微积分 II: 级数

Calculus II: Series

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1　常数项级数的概念与性质

1.1　常数项级数的概念

如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...,$$

那么由这数列构成的表达式：

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots$$

叫做常数项的**无穷级数**，记作 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots,$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**. 做常数项级数的前 n 项和

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

则 s_n 称为级数的**部分和**，当 $n = 1, 2, 3, ...$ 时，他们构成一个新的数列 $s_1, s_2, s_3, ...$，根据这个数列有没有极限，我们引入无穷级数的收敛与发散的概念.

定义 1.1. *若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即*

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = s,$$

则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，这是极限 s 称为这级数的和，并写成：

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots;$$

若 $\{s_n\}$ 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.

有定义可知，级数与部分和极限有密切关系. 首先，若给定级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$，那么就有部分和数列 $\{s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\}$；其次，给定部分和数列 $\{s_n\}$，则有级数：

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \cdots = s_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i.$$

因此级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与部分和数列 $\{s_n\}$ 同时收敛或同时发散，且在收敛时有

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \lim_{n \to +\infty} s_n,$$

即

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

1.2 常数项级数的性质

定理 1.1. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛于和 s，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} ku_i$ 收敛于 ks.

证明. 设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} ku_i$ 的部分和分别为 s_n, σ_n，则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n,$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} ks_n = k \cdot \lim_{n\to+\infty} s_n = ks.$$

□

定理 1.2. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$，分别收敛于 s, σ，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.

证明. 设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} ku_i$ 的部分和分别为 s_n, σ_n，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i)$ 的部分和

$$\begin{aligned}\tau_n &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n + \sigma_n.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n + \sigma_n) = s + \sigma.$$

□

注 1.1. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i)$ 必收敛；若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均发散，则 $\sum_{i=1}^{\infty} (u_i \pm v_i)$ 敛散性不能确定.

定理 1.3. 在级数中，去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

证明. 只需证明在级数前面去掉或加上有限项不会改变级数的收敛性即可，设将级数:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \ldots$$

前 k 项去掉，则得级数:

$$u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \ldots$$

设新得级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + \cdots + u_{k+n},$$

则有 $\sigma_n = s_{n+k} - s_k$，而 s_k 为常数，所以当 $n \to \infty$ 时，σ_n 与 s_{n+k} 同时收敛或发散. □

定理 1.4. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \ldots$$

仍收敛，且其和不变.

证明. 设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列为 $\{s_n\}$，加括号后所成的级数的部分和数列为 $\{A_k\}$，则

$$A_1 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) = s_{n_1},$$
$$A_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k}.$$

因此数列 $\{A_k\}$ 为数列 $\{s_n\}$ 的一个子数列，由数列极限与子列极限的关系（定理**??**）可知，$\{A_k\}$ 与 $\{s_n\}$ 具有相同（有限或无穷）极限. □

注 1.2. 该定理该定理是充分的，而非必要的，即若加括号后所成级数收敛，是不能断定去括号后的级数收敛，但是有若加括号后的级数发散，则去括号后的级数必定发散.

定理 1.5 (级数收敛的必要条件)**.** 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则其一般项 u_n 收敛于 0.

证明. 设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和为 s_n，收敛于 s，则有 $u_n = s_n - s_{n-1}$，因此有

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

注意，该定理是必要而非充分的，即级数的一般项收敛于 0 时，不能推出其级数收敛，最著名的例子便是调和级数:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

下面利用反证法证明其发散:

证明. 设调和级数部分和为 s_n，且收敛于 s，则有

$$s_{2n} - s_n \to 0 (n \to \infty),$$

而又有

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

因此矛盾，证毕. □

定理 1.6 (柯西审敛原理 *)**.** 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充要条件为：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得任意 $n > N$，有对于任意正整数 p，都成立:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

证明. 设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和为 s_n，因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|,$$

由数列的柯西存在准则可知结论成立. □

2 常数项级数的审敛法

2.1 正项级数审敛法

对于各项均为非负数的级数，称之为**正项级数**.

定理 2.1 (有界审敛法). *正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充要条件为：它的部分和数列 s_n 有界.*

证明. 设级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$$

是一个正项级数，部分和为 s_n，易知数列 $\{s_n\}$ 为单调增加的级数：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \ldots,$$

首先，若 $\{s_n\}$ 有界，则根据单调有界必收敛定理可知，级数收敛与 s；其次，若正项级数收敛于 s，$(\exists M > 0, \text{s.t.} s \leq M)$，由数列极限的不等式性可知，$\exists N, \forall n > N, \text{s.t.} s_n \leq M$，即 $\{s_n\}$ 有界. □

定理 2.2 (比较审敛法). *设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均为正项级数，且 $u_n \leq v_n$. 则*

1) 若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

2) 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散，则 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散.

