

微积分 I: 定积分 I

Calculus I: Definite integral I

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com，谢谢！您可以在我的[主页](#)中浏览更多笔记。

目录

1	定积分的定义与存在条件	2
1.1	定积分的概念	2
1.2	达布和	3
1.3	积分的存在条件	5
1.4	可积函数的种类	7
1.5	可积函数的性质	8
2	定积分的性质	10
2.1	沿定向区间的积分	10
2.2	可以用等式表示的一些性质	11
2.3	可以用不等式表示的一些性质	12
2.4	变限函数与原函数存在性	15

1 定积分的定义与存在条件

1.1 定积分的概念

我们研究曲边梯形的面积, 用任意方法分割其底边 $[a, b]$ 为若干部分, 用

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

表示分点的横坐标, 这样曲边梯形便被分割成若干小条, 现在用底边与小条一致, 高与小条左高一致的矩形取近似地替代小条.

则第 i 个矩形 ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 的底边显然等于 $x_{i+1} - x_i$, 我们用 Δx_i 表示该数; 至于高度, 它等于 $y_i = f(x_i)$. 因此第 i 个矩形的面积为 $y_i \Delta x_i = f(x_i) \Delta x_i$.

把所有矩形的面积加起来, 我们便得到曲边梯形的近似值

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

当所有的长度 Δx_i 都趋于 0 时, 面积 P 的准确值就是极限

$$P = \lim \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

接下来, 我们将研究形如 $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$ 的特殊和的极限.

定义 1.1 (特殊和的极限). 设函数 $f(x)$ 给定在某区间 $[a, b]$ 上. 用任意方法在 a 与 b 之间插入分点, 把这个区间分成若干部分. 并用 λ 表示 Δx_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 中最大的一个,

从部分区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任取一点 $x = \xi_i$

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

并且做出和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

若对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得只要 $\lambda < \delta$, 则不等式

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

在 ξ_i 的任意选择下皆成立, 则称和 σ 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时有有限极限 I , 记作

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

定义 1.2 (定积分). 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和 σ 的有限极限 I 存在, 则这极限称之为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

其中 $f(x)$ 称为在 $[a, b]$ 上的可积函数, 数 a 与数 b 分别称为积分的下限与上限, 上、下限为常数时, 定积分为常数. 该定义为黎曼 (B.Riemann) 的定义, 因此和 σ 也称为黎曼和.

下面我们来阐述一些条件, 在这些条件下, 黎曼和 σ 具有有限极限, 即定积分存在.

首先需要指出的, 可积函数一定是有界的. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上无界的, 那么再把区间分成若干部分的任何划分方式下, 这个函数都会在某个部分区间上无界, 于是靠着在这个部分区间上点 ξ 的选取, 可使 $f(\xi)$ 任意大, 随之也就是可使黎曼和任意大 ($\forall \lambda, \epsilon > 0, \exists \xi > 0, \text{s.t. } f(\xi) > \frac{1}{\lambda\epsilon}$ 因此 $\sigma > \lambda \cdot f(\xi) > \lambda \cdot \frac{1}{\lambda\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty$). 因此当函数 $f(x)$ 无界时, 黎曼和 σ 不存在有限极限, 即定积分不存在.

因此在后面的研究中, 我们总是预先假定所考虑的函数 $f(x)$ 时有界的

$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b).$$

1.2 达布和

作为研究的辅助工具, 除黎曼和外, 按照达布 (Darboux) 的方法, 我们再引进一些类似黎曼和但更简单的和.

定义 1.3 (达布和). 用 m_i, M_i 表示函数 $f(x)$ 在第 i 个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的下确界与上确界, 并做和

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

这些和分别称为达布下和与达布上和.

