微积分 II: 多元函数微积分 I

Calculus II: Multivariable function calculus I

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 多元函数基本概念

1.1 平面点集

定义 1.1 (平面点集)**.** 坐标平面上具有某种性质的点的集合，称之为平面点集，记作

$$\chi = \{(x,y)|(x,y)\text{具有性质 } P\}.$$

定义 1.2 (邻域)**.** 设 $x_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是一正数. 与 x_0 点距离小于 δ 的点 $x(x,y)$ 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即：

$$U(x_0,\delta) = \{x||xx_0| < \delta\}.$$

点 x_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即：

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x|0 < |xx_0| < \delta\}.$$

下面用邻域描述点与点集之间的关系：

定义 1.3 (内点、外点、界点)**.** 任意一点 $x \in \mathbb{R}^2$ 与任意一点集 $\chi \subset \mathbb{R}^2$，必定有以下三种关系的一种：

1. 内点：若存在点 x 的某个邻域 $U(x)$，使得 $U(x) \subset \chi$，则称 x 为 χ 的内点；

2. 外点：若存在点 x 的某个邻域 $U(x)$，使得 $U(x) \cap \chi = \emptyset$，则称 x 为 χ 的外点；

3. 边界点：若点 x 的任意邻域内即含有属于 χ 的点，又含有不属于 χ 的点，则称 x 是 χ 的边界点.χ 的边界点全体称为 χ 的边界，记作$\partial\chi$.

χ 的内点必属于 χ，χ 的外点必不属于 χ，χ 的边界点可能属于 χ 可能不属于 χ.

定义 1.4 (聚点)**.** 如果对于任意 $\delta > 0$，点 x 的去心邻域 $\mathring{U}(x,\delta)$ 总有 χ 中的点，则称 x 为 χ 的聚点.

由聚点定义可知，χ 的聚点 x 可以属于 χ 也可以不属于 χ，聚点的定义实际上是排除了 χ 中的非稠密离散的点集部分.

定义 1.5. 根据点集所属点的特征，再来定义一些重要的平面点集：

1. 开集：如果点集 χ 的点都是其内点，则称 χ 为开集；

2. 闭集：如果点集 χ 的边界 $\partial\chi \subset \chi$，则称 χ 为闭集；

3. 连通集：对于 χ 中的任意两点 x_1, x_2，对于 $\forall\theta \in (0,1)$ 若 $x = \theta \cdot x_1 + (1-\theta) \cdot x_2 \in \chi$ 则称 χ 为连通集；

4. 开区域：连通的开集称为开区域；

5. 闭区域：开区域连通它的边界一起所构成的点称为闭区域；

6. 有界集：对于平面点集 χ，若存在某一正数 r，使得 $\chi \subset U(O,r)$，则称 χ 为有界集；

7. 无界集：一个集合不是有界集，则称之为无界集.

1.2 多元函数

定义 1.6 (二元函数). 设 χ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一个非空子集，称映射 $f:\chi\to\mathbb{R}$ 为定义在 χ 上的二元函数，记为

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in\chi.$$

其中 χ 称之为 f 的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量.

定义 1.7 (n 元函数). 设 χ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非空子集，称映射 $f:\chi\to\mathbb{R}$ 为定义在 χ 上的 n 元函数，记为

$$z=f(\vec{x}),\ \vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\chi.$$

1.3 多元函数的极限

假定函数 $f(x_1,...,x_n)$ 是在具有聚点 $X_0(a_1,a_2,...,a_n)$ 的某一点集 χ 内定义的，仿照一元函数定义，我们有

定义 1.8 (多元函数的极限). 若对于 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，只要异于点 $X_0(a_1,...,a_n)$ 的点 $X(x_1,...,x_n)$ 满足

$$|x_1-a_1|<\delta,\ ...,\ |x_n-a_n|<\delta,$$

即有

$$|f(x_1,...,x_n)-A|<\epsilon,$$

则称函数 $f(x_1,...,x_n)$ 当变量 $x_1,..,x_n$ 同时各趋于 $a_1,...,a_n$ 时以数 A 为极限.