证明. 设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛于 σ，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和

$$s_n = u_1 + u + 2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sigma,$$

即数列 $\{s_n\}$ 有界，由有界审敛法（定理2.1）可知级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛.

反之，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$，则必有 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，否则若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，由上述论断则有 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，矛盾.

□

定理 2.3 (比较审敛法的推论). *设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均为正项级数，*

1. *如果 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，且存在正整数 N，使当 $n \geq N$ 时有 $u_n \leq kv_n$，$(k > 0)$ 成立，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；*

2. *如果 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，且存在正整数 N，使当 $n \geq N$ 时有 $u_n \geq kv_n$，$(k > 0)$ 成立，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.*

证明. 因为常数项级数每一项同乘不为零的常数 k 以及去掉级数前面部分的有限项不会影响级数的收敛性，由此当级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛时，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} kv_{N+i}$ 同样收敛，在由比较审敛法即可得证. □

例 2.1. *讨论 p 级数*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

的敛散性，其中 $p > 0$.

若 $p \le 1$，则有 $\frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}$，由比较审敛法可知，$p$ 级数发散；若 $p > 1$，则有对于任意 $k-1 \le x \le k$ 有 $\frac{1}{k^p} \le \frac{1}{x^p}$，因此

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^p}\mathrm{d}x \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,$$

由此 p 级数的部分和为

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x < 1 + \frac{1}{p-1}.$$

由此 $\{s_n\}$ 有界，由有界审敛法可知，p 级数收敛.

定理 2.4 (比较审敛法的极限形式). *设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均为正项级数，*

1. *如果 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，且 $0 \le l < +\infty$，则若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；*

2. *如果 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，且 $0 < l \le +\infty$，则若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.*

证明. 第一种情况，若 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ 存在有限极限 l，则对于 $\epsilon = 1$，则存在 N_1 使得 $n > N_1$ 有

$$\frac{u_n}{v_n} < l + 1,$$

即 $u_n < (l+1)\cdot v_n$，由比较审敛法的推论可知若 v_n 收敛，则 u_n 收敛，若 u_n 发散，则 v_n 发散；

第二种情况，易知其倒数若 $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n}$ 存在有限极限 $j = \frac{1}{l}$，且 $0 \le j < +\infty$，则对于 $\epsilon = 1$，则存在 N_2 使得 $n > N_2$ 有

$$\frac{v_n}{u_n} < j + 1,$$

即 $v_n < (l+1)\cdot u_n$，由比较审敛法的推论可知若 v_n 发散，则 u_n 发散. □

注 2.1. *由级数收敛的必要条件可知只有一般项趋于 0 的级数才有讨论其敛散性的意义，因此本定理告诉我们，比较审敛法实质上就是在比较当 $n \to \infty$ 时两级数一般项的无穷小的阶数.*

若当 $n \to \infty$ 时，若 u_n, v_n 是同阶无穷小，则其具有相同的敛散性；若 u_n 是 v_n 的高阶无穷小，则 v_n 收敛可推出 u_n 收敛，u_n 发散可推出 v_n 发散；若 v_n 是 u_n 的高阶无穷小，也有类似的结论.

注 2.2. *比较审敛法是充分条件,即若正项级数级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均收敛,是不能判断 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，且 $0 < l < +\infty$ 的.*

例 2.2. *判定级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.*

只需判断当 $n \to \infty$ 时，一般项 $\sin\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n}$ 的阶数，转而讨论当 $x \to 0$ 时无穷小 $\sin x$ 与 x 的阶数，易知：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \sim x,$$

即 $\sin x$ 与 x 同阶，因此 $\sin\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n}$ 有相同的敛散性，故级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散.

由此例我们可以看出，比较审敛法最重要的是适当的比较基准，最常用的基准级数是p *级数与等比级数.*

定理 2.5 (比值审敛法，达朗贝尔（d'Alembert）判别法)**.** *设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正向级数，如果*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

则有

1. *若 $\rho < 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；*
2. *若 $\rho > 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散；*
3. *若 $\rho = 1$，则比值审敛法无法确定级数的敛散性.*

证明. 第一种情况，若 $\rho < 1$. 则存在 $\epsilon > 0$，使得 $\rho + \epsilon < 1$，且对于这个 ϵ，存在 $N > 0$，使得 $\forall n > N$ 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \epsilon < 1,$$