在特殊情形, 若 $f(x)$ 连续, 达布和就是对应于所取分划的积分和中当中的最大值与最小值, 因为由魏尔斯特拉斯第二定理 (??) 可知函数 $f(x)$ 在每个区间中都能取到确界, 因此若按这样的目的来选点 ξ , 可以使得

$$f(\xi_i) = m_i \text{ 或 } f(\xi_i) = M_i$$

在一般的情形, 由下界与上界定义本身, 有

$$m_i \leq f(\xi) \leq M_i.$$

以 Δx_i ($\Delta x_i > 0$) 乘之并求和得到

$$s \leq \sigma \leq S.$$

达布和有下列简单性质:

定理 1.1. 达布和 s, S 分别为黎曼和的下确界与上确界.

证明. 因为 M_i 为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的上确界, 因此有 $\forall \frac{\epsilon}{(b-a)} > 0, \exists \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ 使得

$$M_i - \frac{\epsilon}{(b-a)} < f(\xi) \leq M_i,$$

因此有

$$S - \epsilon < \sigma \leq S.$$

下确界同理. □

注 1.1. 达布和与黎曼和都是未取极限的和式. 黎曼和由于 ξ_i 的任意性, 因此是动态的概念.

定理 1.2. 如果把一些新的点加进既有的分点里, 则达布下和 s 只可能因此增加; 达布上和 S 只可能因此减少.

证明. 为了证明这个性质, 只要讨论在既有分点中在加进一个分点 x' 的情况.

设这个点加在 x_k 与 x_{k+1} 之中, 于是

$$x_k < x' < x_{k+1}$$

以 S' 表示新的上和, 则 S' 与 S 仅在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 间不同, 在这个区间中, S 对应的项为

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

而在 S' 中对应的项为

$$M'(x' - x_k) + M''(x_{k+1} - x')$$

其中 M', M'' 分别表示 $f(x)$ 在区间 $[x_k, x'], [x', x_{k+1}]$ 上的上确界, 因为这些区间都包含于区间 $[x_k, x_{k+1}]$, 因此有

$$M' \leq M_k, \quad M'' \leq M_k,$$

因此有

$$M'(x' - x_k) + M''(x_{k+1} - x') \leq M_k(x' - x_k) + M_k(x_{k+1} - x') = M_k(x_{k+1} - x_k).$$

因此推得

$$S' \leq S.$$

□

定理 1.3. 任何一个达布下和都不超过任何一个达布上和, 即使是对应于区间上另一划分的上和.

证明. 用任一方法分隔区间 $[a, b]$ 并做这个分隔的达布和

$$s_1 \text{ 与 } S_1,$$

先考虑区间 $[a, b]$ 的某一与第一个划分没有任何关系的划分方式. 对于的达布和为

$$s_2 \text{ 与 } S_2,$$

所要证的是 $s_1 \leq S_2$, 为此我们把两种分点联合在一起, 于是得到第三种划分, 其达布和为

$$s_3 \text{ 与 } S_3.$$

因此有

$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2,$$

证毕.

□

从上面的定理可知, 任意划分的达布下和集合 $\{s\}$ 以任何一个达布上和 S 为上界, 因此 $\{s\}$ 有有限上确界

$$I_* = \sup\{s\};$$

同理, 任意划分的达布上和集合 $\{S\}$ 以任何一个达布下和 s 为下界, 因此 $\{S\}$ 有有限下确界

$$I^* = \inf\{S\}.$$

因为上确界是最小上界, 因此对于任意划分有

$$I_* \leq S,$$

因为下确界是最大下界, 因此对于任意划分有

$$I^* \geq s.$$

另外, 由上下确界的定义知对于 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists s^*, S^*$ (即是两者不是同一划分下的) 使得

$$I_* - \frac{\epsilon}{2} < s^* \leq S^* < I^* + \frac{\epsilon}{2},$$

即 $I_* \leq I^* + \epsilon$, 由函数极限的不等式性 (??) 可知

$$I_* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_* \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I^* + \epsilon = I^*.$$

综上所述我们得到

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S.$$

其中 I_* 与 I^* 分别称之为达布下积分与达布上积分.

