

TESTES DE HIPÓTESES



OBJETIVO



Verificar se os dados amostrais (ou estimativas obtidas a partir deles) são ou não compatíveis com determinadas populações (ou valores previamente fixados dos parâmetros populacionais).



PROCEDIMENTO

- Definição das hipóteses
 - H_0 – hipótese nula
 - H_1 – hipótese alternativa
- Identificação da estatística de teste (ET)
- Definição da regra de decisão
- Cálculo da estatística de teste e tomada de decisão



Critérios para um teste de hipóteses

Decisão			
Hipótese		Não rejeitar H_0	Rejeitar H_0
	H_0 é verdadeira	Decisão correta	Erro Tipo I
	H_0 é falsa	Erro Tipo II	Decisão correta



ERROS

- $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rej. } H_0 \mid H_0)$
- $\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rej } H_0 \mid H_1)$

Função potência de um teste

$$k(\theta) = \begin{cases} \alpha & H_0 \\ 1 - \beta & H_1 \end{cases}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

5



DECISÃO

- Se o valor calculado para a ET > ET(α) então rejeita-se H_0 (valor $p < \alpha$)

“**valor p** é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema quanto aquela observada em uma amostra, assumindo verdadeira a hipótese nula”

- Se o valor calculado para a ET < ET(α) então não se rejeita H_0 ; (valor $p > \alpha$) - resultado inconclusivo.

Nota: A magnitude do valor p não indica o tamanho ou a importância de um efeito observado

Profª Ana Cristina Braga, DPS

6

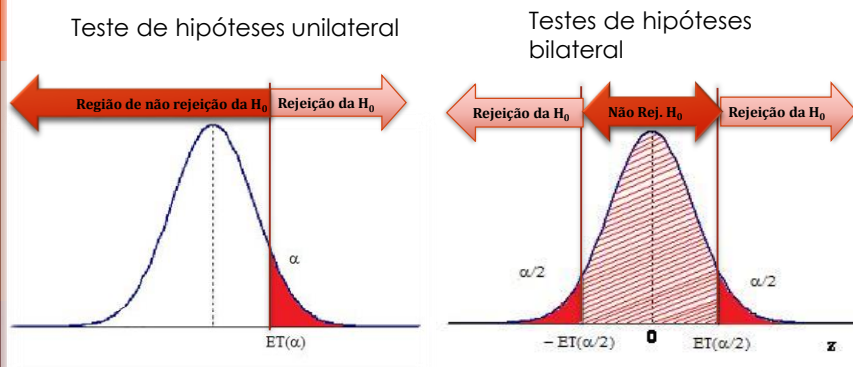


TESTE DE SIGNIFICÂNCIA

- Se a diferença entre o que esperamos e o que obtemos é tão grande que não pode ser atribuída ao acaso, nós rejeitamos a hipótese na qual baseamos as nossas expectativas.
- Se a diferença entre o que esperamos e o que obtemos é tão pequena que pode ser realmente atribuída ao acaso, nós não rejeitamos a hipótese na qual baseamos as nossas expectativas, dizemos que o resultado do teste não é (estatisticamente) significativo.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

7



Profª Ana Cristina Braga, DPS

8

MÉDIA



Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$(H_1 : \mu < \mu_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

9

EXEMPLO 1



- Suponha que a Inspeção das Atividades Económicas quer verificar se os sacos de cimento de uma determinada fábrica têm um peso médio de 15 Kg. Para tal recolheu uma amostra aleatória de 50 sacos, tendo encontrado uma média de 14.81 Kg com um desvio padrão de 0.62 Kg. Permitem os dados concluir que a fábrica está a fornecer sacos com um peso inferior ao especificado? Assuma $\alpha=0.05$.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