令 $\rho + \epsilon = q$，即有

$$u_{N+2} < q \cdot u_{N+1}，u_{N+3} < q \cdot u_{N+2} < q^2 \cdot u_{N+1}, \ldots$$

因此有

$$u_{N+K} < q^{K-1} \cdot u_{N+1},$$

因为 $q < 1$，因此级数 $\sum_{i=1}^{\infty} q^i \cdot u_{N+1}$ 收敛，由比较审敛法的推论（定理2.3）可知级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

第二种情况同理，可以得到

$$u_{N+K} > q^{K-1} \cdot u_{N+1},$$

其中 $q > 1$，因此级数 $\sum_{i=1}^{\infty} q^i \cdot u_{N+1}$ 发散，由比较审敛法的推论可知级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散；

第三种情况，我们无法构造出与前两种相似的可以比较的等比级数，因此比值审敛法失效. □

定理 2.6 (根值审敛法，柯西判别法)**.** *设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正向级数，如果*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则有

1. *若 $\rho < 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；*
2. *若 $\rho > 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散；*
3. *若 $\rho = 1$，则比值审敛法无法确定级数的敛散性.*

证明. 第一种情况，若 $\rho < 1$. 则存在 $\epsilon > 0$，使得 $\rho + \epsilon < 1$，且对于这个 ϵ，存在 $N > 0$，使得 $\forall n > N$ 有

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \epsilon < 1,$$

令 $\rho + \epsilon = q$，即有 $u_n < q^n$，其中 $q < 1$，此定理便得证. □

注 2.3. *可知，比值审敛法与根值审敛法均为以等比级数为基准级数的比较审敛法的应用.*

定理 2.7 (极限审敛法). 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正向级数，如果

1. 如果 $\lim_{n\to+\infty} n\cdot u_n = l$，其中 $0 < l \le +\infty$，则有级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散；

2. 如果 $\lim_{n\to+\infty} n^p\cdot u_n = l$，其中 $0 \le l < +\infty$，且 $p > 1$，则有级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

证明. 易证. □

注 2.4. 可知，此定理是比较审敛法极限形式（定理2.4）下以 p 级数为基准级数时的应用.

2.2 交错级数审敛法

所谓交错级数，是指它的各项正负数交错的，从而可以写成下面的形式：

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots,$$

或

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

其中 $u_1, u_2, \dots$ 均为正数.

定理 2.8 (莱布尼兹审敛法). 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

1. $u_n \ge u_{n+1}$；

2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,

则有，级数收敛，且其和 $s \le u_1$，其余项 $|r_n| \le u_{n+1}$.

证明. 把级数前 $2n$ 项和写成两种形式：

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

以及

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n},$$

由于条件 1，可知两种形式中的括号内均为正数，由此可得的两结论：首先，$\{s_{2n}\}$ 是单调增的；其次，$s_{2n} \le u_1$，由单调有界数列必收敛定理（定理??）可知 s_{2n} 收敛，设收敛于 s.

因为 $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$，又因为条件 2，可知

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n},$$

由数列极限存在的充分必要条件（定理??），可知极限 $\lim_{n\to+\infty} s_n$ 存在，即交错级数收敛.

因为 $s_{2n} \le u_1$，有数列极限不等式性（定理??）可知

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} \le u_1.$$

由于余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$，因此 r_n 同样为交错级数，即 $|r_n| \le u_{n+1}$. □

注 2.5. 莱布尼兹定理是充分条件，即若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，是不能判断一般项 u_n 单调递减的，如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛但是其一般项 $\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 不单调递减.

2.3 绝对收敛与条件收敛

现在讨论一般的级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \dots$$

它的各项为任意实数，如果 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 各项绝对值构成的正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ 收敛，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ **绝对收敛**；如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，而 $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ 发散，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ **条件收敛**.

定理 2.9 (条件收敛与绝对收敛的关系). *若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 绝对收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 必收敛.*

证明. 构造数列

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot (u_n + |u_n|),$$

易知：$0 \le v_n \le |u_n|$，因为 $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ 收敛，所以 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，因此 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，证毕. □

对于数列 v_n 的构造方法，我们有必要深入探讨，因为

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot (u_n + |u_n|) \begin{cases} u_n, & u_n \ge 0, \\ 0, & u_n < 0. \end{cases}$$

因此级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 是把级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 中的负项换成 0 而得的，也就是级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 中全体正项所构成的级数，类似的，令

$$w_n = \frac{1}{2} \cdot (|u_n| - u_n),$$

可知级数 $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$ 是级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 中全体负项绝对值所构成的级数,并由此有相似的结论:若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 绝对收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$ 收敛，即 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛.

