微积分 I: 导数与微分

Calculus I: Derivatives and differentials

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 导数与微分的概念

1.1 导数

定义 1.1 (导数). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域有定义，且极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导. 称 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的导数.

或者定义为：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域有定义，且极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导. 称 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的导数.

定义 1.2 (单侧导数). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域有定义，且极限 $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右可导. 若 $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左可导.

称 $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数；称 $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数.

或者定义为：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域有定义，且极限 $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右可导. 若 $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左可导.

称 $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数；称 $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数.

定理 1.1 (导数存在的充要条件). $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 的左右导数都存在.

证明. 由极限存在的充要条件（**??**）可证. □

注 1.1. 对于一些特殊的情况，如 $f(x)$ 在 0 点可导，且 $f(0)=0$，则 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$，因只有当 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时为与 x 同阶或高阶的无穷小时，$f'(0)$ 才存在，因此对于形如 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\neq 0$ 的函数，可立即知其在 0 处不可导.

这一性质的推论是，对于函数 $y=x^p,(0<p<1)$，在 0 点右导数不存在.

定理 1.2 (函数可导与连续的关系). 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Rightarrow$ 连续.

证明. 因为 $f(x)$ 在点 x_0 可导，故 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在，即 $\lim_{h\to 0}f(x_0+h)-f(x_0)=0$，即 $f(x)$ 在点 x_0 连续. □

注 1.2. $f(x)$ 在点 x_0 处可导代表 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 邻域内有定义，但无法说明在该点邻域内连续.

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可二阶导代表 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，且 x_0 邻域内连续，

以及 $f(x)$ 在 x_0 邻域连续.??

1.2 微分

定义 1.3 (微分). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域有定义，点 x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，若存在与 Δx 无关的常数 A，使得函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，则称为 $f(x)$ 在点 x_0 可微；而称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 再点 x_0 对应自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

定理 1.3 (函数可微的充要条件). $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 可导.

证明. 充分性：因为 $f(x)$ 在点 x_0 可微，所以存在与 Δx 无关的常数 A ，使得函数的增量 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ ，即：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

即，$f(x)$ 在点 x_0 可导，导数 $f'(x_0) = A$.

必要性：若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $\exists M$ 使得 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = M$ ，由极限与无穷小的关系（定理**??**）可知：在 $\Delta x \to 0$ 的过程中，存在无穷小量 $\alpha(\Delta x) \to 0$ ，使得 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = M + \alpha(\Delta x)$ ，即 $\Delta y = M\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

因为 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0$ ，所以 $\Delta y = M\Delta x + o(\Delta x)$ ，即 $f(x)$ 在点 x_0 可微.

□

注意. *1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 可微，其微分微 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$.*

2. 当 $f'(x) \neq 0$ 时，$\Delta y \sim \mathrm{d}y$，因此微分的概念常用与误差估计.

证明. 当 $f'(x) \neq 0$ 时有：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

□

3. 微分的概念还可在泰勒展开中体现，其中 $o(\Delta x) = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot \Delta x^3 + \ldots$

2 求导方法

2.1 导数四则运算法则

定理 2.1 (导数四则运算法则)**.** *若函数 $u = u(x), v = v(x)$ 都在点 x 具有导数，那么他们的和、差、积、商（分母为零的点除外）都在点 x 具有导数，且：*

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

3. $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ （$v(x) \neq 0$）.

证明. 1. 易证.

2.

$$
\begin{aligned}
&[u(x)\cdot v(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x+h)\cdot v(x)+u(x+h)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot(v(x+h)-v(x))+v(x)(u(x+h)-u(x))}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot(v(x+h)-v(x))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x)\cdot(u(x+h)-u(x))}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x)\cdot(u(x+h)-u(x))}{h}\\
&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}\\
&=\frac{1}{v^2(x)}\cdot\left\{\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{h}\right\}\\
&=\frac{1}{v^2(x)}\cdot\left\{\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{h}\right\}\\
&=\frac{1}{v^2(x)}\cdot\left\{v(x)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right\}\\
&=\frac{u'(x)v(x-v'(x)u(x))}{v^2(x)}.
\end{aligned}
$$

□

注意. *证明 2. 证明 3. 中的方法经常用到，在定理**??**中有应用.*

2.2 复合函数求导法则

定理 2.2 (复合函数求导法则)**.** *若 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，其导数为：$(f[g(x)])'=f'(u)\cdot g'(x)$ 或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.*

