MAC0338 - Análise de Algoritmos
Lista 1

Fellipe Souto Sampaio*

13 de Setembro de 2017

Exercício 1

Podemos definir a notação assintótica utilizando o conceito de limite. Seja $f(n)$ e $g(n)$ duas funções em $\mathbb{R}$. Partindo da hipótese que todos limites a seguir existem, temos que:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \equiv \exists\, c \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c,\ c \geq 0 \qquad (D_1)$$

- se $c = 0$ então podemos concluir que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$
- se $c > 0$ então não podemos concluir nada

$$f(n) = \Omega(g(n)) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c,\ 0 < c \leq \infty \qquad (D_2)$$

- se $c = \infty$ então podemos concluir que $f(n)$ é $\Omega(g(n))$
- se $0 < c \leq \infty$ então concluímos que $f(n)$ é $\Theta(g(n))$

*email: fellipe.sampaio@usp.br | N Usp: 7990422

(a) 3^n não é $\mathcal{O}(2^n)$

R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ como } \left(\frac{3}{2}\right) > 1 \text{ então}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

$\therefore$ 3^n não é $\mathcal{O}(2^n)$, 3^n é $\Omega(2^n)$

(b) $\log_{10} n$ é $\mathcal{O}(\lg n)$

R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10} n}{\lg n}, \text{ usando L'Hospital para calcular o limite temos}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)'}{(\lg n)'} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n \ln 10}\right)\left(\frac{n \ln 2}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n} \ln 2}{\cancel{n} \ln 10}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln 2}{\ln 10}\right) = \log_{10} 2 \neq 0 \text{ e } \neq \infty$$

$\therefore$ $\log_{10} n$ é $\Theta(\lg n)$, por consequência $\log_{10} n$ é $\mathcal{O}(\lg n)$

(c) $\lg n$ é $\mathcal{O}(\log_{10} n)$

R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\log_{10} n}, \text{ usando L'Hospital para calcular o limite temos}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lg n)'}{(\log_{10} n)'} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \ln 10}{1}\right)\left(\frac{1}{n \ln 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n} \ln 10}{\cancel{n} \ln 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln 10}{\ln 2}\right) = \log_2 10 \neq 0 \text{ e } \neq \infty$$

$\therefore$ $\lg n$ é $\Theta(\log_{10} n)$, por consequência $\lg n$ é $\mathcal{O}(\log_{10} n)$

Exercício 2

Para esse exercício consideraremos as definições de notação assintótica apresentadas no exercício anterior.

(a) $n^2 + 10n + 20 = \mathcal{O}(n^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+10n+20}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{10}{n}+\frac{20}{n^2})}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+\frac{10}{n}+\frac{20}{n^2})}{\cancel{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}+\frac{20}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\cancelto{0}{\frac{10}{n}}+\cancelto{0}{\frac{20}{n^2}}\right) = 1$$

$\therefore\ n^2 + 10n + 20n$ é $\Theta(n^2)$, por consequência $n^2 + 10n + 20$ é $\mathcal{O}(n^2)$

(b) $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \mathcal{O}(n)$

$\left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil = \mathcal{O}(n) \iff \exists$ constantes c e n_0 : $\left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil \leq c * n$, $\forall n \geq n_0$

Considere $c = 3$ e $n_0 = 3$, temos então: $\left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil \leq 3 * n, \forall n \geq 3$

$n = 3 \Rightarrow \left\lceil \dfrac{3}{3} \right\rceil = 1 \leq 3 * 3 = 9$

$n = 4 \Rightarrow \left\lceil \dfrac{4}{3} \right\rceil = 2 \leq 3 * 4 = 12$

$n = 5 \Rightarrow \left\lceil \dfrac{5}{3} \right\rceil = 2 \leq 3 * 5 = 15$

$n = 6 \Rightarrow \left\lceil \dfrac{6}{3} \right\rceil = 2 \leq 3 * 6 = 18$

$\vdots$

(c) $\lg n = \mathcal{O}(\log_{10} n)$

$\lg n = \mathcal{O}(\log_{10} n) \iff \exists$ constantes c e n_0 : $\lg n \leq c * \log_{10} n$, $\forall n \geq n_0$

Considere $c = 10$ e $n_0 = 16$, temos então: $\lg n \leq 10 * \log_{10} n, \forall n \geq 16$

$n = 16 \Rightarrow \lg 16 = 4 \leq 10 * \log_{10} 16 \approx 10 * 1.5 = 15$

(d) $n = \mathcal{O}(2^n)$

$n = \mathcal{O}(2^n) \iff \exists$ constantes c e $n_0 : n \leq c * 2^n \ , \forall n \geq n_0$

Considere $c = 1$ e $n_0 = 1$, temos então: $n \leq 2^n, \forall n \geq 1$

$n = 1 \Rightarrow 1 \leq 2^1 = 2$

$n = 2 \Rightarrow 2 \leq 2^2 = 4$

$n = 10 \Rightarrow 10 \leq 2^{10} = 1024$

$\vdots$

(e) $\frac{n}{1000}$ **não é** $\mathcal{O}(1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1000}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000} = \infty$$

$$\therefore \ \frac{n}{1000} \text{ não é } \mathcal{O}(1), \text{ na verdade } \frac{n}{1000} = \Omega(1)$$

