}PAv = L^{-1}Pb$, ou seja, que $Uv = c$. Por outro lado, se $Uv = c$ então $LUv = Lc$ e portanto $PAv = Lc$. Ora $c = L^{-1}Pb$, e portanto $Lc = Pb$. Obtemos então $PAv = Pb$. Como P é invertível, segue que $Av = b$ e v é solução de $Ax = b$.

Visto determinar as soluções de $Ax = b$ é o mesmo que resolver $Ux = c$, interessa-nos, então classificar este último.

Como exemplo, considere a equação $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. A segunda equação do sistema associado reflecte a igualdade $0 = 5$, o que é impossível. A equação é impossível já que não tem soluções. A matriz aumentada associada à equação é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$. Repare que a característica da matriz A é 1 enquanto que a característica da matriz aumentada $[A|b]$ é 2.

Como é fácil verificar, a característica da matriz a que se acrescentou linhas ou colunas é não inferior à característica da matriz inicial. Por consequência, $\operatorname{car}(A) \leq \operatorname{car}([A|b])$.

Teorema 3.2.1. *A equação matricial $Ax = b$ é consistente se e só se* $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]\right)$.

Demonstração. Considere $PA = LU$ e $c = L^{-1}Pb$. A equação $Ax = b$ é equivalente à equação $Ux = c$, e portanto $Ax = b$ tem solução se e só se $Ux = c$ tem solução. Tal equivale a dizer que o número de linhas nulas de U iguala o número de linhas nulas de $[U|c]$. De facto, o número sendo o mesmo, por substituição inversa é possível obter uma solução de $Ux = c$, e caso o número seja distinto então obtemos no sistema associado a igualdade $0 = c_i$, para algum $c_i \neq 0$, o que torna $Ux = c$ impossível. Se o número de linhas nulas de U iguala o de $[U|c]$ então o número de linhas não nulas de U iguala o de $[U|c]$. □

Como exemplo, considere a equação matricial $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. A equação é consistente se e só se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}([A|b])$. Ora $A = LU$ com $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto $\operatorname{car}(A) = 1$. A matriz escada obtida da matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$ Ora a caraterística da matriz aumentada é 2, pelo que $Ax = b$ é inconsistente.

Dada a equação $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$, considere $U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c$ equivalente à primeira fazendo uso da factorização $PA = LU$ da forma habitual. A incógnita x_i diz-se *incógnita básica* se a **coluna** i de U tem pivot. Uma incógnita diz-se *livre* se não for básica. A *nulidade* de A, $\operatorname{nul}(A)$, é o número de incógnitas livres na resolução de $Ax = 0$.

Na equação $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtemos a decomposição $A = LU$, com

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Repare que $\operatorname{car}(A) = 2$. Ora $2 = \operatorname{car}(A) \leq \operatorname{car}([A|b]) \leq 2$, já que a característica de uma matriz é não superior ao seu número de linhas **e** ao seu número de colunas. Segue que $\operatorname{car}([A|b]) = 2$. A equação $Ax = b$ é, portanto, consistente. Façamos, então, a classificação das incógnitas x_1, x_2, x_3 em livres e em básicas. Atente-se à matriz escada de linhas U apresentada atrás. As colunas 1 e 3 têm como pivots, respectivamente, 2 e $-\frac{3}{2}$. As incógnitas x_1 e x_3 são *básicas*. Já x_2 é *livre* pois a coluna 2 de U não tem pivot.

Qual o interesse neste tipo de classificação das incógnitas? A explicação é feita à custa do exemplo anterior. A equação $Ax = b$ é equivalente à equação $Ux = c$, com $U =$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Com os dados fornecidos, a matriz escada seguindo os passos do AEG do exemplo iguala

$$\left[\begin{array}{c|c} U & c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right].$$

Podemos, agora, aplicar o método da substituição inversa para obter as soluções da equação. Esse método é aplicado da seguinte forma:

1. obtem-se o valor das **incógnitas básicas** x_i no sentido sul$\rightarrow$norte,
2. as **incógnitas livres** comportam-se como se de termos independentes se tratassem.

Para conveniência futura, a solução é apresentada na forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix} + x_{i_1} \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix} + x_{i_2} \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix} + \dots x_{i_k} \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix}$$

onde x_{i_ℓ} são as incógnitas livres.