证明. 定义 $s(h)=g(x+h)-g(x)$，因为 $u=g(x)$ 在点 x 可导，则 $u=g(x)$ 在点 x 连续，因此 $\lim_{h\to 0}s(h)=0$. 因为 $s(h)=g(x+h)-g(x),g(x)=u$ ，所以 $g(x+h)=u+s(h)$ ，因此 $(f[g(x)])'=\lim_{h\to 0}\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(u+s)-f(u)}{s}\cdot\frac{s}{h}$. 因为 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，所以 $(f[g(x)])'=\lim_{h\to 0}\frac{f(u+s)-f(u)}{s}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{s}{h}$. 又因为复合连续函数极限运算法则（定理**??**）可知：$(f[g(x)])'=\lim_{s\to 0}\frac{f(u+s)-f(u)}{s}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(u)\cdot g'(x)$. □

注 2.1. *若 $f'(u_0),g'(x_0)$ 都存在，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 可导，其导数为：$(f[g(x_0)])'=f'(u_0)\cdot g'(x_0)$；*

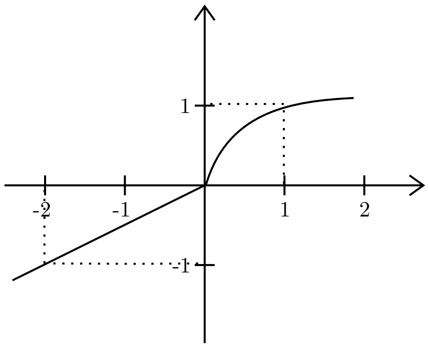
若 $f'(u_0),g'(x_0)$ 至少一个不存在，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 不一定不可导，需要先求 $y=f(g(x))$ 的表达式，在进一步考察.

求 $y=f(g(x))$ 的表达式时应该：按照外层函数的定义域的分段去划分内层函数的值域，再与内层函数的定义域结合，从而得到符合的定义域分段，如：

$$y=f(u)=\begin{cases}-u, & u<-1\\ u^2, & -1\le u<1\\ u^3, & 1\le u.\end{cases}$$

以及

$$u=g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\ge 0\end{cases}$$



有外层函数定义域对内层函数值域的分段可将内层函数的定义域分为 $(-\infty,-2,],(-2,1],(1,+\infty)$，结合内层函数的定义域分段可得复合函数的定义域分段为 $(-\infty,-2],(-2,0],(0,1],(1,+\infty)$，以及复合函数：

$$y=f(g(x))=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}, & x\le -2\\ \dfrac{x^2}{4}, & -2<x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ x^{\frac{3}{2}}, & x>1\end{cases}$$

例 2.1 (幂指函数求导方法)**.** 设 $f(x)>0, f(x), g(x)$ 均可导，求幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}$ 的导数，常用下面两种方法.

1. $y=f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$ ，由复合函数求导法则可知：
   $y'=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\cdot(g(x)\ln f(x))'=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\cdot[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f'(x)].$
2. 对数求导法. $\ln y=g(x)\ln f(x)$ ，由隐函数求导法则可知：$\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x).$
   所以 $y'=y\cdot[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)]=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\cdot[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f'(x)].$

注意. 对于多项乘积的函数，对数求导法是常用的技巧. 如：设 $y=(x-1)[(3x+1)(2-x)]^{\frac{1}{3}}$，求 y'.

因为 $\ln y=\ln(x-1)+\frac{1}{3}\cdot[\ln(3x+1)+\ln 2-x]$ ，所以 $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\cdot[\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{2-x}]$ ，即 $y'=(x-1)[(3x+1)(2-x)]^{\frac{1}{3}}\cdot\{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\cdot[\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{2-x}]\}.$

2.3 微分的形式不变性

假设可导函数 $y=y(x),x=x(t)$ 可以组成复合函数 $y=y(t)$. 则由复合函数求导法则（定理2.2）可知：

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t. \tag{1}$$

考察这样两个函数 $y=y(x);y=y(t)$，由微分定义可知：

$$\mathrm{d}y=y'_x\cdot\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\mathrm{d}y=y'_t\cdot\mathrm{d}t \tag{3}$$

将公式 (1)：$y'_t=y'_x\cdot x'_t$. 带入 (3) 有：

$$\mathrm{d}y=y'_x\cdot x'_t\cdot\mathrm{d}t \tag{4}$$

因为 $x=x(t)$，故：$\mathrm{d}x=x'_t\cdot\mathrm{d}x$ 带入 (4) 有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=y'_x\cdot x'_t\cdot\mathrm{d}t\\&=y'_x\cdot\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5}$$

可知式 (5) 等于式 (2)，这就是微分的形式不变性. 即：*微分的形式即使在原来的自变量（x）换成新的自变量（t）以后仍然可以保持着*. 我们永远可以把 y 的微分 $\mathrm{d}y$ 写成式 (2) 的形式，无论 x 是否为自变量. *函数对自变量的微分 $\mathrm{d}y(t)$，可以表示为函数对中间函数的导数 y'_x 与中间函数与自变量的微分 $\mathrm{d}x(t)$ 的乘积*，这性质就称为微分的形式不变性. 若选取 t 为自变量，则差别仅为 $\mathrm{d}x$ 并不表示任意增量 Δx，而是表示 x 作为 t 的函数时的微分.