这时假定点 $(x_1,...,x_n)$ 是取自 χ 且异于点 X_0，即当任意 $(x_1,...,x_n)$ 属于 X_0 充分小邻域:

$$(X_0-\delta,X_0+\delta;...;x_n-\delta,x_n+\delta),$$

且 $(x_1,...,x_n)\neq X_0$ 时，关于函数 f 的不等式应该成立.

函数的极限记为:

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,...,x_n)=A.$$

把点 $(x_1,...,x_n)$ 记为 X，则多元函数的极限可以使用几何的语言描述: 数 A 称为函数 $f(X)$ 当点 X 趋于 X_0 的极限，如果对于任意数 $\epsilon>0$，存在 $r>0$，只要距离 $\overline{XX_0}<r$，即有

$$|f(X)-A|<\epsilon.$$

同样需要假定 $X\in\chi$ 但是异于 X_0. 这样，对于集 χ 中位于 X_0 的充分小的球形去心邻域内的一起点，这个关于函数 f 的不等式成立，因此函数的极限也可以记为:

$$\lim_{X\to X_0} f(X)=A.$$

注 1.1. 需要注意的是,两种定义是等价的,因为若当 $\exists\delta$ 使得 $\forall X \in \{X|0<|x_i-a_i|<\delta, i=1,2,...,n\}$ 满足 $|f(X)-A|<\epsilon$ 时，只需令 $r=\delta$ 即有 $\forall X \in \{X|0<|XX_0|<r\}$ 满足 $|f(X)-A|<\epsilon$；反之，若当 $\exists r$ 使得 $\forall X \in \{X|0<|XX_0|<r\}$ 满足 $|f(X)-A|<\epsilon$ 时，只需令 $\delta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r$ 即有 $\forall X \in \{X|0<|x_i-a_i|<\delta, i=1,2,...,n\}$ 满足 $|f(X)-A|<\epsilon$.

由此我们可以建立函数的无穷极限的概念，在 $A=\infty$ 的场合，不等式

$$|f(x_1,...,x_n)-A|<\epsilon$$

只需改写为，对于任意 $M>0$ 有:

$$|f(x_1,...,x_n)|>M$$

即可.

当自变量 $x_1,x_2,...,x_n$ 中的某几个趋于无穷时，我们可以把域 χ 的聚点 $X_0(a_1,...,a_n)$ 的概念推过至这点的一切坐标（或其中的某几个）是无穷的情形，例如：若在域 χ 中能找到一切坐标都可任意大（正）的点，则点 $(\infty,...\infty)$ 称之为 χ 的聚点.

在这一假定下我们有定义：函数 $f(x_1,...,x_n)$ 对于一切变量 $x_1,...,x_n$ 都趋于 $+\infty$ 以数 A 为极限，如果对于任意数 $\epsilon>0$，存在 $\Delta>0$，只要

$$x_1>\Delta,\ x_2>\Delta,\ ...,\ x_n>\Delta$$

即有

$$|f(x_1,...,x_n)-A|<\epsilon.$$

并记为:

$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \cdots\cdots\\ x_n\to+\infty}} f(x_1,...,x_n)=A.$$

上面所考察的函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的极限，是当函数的一切变元同时趋于各自极限时所得出的，除此之外，尚需论及另一种极限，它是由诸变元依某种次序相继的各别趋于极限所得. 前者称为 n **重极限**，后者称为**累次极限**.

为简单起见，以讨论二元函数 $f(x,y)$ 为限. 假设变量 x,y 的变动区域 χ 是这样：x 可以（与 y 无关地）取集 $\mathcal{X}$ 内任意数值，$\mathcal{X}$ 以不属于它的点 a 作为聚点；同样，y 可以（与 x 无关地）取集 $\mathcal{Y}$ 内任意数值，$\mathcal{Y}$ 以不属于它的点 y 作为聚点. 这样区间 χ 可以记为 $\chi=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$，例如:

$$(a,a+H;b,b+K)=(a,a+H)\times(b,b+K).$$

若对 $\mathbb{Y}$ 内任意固定的 y，函数 $f(x,y)$（它将只是 x 的函数）在 $x\to a$ 是有极限存在，则这极限，一般的说，将与预先固定的 y 有关:

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y).$$

然后可以讨论函数 $\varphi(y)$ 在 $y\to b$ 时的极限:

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y),$$

这就是两个累次极限之一. 若趋于极限的过程由相反的次序进行，就得出另一累次极限:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

