Equações de Campo Médio

March 10, 2014

O Modelo

Queremos descrever a interação de dois grupos de agentes que trocam informação sobre duas possíveis questões. Sejam $\omega^\mu = \{\omega_r^\mu\}$ com $\mu \in \{1,2\}$ e $r \in \{1,\ldots,N_\mu\}$ as configurações dos grupos 1 e 2, com $\omega_r^\mu \in \mathbb{R}^D$ o vetor cognitivo do agente r do grupo μ para algum D, e N^μ o número de agentes no grupo μ. Vamos denotar a configuração global por $\underline{\omega} = \omega^1 \cup \omega^2$. Para representar os dois assuntos discutidos, considere os vetores $x^1,\ x^2 \in \mathbb{R}^D$ e considere que todos os vetores estão normalizados, ou seja, $|\omega_r^\mu| = |x^\rho| = 1$. A informação que um agente passa (recebe) sobre um dos assuntos é definida pelo produto escalar entre seu vetor cognitivo e o dado assunto. Sejam, portanto, os campos $h_r^{\mu,\,\rho} = \omega_r^\mu \cdot x^\rho$.

A troca de informação é tal que os agentes tentam minimizar os "erros" que cometem em relação com seus vizinhos. A dinâmica resultante pode ser vista como uma descida pelo gradiente de uma função "Energia" do sistema. A evolução de um agente quando recebe um exemplo é dada pela equação

$$\omega_r^\mu(t+1) = \omega_r^\mu(t) + \eta F(h_r^{\mu,\,\rho}, \sigma, x^\rho)\sigma x^\rho \tag{1}$$

onde F é a função de modulação, σ é a opinião do interlocutor sobre o assunto x^ρ no instante t. Podemos escrever a função de modulação como o gradiente de um potencial $F = -\nabla V$, com

$$V_{rs}^{\mu\nu,\,\rho} = -\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\,\rho} h_s^{\nu,\,\rho}| \tag{2}$$

Esse potentcial assegura que a função de modulação da um peso $\delta \in [0,1]$ para informação corroborativa e peso 1 para novidade, ou seja, os agentes aprendem mais quando discordam do que quando concordam e, dado que eles aprendem no sentido de corrigir os erros, espera-se que num cenário em que existe apenas um assunto e um grupo, o consenso seja atingido como função do parâmetro δ. Esse potencial é interpretado como o custo da discordância entre os agentes r e s dos grupos μ e ν sobre o assunto ρ. Podemos simplificar um pouco definido o custo da discordância sobre todos os assuntos entre dois agentes fazendo

$$V_{rs}^{\mu\nu} = \sum_{\rho=1,2} V_{rs}^{\mu\nu,\,\rho} \tag{3}$$

Com isso, podemos escrever o custo total da discordância na sociedade como sendo a soma dos custos entre cada agente. Mas queremos estudar a diferença entre os grupos então vamos criar parâmetros que distinguem as interações intra-grupo e inter-grupos. Sejam $J > 0$ e $K > 0$ as escalas de energia da interação entre indivíduos de grupos distintos e entre indivíduos de mesmo grupo, respectivamente. A energia total do sistema é dada pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{\mu\neq\nu} \sum_{rs} V_{rs}^{\mu\nu} + \frac{K}{2N} \sum_{\mu=\nu} \sum_{r\neq s} V_{rs}^{\mu\nu} \tag{4}$$

onde $N = N^1 + N^2$ é o número total de agentes. Note que esse hamiltoniano penaliza a discordância entre agentes de um mesmo grupo a concordância entre agentes de grupos diferentes. Desse modo, esperamos que no equilíbrio, haja dois grupos bem formados do ponto de vista das opiniões.

É razoável supor que o valor esperado do hamiltoniano seja uma informação relavante, de modo que, por máxima entropia, a probabilidade de observar uma certa configuração $\underline{\omega}$ é dada pela distribuição de Boltzmann

$$P(\underline{\omega}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{H}}$$

com $Z = \sum_{\underline{\omega}} e^{-\beta\mathcal{H}}$ a função de partição.