继续考察式 (5)，在该式中 y,x 都是 t 的函数，这就给出了求解 y 对 x 导数 y'_x 的方法，即：

$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}x(t)}=\frac{y'_t(t)\cdot\mathrm{d}t}{x'_t(t)\cdot\mathrm{d}t}=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \tag{6}$$

式 (6) 中第一个等号是微分形式不变性；第二个等号是微分的定义；第三个等号是简单的代数运算. 式 (6) 表示：对于函数 $y=y(x)$ 而言，依任意变量而取的微分可以表示导数.

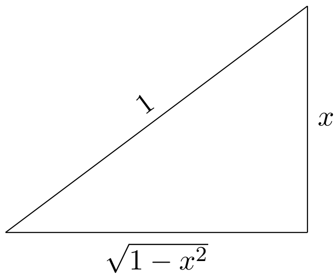
综上，本小节的一般形式可以表示为，若：

$$\begin{aligned}y&=f_{(0)}\circ f_{(1)}\circ f_{(2)}\cdots\circ f_{(n)}(t)\\x&=f_{(1)}\circ f_{(2)}\cdots\circ f_{(n)}(t)\\\Rightarrow y'_x&=\frac{\mathrm{d}f_{(0)}}{\mathrm{d}x}\\\Rightarrow y'_x&=\frac{\left\{f_{(0)}\circ f_{(1)}\circ f_{(2)}\cdots\circ f_{(n)}(t)\right\}'}{\left\{f_{(1)}\circ f_{(2)}\cdots\circ f_{(n)}(t)\right\}'}\end{aligned}$$

例 2.2. $y=\sqrt{1-x^2}(-1<x<1)$，求 y'_x

分析. 令 $x=\sin t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，则 $y=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$. 故 $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\tan t=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

注 2.2. 利用微分的形式不变性求导数 y'_x，关键在于构造函数，使 x 为 y 与 t 的中间变量，且 $y(t),x(t)$ 的导数好求；若使 t 为 y 与 x 的中间变量来求 y'_x，则利用的是复合函数求导法则.



2.4 参数方程求导法则

由微分形式不变性可知，对于参数方程

$$\begin{cases} y = \phi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$$

有

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}$$

若令 $y'_x = \rho(t)$，则由微分形式不变性可知，$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}x} \cdot x'_t$，因为 $\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}x} = y''_x$，因此我们有参数方程的高阶导数求法

$$y''_x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y'_x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\frac{y'_t}{x'_t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\frac{y'_t}{x'_t}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{\phi''(t)\psi'(t) - \psi''(t)\phi'(t)}{\psi^3(t)}.$$

2.5 反函数求导法则

若函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调、可导，且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数 $x = \phi(y)$ 在对应区间内可导，且

$$\phi'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

其中 $y = f(x)$. 反函数二阶导数为

$$\phi''(y) = \frac{\mathrm{d}\phi'(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

2.6 隐函数求导法则

隐函数求导可以用两种方法：（1）复合函数求导，代入相关参数；（2）隐函数求导公式：

隐函数求导公式的推导详见隐函数可微性定理（定理**??**），此处仅给出隐函数求导公式：对于隐函数 $F(x,y)=0$，有：

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y};$$

以及其高阶导数求法：

$$\begin{aligned} y''_x &= -\frac{(F'_{xx} + F'_{xy} \cdot y'_x) \cdot F'_y - (F'_{yx} + F'_{yy} \cdot y'_x) \cdot F'_x}{F'^2_y} \\ &= -\frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}. \end{aligned}$$

注 2.3. 注意公式中 F 的脚标仅是位置变量，而非全局变量，$F_x(x,y)=F_1(x,y), F_y(x,y)=F_2(x,y)$，因此 $\frac{\partial F_1}{\partial x}=F_{11}(x,y)+F_{12}(x,y)\cdot y'_x$.