注 1.2. 累次极限不一定是相等的，例如在域 $\chi(0,+\infty;0,+\infty)$ 内令 $f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$，并取 $a=b=0$，则

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0}f(x,y)=y-1,\ \lim_{y\to 0}\varphi(y)=-1,$$

而同时却有

$$\phi(x)=\lim_{y\to 0}f(x,y)=x+1,\ \lim_{x\to 0}\phi(x)=1.$$

在交换关于两不同变量的极限过程应当小心谨慎，错误的推断就是常常发生于这种不合法的互换. 同时，分析中的许多问题正好与极限过程的互换有关，因此每一次互换的合法性应当特为证明.

下面的定理打开了建立这种手续的一条路，它同时建立了二重极限与累次极限之间的关系.

定理 1.1 (累次极限与 n 重极限的关系). *1)* 若（有限或无穷）的二重极限

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)$$

存在，*2)* 对 $\mathcal{Y}$ 内任意 y 有依 x 的（有限的）单重极限:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a}f(x,y)$$

存在，则累次极限

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)$$

必存在，且就等于二重极限.

证明. 当 A,a,b 有限时来证明该定理. 由累次极限的定义，对于任意给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<|x-a|<\delta$ 以及 $0<|y-b|<\delta$（此时 x 取自 $\mathcal{X}$，y 取自 $\mathcal{Y}$）即有

$$|f(x,y)-A|<\frac{\epsilon}{2}.$$

现在固定 y, 使满足不等式 $0<|y-b|<\delta$, 由于条件 2), 对于 $\epsilon=\frac{\epsilon}{2}$, 存在 $\delta'>0$, 只要 $0<|x-a|<\delta'$ 有

$$|\varphi(y)-f(x,y)|<\frac{\epsilon}{2},$$

因此有

$$|\varphi(y)-A|=|\varphi(y)-f(x,y)+f(x,y)-A|\le|\varphi(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<\epsilon,$$

又因为 y 满足 $0<|y-b|<\delta$，因此有

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y).$$

□

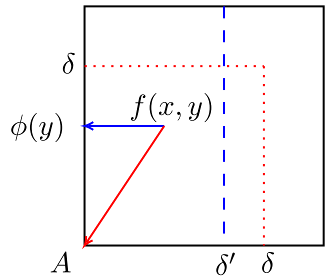
若与条件 1), 2) 同是有: 对 $\mathcal{X}$ 内任意 x 有依 y 的（有限的）单重极限:

$$\varphi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y)$$

存在，则由刚才所证明的，将 x,y 互换，即有另一累次极限

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

存在，而且也等于 A：在这情形，二累次极限相等.



注 1.3. 由已证明的定理可知，对于函数 $f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$，其两累次极限存在且不相等，则其二重极限必不存在.

因此，当二累次极限存在时，二重极限存在是二累次极限相等的充分条件，但并非必要条件，如函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$，其二重极限不存在，但累次极限都存在且相等于 0. 因为二重极限是以任意方式趋于点 (a,b) 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A，当 (x,y) 以某一条特定的曲线接近于 (a,b) 时，不能确定二重极限的存在，但是若二累次极限存在但不相等，则必有二重极限不存在.

若累次极限不存在（无穷），即对任意 $M>0$，存在 $\delta'>0$，使得 $\forall x\in(a,a+\delta')$ 有 $|f(x,y)|>M$，从而二重极限不存在. 综上：

1. 二累次极限存在且相等 $\Rightarrow$ 不能说明二重极限存在；
2. 二累次极限存在且不相等 $\Rightarrow$ 二重极限不存在；
3. 累次极限不存在 $\Rightarrow$ 二重极限不存在.

例 1.1. 求二重极限 $L=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$.