Campo Médio

Para prosseguir, vamos tentar uma aproximação de campo médio para o sistema. Isso é feito a partir da aproximação da distribuição de probabilidades P dada acima por uma família de distribuições que se fatora entre agentes independentes. Isto é, queremos aproximar $P \approx P_{MF} = \prod_{\mu,\,r} P_r^\mu$. A melhor aproximação possível para essa família de distribuições é aquela que minimiza a divergência de Kullback-Liebler entre P e P_{MF}, definida por

$$S[P_{MF}||P] = -\int \mathrm{d}\mu\,(\underline{\omega})\, P_{MF} \ln\left(\frac{P_{MF}}{P}\right) - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left\langle P_r^\mu - 1 \right\rangle_{\omega_r^\mu} - \beta \left\langle P_{MF}\mathcal{H} - E \right\rangle_{\underline{\omega}} \tag{5}$$

onde as constantes λ e β repesentam os vínculos de normalização e valor esperado do hamiltoniano. Vamos tomar variações de $S[P_{MF}||P]$ em relação a P_r^μ. Vamos ver como a S se fatora em termos dessas distribuições

$$\begin{aligned}
S[P_{MF}||P] &= -\int \mathrm{d}\mu\left(\underline{\omega}\right) P_{MF} \ln\left(\frac{P_{MF}}{P}\right) - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left\langle P_r^\mu - 1\right\rangle_{\omega_r^\mu} - \beta \left\langle P_{MF}\mathcal{H} - E\right\rangle_{\underline{\omega}} \\
&= -\int \prod_{\mu,\, r} \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu \ln\left(\frac{\prod_{\mu,\, r} P_r^\mu}{P}\right) \\
&\quad - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left[\int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu - 1\right] \\
&\quad - \beta\left[\int \prod_{rs} \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_r^\mu P_s^\nu \mathcal{H} - E\right] \\
&= -\sum_{\mu,\, r} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu \ln\left(\frac{P_r^\mu}{P}\right) \\
&\quad - \sum_{\mu,r} \lambda_r^\mu \left[\int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) P_r^\mu - 1\right] \\
&\quad - \beta\left[\sum_{\mu\nu}\sum_{rs} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_r^\mu P_s^\nu A_{rs}^{\mu\nu} V_{rs}^{\mu\nu} - E\right]
\end{aligned} \tag{6}$$

onde $A_{rs}^{\mu\nu} = \frac{K}{N}\delta_{\mu\nu}(1-\delta_{rs}) - \frac{J}{N}(1-\delta_{\mu\nu})$ discrimina agentes num mesmo grupo de agentes em grupos diferentes. Agora, tomando variações $\frac{\delta S}{\delta P_r^\mu} = 0$ termos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta P_r^\mu} \\
&= 1 - \ln P_r^\mu - \lambda_r^\mu - \beta \sum_{s,\nu} A_{rs}^{\mu\nu} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_s^\nu V_{rs}^{\mu\nu} \\
\Longrightarrow P_r^\mu &\propto exp\left(-\beta \sum_{s,\nu} A_{rs}^{\mu\nu} \int \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right) P_s^\nu V_{rs}^{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

Com isso, basta integrar $V_{rs}^{\mu\nu}$ para determinar as distribuição de campo médio do sistema. Vejamos como podemos lidar com isso. Chamando $D\omega_s^\nu = \mathrm{d}\mu\left(\omega_s^\nu\right)$, temos

$$
\begin{aligned}
\int D\omega_s^\nu V_{rs}^{\mu\nu} = \\
&= \int D\omega_s^\nu \sum_\rho \left[-\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\rho} h_s^{\nu,\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\rho} h_s^{\nu,\rho}| \right] \\
&= \sum_\rho \int D\omega_s^\nu \left[-\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\rho} h_s^{\nu,\rho} + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\rho} h_s^{\nu,\rho}| \right] \\
&= \sum_\rho \left[-\frac{1+\delta}{2} h_r^{\mu,\rho} m_\nu^\rho + \frac{1-\delta}{2} |h_r^{\mu,\rho}| r_\nu^\rho \right]
\end{aligned} \tag{8}
$$

onde definimos os parâmetros de ordem

$$m_\nu^\rho = \int \mathrm{d}\mu\,(\omega_s^\nu)\, P_r^\nu \omega_s^\nu \cdot x^\rho \tag{9}$$

$$r_\nu^\rho = \int \mathrm{d}\mu\,(\omega_s^\nu)\, P_r^\nu |\omega_s^\nu \cdot x^\rho| \tag{10}$$

Note que, visto que estamos trabalhando com dois assuntos e dois grupos, temos 8 parâmetros de ordem no total. Note também que a dependência dos parâmetros de ordem sobre o subíndice, que representa o índice dos agentes, foi removido sobre a hipótese de homogeneidade da distribuição de campo médio. Ou seja, os agentes não são necessariamente idênticos, mas são identicamente distribuídos.