3 导数在经济学中的应用

3.1 经济学中的常见函数

1. 需求函数：$x=\phi(p)$，其中 x 为某件产品的需求量，p 为价格；
2. 价格函数：$p=\phi^{-1}(x)$，价格函数是需求函数的反函数；
3. 供给函数：$x=\psi(p)$，其中 x 为某件产品的供给量，p 为价格；
4. 成本函数：$C=C(x)=C_1+C_2(x)$，其中 C_1 为固定成本，C_2 为变动成本；
5. 平均成本：$AC=\frac{C}{x}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2(x)}{x}$.
6. 收益函数：$R(x)=p\cdot x$，其中 x 为某件产品的销售量，p 为价格；
7. 利润函数：$L(x)=R(x)-C(x)$ 其中 x 为某件产品的销售量.

3.2 边际分析与弹性分析

设 $f(x)$ 可导，则经济学中称 $f'(x)$ 为边际函数.$f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的边际值. 经济学中常见的边际分析如下：

1. 边际成本：设成本函数为 $C=C(x)$（x 为产量），则边际成本函数为 $MC=C'(x)$；
2. 边际收益：设收益函数为 $R=R(x)$（x 为产量），则边际收益函数为 $MR=R'(x)$；
3. 边际利润：设利润函数为 $L=L(x)$（x 为销量），则边际利润函数为 $ML=L'(x)$.

设 $f(x)$ 可导，则称 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$ 为函数 $f(x)$ 由 x 变到 $x+\Delta x$ 时的相对弹性，称

$$\eta(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=f'(x)\frac{x}{y}=f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

为函数 $f(x)$ 的弹性函数. 它在经济学中表示函数 $f(x)$ 在 x 处的相对变化率.

经济学中常见的弹性分析如下：

1. 需求弹性分析：设需求函数为 $Q=\phi(p)$，则需求的价格弹性为 $\eta_D=\phi'(p)\frac{p}{\phi(p)}$. 由于 $\phi(p)$ 单调减少，因此 $\phi'(p)<0$，即 $\eta_D<0$.

   经济学中对需求价格弹性的解释是：当价格为 p 时，若提价（降价）1%，则需求将减少（增加）$|\eta_D|$%.

   有些试题中规定需求价格弹性为正，此时需求价格弹性公式为

   $$\eta_D=-\phi'(p)\frac{p}{\phi(p)}.$$

2. 供给弹性分析：设供给函数为 $Q=\psi(p)$，则需求的价格弹性为 $\eta_S=\psi'(p)\frac{p}{\psi(p)}$. 由于 $\psi(p)$ 单调增加，因此 $\psi'(p)>0$，即 $\eta_S>0$.

   经济学中对供给价格弹性的解释是：当价格为 p 时，若提价（降价）1%，则供给将增加（减少）η_S%.

注 3.1. 边际分析对量；弹性分析对价.

例 3.1. 设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$，则该产品的边际收益为?

解. 收益函数为 $R(Q)=Qp=Q(20-\frac{Q}{2})=-\frac{1}{2}Q^2+20Q$，因此边际收益为

$$MR=\frac{R(Q)}{Q}=20-Q.$$

□

例 3.2. 设某产品需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格的弹性为 $\eta=0.2$，当需求量为 10000 件时，价格增加一元会使收益增加多少?

解. 需求价格弹性为

$$-\eta=Q'(p)\frac{p}{Q(p)}=0.2$$

因此有 $pQ'(p)=-0.2Q(p)$. 收益函数为: $R(p)=Q(p)p$, 因此

$$R'_p=Q(p)+Q'(p)p=Q(p)-0.2Q(p),$$

因此价格增加一元会使收益增加

$$\mathrm{d}R=R'_p\mathrm{d}p=[Q(p)-0.2Q(p)]\mathrm{d}p=(10000-2000)\times 1=8000.$$

□

注 3.2. 收益函数、成本函数、利润函数都是即是量 Q 的函数，也是价 p 的函数，一般而言边际分析对量 Q 求偏导；弹性分析对价 p 求偏导，但是本题中指明问价格对收入的边际影响，因此对价求偏导.

一定注意，$\phi'(p)\frac{p}{\phi(p)}<0$（其中 $\phi(p)$ 为需求函数），至于它是不是需求价格弹性要看题目则是否要求需求价格弹性为正.

4 微分学基本定理

4.1 费马 (P.Fermat) 定理

引理 4.1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 有有限导数，若 $f'(x_0)>0$ ，则 $\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta),\text{s.t.}f(x)>f(x_0)$ ；且 $\exists\mu>0,\forall x\in(x_0-\mu,x_0),\text{s.t.}f(x)<f(x_0)$. 若 $f'(x_0)<0$，结论类似.