对于此类 $\frac{0}{0}$ 型二重极限，一种有力的方法是比较无穷小的阶. 首先明确和式无穷小阶的确定，对于两个不同阶的无穷小的和，易知和式的阶数等于阶数小的无穷小的阶数. 那么判断二元分式的极限只需判断分子分母之阶的情况，步骤如下

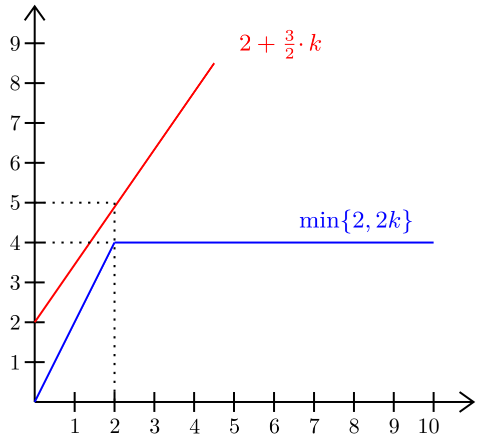
1. 以 x（或 y）为基准，令 $y=x^k$（或 $x=y^k$），其中 $k>0$;
2. 分析分子分母阶数关于 k 的函数关系，并作比较.

这一方法在判断二元函数在某一点的可微性也有应用.

对于本题，设 $y=x^k$，则有

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2|x|^{\frac{3}{2}k}}{x^4+x^2k} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^{2+\frac{3}{2}k}}{x^4+x^{2k}}. \end{aligned}$$

当 $x \to 0$ 时易知，若 $k < 2$ 则分母的阶为 $2k$，若 $k \geq 2$，则分母的阶为 4. 画出分子分母的阶与 k 的关系，如下：



从图可知，无论 y 是何阶无穷小，分子的阶数始终高于分母，因此有

$$L = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 |y|^{\frac{3}{2}}}{x^4 + y^2} = 0.$$

1.4 多元函数连续性

1.4.1 多元函数连续性的定义

设函数 $f(x_1, ..., x_n)$ 定义于 n 维空间的某一点集 χ，又设 $X'(x_1', ..., x_n')$ 是这集的聚点并属于这集.

若等式

$$L = \lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n'}} f(x_1, ..., x_n) = f(x_1', ..., x_n')$$

成立，就说函数 $f(x_1, ..., x_n)$ 在点 X' 处是连续的，否则就说函数在点 X' 处有间断.

函数在点 X' 处的连续性可以用 $\epsilon - \delta$ 语言表示如下：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \ \ ..., \ \ |x_n - x_n'| < \delta,$$

就能使

$$|f(x_1, ..., x_n) - f(x_1', ..., x_n')| < \epsilon.$$

成立，就说函数 $f(x_1, ..., x_n)$ 在点 X' 处是连续的.

或者另一说法：对于 $\epsilon > 0$ 存在 $r > 0$，只要距离

$$\overline{XX_1} < r,$$

就能使

$$|f(X) - f(X')| < \epsilon.$$

成立，就说函数 $f(x_1,...,x_n)$ 在点 X' 处是连续的.

在这时点 X 是假定属于集 χ 的，特别地还可以重合与 X'. 正因为函数在 X' 处的极限恰等于在这点处的函数值，所以通常 X 必须异于 X' 的要求即不需要了.

上面所确定的函数在点 X' 处的连续性可以说是**对变量 $x_1,...,x_n$ 全体的连续性**. 若它成立，那么同时有

$$\lim_{x_1\to x_1'} f(x_1,x_2',...,x_n') = f(x_1',x_2',...,x_n'),$$

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1'\\ x_2\to x_2'}} f(x_1,x_2,x_3',...,x_n') = f(x_1',x_2',...,x_n').$$

等等，因为此处我们只是按照一些特殊规律将 X 趋于 X'. 换言之，这函数对于每一变量 x_i，每一对变量 x_i,x_j 等等也都是连续的.

1.4.2 多元连续函数的运算与性质

这一小节的内容是考试的非重点，在此均不予证明.

多元连续函数有如下运算性质：

1. 多元连续函数的和、差、积仍为连续函数；连续函数的商在分母不为零时仍连续；
2. 多元连续函数的符合仍为连续函数；
3. 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的，所谓定义区域是指包含在定义域内的开区域或闭区域.

与一元函数类似的多元连续函数有如下定理

定理 1.2 (二元函数 · 布尔查诺-柯西定理). *设函数 $f(x,y)$ 在某一连通域 $\mathcal{D}$ 内有定义而且连续. 若在这域中二点 $M_0(x_0,y_0)$ 及 $M_1(x_1,y_1)$ 的函数值异号：*

$$f(x_0,y_0)<0,\ f(x_1,y_1)>0,$$

那么在这域中就能找出一点 $M'(x',y')$，在该处有：$f(x',y')=0$.

