Equações de Campo Médio

March 11, 2014

O Modelo

Queremos descrever a interação de dois grupos de agentes que trocam informação sobre duas possíveis questões. Sejam $\omega^{\mu} = \{\omega_r^{\mu}\}$ com $\mu \in \{1, 2\}$ e $r \in \{1, \ldots, N_{\mu}\}$ as configurações dos grupos 1 e 2, com $\omega_r^{\mu} \in \mathbb{R}^D$ o vetor cognitivo do agente r do grupo μ para algum D, e N^{μ} o número de agentes no grupo μ. Vamos denotar a configuração global por $\underline{\omega} = \omega^1 \cup \omega^2$. Para representar os dois assuntos discutidos, considere os vetores $x^1,\ x^2 \in \mathbb{R}^D$ e considere que todos os vetores estão normalizados, ou seja, $|\omega_r^{\mu}| = |x^{\rho}| = 1$. A informação que um agente passa (recebe) sobre um dos assuntos é definida pelo produto escalar entre seu vetor cognitivo e o dado assunto. Sejam, portanto, os campos $h_r^{\mu,\,\rho} = \omega_r^{\mu} \cdot x^{\rho}$.

A troca de informação é tal que os agentes tentam minimizar os "erros" que cometem em relação com seus vizinhos. A dinâmica resultante pode ser vista como uma descida pelo gradiente de uma função "Energia" do sistema. A evolução de um agente quando recebe um exemplo é dada pela equação

$$\omega_r^{\mu}(t+1) = \omega_r^{\mu}(t) + \eta F(h_r^{\mu,\,\rho}, \sigma, x^{\rho}) \sigma x^{\rho} \tag{1}$$

onde F é a função de modulação, σ é a opinião do locutor sobre o assunto x^{ρ} no instante t. Podemos escrever a função de modulação como o gradiente de um potencial $F = -\nabla V$, com

$$V_{rs}^{\mu\nu,\,\rho} = -\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho}| \tag{2}$$

Esse potentcial assegura que a função de modulação da um peso $\delta \in [0, 1]$ para informação corroborativa e peso 1 para novidade, ou seja, os agentes aprendem mais quando discordam do que quando concordam e, dado que eles aprendem no sentido de corrigir os erros, espera-se que num cenário em que existe apenas um assunto e um grupo, o consenso seja atingido como função do parâmetro δ. Esse potencial é interpretado como o custo da discordância entre os agentes r e s dos grupos μ e ν sobre o assunto ρ. Podemos simplificar um pouco definido o custo da discordância sobre todos os assuntos entre dois agentes fazendo

$$V_{rs}^{\mu\nu} = \sum_{\rho=1,2} V_{rs}^{\mu\nu,\,\rho} \tag{3}$$

Com isso, podemos escrever o custo total da discordância na sociedade como sendo a soma dos custos entre cada agente. Mas queremos estudar a diferença entre os grupos então vamos criar parâmetros que distinguem as interações intra-grupo e inter-grupos. Sejam $J > 0$ e $K > 0$ as escalas de energia da interação entre indivíduos de grupos distintos e entre indivíduos de mesmo grupo, respectivamente. A energia total do sistema é dada pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{\mu\neq\nu} \sum_{rs} V_{rs}^{\mu\nu} + \frac{K}{2N} \sum_{\mu=\nu} \sum_{r\neq s} V_{rs}^{\mu\nu} \tag{4}$$

onde $N = N^1 + N^2$ é o número total de agentes. Note que esse hamiltoniano penaliza a discordância entre agentes de um mesmo grupo a concordância entre agentes de grupos diferentes. Desse modo, esperamos que no equilíbrio, haja dois grupos bem formados do ponto de vista das opiniões.

É razoável supor que o valor esperado do hamiltoniano seja uma informação relavante, de modo que, por máxima entropia, a probabilidade de observar uma certa configuração $\underline{\omega}$ é dada pela distribuição de Boltzmann

$$P(\underline{\omega}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{H}}$$

com $Z = \sum_{\underline{\omega}} e^{-\beta\mathcal{H}}$ a função de partição.