10

SOLUÇÃO 1

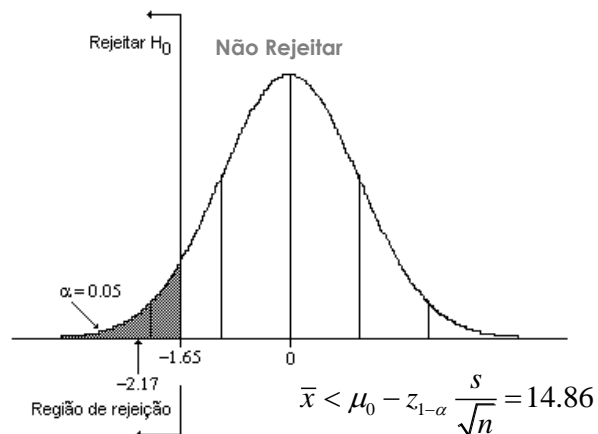


- 1. Formulação das hipóteses $H_0 : \mu = 15$
 $H_1 : \mu < 15$
- 2. Região crítica $z < -z_{0.95} = -1.65$
- 3. Teste estatístico $z \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.81 - 15}{0.62/\sqrt{50}} = -2.17$
- 4. Decisão
Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, os sacos têm, em média, um peso inferior a 15 Kg.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

11

SOLUÇÃO 1



Profª Ana Cristina Braga, DPS

12

MÉDIA



Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$(H_1 : \mu < \mu_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Região de Rejeição

$$t > t_\alpha$$

$$(t < -t_\alpha)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

13

EXEMPLO 2



- Uma máquina produz seringas com 2.5 cm de comprimento. No entanto, se as seringas forem demasiado curtas ou longas, serão rejeitadas. Neste caso a máquina necessita de ser ajustada. Para tal, uma amostra de seringas é recolhida, a intervalos regulares, para verificar se as mesmas estão a ser produzidas com o comprimento médio de 2.5 cm.
- Suponha que foi recolhida uma amostra de 16 seringas, com uma média $\bar{x} = 2.5138$ cm e um desvio padrão $s = 0.03594$ cm.
- Há evidência suficiente para assumir que a máquina não está a produzir segundo as especificação, isto é, que a máquina está fora de controlo? Use $\alpha = 0.01$.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