定理 1.3 (二元函数 · 布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理). *由任意有界点列*

$$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),...,M_n(x_n,y_n),...$$

中恒能选出收敛于极限点的部分点列

$$M_{n_1}(x_{n_1},y_{n_1}),M_{n_2}(x_{n_2},y_{n_2}),...,M_{n_k}(x_{n_k},y_{n_k}),...$$

$$(n_1<n_2<...<n_k<...,\ n_k\to+\infty).$$

定理 1.4 (二元函数 · 魏尔斯特拉斯定理). *若函数 $f(x,y)$ 是在有界闭域 $\mathcal{D}$ 内有定义而且连续的，则它必是有界的，即它的一切数值都包含在二个有限界限数值之间：*

$$m\le f(x,y)\le M.$$

若函数 $f(x,y)$ 是在有界闭域 $\mathcal{D}$ 内有定义而且连续的，则它在这区间内必能达到自己的上确界及下确界.

2 偏导数与全微分

为简单起见，本节内容仍以二元函数为例.

2.1 偏导数与偏微分

设在某一开区域 $\mathcal{D}$ 中有函数 $u=f(x,y)$；在这区域中取一点 $M_0(x_0,y_0)$. 若我们给 y 以常数值 y_0 而让 x 变动，则 u 成为变元 x 的函数（在 x_0 的邻域内）. 给数值 x_0 以一增量 Δx，则函数就得增量

$$\Delta_x u=\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

因为 $\Delta_x u$ 是仅由于一个变元 x 的数值变动而产生的，故它可以称为函数（关于 x）的**偏增量**. 导数按其定义即为极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

这导数就称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的**偏导数**，记为 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

我们可以看到，诸坐标不是被平等的看待的，因为 y_0 是固定的，而 x 则趋于 x_0 而变动.

例 2.1. *物理学中的克拉伯龙（Clapeyron）方程 $pV=RT$（R 为常数）确定量 V,p,T 中之一为其他二者的函数，则有：*

若以 T 为函数，则

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R},\ \frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}.$$

若以 V 为函数，则

$$\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2},\ \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}.$$

若以 p 为函数，则

$$\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V},\ \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{Rp}{V^2}.$$

由此得出热力学重要关系式：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-1.$$

注意：偏导数的雅克比计法（带有 ∂ 的分式）**只能看做记号，不能看成商或分数**. 在上例中所得关系式就表明了这一点，若可以把 $\frac{\partial p}{\partial V},\frac{\partial V}{\partial T},\frac{\partial T}{\partial p}$ 看成商，则其乘积为 1 而非 -1，这显然是错的.

偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 乘以任意增量 Δx 的积称为函数 u 关于 x 的**偏微分**，用记号

$$\mathrm{d}_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x$$

表示，若在此处把自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 理解为其增量 Δx，则上式可写为

$$\mathrm{d}_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x.$$

如同在一元情形，在固定点 (x_0,y_0) 取值的函数 u 的偏微分 $\mathrm{d}_x u$ 显然是自变量 Δx 的线性函数，数值 $u'_x\cdot\Delta x$ 是这个微分 (指 $\mathrm{d}_x u$) 相应于 Δx 的值 $\mathrm{d}_x u(\Delta x)$. 若 (x_0,y_0) 不固定，那么在这种情况下，值 (指 $\mathrm{d}_x u$ 的值) 依赖于三个自变量 $x,y,\Delta x$，这个依赖关系可以记作：

$$\mathrm{d}_x u=\mathrm{d}_x u(x,y,\Delta x)=u'_x(x,y)\cdot\Delta x.$$

与之对应的，自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 的定义是等式 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 这个等式首先表明 $\mathrm{d}x$ 是 Δx 的线性函数（斜率为 1），其次 $\mathrm{d}x$ 的值不依赖于自变量 x,y. 特别的，如果 Δx 固定，那么 $\mathrm{d}x$ 为常数，此时当 Δx 固定时 $\mathrm{d}_x u$ 是 x,y 的函数，遇到这种情况有时说自变量的微分是常值，而函数的微分在变动.