Voltando ao exemplo, recorde que se obteve a equação equivalente à dada

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a última equação correspondente, obtemos o valor da incógnita básica x_3. De facto, $-\frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2}$ implica $x_3 = -1$. Na equação $2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$, o valor de x_3 é conhecido (bastando-nos, portanto, fazer a substituição) e a incógnita x_2 é livre, comportando-se então como termo independente. Já x_1 é básica, e resolve-se a equação em relação a esta. Obtemos $x_1 = \frac{-2x_2}{2} = -x_2$. Para cada escolha de x_2 obtemos outo valor para x_1. A solução geral é da forma

$$(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, -1) = (0, 0, -1) + x_2(-1, 1, 0),$$

onde x_2 varia livremente em $\mathbb{K}$.

Num sistema possível, a existência de incógnitas livres confere-lhe a existência de várias soluções, e portanto o sistema é possível indeterminado. Ora, se o número de incógnitas é n e se k delas são básicas, então as restantes $n-k$ são livres. Recorde que o número de incógnitas iguala o número de colunas da matriz do sistema, e que a característica de uma matriz é igual ao número de pivots. Existindo, no máximo, um pivot por coluna, e como o número das colunas com pivots é igual ao número de incógnitas básicas, segue que a característica da matriz é igual ao número de incógnitas básicas. A existência de incógnitas livres é equivalente ao facto de existirem colunas sem pivot, ou seja, do número de colunas ser estritamente maior que a característica da matriz. De facto, as incógnitas livres são, em número, igual ao número de colunas sem pivot.

Teorema 3.2.2. *A equação consistente $Ax = b$, onde A é $m \times n$, tem uma única solução se e só se* $\text{car}(A) = n$.

Corolário 3.2.3. *Um sistema possível de equações lineares com menos equações que incógnitas é indeterminado.*

Recorde que o número de incógnitas livres é o número de colunas sem pivot na resolução de um sistema possível $Ax = b$. Por outro lado, a nulidade de A, $\text{nul}(A)$, é o número de incógnitas livres que surgem na resolução de $Ax = 0$. Recorde ainda que a característica de A, $\text{car}(A)$, é o número de pivots na implementação de Gauss, que por sua vez é o número de colunas com pivot, que iguala o número de incógnitas básicas na equação $Ax = 0$. Como o número de colunas de uma matriz iguala o número de incógnitas equação $Ax = 0$, e estas se dividem em básicas e em livres, correspondendo em número a, respectivamente, $\text{car}(A)$ e $\text{nul}(A)$, temos o resultado seguinte:

Teorema 3.2.4. *Para A matriz $m \times n$,*

$$n = \text{car}(A) + \text{nul}(A).$$

O resultado seguinte descreve as soluções de uma equação possível $Ax = b$ à custa do sistema homogéneo associado (ou seja, $Ax = 0$) e de uma solução particular v de $Ax = b$.

Teorema 3.2.5. *Sejam $Ax = b$ uma equação consistente e v uma solução particular de $Ax = b$. Então w é solução de $Ax = b$ se e só se existir $u \in N(A)$ tal que $w = v + u$.*

Demonstração. Suponha v, w soluções de $Ax = b$. Pretende-se mostrar que $w - v \in N(A)$, ou seja, que $A(w - v) = 0$. Ora $A(w - v) = Aw - Av = b - b = 0$. Basta, portanto, tomar $u = w - v$.

Reciprocamente, assuma v solução de $Ax = b$ e u solução de $Ax = 0$. Pretende-se mostrar que $w = v + u$ é solução de $Ax = b$. Para tal, $Aw = A(v + u) = Av + Au = b + 0 = b$. $\square$

Ou seja, conhecendo o conjunto das soluções de $Ax = 0$ e uma solução particular de $Ax = b$, conhece-se o conjunto das soluções de $Ax = b$.

Exemplo. Considere a equação matricial $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} -12 & -1 & -8 \\ 6 & -5 & 0 \\ 9 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. O sistema é consistente, já que $\text{car}(A) = \text{car}([A|b]) = 2$. De facto, a matriz escada de linhas $[U|c]$ obtida de $[A|b]$ após aplicação do AEG é $\left[\begin{array}{ccc|c} -12 & -1 & -8 & -1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Sendo a característica de A igual a 2 e tendo a matriz 3 colunas, então existe uma, e uma só, incógnita livre na resolução de $Ax = b$. Façamos, então, a divisão das incógnitas em livres e básicas. Observando as colunas da matriz escada de linhas U, se $x = (x_1, x_2, x_3)$, as incógnitas básicas são x_1 e x_2, enquanto que x_3 é incógnita livre, já que a única coluna de U que não tem pivot é a terceira.