Agora a integral de $V_{rs}^{\mu\nu}$ pode ser reescrita em termos dos parâmetros de ordem:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu\nu}\sum_{rs} A_{rs}^{\mu\nu} \int D\omega_s^\nu V_{rs}^{\mu\nu} = \\
&= \sum_{\mu\nu}\sum_{rs} A_{rs}^{\mu\nu} \sum_\rho \left[-a h_r^{\mu,\rho} m_\nu^\rho + b |h_r^{\mu,\rho}| r_\nu^\rho \right] \\
&= \sum_\rho \Bigg[-a \left(\frac{K(N^\mu - 1)}{2N} \right) h_r^{\mu,\rho} m_\mu^\rho + b \left(\frac{K(N^\mu - 1)}{2N} \right) |h_r^{\mu,\rho}| r_\mu^\rho \\
&\quad - a \left(-\frac{JN^\nu}{2N} \right) h_r^{\mu,\rho} m_\nu^\rho + b \left(-\frac{JN^\nu}{2N} \right) |h_r^{\mu,\rho}| r_\nu^\rho \Bigg] \\
&= -a \left(\frac{K(N^\mu - 1)}{2N} - \frac{JN^\nu}{2N} \right) h_r^{\mu,\rho} m_\mu^\rho \\
&\quad + b \left(\frac{K(N^\mu - 1)}{2N} - \frac{JN^\nu}{2N} \right) |h_r^{\mu,\rho}| r_\mu^\rho
\end{aligned} \tag{11}
$$

com $a = \frac{1+\delta}{2}$ e $b = \frac{1-\delta}{2}$. No limite termodinâmico, $N \to \infty$ com $\frac{N_\mu}{N} = cte$, os podemos fazer $n^\mu = \frac{N_\mu}{N}$ e reescrever a equação acima

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu\nu}\sum_{rs} A^{\mu\nu}_{rs}\int D\omega^{\nu}_{s} V^{\mu\nu}_{rs} = & \\
& - a\left(\frac{Kn^{\mu}}{2} - \frac{Jn^{\nu}}{2}\right) h^{\mu,\,\rho}_{r} m^{\rho}_{\mu} \\
& + b\left(\frac{Kn^{\mu}}{2} - \frac{Jn^{\nu}}{2}\right) |h^{\mu,\,\rho}_{r}| r^{\rho}_{\mu}
\end{aligned} \tag{12}
$$

e, chamando $M^{\rho}_{\mu} = \dfrac{Kn^{\mu}}{2}m^{\mu\rho} - \dfrac{Jn^{\nu}}{2}m^{\nu\rho}$ e $R^{\rho}_{\mu} = \dfrac{Kn^{\mu}}{2}r^{\mu\rho} - \dfrac{Jn^{\nu}}{2}r^{\nu\rho}$, podemos escrever o resultado final da seguinte forma

$$
P^{\mu}_{r} = \frac{1}{Z^{\mu}_{r}}\exp\left[\beta\sum_{\rho}\left(aM^{\rho}_{\mu}h^{\mu,\,\rho}_{r} - bR^{\rho}_{\mu}|h^{\mu,\,\rho}_{r}|\right)\right] \tag{13}
$$

Com esse resultado, podemos entender as equações 9 e 10 como equações de auto-consistência da aproximação de campo médio e suas soluções indicam os possíveis valores dos parâmetros de ordem.