Campo Médio

Para prosseguir, vamos tentar uma aproximação de campo médio para o sistema. Isso é feito a partir da aproximação da distribuição de probabilidades P dada acima por uma família de distribuições que se fatora entre agentes independentes. Isto é, queremos aproximar $P \approx P_{MF} = \prod_{\mu,\,r} P_r^\mu$. A melhor aproximação possível para essa família de distribuições é aquela que minimiza a divergência de Kullback-Liebler entre P e P_{MF}, definida por

$$S[P_{MF}||P] = -\int \mathrm{d}\mu\,(\underline{\omega})\, P_{MF} \ln\left(\frac{P_{MF}}{P}\right) - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left\langle P_r^\mu - 1 \right\rangle_{\omega_r^\mu} - \beta \left\langle P_{MF}\mathcal{H} - E \right\rangle_{\underline{\omega}} \tag{5}$$

onde as constantes λ e β repesentam os vínculos de normalização e valor esperado do hamiltoniano. Vamos tomar variações de $S[P_{MF}||P]$ em relação a P_r^μ. Vamos ver como a S se fatora em termos dessas distribuições

$$
\begin{aligned}
S[P_{MF}||P] &= -\int \mathrm{d}\mu\left(\underline{\omega}\right) P_{MF} \ln\left(\frac{P_{MF}}{P}\right) - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left\langle P_r^\mu - 1\right\rangle_{\omega_r^\mu} - \beta \left\langle P_{MF}\mathcal{H} - E\right\rangle_{\underline{\omega}} \\
&= -\int \prod_{\mu,\, r} \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu \ln\left(\frac{\prod_{\mu,\, r} P_r^\mu}{P}\right) \\
&\quad - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left[\int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu - 1\right] \\
&\quad - \beta\left[\int \prod_{rs} \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_r^\mu P_s^\nu \mathcal{H} - E\right] \\
&= -\sum_{\mu,\, r} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu \ln\left(\frac{P_r^\mu}{P}\right) \\
&\quad - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left[\int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu - 1\right] \\
&\quad - \beta\left[\sum_{\mu\nu}\sum_{rs} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_r^\mu P_s^\nu A_{rs}^{\mu\nu} V_{rs}^{\mu\nu} - E\right]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

onde $A_{rs}^{\mu\nu} = \frac{K}{N}\delta_{\mu\nu}(1-\delta_{rs}) - \frac{J}{N}(1-\delta_{\mu\nu})$ discrimina agentes num mesmo grupo de agentes em grupos diferentes. Agora, tomando variações $\frac{\delta S}{\delta P_r^\mu} = 0$ termos

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta P_r^\mu} \\
&= 1 - \ln P_r^\mu - \lambda_r^\mu - \beta \sum_{s,\nu} A_{rs}^{\mu\nu} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_s^\nu V_{rs}^{\mu\nu} \\
\Longrightarrow P_r^\mu &\propto exp\left(-\beta \sum_{s,\nu} A_{rs}^{\mu\nu} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_s^\nu V_{rs}^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Com isso, basta integrar $V_{rs}^{\mu\nu}$ para determinar as distribuição de campo médio do sistema. Vejamos como podemos lidar com isso. Chamando $D\omega_s^\nu = \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right)$, temos

$$
\begin{aligned}
\int D\omega_s^{\nu} V_{rs}^{\mu\nu} = \\
&= \int D\omega_s^{\nu} \sum_{\rho} \left[-\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho}| \right] \\
&= \sum_{\rho} \int D\omega_s^{\nu} \left[-\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho}| \right] \\
&= \sum_{\rho} \left[-\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\,\rho} m_{\nu}^{\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\,\rho}| r_{\nu}^{\rho} \right]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

onde definimos os parâmetros de ordem

$$
m_{\nu}^{\rho} = \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^{\nu}\right) P_r^{\nu} \omega_s^{\nu} \cdot x^{\rho} \tag{9}
$$

$$
r_{\nu}^{\rho} = \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^{\nu}\right) P_r^{\nu} |\omega_s^{\nu} \cdot x^{\rho}| \tag{10}
$$

Note que, visto que estamos trabalhando com dois assuntos e dois grupos, temos 8 parâmetros de ordem no total. Note também que a dependência dos parâmetros de ordem sobre o subíndice, que representa o índice dos agentes, foi removido sobre a hipótese de homogeneidade da distribuição de campo médio. Ou seja, os agentes não são necessariamente idênticos, mas são identicamente distribuídos.