1.3 积分的存在条件

定理 1.4 (定积分存在的充分必要条件). 定积分存在的充分必要条件为

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

换句话说即是, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta, \text{s.t. } S - s < \epsilon$ 成立.

证明. 必要性

假定定积分存在, 即 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta$ 使得

$$|\sigma - I| < \frac{\epsilon}{2} \text{ 或 } I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma < I + \frac{\epsilon}{2}$$

成立.

因为 s 与 S 分别为黎曼和 σ 的上确界与下确界, 因此 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0$ 有

$$S - \frac{\epsilon}{2} < \sigma \leq S$$

因此有

$$S - \frac{\epsilon}{2} < \sigma < I + \frac{\epsilon}{2}$$

即

$$S < I + \epsilon;$$

同理成立

$$s > I - \epsilon.$$

综上有

$$I - \epsilon < s \leq S < I + \epsilon$$

即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I,$$

因此

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

充分性

设满足 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$, 因为 $s \leq I_* \leq I^* \leq S$, 因此 $I_* = I^*$, 令 I 表示它们的公共值, 有

$$s \leq I \leq S.$$

若把 σ 认为借助于和 s 与 S 所对应的那个区间划分而做出的诸多黎曼和中的一个, 则有

$$s \leq \sigma \leq S.$$

因为 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta, \text{s.t. } S - s < \epsilon$ 成立, 所以

$$|I - \sigma| < \epsilon$$

也成立, 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I.$$

即定积分存在. □

若用 ω_i 表示第 i 部分区间的振幅 $M_i - m_i$, 则有

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

则定积分存在的条件可以改写为

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

1.4 可积函数的种类

定理 1.5. 黎曼可积的函数一定为有界函数.

证明. 上文中已经证明. □

定理 1.6. 在区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 可积.

证明. 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 由康托定理 (??) 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续. 即 $\forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \delta]$ 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(x_1) - f(x_2) = 0.$$

因为 $f(x)$ 连续, 由魏尔斯特拉斯第二定理 (??) 可知: 设对于某一区间划分, 函数 $f(x)$ 能在第 i 个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内的点 ξ_{i1} 处取得下确界 m_i , 在点 ξ_{i2} 处取得上确界 M_i . 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\xi_{i2}) - f(\xi_{i1}) = M_i - m_i = 0.$$

即对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta$ 有

$$\omega_i = M_i - m_i < \epsilon.$$

所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \epsilon \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \epsilon(b-a)$$

因此有 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$, 即函数 $f(x)$ 可积. □

定理 1.7. 如果在 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 只有有限多个间断点, 则它是可积的.

证明. 设间断点是 $x', x'', \dots, x^{(k)}$. 任取 $\epsilon > 0$, 则用长度为 ϵ 的诸邻域

$$(x' - \frac{\epsilon}{2}, x' + \frac{\epsilon}{2}), (x'' - \frac{\epsilon}{2}, x'' + \frac{\epsilon}{2}), \dots, (x^{(k)} - \frac{\epsilon}{2}, x^{(k)} + \frac{\epsilon}{2})$$

来完全包住这些间断点. 在其余的闭区间上, 有康托定理可知 $f(x)$ 是一致连续的. 即对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, \text{s.t. } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. 把这个结论用在每一个闭区间上, 得到 δ_i 序列, 令 $\delta = \min\{\epsilon, \delta_i\}$.

现在分隔区间 $[a, b]$ 使得 $\lambda < \delta$. 此时我们得到两类区间:

1. 整个包含在不包含间断点的闭区间中, 此时在这些的每个划分区间中 $f(x)$ 一致连续, 且振幅 $\omega_i < \epsilon$;
2. 整个在包含间断点的开区间中, 或部分与这些开区间相交.

因为已假定 $f(x)$ 有界, 因此 $f(x)$ 在任意划分区间内的振幅 ω_i 小于等于在整个区间 $[a, b]$ 上的振幅 Ω .