2.2 全增量与全微分

若由自变量的值 $x=x_0, y=y_0$ 出发，依次给三者以增量 $\Delta x,\Delta y$，则函数 $u=f(x,y)$ 得增量

$$\Delta u=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

它称之为函数的**全增量**.

在一元函数 $y=f(x)$ 的情形，假定在点 x_0 处存在（有限）导数 $f'(x_0)$，则对于函数的增量有公式：

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$$

式中 α 随 Δx 而变，且当 $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$. 现在考虑关于函数 $u=f(x,y)$ 的增量建立类似的公式.

定理 2.1 (多元函数可微的充分条件). *若偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 不仅在点 (x_0,y_0) 处存在，并在他的某一邻域内也存在. 此外，它们（作为 x,y）的函数，在点 (x_0,y_0) 处连续，则有：*

$$\begin{aligned}\Delta u=&\Delta f(x_0,y_0)=f'_x(x,y)\cdot\Delta x+f'_y(x,y)\cdot\Delta y\\&+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x.\end{aligned}$$

其中，α,β 随 $\Delta x,\Delta y$ 变动而变，且与它们同时趋于零.

证明. 把函数的全增量 Δu 改写为

$$\begin{aligned}\Delta u=&[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\\&+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\end{aligned}$$

其中每一个方括弧内的差表示函数仅关于一个变元的偏增量，因为我们假定在点 (x_0,y_0) 的邻域内偏导数存在，因此当 $\Delta x,\Delta y$ 足够小时，应用**有限增量公式**于每一个偏增量中，就得到：

$$\Delta u=f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,y+\Delta y)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y.$$

在此处令

$$\begin{aligned}f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,y+\Delta y)&=f'_x(x_0,y_0)+\alpha\\f'_y(x_0,y_0+\theta_2\cdot\Delta y)&=f'_y(x_0+y_0)+\beta.\end{aligned}$$

因为偏导数在点 (x_0,y_0) 连续，因此

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,y+\Delta y)-f'_x(x_0,y_0)=0;\\\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f'_y(x_0,y_0+\theta_2\cdot\Delta y)-f'_y(x_0+y_0)=0.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\Delta u &= f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\\ &= f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0+y_0)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y.\end{aligned}$$

证毕. □

注 2.1. 事实上，多元函数可微的充分条件可以放松到：偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在，且至少一个偏导数在 (x_0,y_0) 处连续.

设 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在，$f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则把函数的全增量 Δu 改写为

$$\begin{aligned}\Delta u =&[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)]\\ &+ [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]\end{aligned}$$

对上式应用拉格朗日中值定理，则

$$[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] = f'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x$$

因为 $f'_x(x,y)$ 连续，所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,y_0),$$

即

$$f'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,y_0)+\alpha$$

因此

$$[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$$

对下式应用导数定义

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]}{\Delta y} = f'_y(x_0,y_0) \Rightarrow \frac{[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]}{\Delta y} = f'_y(x_0,y_0)+\beta$$

因此

$$[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] = f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \beta\cdot\Delta y$$

综上

$$\begin{aligned}\Delta u &= f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\\ &= f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0+y_0)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y.\end{aligned}$$

由上述定理可得如下推论

定理 2.2 (多元函数连续的充分条件)**.** 若偏导数在已给点存在且连续，则函数本身在这点连续.

证明. 由定理2.1可知：

$$\Delta u = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0+y_0)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y.$$

所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta u = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0+y_0)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y = 0.$$

证毕. □

为了使定理2.1的结论更简洁，可引入两点 (x_0, y_0) 与 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 之间的距离的表达式

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

因此

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right) \cdot \rho$$

令 ε 表示括号内的式子，因此有

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \varepsilon \cdot \rho,$$

易知 $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon = 0$，因此定理2.1的结论可以写为：

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0 + y_0) \cdot \Delta y + o(\rho).$$

定理 2.3 (多元函数可微的必要条件). *若定义于开区域 $\mathcal{D}$ 中的二元函数 $u = f(x, y)$ 能将增量表示为*

$$\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho), \tag{1}$$

其中 A, B 分别为与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$，则在 (x_0, y_0) 处有关于每一元的偏导数，且

$$f'_x(x_0, y_0) = A,\ f'_y(x_0, y_0) = B.$$

证明. 对于增量

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

令 $\Delta y = 0$，则

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

因此

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

取极限有

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

同理 $f'_y(x_0, y_0) = B$，证毕. □

由定理2.1可知式1 成立的*充分条件*为：偏导数在点 (x_0, y_0) 邻域内存在，且在该点连续，当满足此条件时，由定理2.3可知此时它永远可以表示为

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\rho). \tag{2}$$

当式2成立时，称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，此时式子

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

即函数增量的线性部分，称为它的**全微分**，用记号 $\mathrm{d}u$ 或 $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ 表示.

