Lógica EI

2º Teste

29 maio 2017

1. a) Seja $\varphi : (p_0 \wedge \neg p_1) \leftrightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_1)$. Sabemos, pelo Teorema da Adequação, que φ é um teorema em DNP se e só se φ é uma tautologia. Assim, se mostrarmos que φ não é uma tautologia, podemos concluir que φ não é um teorema em DNP.

Se v é uma valoração tal que $v(p_0) = 0$, então $v(p_0 \wedge \neg p_1) = 0$ e $v(p_0 \rightarrow \neg p_1) = 1$. Logo, $v(\varphi) = 0$. Assim, φ não é, de facto, uma tautologia.

(b) Admitamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ são tais que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Então, existe uma derivação D cuja conclusão é $\varphi \wedge \psi$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto Δ de Γ.

Assim,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \neg\varphi}{\bot}\neg E$$

é uma derivação cuja conclusão é $\bot$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$. Como $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Assim, esta derivação é uma derivação de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, pelo que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$, ou seja, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

2.

(a) $\psi[t_0/x_0] = \exists x_0 \, (x_0 < x_0) \vee \exists x_1 \neg(s(x_1 + s(0)) < x_1)$

Como a única ocorrência livre de x_0 em ψ está no alcance de $\exists x_1$ e $x_1 \in VAR(t_0)$, podemos concluir que x_0 não está livre para t_0 em ψ.

(b) $f : T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural do seguinte modo:

1. $f(0) = 0$;
2. $f(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
3. $f(s(t)) = f(t)$, para todo $t \in T_L$;
4. $f(t_1 + t_2) = 1 + f(t_1) + f(t_2)$, para quaisquer $t_1, t_2 \in T_L$;
5. $f(t_1 \times t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, para quaisquer $t_1, t_2 \in T_L$.

(c) $t = s(s(s(0)))$.

Dada uma atribuição α em NATS,

$$\begin{aligned}\overline{t}_\alpha &= \overline{s}(\overline{s}(\overline{s}(\overline{0}))) \\ &= \overline{s}(\overline{s}(\overline{s}(0))) \\ &= \overline{s}(\overline{s}(0+1)) = \overline{s}(1+1) \\ &= 2+1 = 3.\end{aligned}$$

(d) Seja $E = (\{0,a\}, \overline{(\cdot)})$ onde

- $\overline{0} = 0$;
- $\overline{s} : \{0,a\} \to \{0,a\}$ é a função dada por $\overline{s}(x) = 0$, para todo $x \in \{0,a\}$;
- $\overline{+} : \{0,a\}^2 \to \{0,a\}$ é a função dada por $\overline{+}(x,y) = 0$, para quaisquer $x, y \in \{0,a\}$;
- $\overline{\times} : \{0,a\}^2 \to \{0,a\}$ é a função dada por $\overline{\times}(x,y) = a$, para quaisquer $x, y \in \{0,a\}$;
- $\overline{=} = \{0,a\}^2$;
- $\overline{<} = \{(0,0)\}$.

(note-se que $\overline{=}$ e $\overline{<}$ são relações binárias em $\{0,a\}$)

E é uma estrutura do tipo L com domínio $\{0,a\}$.

(e) Seja $D = \{0,a\}$.

A função de interpretação da estrutura tem de satisfazer as seguintes condições:

i) $\overline{0} \in D$
ii) $\overline{s}$ é uma função de D em D
iii) $\overline{+}$ e $\overline{\times}$ são funções de D^2 em D
iv) $\overline{=}$ e $\overline{<}$ são relações binária em D, ou seja, subconjuntos de D^2

Assim, temos
- $\#D = 2$ escolhas para $\overline{0}$
- $\#(D^D) = 2^2$ escolhas para $\overline{s}$
- $\#(D^{D^2}) = 2^4$ escolhas para $\overline{+}$
- $\#(D^{D^2}) = 2^4$ escolhas para $\overline{\times}$

- $\#\left(\mathcal{P}(D^2)\right) = 2^4$ escolhas para $\overline{=}$
- $\#\left(\mathcal{P}(D^2)\right) = 2^4$ escolhas para $\overline{<}$

Concluindo, existem $2 \times 2^2 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{19}$ estruturas de tipo L com domínio D.