把和

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

分成两个和分别分布在第一类区间和第二类区间上:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \text{ 和 } \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''}.$$

对于第一个和, 有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \leq \epsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \epsilon(b-a),$$

对于第二个和, 我们指出, 完整落入包含间断点的开区间的第二类划分区间的长度和小于 $k\epsilon$; 部分落入包含间断点的开区间的第二类划分区间的个数小于 $2k$, 因此长度总和小于 $2k\epsilon$. 因而

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 3k\epsilon.$$

因此有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \epsilon \cdot [(b-a) + 3k\Omega] \rightarrow 0$$

即 $f(x)$ 可积. □

定理 1.8. 单调有界函数 $f(x)$ 永远是可积的.

证明. 设 $f(x)$ 为单调增函数, 则其在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅为

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_i \omega_i \Delta x_i &= \sum_i [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \cdot \Delta x_i \\ &\leq \lambda \sum_i f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ &= \lambda \cdot [f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 有界, 因此 $\sum_i \omega_i \Delta x_i \leq \lambda \cdot [f(b) - f(a)] \leq \lambda \cdot \Omega \rightarrow 0$. 因此函数 $f(x)$ 可积. □

注 1.2. 函数的定积分存在与函数的不定积分 (原函数) 存在是不同的概念, 前者非连续函数也可以成立, 后者则必须要求为连续函数. (或某些有振荡间断点的函数)

1.5 可积函数的性质

定理 1.9. 若函数 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上可积的, 则函数 $|f(x)|, kf(x)$ (其中 k 为常数) 在这区间上也是可积的.

证明. 因为对于区间 $[a, b]$ 上任意两点 x', x'' 有

$$||f(x'')| - |f(x')|| \leq |f(x'') - f(x')| \leq \omega_i,$$

因此 $|f(x)|$ 在这区间上的振幅 $\omega_i^* \leq \omega_i$, 由此

$$\sum_i \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0.$$

□

定理 1.10. 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则它们的和、差、积在区间上均可积.

证明. 由于可积函数均有界, 因此设

$$|f(x)| \leq K, |g(x)| \leq L,$$

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任取两点 x', x'' 则, 考虑差

$$\begin{aligned} |f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| &= |f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x')g(x')| \\ &\leq |f(x'') - f(x')| \cdot |g(x'')| + |g(x'') - g(x')| \cdot |f(x')| \end{aligned}$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅为 ω_i , $g(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅为 ω'_i , 则

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq |f(x'') - f(x')| \cdot |g(x'')| + |g(x'') - g(x')| \cdot |f(x')| \leq \omega_i \cdot K + \omega'_i \cdot L.$$

设函数 $f(x)g(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅为 ω_i^* , 则

$$\sum_i \omega_i^* \Delta x_i \leq L \sum_i \omega_i \Delta x_i + K \sum_i \omega'_i \Delta x_i \rightarrow 0.$$

□

定理 1.11. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 那么它在该区间任意一部分区间 $[\alpha, \beta]$ 上也是可积的; 反之若把 $[a, b]$ 分成若干 (有限) 部分区间, 若 $f(x)$ 在每一部分区间可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

证明. 设 $\alpha = x_j, \beta = x_k$, 由于振幅的定义, 有 $\omega_i = M_i - m_i > 0$, 可知

$$\sum_{s=j}^k \omega_s \Delta x_s \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0.$$

后半句显然.

□

定理 1.12. 如果改变可积函数在有限个 ($= k$) 点上的值为其他有限值, 则其可积性不改变.

证明. 所涉及的分割区间不会超过 k 个, 设分别为 $[x_{n_1}, x_{n_1+1}], \dots, [x_{n_k}, x_{n_k+1}]$, 记 $M = \max_{1 \leq i \leq k} \{\omega_{n_i}\}$, 则 k 个分割区间上有:

$$\sum_{i=1}^k \omega_{n_i} \Delta x_{n_i} \leq k \lambda M \rightarrow 0.$$

□

注 1.3. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 不代表函数在区间 $[a, b]$ 上存在原函数.