14



SOLUÇÃO 2

- 1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \mu = 2.5$$

- 2. Região crítica

$$H_1 : \mu \neq 2.5$$

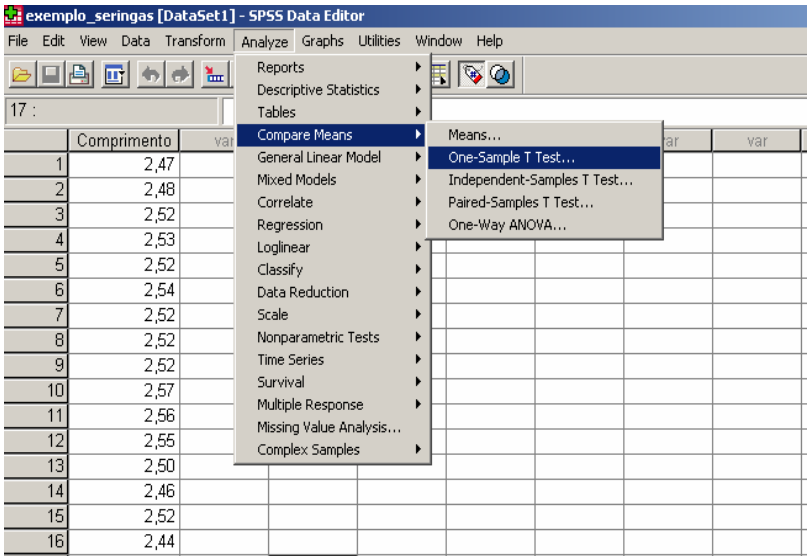
- 3. Teste estatístico

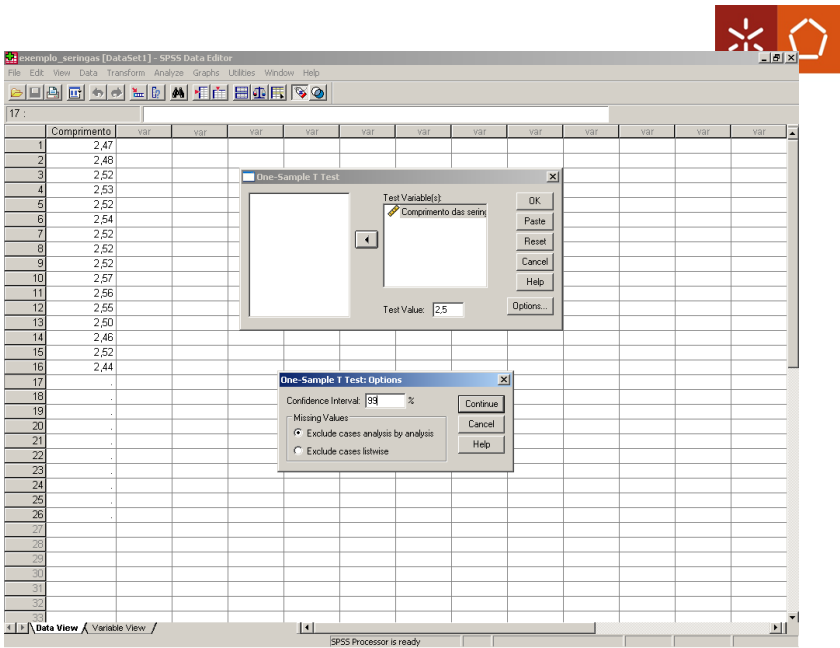
$$|t| \geq t_{0.005} = 2.947$$

- 4. Decisão

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.5138 - 2.5}{0.03594/\sqrt{16}} = 1.536$$

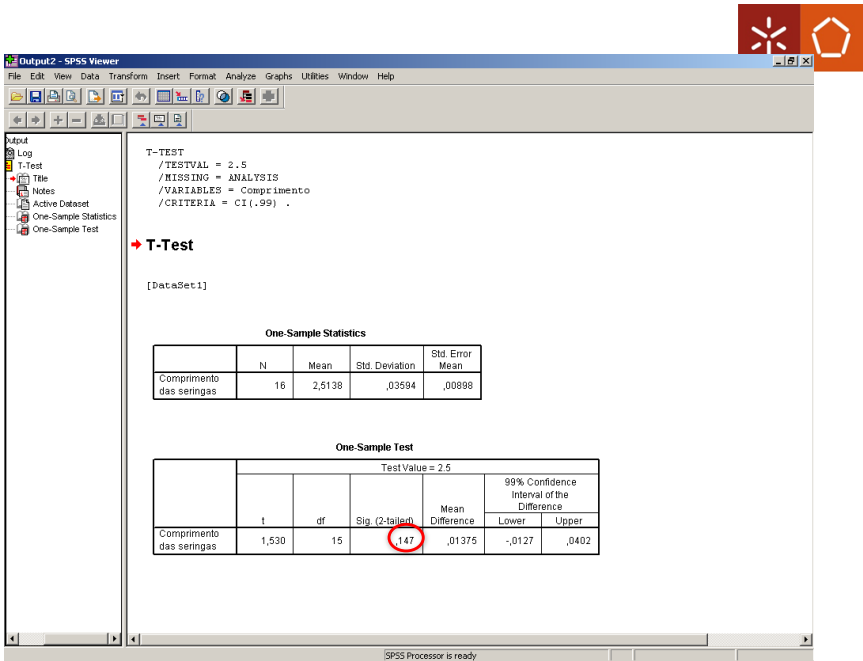
Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, as seringas podem apresentar um comprimento médio de 2.5 cm.





Profª Ana Cristina Braga, DPS

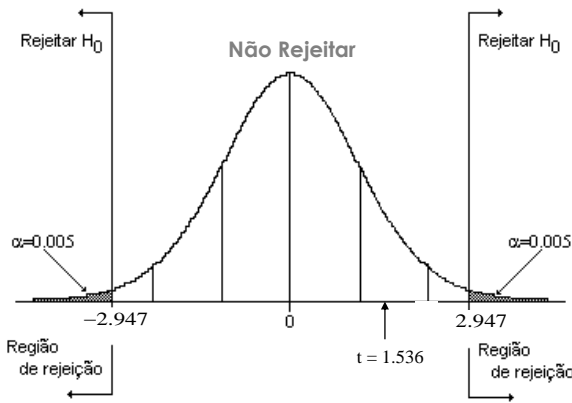
17



Profª Ana Cristina Braga, DPS

18

SOLUÇÃO 2



Profª Ana Cristina Braga, DPS

19

DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAS INDEPENDENTES



Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > d_0$$

$$(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < d_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$$