证明. 设 $f'(x_0)=a>0$ ，即 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a>0$ ，令 $\epsilon=\frac{a}{2}$ ，则 $\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta),\text{s.t.}|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a|<\epsilon=\frac{a}{2}$. ，即 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\frac{a}{2}>0$ ，因为 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ ，所以 $x-x_0>0$ ，即 $f(x)-f(x_0)>0.$

利用极限不等式性也可证明，因为极限 $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ 所以存在邻域 $(x_0,x_0+\delta)$ 使得 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0.$ □

注 4.1. 需要注意，此定理只能说明 f 在 x_0 某去心邻域内的值 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 的关系（注意是严格不等号），不能说明 f 在 x_0 某去心邻域内单调性

但是若 $f'(x)$ 在点 x_0 连续，则由保号性可知存在 x_0 某去心邻域使得 $f'(x)>0$，从而证明单调性.

定理 4.1 (费马 (P.Fermat) 定理)**.** 若函数 $f(x)$ 在某一区间 (a,b) 内可导，并且在点 $c\in(a,b)$ 取得最值，若函数在这点处存在着有限导数 $f'(c)$ ，则有 $f'(c)=0.$

证明. 利用反证法. 设 $f(x)$ 在内点 c 处取得最大值，且 $f'(c)>0$ ，则由上引理可知 $\exists\delta>0,\forall x\in(c,c+\delta),\text{s.t.}f(x)>f(c)$ ，矛盾. □

注意. 若 c 是 $[a,b]$ 的端点（如右端点），且 $f'(c)>0$，则在区间 $(b,+\infty)$ 内 $f(x)$ 性质不明，不可应用上述引理，因此费马定理以及后续的微分中值定理考察的对象只能是 (a,b) 的内点.

从根本上看，无法考察端点的原因是极限存在的充要条件为两侧极限存在且相等因为端点只有单侧极限，因此不能满足上引理.

需要注意的是，若函数 $f(x)$ 在某一区间 (a,b) 内可导，区间 $[c,d]\subset[a,b]$ 则：$f'(c),f'(d)$ 和 $\frac{f(c)-f(d)}{c-d}$ 的关系不可用本章内容考察.

4.2 达布 (G.Darboux) 定理

定理 4.2 (达布 (G.Darboux) 定理)**.** 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内定义且有有限导数，则：对于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的任意值 λ，$\exists c\in[a,b]$，$\text{s.t.}f'(c)=\lambda$。

证明. 先证明零点定理的情况:不妨设 $f'(a)<0,f'(b)>0$,即 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ ，则 $\exists\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta),\text{s.t.}f(x)<f(a),\exists\mu>0,\forall x\in(b-\mu,b),\text{s.t.}f(x)<f(b)$ ，所以函数 $f(x)$ 的最小值不在点 a,b 上取得. 由魏尔斯特拉斯第二定理（定理**??**）可知 $\exists c\in[a,b],\text{s.t.}f(c)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ ，即 $c\in(a,b)$ ，由费马定理（定理4.1）可知：$f'(c)=0.$

下面证明介值定理的情况：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内定义且有有限导数，则：对于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的任意值 λ 定义 $g(x)=f(x)-\lambda x$ ，则 $g'(x)=f'(x)-\lambda$

若 $f'(a)=f'(b)=\lambda$ ，则 $c=a$ 或 $c=b$；若 $f'(a)\neq f'(b)$ ，易知 $g'(a)g'(b)<0$ ，则 $\exists c\in(a,b),\text{s.t.}g'(c)=0$，综上 $\exists c\in[a,b],\text{s.t.}f'(c)=\lambda.$ □

推论 4.1. 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内定义且有有限导数，则 $f'(x)$ 无第一类间断点.

证明. 利用反证法. 设存在 $c\in(a,b),\text{s.t.}f'(c^-)=p<f'(c^+)=q$ 因为 $f'(c^+)=\lim_{x\to c^+}f'(x)=q,f'(c^-)=\lim_{x\to c^-}f'(x)=p$. 定义 $\epsilon=\frac{q-p}{4}$ ，则 $\exists\delta>0,\forall x_1\in(c,c+\delta),\text{s.t.}|f'(x_1)-q|<\epsilon\Rightarrow f'(x_1)>\frac{p+3q}{4}$；$\exists\mu>0,\forall x_2\in(c-\mu,c),\text{s.t.}|f'(x_2)-p|<\epsilon\Rightarrow f'(x_2)<\frac{3p+q}{4}<\frac{p+3q}{4}<f'(x_1)$ 则