2 定积分的性质

2.1 沿定向区间的积分

当说到从 a 到 b 的定积分时, 我们总是认为 $a < b$, 现在要去除这一限制. 为此我们建立定向区间的概念.

定义 2.1 (定向区间). 满足不等式

$$a \leq x \leq b \text{ 或 } a \geq x \geq b,$$

且顺序由 a 到 b 的 x 的集合称为定向区间, 记为 $[a, b]$.

若 $a < b$ 则定向区间 $[a, b]$ 与 $[b, a]$ 在组成成分上完全一致, 但在方向上有所不同.

定理 2.1. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是可积的, 则在区间 $[b, a]$ 上也是可积的, 且有

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

证明. 设 $b > a$, 从 b 到 a 的方向插入分点:

$$x_0 = b > x_1 > x_2 > \dots > x_i > x_{i+1} > \dots > x_n = a$$

并对每一个部分区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上选出一个点 ξ_i 于是 $x_i \geq \xi_i \geq x_{i+1}$, 做和:

$$\sigma' = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

此时 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$.

另外对于 $[a, b]$ 上, 我们去相同的分点与 ξ_i , 并去黎曼和 σ . 这样在两个定向区间上的黎曼和互为相反数. 即

$$\sigma' = -\sigma,$$

取极限有

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma' = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = - \int_a^b f(x)dx.$$

□

作为定理的一个推理, 我们有

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

在这里及以后, 当讲到积分 \int_a^b 时, 我们始终认为 $a < b, b < a$ 都是可能的.

2.2 可以用等式表示的一些性质

定理 2.2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b], [a, c], [c, b]$ 中最大的一个上是可积的, 则它在其他两个区间上也是可积的, 不管点 a, b, c 的相互位置是怎样的, 等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

恒成立.

证明. 首先令 $a < c < b$, 并且函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 由定理1.11. 可知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c], [c, b]$ 上可积.

考虑把 $[a, b]$ 分成若干份, 且 c 是这些分点中的一个, 记为 x_k , 做黎曼和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

取极限, 因为函数在 $[a, b], [a, c], [c, b]$ 均可积, 所以, 上面三个和式的极限均存在:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

当 a, b, c 其他位置时, 可以化为这个等式, 如设 $b < a < c$ 若 $f(x)$ 在 $[b, c]$ 可积, 则

$$\begin{aligned} \int_b^c f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_b^a f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

□

定理 2.3. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 可积, 则 $kf(x)$ (k 为常数) 在这区间上也可积, 且

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

定理 2.4. 若 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 可积, 则 $f(x) \pm g(x)$ 在这区间上也可积, 且

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证明. 上面两定理中的 $kf(x), f(x) \pm g(x)$ 的可积性已经证毕. 至于等式, 只需对黎曼和取极限即可, 因为可积, 所以极限存在, 由极限的四则运算法则 (定理??) 即可证毕. □

2.3 可以用不等式表示的一些性质

定理 2.5. 若在区间 $[a, b]$ 上可积函数 $f(x)$ 是非负的, 并且 $a < b$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

证明. 由于其黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$$

由数列极限不等式性推论 (定理??) 可知, 其极限也是非负的. □

定理 2.6. 若在区间 $[a, b]$ 上可积函数 $f(x)$ 是正的, 并且 $a < b$, 则

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

证明. 利用反证法.

若

$$I = \int_a^b f(x)dx = 0.$$

由定积分存在的充分必要条件 (定理1.4) 可知在 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 达布上和 S 也趋于 0, 即对于 $\forall \epsilon_1(b-a) > 0, \exists \delta_1 > 0$, 若 $\lambda < \delta_1$ 有 $S < \epsilon_1(b-a)$, 即对于 $[a, b]$ 的诸多部分区间, 至少存在一个部分区间 $[a_1, b_1]$, 使 $f(x)$ 在该部分区间的上确界 $M < \epsilon_1$, 即 $\forall x \in [a_1, b_1]$ 有

$$f(x) < \epsilon_1.$$

又因为

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^b f(x)dx = 0.$$

而

$$\int_a^{a_1} f(x)dx \geq 0, \quad \int_{b_1}^b f(x)dx \geq 0,$$

所以

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0.$$

类似的, 对于任意 $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$, 在 $[a_1, b_1]$ 上可以分出部分区间 $[a_2, b_2]$ 使得 $\forall x \in [a_2, b_2]$ 有

$$f(x) < \epsilon_2,$$

如此下去.