Agora a integral de $V_{rs}^{\mu\nu}$ pode ser reescrita em termos dos parâmetros de ordem:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu\nu} \sum_{rs} A_{rs}^{\mu\nu} \int D\omega_s^{\nu} V_{rs}^{\mu\nu} = \\
&= \sum_{\mu\nu} \sum_{rs} A_{rs}^{\mu\nu} \sum_{\rho} \left[-a h_r^{\mu,\,\rho} m_{\nu}^{\rho} + b |h_r^{\mu,\,\rho}| r_{\nu}^{\rho} \right] \\
&= \sum_{\rho} \left[-a \left(\frac{K(N^{\mu}-1)}{2N} \right) h_r^{\mu,\,\rho} m_{\mu}^{\rho} + b \left(\frac{K(N^{\mu}-1)}{2N} \right) |h_r^{\mu,\,\rho}| r_{\mu}^{\rho} \right. \\
&\left. - a \left(-\frac{JN^{\nu}}{2N} \right) h_r^{\mu,\,\rho} m_{\nu}^{\rho} + b \left(-\frac{JN^{\nu}}{2N} \right) |h_r^{\mu,\,\rho}| r_{\nu}^{\rho} \right] \\
&= -a \left(\frac{K(N^{\mu}-1)}{2N} m_{\mu}^{\rho} - \frac{JN^{\nu}}{2N} m_{\nu}^{\rho} \right) h_r^{\mu,\,\rho} \\
&\quad + b \left(\frac{K(N^{\mu}-1)}{2N} r_{\mu}^{\rho} - \frac{JN^{\nu}}{2N} r_{\nu}^{\rho} \right) |h_r^{\mu,\,\rho}|
\end{aligned}
\tag{11}
$$

com $a = \frac{1+\delta}{2}$ e $b = \frac{1-\delta}{2}$. No limite termodinâmico, $N \to \infty$ com $\frac{N_{\mu}}{N} = cte = n_{\mu}$, podemos reescrever a equação acima

$$\sum_{\mu\nu}\sum_{rs} A^{\mu\nu}_{rs} \int D\omega^{\nu}_{s} V^{\mu\nu}_{rs} = \\ - a \left(\frac{Kn_\mu}{2} m^{\rho}_{\mu} - \frac{Jn_\nu}{2} m^{\rho}_{\nu} \right) h^{\mu,\,\rho}_{r} \\ + b \left(\frac{Kn_\mu}{2} r^{\rho}_{\mu} - \frac{Jn_\nu}{2} r^{\rho}_{\nu} \right) |h^{\mu,\,\rho}_{r}| \tag{12}$$

e, chamando

$$M^{\rho}_{\mu} = \frac{1}{2} \left(Kn_\mu m^{\rho}_{\mu} - Jn_\nu m^{\rho}_{\nu} \right) \tag{13}$$

e

$$R^{\rho}_{\mu} = \frac{1}{2} \left(Kn_\mu r^{\rho}_{\mu} - Jn_\nu r^{\rho}_{\nu} \right) \tag{14}$$

(subentendido que $\nu \neq \mu$), podemos escrever o resultado final da seguinte forma

$$P^{\mu}_{r} = \frac{1}{Z^{\mu}_{r}} \exp \left[\beta \sum_{\rho} \left(a M^{\rho}_{\mu} h^{\mu,\,\rho}_{r} - b R^{\rho}_{\mu} |h^{\mu,\,\rho}_{r}| \right) \right] \tag{15}$$

Com esse resultado, podemos entender as equações 9 e 10 como equações de auto-consistência da aproximação de campo médio e suas soluções indicam os possíveis valores dos parâmetros de ordem.

Equações de Auto-Consistência

Os resultados da seção anterior são válidos para qualquer dimensão D dos vetores cognitivos dos agentes. Para avançar um pouco mais, vamos nos restringir ao caso $D = 5$, de acordo com a Teoria dos Fundamentos Morais.