对于 $\forall\lambda \in [\frac{3p+q}{4}, \frac{p+3q}{4}]$ ，有 $f'(x_2) < \lambda < f'(x_1)$. 因为 $f'(x_1) > \frac{p+3q}{4}, f'(x_2) < \frac{3p+q}{4}$ ，所以不存在 $c \in [x_2, x_1]$ ，使得 $f'(c) = \lambda$ ，矛盾. 即 $f'(x)$ 无跳跃间断点，无可去间断点的证明类似. □

推论 4.2. *若 $\forall x \in [a,b], \text{s.t.} f'(x) \neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.*

证明. 易证. □

4.3 微分中值定理

定理 4.3 (罗尔定理)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，若 $f(a) = f(b)$ ，则 $\exists c \in (a,b), \text{s.t.} f'(c) = 0$.*

证明. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由魏尔斯特拉斯第二定理（定理**??**）可知：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在最大值与最小值，若 $f(x)$ 在 a,b 分别取得最大值与最小值，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数，则 $\forall c \in [a,b], \text{s.t.} f'(c) = 0$. 若函数的最大值或最小值在 (a,b) 内取得，由费马定理（定理4.1）知 $f(x)$ 在该点导数为零. □

定理 4.4 (罗尔定理的推论)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上 n 阶可导，若在区间 $[a,b]$ 上，$f^{(n)} \neq 0$，则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上最多有 n 个根.*

证明. 利用反证法. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 个根，则有罗尔定理可知 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个根，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n-1$ 个根，...，$f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 1 个根，矛盾. □

定理 4.5 (拉格朗日中值定理)**.** *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，则 $\exists c \in (a,b), \text{s.t.} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

证明. 定义函数 $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$ ，则 $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$ ；$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{-f(b)a+f(a)b}{b-a} = g(a)$ ，由罗尔定理（定理4.3）可知：$\exists c \in (a,b), \text{s.t.} g'(c) = a \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

上述定理中的公式：$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ 称为**拉格朗日公式**或**有限增量公式**.

对于区间 $[a,b]$ 内任意数值 x_0 ，并给以增量 $\Delta x \leqslant 0$ ，使之仍在区间内，则存在介于 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 的数 c ，可以表示为 $c = x_0 + \theta \cdot \Delta x, (\theta = \theta(x_0, \Delta x), 0 < \theta < 1)$. 从而拉格朗日公式可以写为：

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)$$

或：

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)\Delta x$$

这等式是有限增量 Δx 的准确表达式，其与近似表达式相对应：

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

拉格朗日公式的缺点是公式内有未知的数 θ ，但这并不妨碍这公式在分析学中的各种应用，如下.

定理 4.6 (导数的极限性质)**.** 假定 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，$x_0\in(a,b)$ ，在 $x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$ 时有有限导数 $f'(x)$ ，若存在着（有限或无穷）的极限：

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=K,$$

则 $f'(x_0)=K$.

证明. 令 $x=x_0+\theta\cdot\Delta x=\phi(\Delta x)$ ，则 $\lim_{\Delta x\to 0}\phi(\Delta x)=x_0$ ，且 $\exists\mu>0,\forall\Delta x\in\mathring{U}(0,\mu),\text{s.t.}\phi(\Delta x)\neq x_0$. 因为 $\lim_{x\to x_0}f'(x)=K$ ，由复合函数极限运算法则（定理**??**）知：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0+\theta\cdot\Delta x)=\lim_{\phi\to x_0}f'(\phi)=K.$$

单侧导数的情况也类似：

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=K\Rightarrow f'_+(x_0)=K;$$

$$\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=K\Rightarrow f'_-(x_0)=K.$$

□

上述论断的一个应用如下，若导函数由一方趋于 x_0 时，而趋于 ∞，则可作出论断：函数 $f(x)$ 在点 x_0 的单侧导数等于 ∞.

定理 4.7 ($f'(x)$ 没有第一类间断点（另一种证法）)**.** $f'(x)$ 没有第一类间断点.

证明. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，则对于 $\forall c\in(a,b),\text{s.t.}f'(c)\exists$. 设 $f'(c_0)=k$ ，则 $f'_+(c_0)=f'_-(c_0)=k$. ，若 c_0 为跳跃间断点，即 $f'(c_0+0)\neq f'(c_0-0)$ ，则：

$$\lim_{x\to c_0^+}f'(x)\neq\lim_{x\to c_0^-}f'(x)\Rightarrow f'_+(c_0)\neq f'_-(c_0)$$

矛盾. 若 c_0 为可去间断点，则：

$$k=f_+(c_0)=f'(c_0)\neq f'(c_0+0)=\lim_{x\to c_0^+}f'(x)=k$$

矛盾. □

注意. $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0+0)$ 不是同一概念. $f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ，而：

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=\lim_{x\to x_0^+}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

后者与点 x_0 没有直接关系，但是定理*4.6*告诉我们 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$.