取正数数序列 $\epsilon_k \rightarrow 0$, 则一定可以取出一个套着一个, 在长度上递减到零的一串区间 $[a_k, b_k]$, 使得若 $x \in [a_k, b_k]$ 则

$$0 < f(x) < \epsilon_k,$$

由区间套引理 (??) 可知, 对于区间序列 $[a_k, b_k]$ 存在点 $c \in [a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得

$$0 < f(c) < \epsilon_k,$$

而 $\epsilon_k \rightarrow 0$, 故矛盾. □

定理 2.7. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 且恒有 $f(x) \leq (<)g(x)$, 则 $a < b$ 时有

$$\int_a^b f(x)dx \leq (<) \int_a^b g(x)dx.$$

证明. 把定理2.5与定理2.6应用到函数 $f(x) - g(x)$ 上即可. □

注 2.1. 由定理2.6可知, 虽然定积分也是极限的一种, 但是黎曼和的极限不等式性比一般数列有更强的结论, 即

$$\sigma > 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma > 0.$$

定理 2.8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并且 $a < b$, 则有不等式

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

成立.

证明. 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

应用定理2.7有

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

因此

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

定理 2.9 (积分估值定理). 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 其中 $a < b$, 并且在这个区间上不等式

$$m \leq f(x) \leq M$$

成立, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

证明. 在区间 $[a, b]$ 上应用定理2.7于函数 $m, f(x), M$, 则

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$$

则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

□

定理 2.10 (积分中值定理). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 ($a \leq b$), 并且 $m \leq f(x) \leq M$, 则 $\exists \mu \in [m, M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

成立.

证明. 若 $a < b$ 则由估值定理可知

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

即

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

令 $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$, 即有

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

若 $a > b$, 则有 $m \leq f(x) \leq M$ 使得

$$\mu(a-b) = \int_b^a f(x)dx.$$

即

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

当被积函数为连续函数时, 由魏尔斯特拉斯第二定理 (??) 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上能够取到最大值与最小值, 若令最大值为 M , 最小值为 m , 则对于 $\mu \in [m, M]$ 由布尔查诺柯西第二定理 (定理??) 可知 $\exists c \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

定理 2.11 (推广积分中值定理). 设 1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是可积的; 2) $m \leq f(x) \leq M$; 3) $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变符号: $g(x) \leq 0$ 或 $g(x) \geq 0$. 则存在 $\mu \in [m, M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

证明. 设 $g(x) \geq 0$, $a < b$ 则

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x),$$

从而

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

又因为 $g(x) \geq 0$, 由定理2.5 可知

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0,$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则易知

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

此时对于 $\forall \mu \in (m, M)$, 有所证成立.

若 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 则易知

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

令

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

证毕. □

$a < b$ 以及 $g(x) \leq 0$ 的情况类似.

如果 $f(x)$ 连续, 则公式可改写为

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(c)g(x)dx.$$

其中 $c \in (a, b)$.

对于两个积分中值定理, 需要做如下强调: 对于形如 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cdot f(x)dx$ 的定积分, 要注意其中值 ξ 为 n 的数列, 即 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n) \cdot \int_a^b f(x)dx$, 此时 ξ 不是常数.

2.4 变限函数与原函数存在性

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($a \leq b$) 可积, 则由定理1.11 可知, 它在区间 $[a, x]$ 上可积, 其中 $x \in [a, b]$. 用变量 x 替换 b 后可得表达式

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

显然他是 x 的函数, 这个函数有如下性质.