注 2.2. 需要注意的是，函数在某点可微的充分条件是函数的各偏导数在该点邻域内存在，并在该点连续. 但是这条件并不是必要的，函数在某点可微的必要条件仅仅是函数的各偏导数在该点存在.

$$\begin{tikzcd}
\text{偏导连续} \arrow[r] & \text{函数可微} \arrow[r] \arrow[d] & \text{函数连续} \\
& \text{偏导存在} &
\end{tikzcd}$$

注 2.3. 综上，判定 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否可微可以按如下步骤:

1. 首先，$f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 是否存在，若不存在则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可微;
2. 若 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 存在，则可以利用可微的充分条件或定义判定 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否可微.

   $>$ 用可微的充分条件: $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否连续，若连续则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

   $>$ 用定义判定: 可微的定义为

   $$\Delta f = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + o(\rho) = \mathrm{d}f + o(\rho),$$

   因此只需计算极限

   $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] - [f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\rho}$$

   是否为 0，若为 0，则可微，否则不可微.

若视自变量 x 的微分为作为自变量 x, y 的函数 $x(x,y)$ 关于 x 的微分，则依全微分的定义有

$$\mathrm{d}x = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x.$$

这样我们变得到了 $\mathrm{d}x = \Delta x$，同理 $\mathrm{d}y = \Delta y$. 因此有

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) \cdot \mathrm{d}x + f'_y(x_0,y_0) \cdot \mathrm{d}y;$$

或

$$\mathrm{d}u = u'_x \cdot \mathrm{d}x + u'_y \cdot \mathrm{d}y.$$

即全微分等于偏微分的总和.

这样一来，函数在固定点 (x_0,y_0) 的全微分 $\mathrm{d}u$ 是两个自变量 $\Delta x, \Delta y$ 的线性函数，当点不固定时，$\mathrm{d}u$ 的值依赖四个变量: $\mathrm{d}u = \mathrm{d}u(x,y,\Delta x,\Delta y)$. 当增量 $\Delta x, \Delta y$ 固定时，可以将全微分仅仅视为自变量 x, y 的函数，当定义函数 u 的二阶微分 d^2u 时，就是这样做的.

3　复合函数求导

3.1　复合函数求导法则

按照多元复合函数的不同复合情形，分三种情形讨论:

3.1.1 （一）一元函数与多元函数复合的情形

定理 3.1. 设函数 $u=f(x,y)$ 定义域区域 $\mathcal{D}$ 内，而且每一变元 x,y 又各为某一区间内变量 t 的函数：

$$x=\phi(t),\ y=\psi(t).$$

若 u 有关于 x,y 的连续偏导数 u'_x,u'_y，且 x'_t,y'_t 都存在，那么复合函数 $u=f[\phi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

证明. 当给 t 以一增量 Δt 时，则 x,y 各得对应的增量 $\Delta x,\Delta y$，函数 u 也得增量 Δu.

因为 u 有关于 x,y 的连续偏导数 u'_x,u'_y，由定理2.1 可知，Δu 可以写为

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y.$$

且当 $\Delta x,\Delta y$ 趋于零时，α,β 也趋于零. 用 Δt 除等式两边，有

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

因为 x'_t,y'_t 存在，故对上式两边取极限有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

证毕. □

3.1.2 （二）多元函数与多元函数复合的情形

今考察另一种情形，变元 x,y 是关于 t,v 的二元函数，即

$$x=\phi(t,v),\ y=\psi(t,v).$$

除假定 u 具有连续偏导数外，我们还假定 x,y 关于 t,v 的偏导数*存在*.