(f) Seja α uma atribuição em NATS.

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ se e só se $\overline{\forall x_0\,(x_0 \times 0 = 0)}\,\alpha = 1$

se e só se Para qualquer $d \in \mathbb{N}_0$, $\overline{x_0 \times 0 = 0}\,\alpha' = 1$,

onde $\alpha' = \alpha\binom{d}{x_0}$

se e só se Para qualquer $d \in \mathbb{N}_0$, $(\overline{x_0 \times 0}\,\alpha', \overline{0}\,\alpha') \in \overline{=}$,

onde $\alpha' = \alpha\binom{d}{x_0}$

se e só se Para qq. $d \in \mathbb{N}_0$, $(\overline{\times}\,(\overline{x_0}\alpha', \overline{0}\,\alpha'), \overline{0}) \in \overline{=}$,

onde $\alpha' = \alpha\binom{d}{x_0}$

se e só se Para qq $d \in \mathbb{N}_0$, $d \times 0 = 0$, o que é uma afirmação verdadeira.

Assim, $\overline{\varphi}\alpha = 1$.

Provámos, deste modo, que $\overline{\varphi}\alpha = 1$, para qualquer atribuição α em NATS. Portanto, φ é verdadeira em NATS.

(g) Seja $E = (\mathbb{N}_0; \dot{-})$ a estrutura de tipo L exactamente igual a NATS exceto nas interpretações de 0 que é 1.

Dada uma atribuição α em E, usando o raciocínio desenvolvido em (f), podemos afirmar que

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse Para qq $d \in \mathbb{N}_0$, $\left(\dot{\times}\left(\overline{x_0}\alpha', \overline{0}\alpha'\right), \overline{0}\alpha'\right) \in \overline{=}$,

onde $\alpha' = \alpha\begin{pmatrix} d \\ x_0 \end{pmatrix}$

sse Para qq. $d \in \mathbb{N}_0$ $d \times 1 = 1$, o que é uma afirmação falsa (basta considerar $d = 2 \in \mathbb{N}_0$: $d \times 1 = 2 \times 1 = 2 \neq 1$)

Assim, $\overline{\varphi}\alpha = 0$ e φ não é verdadeira em E.

Sendo assim, $\not\models \varphi$.

3. Seja $\varphi = \exists x_0\ x_0 \times x_0 < x_0$. Temos que $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Vejamos que φ é verdadeira em E_2 mas não é verdadeira em E_1.

Seja α uma atribuição em E_1. Temos

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse Existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{x_0 \times x_0 < x_0}\,\alpha' = 1$,

onde $\alpha' = \alpha\begin{pmatrix} d \\ x_0 \end{pmatrix}$

sse Existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(\overline{x_0 \times x_0}\alpha', \overline{x_0}\alpha'\right) \in \overline{<}$,

onde $\alpha' = \alpha\begin{pmatrix} d \\ x_0 \end{pmatrix}$

sse Existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $d \times d < d$, o

que é falso

(de facto $d \times d < d \iff d^2 - d < 0$
$\iff d > 0$ e $d < 1$)

Logo $\overline{\varphi}\alpha = 0$ e φ não é verdadeira em $\mathcal{E}_1$, pelo

que $\varphi \notin \Gamma_1$.

Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}_2$.

Seguindo o raciocínio acima, temos que

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse Existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d \times d < d$, o

que é verdade (basta considerar $d = \frac{1}{2}$).

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 1$. Assim, $\overline{\varphi}\alpha = 1$ para toda a

atribuição α em $\mathcal{E}_2$ e φ é verdadeira em $\mathcal{E}_2$. Portanto,

$\varphi \in \Gamma_2$.

Como $\varphi \in \Gamma_2$ e $\varphi \notin \Gamma_1$, segue-se que $\Gamma_2 \nsubseteq \Gamma_1$.