定理 2.12. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

证明. 对任意 $x \in [a, b]$ 取一个增量 Δx ($\Delta x \leq 0$), 使得 $x + \Delta x \in [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \end{aligned}$$

所以

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 即 $f(x)$ 在区间 $[x, x + \Delta x]$ 上有有限的上下确界 M, m , 由积分中值定理 (定理2.10) 可知存在 $\mu \in [m, M]$ 使得

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \mu \cdot \Delta x$$

因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu \cdot \Delta x = 0,$$

即 $\Phi(x)$ 连续. □

注 2.2. 可积函数的种类我们在节 1.4 已经阐述, 因此只要 $f(x)$ 可积, 即 $f(x)$ 有界且有有限个间断点 (无论是一类还是振荡), 都有 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在区间内任意点 (即使是在间断点) 连续.

定理 2.13 (原函数存在性定理). 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则 $\Phi(x)$ 在点 x 处可导, 且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

证明. 因为

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \mu \cdot \Delta x$$

所以

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \mu.$$

因为 $f(x)$ 在点 x 连续, 所以对于 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in [x, x + \delta], \text{s.t. } |f(t) - f(x)| < \epsilon$, 即

$$f(x) - \frac{\epsilon}{2} < f(t) < f(x) + \frac{\epsilon}{2}.$$

设 M, m 是区间 $[x, x + \Delta x]$ 的上下确界, 则 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists t \in [x, x + \Delta x]$ 有 (注意此处是存在 t , 这个 t 仅做中介, 链接 $\epsilon - \delta$ 不等式与确界不等式)

$$\begin{aligned} M - \frac{\epsilon}{2} &< f(t) \leq M; \\ m &\leq f(t) < m + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{\epsilon}{2} &< f(t) < m + \frac{\epsilon}{2}; \\ M - \frac{\epsilon}{2} &< f(t) < f(x) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

即

$$f(x) - \epsilon < m, \quad M < f(x) + \epsilon,$$

因此有

$$f(x) - \epsilon < m \leq \mu \leq M < f(x) + \epsilon,$$

即

$$|f(x) - \mu| < \epsilon.$$

即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu = f(x),$$

因此

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu = f(x).$$

□

注 2.3. 本证明用到的技巧：联立确界不等式 在证明 $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ 以及证明定积分存在的充要条件（定理 1.4）中也有应用。

至此我们得到重要结论，如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则由定理 1.6 可知， $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积。并且对 $[a, b]$ 上的任意一点 x ，积分 $\int_a^x f(t)dt$ 对 x 的导数等于被积函数在这点 x 的值 $f(x)$ 。换句话说：对于在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，一定存在原函数，且函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是一个例子。

注 2.4. 若 $f(x)$ 在区间 χ 上有可去间断点 x_0 ，且在 $\chi \setminus \{x_0\}$ 上连续，则可以通过修改定义的方法构造出连续函数 $g(x)$ ，因为改变有限个点不改变定积分的值，因此 $F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt$ ，此时 $F(x)$ 仍是可导的，但是在 x_0 的导数等于 $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ，即： $F(x)$ 在 x_0 可导，但是 $F(x)$ 在区间 χ 上不是 $f(x)$ 的原函数，或者说 $f(x)$ 在区间 χ 上没有原函数。

综上所述，我们有以下结论：

1. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则原函数存在， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 原函数，即 $F'(x) = f(x)$ ；
2. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有可去间断点 x_0 ，则原函数不存在， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 不是 $f(x)$ 原函数，但 $F(x)$ 可导，且 $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ；
3. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有跳跃间断点 x_0 ，则原函数不存在， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 不是 $f(x)$ 原函数，且 $F(x)$ 不可导；
4. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有无穷间断点 x_0 ，则原函数不存在， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 不存在（ $f(x)$ 不可积）；
5. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有振荡间断点 x_0 ，则原函数可能存在， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 可能是 $f(x)$ 原函数。