Note que os parâmetros M^{ρ}_{μ} e R^{ρ}_{μ} independem do índice do agente (até então r ou s), de tal modo que a distribuição depende apenas do grupo de agentes, mas não de cada agente num grupo. Então, vamos omitir r e baixar o índice de grupo, μ. Com isso, a equação 15 escreve-se

$$P_{\mu} = \frac{1}{Z_{\mu}} \exp \left[\beta \sum_{\rho} \left(a M^{\rho}_{\mu} h^{\rho}_{\mu} - b R^{\rho}_{\mu} |h^{\rho}_{\mu}| \right) \right] \tag{16}$$

Para escrever as integrais 9 e 10 vamos usar coordenadas esféricas em $D = 5$. Se q_i, $i \in 1, \ldots, 5$, são coordenadas cartesianas, a parametrização esférica é dada por

$$
\begin{aligned}
q_1 &= r\cos\theta_1 \\
q_2 &= r\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 \\
q_3 &= r\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2\cos\theta_3 \\
q_4 &= r\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2\text{sen}\theta_3\cos\theta_4 \\
q_5 &= r\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2\text{sen}\theta_3\text{sen}\theta_4
\end{aligned}
$$

e o jacobiano da transformação é

$$d^5v = r^4\text{sen}^3\theta_1\text{sen}^2\theta_2\text{sen}\theta_3 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$$

Como todos os vetores cognitivos dos agentes e os vetores dos assuntos estão normalizados, as integrais são feitas sobre a superfície da esfera unitária, ou seja $r = 1$. Considere que $x^1 \cdot x^2 = \cos\gamma$, escolha $q_1 = x^1$ e $x^2 = \hat{q}_1\cos\gamma + \hat{q}_2\text{sen}\gamma$, e chame $\theta_1 = \theta$ e $\theta_2 = \phi$. Com isso, as integrais sobre θ_3 e θ_4 são apenas constantes e podem ser absorvidas na função de partição, e as únicas integrais a serem feitas são sobre θ e ϕ, ambas no intervalo $[0, \pi]$.

Podemos reescrever a opinião de um agente em relação aos assuntos 1 ou 2 de acordo com ângulos θ, ϕ e γ:

$$g(\theta,\phi,\gamma) = h_\mu^\rho = \begin{cases} \cos\theta & , \rho = 1 \\ \text{sen}\gamma\text{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\cos\gamma & , \rho = 2 \end{cases}$$

e a medida sobre o vetor cognitivo de um agente escreve-se

$$\mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) = \text{sen}^3\theta\text{sen}^2\phi d\theta d\phi$$

Note que $g(\theta,\phi,0) = h_\mu^1$ e $g(\theta,\phi,\gamma \neq 0) = h_\mu^2$. Portanto, chamando

$$g^\rho = \begin{cases} g(\theta,\phi,0) & ,\rho = 1 \\ g(\theta,\phi,\gamma) & ,\rho = 2 \end{cases}$$

podemos escrever as equações 9 e 10 da seguinte forma

$$m_\mu^\rho = \frac{1}{Z_\mu}\int_0^\pi\int_0^\pi d\theta\, d\phi\, \text{sen}^3\theta\, \text{sen}^2\phi\, g^\rho \exp\left[\beta\sum_\rho\left(aM_\mu^\rho g^\rho - bR_\mu^\rho|g^\rho|\right)\right] \tag{17}$$

$$r_\mu^\rho = \frac{1}{Z_\mu}\int_0^\pi\int_0^\pi d\theta\, d\phi\, \text{sen}^3\theta\, \text{sen}^2\phi\, |g^\rho| \exp\left[\beta\sum_\rho\left(aM_\mu^\rho g^\rho - bR_\mu^\rho|g^\rho|\right)\right] \tag{18}$$

com a função de partição dada por

$$Z_\mu = \int_0^\pi \int_0^\pi d\theta \, d\phi \, \text{sen}^3\theta \, \text{sen}^2\phi \, \exp\left[\beta \sum_\rho \left(aM_\mu^\rho g^\rho - bR_\mu^\rho |g^\rho|\right)\right] \tag{19}$$