Estatística

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Região de Rejeição
 $t > t_{\alpha}$
 $(t < -t_{\alpha})$

Região de Rejeição
 $|t| > t_{\alpha/2}$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

20



EXEMPLO 4

O desgaste da cabeça do fêmur conduz à implantação de uma cabeça de substituição numa liga metálica leve e resistente. Esta implantação é feita com um cimento especial, que alguns médicos suspeitam que possa diminuir a resistência do osso. No entanto, as opiniões dos ortopedistas dividem-se quanto à necessidade de introdução de um tampão que evite que o cimento se espalhe pelo espaço disponível. Para comparar o efeito do uso do tampão na resistência à flexão, foram efetuados vários implantes em animais de laboratório, tendo sido obtidos os seguintes resultados de resistência (Nm):

C/ Tampão	7.0	6.2	7.1	8.1	5.1	5.6
S/ Tampão	8.9	7.7	5.3	8.6	7.1	4.6

O que pode concluir acerca do efeito do tampão na resistência à flexão? Use $\alpha=0.05$.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

21



F2.6 [DataSet2] - SPSS Data Editor

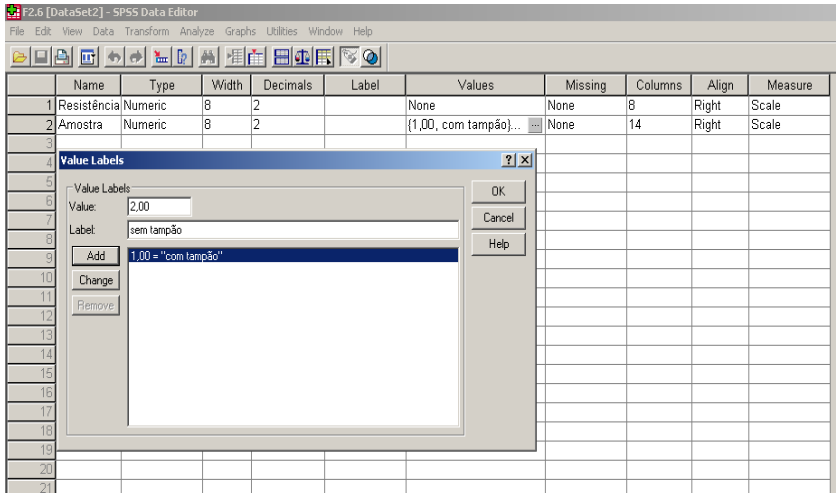
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

30 :

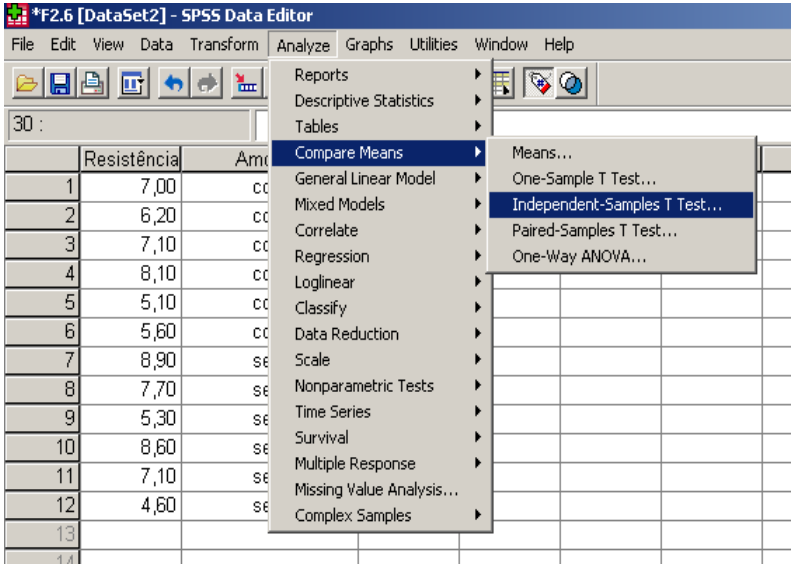
	Resistência	Amostra	var	var	var
1	7,00	com tampão			
2	6,20	com tampão			
3	7,10	com tampão			
4	8,10	com tampão			
5	5,10	com tampão			
6	5,60	com tampão			
7	8,90	sem tampão			
8	7,70	sem tampão			
9	5,30	sem tampão			
10	8,60	sem tampão			
11	7,10	sem tampão			
12	4,60	sem tampão			
13					