综上：

1. *若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 绝对收敛，则正项部分数列 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 与负项部分数列 $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$ 均收敛；*
2. *若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 条件收敛，则正项部分数列 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 与负项部分数列 $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$ 均发散.*

条件收敛与绝对收敛的关系告诉我们若想判定一般常数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的敛散性，可以判断其一般项绝对值构成的级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ 的敛散性，若该正项级数收敛，则该一般常数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛. 由此我们可以用正项级数的诸多判别法来判断一般常数项级数的敛散性.

注 2.6. *但是若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ 发散，无法说明 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.*

不过如果使用比值判别法或根值判别法得到 $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho > 1$ 或 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$，则可以得到结论：$\lim_{n\to+\infty} |u_n| \ne 0$ 进而得到 $\lim_{n\to+\infty} u_n \ne 0$，由常数项级数收敛的必要条件（定理1.5）可知 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.

定理 2.10 (绝对收敛级数的可交换性). *绝对收敛级数经改变项的位置后构成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.*

定理 2.11 (绝对收敛级数的乘法). *设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均绝对收敛，其和分别为 s, σ，则它们的柯西乘积：*

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \dots$$

也绝对收敛，且其和为 $s\sigma$.

3 幂级数

3.1 函数项级数的概念

如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

那么由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

称为定义在区间 I 上的**函数项无穷级数**.

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$，函数项级数成为常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

若该级数收敛，则称 x_0 为函数项级数的**收敛点**，否则即称为**发散点**，收敛点构成的全体称为**收敛域**.

对应于收敛域内的任意一点 x，函数项级数成为一收敛的常数项级数，因而有一确定的和 s，这样在收敛域上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$，通常称为函数项级数的**和函数**. 该函数的定义域即是级数的收敛域，并写成

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

把函数项级数的前 n 项和记作 $s_n(x)$ 则在收敛域上有

$$\lim_{n \to +\infty} s_n(x) = s(x).$$

记 $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ 为函数项级数的**余项**，并在收敛域上有

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0.$$

3.2 幂级数的收敛性

函数项级数一种常见的形式是级数的各项是常数乘以幂级数的函数项级数，称为**幂级数**，其形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

其中 $a_0, a_1, \dots$ 称为幂级数的系数. 我们现在来讨论对于一个给定的幂级数，其收敛域是怎样的.

定理 3.1 (阿贝尔 (Abel) 定理)**.** *如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 当 $x = x_0$ 时收敛，则适合不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛；反之若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 在当 $x = x_0$ 时发散，则适合不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数发散.*

证明. 设 x_0 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的一个收敛点，即级数

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \dots$$

收敛，根据级数收敛的必要条件，可知有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0,$$

因此数列 $\{a_n x_0^n\}$ 有界，即存在 M 使得

$$|a_n x_0^n| \le M.$$

则对与幂级数的一般项的绝对值有

$$|a_n x^n| = \left| a_n \cdot x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n \cdot x_0^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \le M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

所以当 x 满足 $|x| < |x_0|$ 时，有 $\frac{x}{x_0} < 1$，由比较审敛法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.

设幂级数在点 $x = x_0$ 处发散，若存在点 x' 满足 $|x'| > |x_0|$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x'^n$ 收敛，则 x_0 满足 $|x_0| < |x'|$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，矛盾.

□

注 3.1. 由阿贝尔定理可知，若幂级数在点 x_0 处条件收敛，则 x_0 为幂级数收敛区间的一个端点.

定理 3.2 (阿贝尔定理的推论). *若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 不是仅在点 $x = 0$ 处收敛，也不是在整个数轴上处处收敛，则必有一个确定的正数 R 使得*

1. *当 $|x| < R$ 时，幂级数绝对收敛；*
2. *当 $|x| > R$ 时，幂级数发散；*
3. *当 $|x| = R$ 时，幂级数可能收敛，也可能发散.*

正数 R 称为幂级数的**收敛半径**,开区间 $(-R, +R)$ 称为幂级数的**收敛区间**,由幂级数在点 $x = \pm R$ 上的敛散性可以决定其**收敛域**是 $(-R, R], (-R, +R), [-R, +R), [-R, +R]$ 四个区间之一.

定理 3.3. *如果*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho,$$

其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的相邻两项的系数，那么幂级数的收敛半径为

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \ne 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty, \end{cases}$$

证明. 考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的各项绝对值构成的幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n|$. 其相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|.$$

若：$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\ (\rho \neq 0)$ 存在，则由比值审敛法可知，当 $\rho \cdot |x| < 1$ 时，即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 绝对收敛，当 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 发散，因此其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$.

