Cap. 3– Séries

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

dezembro de 2017

3.2 Séries de termos não negativos, de termos com sinal arbitrário & séries alternadas

Séries de termos não negativos

- Uma série de termos não negativos é uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1} u_n, \qquad u_n \geq 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

  - O termo geral da série é, naturalmente, u_n;
  - A sucessão das somas parciais é monótona crescente pois

$$s_n = s_{n-1} + u_n \geq s_{n-1}$$

  - Uma série de termos não negativos é convergente se e só se a correspondente sucessão das somas parciais é majorada.

- [Análise da convergência]

  - [Recordar] Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

  - E

$$\sum_{n\geq 1} u_n \quad \text{convergente} \Leftrightarrow \text{a sucessão das somas parciais é convergente}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{''} \quad \text{é limitada, pois é monótona}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{''} \quad \text{é majorada, pois é crescente}$$

Critérios de convergência

[1.º critério de comparação]

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ duas séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $(0 \leq)\, u_n \leq v_n$.

(a) Se $\sum_{n\geq 1} v_n$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então $\sum_{n\geq 1} v_n$ é divergente.

Nota

As séries geométricas, bem como as de Riemann, são séries muito úteis no que respeita a séries comparativas.

Exemplo

1. Mostre que série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{3^{n+1}n}$ é convergente.

[2.º critério de comparação]

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim_n \dfrac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty[$.

(a) $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) $\ell = 0$
- $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
- $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

(c) $\ell = +\infty$
- $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Exemplos

1. Mostre que série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n+1}$ é divergente.

2. Mostre que série $\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ é divergente.

[Critério da razão (ou de D'Alembert)]

Seja u uma sucessão de termos positivos e suponha-se que

$$\ell = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(a) Se $\ell < 1$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exemplo

1. Estude a natureza da série $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)]

Seja u uma sucessão de termos não negativos e suponha-se que

$$\ell = \lim_n \sqrt[n]{u_n}.$$

(a) Se $\ell < 1$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exemplo

1. Estude a natureza da série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n$.

[Critério do integral]

Seja $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja, $f(n) = u_n$. Então

$$\sum_{n \geq 1} u_n \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

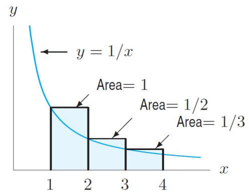
têm da mesma natureza.

Exemplo

1. A série harmónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ é divergente (c.f. Cap 3.3).

- Temos

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1)$$



- Uma vez que

$$\lim_n s_n > \lim_n \ln(n+1) \longrightarrow \infty$$

a série harmónica diverge.

- Usando diretamente o critério do integral:
  - Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Esta função
    - tem domínio $[1, +\infty[$
    - função contínua, positiva, decrescente
    - $f(n) = \frac{1}{n}$
  - Então

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

  têm a mesma natureza.
  - O integral impróprio é divergente (c.f. Cap. 2.4), logo a série harmónica diverge.

2. A série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^r}$ converge se e só se $r > 1$ (c.f. Cap 3.3).

- Seja $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Esta função
  - tem domínio $[1, +\infty[$
  - função contínua, positiva, decrescente
  - $f(n) = \frac{1}{n^r}$
- Então

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^r} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx$$

têm a mesma natureza.

- O integral impróprio diverge se $r \leq 1$ e converge se $r > 1$ (c.f. Cap. 2.4), logo a série de Riemann diverge se $r \leq 1$ e converge se $r > 1$.

Séries de termos com sinal arbitrário

- Uma série de termos com sinal arbitrário é uma série cujos termos não têm sinal fixo. Seja

$$\sum_{n\geq 1} u_n$$

- À série

$$\sum_{n\geq 1} |u_n|$$

chama-se série dos módulos associada à série dada.

- [Convergência]
  - Se a série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.
  - Se $\sum_{n\geq 1} |u_n|$
    - converge diz-se que $\sum_{n\geq 1} u_n$ é absolutamente convergente;
    - diverge mas $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge diz-se que $\sum_{n\geq 1} u_n$ é simplesmente convergente.

Nota

Para averiguar se a série de termos com sinal arbitrário, $\sum_{n\geq 1} u_n$, é absolutamente convergente, empregam-se na série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ os critérios definidos para as séries de termos não negativos.

Exemplo

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n}{n^7}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Séries alternadas

- Uma série alternada é a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n\, a_n, \qquad a_n > 0 \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

  - A sucessão geradora, u , é definida por

$$u_n = (-1)^n\, a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

  - A sucessão das somas parciais, s, é definida por

$$s_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

  - Uma série alternada pode apresentar-se também da forma

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\, a_n, \qquad a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

O seguinte critério permite analisar a convergência de uma série alternada.

- [Critério de Leibniz]

  Seja a uma sucessão decrescente tal que

$$\lim_n a_n = 0.$$

  Então a série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ é convergente.

Exemplo

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente.

Porque se cumpre o critério de Leibniz.

- Uma vez que

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

  é a série harmónica (que é divergente), concluímos que a série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$$

  não é absolutamente convergente, mas é simplesmente convergente.

- As séries alternadas são casos particulares das séries de termos com sinal arbitrário.

EPÍLOGO

O estudo de séries de funções –particularmente, as séries de potências, da forma $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$,...– não será abordado no presente ano letivo.
Todavia, esse estudo permitir-nos-ia, de alguma forma, fechar um ciclo no programa que trata de funções reais de 1 variável real.

Por exemplo, se tivermos a função definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$ prova-se que

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{n\geq 0} x^n,$$

mas **somente quando** $x \in]-1,1[$, como de resto se poderia antever na representação gráfica