Equações de Auto-Consistência

Os resultados da seção anterior são válidos para qualquer dimensão D dos vetores cognitivos dos agentes. Para avançã um pouco mais, vamos nos restringir ao caso $D = 5$, de acordo com a Teoria dos Fundamentos Morais. Para simplificar a notação, note que a distribuição de campo médio obtida depende do grupo do agente, mas não de cada agente no grupo. Então, vamos omitir o índice refente ao agente (até então r ou s) e vamos baixar o índice de grupo, μ ou ν. Com isso, a equação 13 escreve-se

$$
P_{\mu} = \frac{1}{Z_{\mu}}\exp\left[\beta\sum_{\rho}\left(aM^{\rho}_{\mu}h^{\rho}_{\mu} - bR^{\rho}_{\mu}|h^{\rho}_{\mu}|\right)\right] \tag{14}
$$

Para escrever as integrais 9 e 10 vamos usar coordenadas esféricas em $D = 5$. Se q_i, $i \in 1, \ldots, 5$, são coordenadas cartesianas, a parametrização esférica é dada por

$$
\begin{aligned}
q_1 &= r\cos\theta_1 \\
q_2 &= r\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 \\
q_3 &= r\mathrm{sen}\theta_1\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_3 \\
q_4 &= r\mathrm{sen}\theta_1\mathrm{sen}\theta_2\mathrm{sen}\theta_3\cos\theta_4 \\
q_5 &= r\mathrm{sen}\theta_1\mathrm{sen}\theta_2\mathrm{sen}\theta_3\mathrm{sen}\theta_4
\end{aligned}
$$

e o jacobiano da transformação é

$$d^D v = r^4 \text{sen}^3\theta_1 \text{sen}^2\theta_2 \text{sen}\theta_3 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$$

Como todos os vetores cognitivos dos agentes e os vetores dos assuntos estão normalizados, as integrais são feitas sobre a superfície da esfera unitária, ou seja $r = 1$. Considere que $x^1 \cdot x^2 = \cos\gamma$, escolha $q_1 = x^1$ e $x^2 = q_1 \cos\gamma + q_2 \text{sen}\gamma$, e chame $\theta_1 = \theta$ e $\theta_2 = \phi$. Com isso, as integrais sobre θ_3 e θ_4 são apenas constantes e podem ser absorvidas na função de partição, e as únicas integrais a serem feitas são sobre θ e ϕ, ambas no intervalo $[0, \pi]$.

Podemos reescrever a opinião de um agente em relação aos assuntos 1 ou 2 de acordo com angulos θ, ϕ e γ:

$$g(\theta, \phi, \gamma) = h_\mu^\rho = \begin{cases} \cos\theta & \textit{, caso } \rho = 1 \\ \text{sen}\gamma \text{sen}\theta \cos\phi + \cos\theta\cos\gamma & \textit{, caso } \rho = 2 \end{cases}$$

e a medida sobre o vetor cognitivo de um agente escreve-se

$$\mathrm{d}\mu\left(\omega_r^\mu\right) = \text{sen}^3\theta \text{sen}^2\phi d\theta d\phi$$

Note que a função $g(\theta, \phi, \gamma)$ produz h_μ^1 para $\gamma = 0$ e h_μ^2 para $\gamma \neq 0$, e chamando $g_\rho = \begin{cases} g(\theta, \phi, 0) & , \rho = 1 \\ g(\theta, \phi, \gamma) & , \rho = 2 \end{cases}$, podemos escrever as equações 9 e 10 da seguinte forma

$$m_\mu^\rho = \frac{1}{Z_\mu} \int_0^\pi d\theta\, d\phi\, \text{sen}^3\theta\, \text{sen}^2\phi\, g_\rho \exp\left[\beta \sum_\rho \left(aM_\mu^\rho g_\rho - bR_\mu^\rho |g_\rho|\right)\right] \qquad (15)$$

$$r_\mu^\rho = \frac{1}{Z_\mu} \int_0^\pi d\theta\, d\phi\, \text{sen}^3\theta\, \text{sen}^2\phi\, |g_\rho| \exp\left[\beta \sum_\rho \left(aM_\mu^\rho g_\rho - bR_\mu^\rho |g_\rho|\right)\right] \qquad (16)$$

com a função de partição dada por

$$Z_\mu = \int_0^\pi d\theta\, d\phi\, \text{sen}^3\theta\, \text{sen}^2\phi\, \exp\left[\beta \sum_\rho \left(aM_\mu^\rho g_\rho - bR_\mu^\rho |g_\rho|\right)\right] \qquad (17)$$