



Exercício 8.1 Calcule os seguintes integrais:

- a)  $\iiint_{\mathcal{D}} (x + y + z) \, d(x, y, z)$  com  $\mathcal{D} = [0, 2]^3$ ;
- b)  $\iiint_{\mathcal{D}} z e^{x+y} \, dV$ , com  $\mathcal{D} = [0, 1]^3$ ;
- c)  $\iiint_{\mathcal{D}} xy \, d(x, y, z)$ , com  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ;
- d)  $\iiint_{\mathcal{D}} x \, dV$ , com  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$ .

Exercício 8.2 Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação  $z = a - x^2 - y^2$ , com  $a > 0$ , e pelo plano  $XOY$ .

Exercício 8.3 Apresente um integral triplo que expresse o volume do elipsoide definido pela equação  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ .

Exercício 8.4 Faça um esboço da região de integração e reescreva o integral com ordem de integração  $dx \, dy \, dz$ :

- a)  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$ ;
- b)  $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$ .

Exercício 8.5 Calcule, mudando eventualmente a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \sin y^2 \, dz \, dy \, dx.$$

Exercício 8.6 Considerando  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0, \sqrt{x+y} + 1 \leq z \leq 2\}$ , calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}} \, d(x, y, z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ (u, v, w) &\longmapsto (u^2, v^2, w) \end{aligned}$$

Exercício 8.7 Considere o conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x + 2y + z \leq 2, 0 \leq x + y - z \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq z \leq 1\}.$$

a) Calcule o volume de  $\mathcal{D}$ .

b) Calcule  $\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\sin(x + y + z)}{x + 2y + z} d(x, y, z)$ .

Exercício 8.8 Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Exercício 8.9 Seja  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3\}$ . Use coordenadas cilíndricas para determinar

$$\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x^2+y^2} d(x, y, z).$$

Exercício 8.10 Seja  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$ . Calcule, usando coordenadas cilíndricas,

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x + y) d(x, y, z).$$

Exercício 8.11 Seja  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ . Calcule o volume de  $V$ , usando coordenadas cilíndricas.

Exercício 8.12 Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação  $z^2 = x^2 + y^2$  e à esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

Exercício 8.13 Considere a região  $\mathcal{D}$  definida, em coordenadas esféricas, pelas condições  $1 \leq \rho \leq 2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ .

a) Represente graficamente a região  $\mathcal{D}$ .

b) Calcule  $\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} d(x, y, z)$ .

Exercício 8.14 Calcule o volume de  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 6, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 - y^2\}$ .

Exercício 8.15 Calcule o volume das regiões limitadas

a) pelas superfícies esféricas  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ;

b) pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 12 - x^2 - y^2$ ;

c) pelo plano  $x = 1$  e pelo parabolóide  $y^2 + z^2 = 4x$ ;

d) pelo plano  $x = 9$  e pelo parabolóide elíptico  $4y^2 + 9z^2 = 4x$ ;

e) pelo plano  $z = 0$ , pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e pelas superfícies cilíndricas  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

Exercício 8.16 Calcule o volume da esfera em  $\mathbb{R}^4$  de raio  $r > 0$ .