导数的极限性质告诉我们：若 $\lim_{x\to x_0}f'(x)=K$（有限或无穷）$\Rightarrow f'(x_0)=K$，但是需要注意的是 $f'(x_0)=K$（有限）$\not\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f'(x)=K$.

注 4.2. 导数的极限性质（定理*4.6*）告诉我们以下结论：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，即其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内处处有定义. **因此若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f'(x)$ 只能有两种形式：**

1. $f'(x)$ 连续；
2. (a,b) 内某点 x_0 为 $f'(x)$ 的振荡间断点.

$f'(x)$ 在 (a,b) 内无第一类间断点已经说明，下面说明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内无无穷间断点的原因. 定理4.6说明，在 $x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$ 时，函数 $f(x)$ 有限导数 $f'(x)$ ，若存在着（有限或无穷）的极限：

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=K,$$

则 $f'(x_0)=K$. 因此若 x_0 为 $f'(x)$ 的无穷间断点，即 $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\infty$，则必有 $f'(x_0)=\infty$，换句话说 $f'(x_0)$ 不存在，因此与 $f'(x)$ 在 (a,b) 内处处有定义矛盾，即若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则没有无穷间断点.

定理 4.8 (柯西中值定理). 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，且在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$ ，则 $\exists c\in(a,b),\mathrm{s.t.}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

证明. 首先明确：$g(a)\neq g(b)$ ，否则由罗尔定理（定理4.3）知：$\exists\xi\in(a,b),\mathrm{s.t.}g'(\xi)=0$ ，矛盾.

考察辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$, 则 $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$, 易知: $F(a)=F(b)$ 由罗尔定理知:

$$\exists c\in(a,b),\mathrm{s.t.}F'(c)=0\Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

因为在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$ ，所以 $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. □

注意 (拉格朗日中值定理和柯西中值定理辅助函数的构造思想).

1. 若 $f(a)=f(b)$ 则由罗尔定理知 $\exists c\in(a,b),\mathrm{s.t.}f'(c)=0$，而拉格朗日中值定理的处理对象是罗尔定理处理对象函数增加了一个斜率的产物，因此设法减去这个斜率因素，即可直接应用罗尔定理，故辅助函数为 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

2. 柯西中值定理与之相似，对于 $X-Y$ 坐标系中的函数 $y=\phi(x)$ ，设 $y=f(z),x=g(z)$，则函数为 $f(z)=\phi(g(z))$. 则对于点 $x=g(a)$，有 $y=f(a)$；对于点 $x=g(b)$，有 $y=f(b)$ ，则函数在 $(g(a),f(a))(g(b),f(b))$ 两点的坡度为 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

   由拉格朗日中值定理的思想知：在 $x_1=g(a),x_2=g(b)$ 之间 $\exists\xi=g(c),\mathrm{s.t.}\phi'(\xi)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}g(z)}\Big|_{z=c}=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=c}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}g(z)}\Big|_{z=c}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

   同拉格朗日中值定理构造辅助函数的思想一致，减去这个坡度，只不过此时横轴为 $g(z)$ ，因此辅助函数为 $F(z)=\phi(z)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(z)$.

5 高阶导数与高阶微分

5.1 莱布尼兹公式

定理 5.1 (莱布尼兹公式). 设 u,v 是 x 的函数，且各自有直到 n 阶的的各阶导数，则他们的乘积 $y=uv$ 也有 n 阶导数. 且 $(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$.

证明. 利用数学归纳法. $(uv)^{(1)}=uv^{(1)}+u^{(1)}v=\sum_{i=0}^{1}C_1^iu^{(i)}v^{(n-i)}$. 设: $(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}v^{(n-i)}$. ，则:

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)}&=[(uv)^{(n)}]'=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left[u^{(i)}v^{(n-i)}\right]'\\
&=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left[u^{(i+1)}v^{(n-i)}+u^{(i)}v^{(n-i+1)}\right]\\
&=\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i+1)}v^{(n-i)}+\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}v^{(n-i+1)}\\
&=\sum_{i=1}^{n+1}C_n^{i-1}u^{(i)}v^{(n-(i-1))}+\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}v^{(n-i+1)}\\
&=C_n^nu^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1}u^{(i)}v^{(n-(i-1))}+C_n^0u^{(0)}v^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}C_n^iu^{(i)}v^{(n-i+1)}\\
&=C_n^nu^{(n+1)}v^{(0)}+C_n^0u^{(0)}v^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}\left[C_n^{i-1}+C_n^i\right]u^{(i)}v^{(n-i+1)}\\
&=C_{n+1}^{n+1}u^{(n+1)}v^{(0)}+C_{n+1}^0u^{(0)}v^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1}^iu^{(i)}v^{(n+1-i)}\\
&=\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^iu^{(i)}v^{(n+1-i)}.
\end{aligned}
$$