若 $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho = 0$ 或 $+\infty$ 时同理. □

注 3.2. 注意该定理的证明思想，即通过比值审敛法构造幂级数系数、x 与幂级数收敛性之间的关系，当本定理不能直接应用时，这一思想可以帮助解题.

例 3.1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2} \cdot x^{2n}$ 的收敛半径.

解. 注意到该级数缺少奇次幂的项，因此不能直接利用上述定理，参考其思想，我们利用比值审敛法求收敛半径：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} \cdot x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot x^{2n}} = 4|x|^2,$$

因此当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时，幂级数收敛，当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时，幂级数发散，因此收敛半径为 $R = \frac{1}{2}$. □

3.3 幂级数的运算

定理 3.4 (幂级数的四则运算法则)**.** 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$，与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ 分别在区间 $(-R_1, R_1)$ 以及 $(-R_2, R_2)$ 内收敛，令 $(-R, R) = (-R_1, R_1) \cap (-R_2, R_2)$. 则有

1. 加减法：
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot x^n$$
在 $(-R, R)$ 上成立；

2. 乘法：
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n =& a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 \\ &+ \cdots + \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} x^n + \ldots\end{aligned}$$
在 $(-R, R)$ 上成立；

3. 除法，若 $b_0 \neq 0$，则
$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n,$$
其中 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ 的收敛域可能比 $(-R, R)$ 小得多.

证明. 略. □

定理 3.5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

定理 3.6. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式：

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n \cdot t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (x \in I).$$

幂级数和函数与逐项积分后所得的幂级数和函数有相同的收敛半径.

定理 3.7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，并有逐项求导公式：

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \ (|x| < R).$$

幂级数和函数与逐项求导后所得的幂级数和函数有相同的收敛半径.

由上述定理可知幂级数和函数在其收敛区间内有任意阶导数.

注 3.3. 幂级数可以逐项积分或逐项求导的性质在求某一幂级数和函数的时候很有作用. 如对于某一幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 不易于直接求和函数，则可对其逐项积分或求导，得到新的易于求和函数的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$，求得其和函数为 $\psi(x)$，则在对其求导或积分变得到原幂级数的和函数 $s(x)$.

3.4 函数展开成为幂级数

定义 3.1 (泰勒级数)**.** 幂级数：

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数.

定理 3.8. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有任意阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $r_n(x)$ 满足

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0, \ x \in U(x_0).$$

证明. 设 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式为：

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

其中

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

而余项为

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

因此即有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f(x), \ x \in U(x_0) \\
\Rightarrow &\lim_{n \to +\infty} p_n(x) = f(x), \ x \in U(x_0) \\
\Rightarrow &\lim_{n \to +\infty} [p_n(x) - f(x)] = 0, \ x \in U(x_0) \\
\Rightarrow &\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0, \ x \in U(x_0).
\end{aligned}$$

□

由此我们得到将函数 $f(x)$ 在某一区间内展开成为幂级数的**直接法**，除了要计算其各阶导数以外，还需验证其 n 阶余项 $r_n(x)$ 在该区间内的极限是否为零，易知，余项有如下形式

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1},$$

因此需要验证如下极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} = 0$$

是否成立.

注 3.4. 此处的极限是 $n \to \infty$ 而非我们在泰勒公式中的 $x \to x_0$，在这里我们要求对于 $\forall x \in U(x_0)$ 在 $n \to \infty$ 时都有 $r_n(x) = 0$，或者说，我们要求 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内任意阶可导.

验证余项极限为 0 是一件较为复杂的事情，因此我们介绍**间接法**. 间接法即通过对已知级数进行因式分解、加减配凑、四则运算、逐项积分、逐项求导、变量代换等方式将所给函数转化为幂级数.

常用的已知幂级数有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \ (-1 < x < 1).$$

由这三者可推出

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (-1 < x < 1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \ (-1 < x \le 1),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \ (-1 < x < 1),$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \ (-1 \le x \le 1).$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

例 3.2. 将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解. 因为

$$\begin{aligned}\frac{x}{2+x-x^2}&=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+2\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)\\&=\frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}.\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1},\ |x|<1.$$

□

3.5 级数求和

幂级数遇到脚标不匹配时常用三种方法:

1. 加减项

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n+u_0x^0=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n,$$

   常在 $u_0=0$ 时使用;

2. 串位调整

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^{n+1};$$

3. 提除项

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^n;$$

当脚标匹配后，利用逐项积分、逐项求导等方法，可以将所求幂级数联系到易知和函数的幂级数，从而得到所求幂级数的和函数。