Profª Ana Cristina Braga, DPS

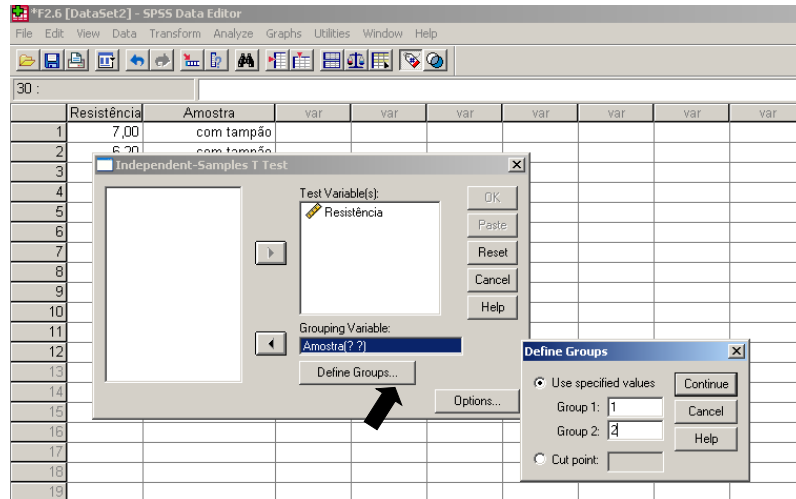
22



Profª Ana Cristina Braga, DPS



Profª Ana Cristina Braga, DPS



Profª Ana Cristina Braga, DPS

25

SOLUÇÃO 4

$$\bar{x}_1 = 6.517 \quad s_1 = 1.098$$

$$\bar{x}_2 = 7.033 \quad s_2 = 1.750$$

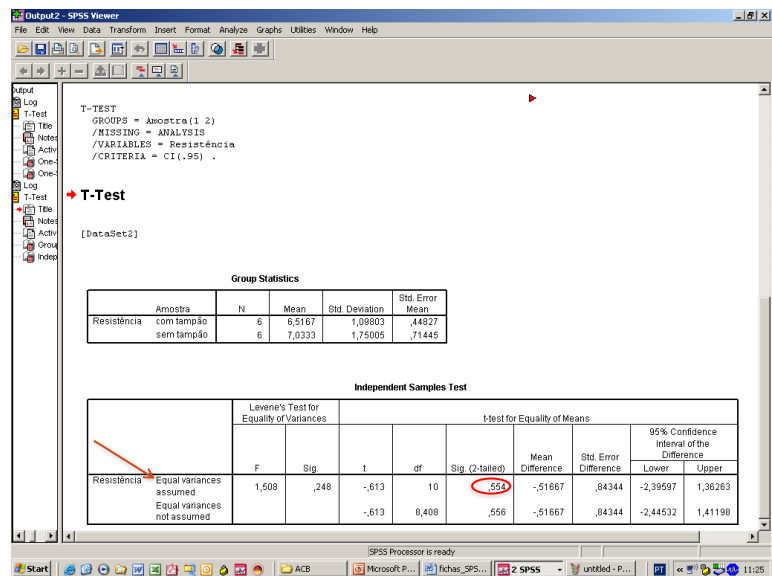
- 1. Formulação das hipóteses $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$
 $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$