把 ϕ,ψ 代入 $u=f(x,y)$ 后便得到一个二变元 t,v 的函数，此时偏导数 u'_t,u'_v 的求法与一元的情形无本质区别，因为在求二元函数偏导数时，我们总是固定其中一个变元，故所需处理的仍为一元函数，因此有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{3}$$

在这种情形下，还会遇到这种特殊的情况，即复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量，如设 $u=f(x,y,z)$ 具有连续偏导数，而 $z=\phi(x,y)$ 具有偏导数，则复合函数 $u=f(x,y,\phi(x,y))$ 具有对自变量 x,y 的偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

需要注意的是此时 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial f}{\partial x}$，前者是把复合函数 $u=f(x,y,\phi(x,y))$ 中的 y 看做不变而对 x 求偏导；而后者是把 $f(x,y,z)$ 中的 y,z 看做不变而对 x 求偏导，表示 f'_1 的概念.

3.2 微分形式不变性

设函数 $u=f(x,y)$ 有连续的偏导数 u'_x,u'_y，而 x,y 本身又是新变元 t,v 的函数：

$$x=\phi(t,v),\ y=\psi(t,v)$$

它们也有连续偏导数 x'_t,x'_v,y'_t,y'_v，因此不仅复合函数 u 关于 t,v 的偏导数存在，而且这些导数关于 t,v 都连续，这很容易由式3得到.

若将中间变量 x,y 视为自变量，则有 u 的全微分：

$$\mathrm{d}u=u'_x\cdot\mathrm{d}x+u'_y\cdot\mathrm{d}y.$$

若将 u 通过中间变量 x,y 换元成为最终自变量 t,v 的函数，则有 u 的全微分：

$$\mathrm{d}u=u'_t\cdot\mathrm{d}t+u'_v\cdot\mathrm{d}v.$$

但根据式3有

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t;$$

同样

$$u'_v=u'_x\cdot x'_v+u'_y\cdot y'_v.$$

代入以 t,v 为自变量的 $\mathrm{d}u$ 表达式中有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=u'_t\cdot\mathrm{d}t+u'_v\cdot\mathrm{d}v\\&=(u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t)\cdot\mathrm{d}t+(u'_x\cdot x'_v+u'_y\cdot y'_v)\cdot\mathrm{d}v\\&=u'_x\cdot(x'_t\cdot\mathrm{d}t+x'_v\cdot\mathrm{d}v)+u'_y\cdot(y'_t\cdot\mathrm{d}t+y'_v\cdot\mathrm{d}v)\\&=\mathrm{d}u=u'_x\cdot\mathrm{d}x+u'_y\cdot\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

我们得出多元复合函数对于自变量的全微分与对于中间变量的全微分有相同形式，这一性质称之为**(一阶）微分形式不变性**.

可能遇到 x,y 是一些不同变元的函数，例如

$$x=\phi(t,v),\ y=\psi(v,w),$$

此时只需令

$$x=\phi_1(t,v,w),\ y=\psi_1(t,v,w),$$

于是上述结论也就的适用于这种情形了.

由多元复合函数的一阶微分形式不变性，我们得到如下推论

定理 3.2. 当 x,y 为一元函数时，曾有下面的公式：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(cx)=c\cdot\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}(xy)=x\cdot\mathrm{d}y+y\cdot\mathrm{d}x,\\&\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot\mathrm{d}x-x\cdot\mathrm{d}y}{y^2}\end{aligned}$$

这些公式当 x,y 为任意个变元的函数时，即当

$$x=\phi(t,v,...),\ y=\psi(t,v,...)$$

时仍是正确的.

证明. 证明最后一个公式为例子，假设 x,y 为一元函数，则有

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot\mathrm{d}x-x\cdot\frac{1}{y^2}\cdot\mathrm{d}y=\frac{y\cdot\mathrm{d}x-x\cdot\mathrm{d}y}{y^2}.$$

根据微分的形式不变性，可以断定这个公式当 x,y 是任意个变元的函数时仍正确. □

全微分的上述性质以及由此得出的推论有助于我们简化求导的手续，如：计算 $\mathrm{d}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}&=\frac{(x^2+y^2+z^2)\cdot\mathrm{d}x-x\cdot\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\&=\frac{(-x^2+y^2+z^2)\cdot\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y-2xz\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.\end{aligned}$$