Como vimos do resultado anterior, conhecendo uma solução particular de $Ax = b$, digamos, v, e conhecendo $N(A)$, ou seja, o conjunto das soluções de $Ax = 0$, então as soluções de $Ax = b$ são da forma $v + u$, onde $u \in N(A)$. Uma solução particular pode ser encontrada tomando a incógnita livre como zero. Ou seja, considerando $x_3 = 0$. A substituição inversa fornece o valor das incógnitas básicas x_1, x_2. Obtemos $x_2 = \frac{\frac{9}{2}}{-\frac{11}{2}} = -\frac{9}{11}$ e $x_1 = \frac{-1-(-1)x_2}{-12} = \frac{5}{33}$.

Resta-nos determinar $N(A)$, ou seja, resolver o sistema homogéneo $Ax = 0$. Para tal, podemos fazer uso da matriz escada U encontrada atrás, e resolvemos o sistema $Ux = 0$ em relação às incógnitas básicas x_1, x_2, tratando a incógnita x_3 como se de um termo independente se tratasse. As soluções serão da forma $x = x_3 u$.

Considere, agora, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Esta matriz tem característica 2, e a matriz escada de linhas obtida de A após aplicação do AEG é $U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. A nulidade de A é 2, já que existem 2 incógnitas livres na resolução de $A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = 0_{2\times 1}$. As incógnitas livres são as correspondentes às colunas de U que não têm pivot; no caso, x_2 e x_4. O sistema associado à equação $Ux = 0$ é $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. Resolvendo o sistema em relação às incógnitas básicas x_1, x_3, e por substituição inversa, obtemos $x_3 = -2x_4$, que por sua vez fornece, substituindo na primeira equação, $x_1 = \frac{1}{2}(-2x_2 + 4x_4) = -x_2 + 2x_4$. Ou seja, a solução geral de $Ax = 0$ é

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 + 2x_4, x_2, -2x_4, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_4(2, 0, -2, 1).$$

3.3 Algoritmo de Gauss-Jordan

A aplicação do Algoritmo de Eliminação de Gauss na resolução de um sistema de equações lineares reduz o problema inicial a um outro, equivalente ao dado (ou seja, com o mesmo conjunto de soluções) onde a matriz associada ao sistema é escada de linhas. Tal permite a utilização do algoritmo da substituição inversa por forma a se encontrar (caso existam) as soluções para o problema. Nesse método, o valor das incógnitas básicas era encontrado à custa das incógnitas livres e dos termos independentes, bem como do valor das incógnitas básicas encontrado no passo anterior, no sentido sul→norte do vector das incógnitas. Recorde que no AEG a estratégia tinha como objectivo, por operações elementares de linhas, obter zeros por debaixo de cada pivot, estratégia essa implementada no sentido NW→SE. Este raciocínio pode ser estendido a obterem-se zeros por cima dos pivots, no sentido SW→NE, por operações elementares de linhas. De facto, neste processo estão ausentes trocas de linhas, já que os pivots usados neste novo processo são que estiveram envolvidos na fase inicial correspondente ao AEG. O resultado final será uma matriz constituída pelos pivots, tendo estes zeros por debaixo e por cima. Ou seja, se se dividir cada linha não nula pelo pivot respectivo, obtemos uma matriz da forma, a menos de trocas de colunas, $\left[\begin{array}{c|c} I_k & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, podendo os blocos nulos não existir. A este método (à excepção da possível troca de colunas) é denominado o algoritmo de Gauss-Jordan, e a matriz obtida diz-se que está na *forma canónica (reduzida) de linhas*, ou na *forma normal (ou canónica) de Hermite*. Ou seja, a matriz $H = [h_{ij}]$, $m \times n$, obtida satisfaz:

1. H é triangular superior,
2. h_{ii} é ou 0 ou 1,
3. se $h_{ii} = 0$ então $h_{ik} = 0$, para cada k tal que $1 \le k \le n$,
4. se $h_{ii} = 1$ então $h_{ki} = 0$ para cada $k \ne i$.

Repare que só são realizadas operações elementares nas linhas da matriz. A aplicação deste método na resolução de uma sistema de equações lineares permite obter, de forma imediata, o valor das incógnitas básicas. Apesar deste método parecer mais atractivo que o de Gauss (ou suas variantes), em geral é menos eficiente do ponto de vista computacional.

Exemplo. Considere a equação $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. A matriz aumentada correspondente ao sistema de equações lineares é $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$ e a forma normal de Hermite de $[A|b]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$. A forma canónica apresentada atrás fornece-nos uma solução para o sistema, no caso $(-2, -2, 3)$.

No que se segue, mostramos como se aplica o algoritmo de Gauss-Jordan para inverter matrizes.