- 2. Região crítica

$$|t| \geq t_{0.025} = 2.228$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

26



Profª Ana Cristina Braga, DPS

27

DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAS EMPARELHADAS

Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$
$$(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

Estatística

$$t = \frac{\bar{d} - D_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

Região de Rejeição

$$t > t_\alpha$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

$$(P \leq t_\alpha)$$

Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

28



PROPORÇÃO

Teste Unilateral

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi > \pi_0$$

$$(H_1 : \pi < \pi_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

Estatística

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

29



DIFERENÇA DE PROPORÇÕES

Teste Unilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$$

$$(H_1 : \pi_1 - \pi_2 < d_0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq d_0$$

Estatística

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - d_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \quad \text{se } d_0 \neq 0$$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

30



DIFERENÇA DE PROPORÇÕES

Teste Unilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 > 0$$

$$(H_1 : \pi_1 - \pi_2 < 0)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

Estatística

$$z = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\text{sendo } p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

31



VARIÂNCIA

Teste Unilateral

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$(H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2)$$

Teste Bilateral

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Estatística

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Região de Rejeição

$$\chi^2 > \chi_\alpha^2 \quad (\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2)$$

Região de Rejeição

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad \text{ou} \quad \chi^2 > \chi_\alpha^2$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

32



EXEMPLO 5

As garrafas de refrigerantes contêm um volume aproximado de 33 cl. O produtor perderá dinheiro se as garrafas contiverem muito mais do que o volume especificado, e correrá o risco de ser multado, se o volume for bastante inferior. Assim, é necessário controlar a variação do volume de enchimento das garrafas. Se a variância for superior a 0.25 o processo está fora de controlo, e a máquina de enchimento deve ser ajustada. Para tal, um controlador de qualidade recolhe uma amostra de 15 garrafas, com um enchimento médio de 33.15 cl e um desvio padrão de 0.71 cl. Face a estes resultados pode-se concluir que o processo está controlado?

Profª Ana Cristina Braga, DPS

33



SOLUÇÃO 5

1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 = 0.25$$

$$H_1 : \sigma^2 > 0.25$$
2. Região crítica

$$\chi^2 \geq \chi_{0.05}^2 = 23.685$$
3. Teste estatístico

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{14(0.71)^2}{0.25} = 28.230$$
4. Decisão
 Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, o processo de enchimento está fora de controlo.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

34



RAZÃO DE VARIÂNCIAS

Teste Unilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$$

Estatística

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$\left(F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \right)$$

Região de Rejeição

$$F > F_\alpha \quad \left[H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 < \sigma_2^2) \right]$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

Teste Bilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$$

Estatística

$$F = \begin{cases} \frac{s_1^2}{s_2^2} & s_1^2 > s_2^2 \\ \frac{s_2^2}{s_1^2} & s_1^2 < s_2^2 \end{cases}$$

Região de Rejeição

$$F > F_{\alpha/2}$$

35



EXEMPLO 9

Uma das características importantes num vinho de qualidade é a constância do gosto no sabor e no aroma. A variabilidade no sabor depende do processo de vinificação, que pode incluir o controlo de variáveis como a temperatura, fermentação, qualidade das leveduras, etc. Um empresa quer ensaiar um novo processo de vinificação com o objetivo de reduzir a variabilidade no gosto, medido por um índice. Duas amostras aleatórias, respectivamente de 25 e 15 copos, retiradas da produção dos dois processos de vinificação foram avaliadas por um painel de provadores, produzindo os seguintes resultados: $s_1 = 1.22$ e $s_2 = 0.72$.

Permitem os dados concluir que a variabilidade no segundo processo de vinificação é menor?

Profª Ana Cristina Braga, DPS

36

SOLUÇÃO 9



1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

2. Região crítica

$$F \geq F_{0.01, 24, 14} \cong 3.41$$

3. Teste estatístico

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(1.22)^2}{(0.72)^2} = 2.87$$

4. Decisão

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, não existe evidência suficiente para provar que a variabilidade no segundo processo de vinificação seja menor.