(f) $\frac{n^2}{2}$ **não é** $\mathcal{O}(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancelto{n}{n^2}}{\cancelto{2}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$$

$$\therefore \ \frac{n^2}{2} \text{ não é } \mathcal{O}(n), \text{ na verdade } \frac{n^2}{2} = \Omega(n)$$

Exercício 3

(a) $\lg\sqrt{n} = \mathcal{O}(\lg n)$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 2} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}\frac{d(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\lg x)' = \frac{1}{\ln 2}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln 2}$$

$$(\lg\sqrt{n})' = \frac{1}{\sqrt{n}\ln 2}(\sqrt{n})' = \frac{1}{2\sqrt{n}\ln 2}(n^{-1/2})' = \frac{1}{2(\sqrt{n})^2 \ln 2} = \frac{1}{2n\ln 2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg\sqrt{n}}{\lg n}$, usando L'Hospital e os limites calculados anteriormente temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lg\sqrt{n})'}{(\lg n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n\ln 2}}{\frac{1}{n \ln 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 2}{2n\ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n\ln 2}^{\,1}}{\cancel{2n\ln 2}^{\,2}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \lg\sqrt{n}$ é $\Theta(\lg n)$, por consequência $\lg\sqrt{n}$ é $\mathcal{O}(\lg n)$

(b) Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ então $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \iff \exists$ constantes c_1 e $n_1 : f(n) \leq c_1 * g(n)$, $\forall n \geq n_1$

$g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \iff \exists$ constantes c_2 e $n_2 : g(n) \leq c_2 * h(n)$, $\forall n \geq n_2$

Se temos $g(n) \leq c_2 * h(n)$ multiplicando ambos os lados por c_1 teremos $c_1 * g(n) \leq c_1 * c_2 * h(n)$

$\Rightarrow f(n) \leq c_1 * g(n) \leq c_1 * c_2 * h(n)$

$\therefore f(n) \leq c_3 * h(n)$, $c_3 = c_1 * c_2$, $\forall n \geq n_3$, $n_3 = max\{n_1, n_2\}$

(c) Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$

$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \iff \exists$ constantes c_1 e $n_1 : f(n) \leq c_1 * g(n)$, $\forall n \geq n_1$

$g(n) = \Theta(h(n)) \iff \exists$ constantes c_2, c_3 e $n_2 : 0 \leq c_2 * h(n) \leq g(n) \leq c_3 * h(n)$, $\forall n \geq n_2$

Se temos $0 \leq c_2 * h(n) \leq g(n) \leq c_3 * h(n)$ multiplicando toda a relação por c_1 teremos

$0 \leq c_1 * c_2 * h(n) \leq c_1 * g(n) \leq c_1 * c_3 * h(n) \Rightarrow f(n) \leq c_1 * g(n) \leq c_1 * c_3 * h(n)$, então $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

Ao multiplicar a relação acima teremos 3 casos possíveis para a lower-bound:

$f(n) < c_1 * c_2 * g(n) \Rightarrow f(n) = o(h(n))$

$f(n) = c_1 * c_2 * g(n) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$

$f(n) > c_1 * c_2 * g(n) \Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$

Não podemos afirmar com certeza qual será o resultado.

(d) Suponha que $\lg(g(n)) > 0$ e que $f(n) > 1$ para todo n suficientemente frande. Neste caso, se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ então $\lg(f(n)) = \mathcal{O}(\lg(g(n)))$

(e) Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ então $2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$

Exercício 4

(a) $\sum_{i=1}^{n} i^k$ é $\Theta(n^{k+1})$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k \cdots + n^k \leq n^k + n^k \cdots + n^k = n * n^k = n^{k+1}$$

Logo, para $c_1 = 1$ e $n_1 = 1$ temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k = \mathcal{O}(n^{k+1})$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + (n-2)^k + (n-1)^k + n^k \geq (n - \frac{n}{2})^k + (n - \frac{n}{2} + 1)^k + \cdots + n^k =$$

$$(\frac{2n-n}{2})^k + (\frac{2n-n+2}{2})^k + \cdots + (\frac{2n}{2})^k = (\frac{n}{2})^k + (\frac{n+2}{2})^k + \cdots + (\frac{2n}{2})^k \geq$$

$$(\frac{n}{2})^k + (\frac{n}{2})^k + \cdots + (\frac{n}{2})^k = (\frac{n}{2}) * (\frac{n}{2})^k = (\frac{n}{2})^{k+1} = (\frac{1}{2})^{k+1} * (n^{k+1})$$

Logo, para $c_2 = (\frac{1}{2})^{k+1}$ e $n_2 = 1$ temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k = \Omega(n^{k+1})$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$

(a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$

Vamos considerar a série infinita:

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} \dots \text{ , vamos dividir por 2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_\infty}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} \dots \text{ , subtraindo temos}$$

$$S_\infty - \frac{S_\infty}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots \Rightarrow \frac{S_\infty}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow S_\infty = 2$$

Dessa forma, como todos os termos da soma infinita acima são positivos, podemos afirmar que, para qualquer valor de n, a soma finita assume valores estritamente menores que a soma infinita:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = 2 \therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \leq 2$$