MAC0338 - Análise de Algoritmos

Lista 1

Fellipe Souto Sampaio*

29 de Agosto de 2017

Exercício 1

Podemos definir a notação assintótica utilizando o conceito de limite. Seja $f(n)$ e $g(n)$ duas funções em $\mathbb{R}$. Partindo da hipótese que todos limites a seguir existem, temos que:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \equiv \exists\, c \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c,\ c \geq 0 \tag{D_1}$$

- se $c = 0$ então podemos concluir que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$
- se $c > 0$ então não podemos concluir nada

$$f(n) = \Omega(g(n)) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c,\ 0 < c \leq \infty \tag{D_2}$$

- se $c = \infty$ então podemos concluir que $f(n)$ é $\Omega(g(n))$
- se $0 < c \leq \infty$ então concluir que $f(n)$ é $\Theta(g(n))$

*email: fellipe.sampaio@usp.br | N Usp: 7990422

(a) 3^n não é $\mathcal{O}(2^n)$

R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ como } \left(\frac{3}{2}\right) > 1 \text{ então}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \tag{1}$$
$$\therefore\ 3^n \text{ não é } \mathcal{O}(2^n),\ 3^n \text{ é } \Omega(2^n)$$

(b) $\log_{10} n$ é $\mathcal{O}(\lg n)$

R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10} n}{\lg n}, \text{ usando L'Hospital para calcular o limite temos}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_{10} n)'}{(\lg n)'} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n \ln 10}\right)\left(\frac{n \ln 2}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n} \ln 2}{\cancel{n} \ln 10}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln 2}{\ln 10}\right) = \log_{10} 2 \neq 0 \text{ e } \neq \infty$$
$$\therefore\ \log_{10} n \text{ é } \Theta(\lg n), \text{ por consequência } \log_{10} n \text{ é } \mathcal{O}(\lg n) \tag{2}$$

(c) $\lg n$ é $\mathcal{O}(\log_{10} n)$

R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\log_{10} n}, \text{ usando L'Hospital para calcular o limite temos}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lg n)'}{(\log_{10} n)'} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \ln 10}{1}\right)\left(\frac{1}{n \ln 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n} \ln 10}{\cancel{n} \ln 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln 10}{\ln 2}\right) = \log_2 10 \neq 0 \text{ e } \neq \infty$$
$$\therefore\ \lg n \text{ é } \Theta(\log_{10} n), \text{ por consequência } \lg n \text{ é } \mathcal{O}(\log_{10} n) \tag{3}$$

C