Seja A uma matriz $n \times n$, não-singular. Ou seja, invertível. De forma equivalente, existe uma única matriz X tal que $AX = I_n$. Denotemos a matriz X, que pretendemos obter, à custa das suas colunas: $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$. Pela forma como está definido o produto matricial, e tomando e_i como a i-ésima coluna da matriz I_n, a igualdade $AX = I_n$ pode-se escrever como $\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$. Surgem-nos, então, n equações matriciais:

$$AX_1 = e_1,\ AX_2 = e_2,\ \ldots,\ AX_n = e_n.$$

Como A é invertível, cada uma destas equações é consistente e tem apenas uma solução. A solução de $AX_j = e_j$ é a coluna j da matriz X inversa de A que pretendemos calcular. Poder-se-ia aplicar a estratégia de Gauss a cada uma destas equações, ou seja, à matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} A & e_j \end{array}\right]$. Como a matriz do sistema é a mesma, as operações elementares envolvidas seriam as mesmas para as n equações. Essas operações elementares podem ser efectuadas simultaneamente, considerando a matriz aumentada $n \times 2n$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sendo a matriz invertível, a matriz escada de linhas U obtida de A por aplicação do AEG tem elementos diagonais não nulos, que são os pivots que surgem na implementação do algoritmo. Aplicando Gauss-Jordan (ou seja, no sentido SE→NW, criando zeros por cima dos pivots que se vão considerando), obtemos uma matriz da forma $\left[\begin{array}{cccc|cccc} d_1 & 0 & \ldots & 0 & & & & \\ 0 & d_2 & & 0 & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ \vdots & & & \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & d_n & & & & \end{array}\right].$

Dividindo a linha i por d_i, para $i = 1, ..., n$, obtém-se a matriz

$$\left[\begin{array}{c|cccc} I_n & \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \cdots & \tilde{X}_n \end{array}\right].$$

Ora tal significa que $\tilde{X}_i$ é a solução de $AX = e_i$. Ou seja, o segundo bloco da matriz aumentada indicada atrás não é mais que a inversa da matriz A. Isto é, Gauss-Jordan forneceu a matriz $\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$.

3.4 Regra de Cramer

A regra de Cramer fornece-nos um processo de cálculo da solução de uma equação consistente $Ax = b$ quando A é invertível, e portanto a solução é única.

Dada a equação $Ax = b$, onde A é $n \times n$ não-singular, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e b é do tipo $n \times 1$, denote-se por $A^{(i)}$ a matriz obtida de A substituindo a coluna i de A pela coluna b.

Teorema 3.4.1 (Regra de Cramer)**.** *Nas condições do parágrafo anterior, a única solução de $Ax = b$ é dada por*

$$x_i = \frac{|A^{(i)}|}{|A|}.$$

Exemplo. Para aplicar a regra de Cramer, considere-se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Como $|A| = -3 \neq 0$, a matriz A é invertível, e portanto $Ax = b$ é uma equação

consistente com uma única solução. Definamos as matrizes $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ como no teorema anterior. Alguns cálculos mostram que $\det(A^{(1)}) = -4$, $\det(A^{(2)}) = 1$ e $\det(A^{(3)}) = 3$. Aplicamos, de seguida, a regra de Cramer para obtermos $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ e $x_3 = -1$.

Exercícios

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

   (a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 8 \\ -8x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -4x - 6y = -2 \\ 12x - 18y = -6 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 = -22 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

2. Determine $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} \beta x - y + \beta z = 0 \\ -2\beta y - 2z = 0 \\ x - y + \beta z = 0 \end{cases}$$

   seja determinado.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma factorização $PA = LU$, onde P é matriz permutação, L é invertível triangular inferior e U é escada de linhas.

   (b) Resolva a equação $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Determine todas as matrizes $X \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ tais que $AX = 0$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Encontre os valores do parâmetro $k \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = 1 \\ 2x + ky + 6z & = 6 \\ -x + 3y + (k-3)z & = 0 \end{cases}$$

seja

(a) Possível determinado;

(b) Possível indeterminado;

(c) Impossível.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Resolva, usando o algoritmo de eliminação de Gauss, a equação matricial $Ax = (-2, -1, 0)$.

7. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule a sua inversa fazendo uso do algoritmo de Gauss-Jordan.

(b) Recorrendo à regra de Cramer, resolva

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Resolva $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Para $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que U é invertível e calcule U^{-1} pelo algoritmo de Gauss-Jordan.

10. Seja $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que B é invertível e faça uso do algoritmo de Gauss-Jordan para calcular a inversa de B.

(b) Use a regra de Cramer para determinar a única solução de $Bx = (0, 1, 0)$.

11. Para $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, mostre que U é invertível e calcule U^{-1} pelo algoritmo de Gauss-Jordan.

12. Usando o algoritmo de Gauss-Jordan, calcule, se possível, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$