□

注意. 从 $n+1$ 个元素中选 k 个元素，先选中其中的 n 个，分两种情况：*1)*k 个元素都在选中的 n 个中，则有 C_n^k 种情况；*2)*k 个元素不都在选中的 n 个中，即 n 个中有 $k-1$ 个（另一个为 $n+1$ 个元素中不属于 n 个元素的那个）则有 C_n^{k-1} 种情况，两者构成全集：$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$.

注 5.1.

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\qquad(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

而

$$(x^k)^{(k+1)}=0,$$

由此利用莱布尼兹公式可以很方便求解形如 $y=P_m(x)\cdot\sin(ax+b)$ 的高阶导数，其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式.

5.2 高阶微分

5.2.1 概念

$f(x)$ 的一阶微分在某一点处的微分称为在这一点的二阶微分；记为 $\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)$. 高阶微分是通过归纳的方法来定义的，一般来说，函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶微分的微分称为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微分.

再求高阶微分的时候一件很重要的事是：$\mathrm{d}x$ 是不依赖于 x 的任意的数，关于 x 而微分的时候必须把它看成常数因子，这样 y 的一阶微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\cdot\mathrm{d}x$ 也就是 x 的函数，则一阶微分的微分为：

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\cdot\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(f'(x))\cdot\mathrm{d}x = (f''(x)\cdot\mathrm{d}x)\cdot\mathrm{d}x = f''(x)\cdot\mathrm{d}x^2;$$

利用数学归纳法可以证明 $\mathrm{d}^n y = y^{(n)}\cdot\mathrm{d}x^n$ ，则 $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

5.2.2 高阶微分形式不变性的破坏

二阶以及更高阶微分不具有微分形式不变性. 设 $y = f(x), x = \phi(t)$，于是 $y = f(\phi(t))$. 则 y 关于 t 的一阶微分为：$\mathrm{d}y(t) = y'_x\cdot\mathrm{d}x(t)$. 而 y 关于 t 的二阶微分为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}y(t)) &= \mathrm{d}(y'_x\cdot\mathrm{d}x(t)) = \mathrm{d}(y'_x)\cdot\mathrm{d}x(t) + y'_x\cdot\mathrm{d}(\mathrm{d}x(t))\\ &= y''_x\cdot\mathrm{d}x^2(t) + y'_x\cdot\mathrm{d}^2x(t)\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\mathrm{d}^2x(t) = \mathrm{d}(x'_t\cdot\mathrm{d}t) = x''_t\cdot\mathrm{d}t^2$ 若 $x''_t \neq 0$，则 $\mathrm{d}^2y \neq y''_x\cdot\mathrm{d}x^2$.

注意. *$\mathrm{d}x^2$ 表示微分的幂 $(\mathrm{d}x)^2$；而 d^2x 表示 $\mathrm{d}x$ 的微分，当 $\mathrm{d}x$ 为自变量时，$\mathrm{d}^2x = 0$.*

因此，当 x 不再是自变量时，二阶微分 d^2y 就要用式 (7) 来表示，对于三阶以后各阶微分附加的项目还要增加. 因此在用微分表示高阶导数 y''_x, y'''_x 时，分子分母已不能是对任意变量 t 的微分或者导数了，而只能依变量 x，即：

$$y''_x \neq \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}x^2(t)}\ ;\ y''_x \neq \frac{y''(t)}{x''(t)}.$$

6 泰勒公式

6.1 多项式的泰勒公式

定理 6.1 (多项式的麦克劳林 (C.Maclaurin) 公式)**.** *若 $p(x)$ 是 n 次多项式：*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

则：

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

证明. 设 $p(x)$ 是 n 次多项式：

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{8}$$

将其逐次求导 n 次，有：

$$\begin{aligned}p'(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1};\\ p''(x) &= 2a_2 + 3!a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2};\\ &\cdots\\ p^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n\end{aligned}$$

因此有:

$$p(0) = a_0, \qquad p'(0) = a_1, \qquad p''(0) = 2a_2$$
$$p'''(0) = 3! \cdot a_3 \qquad \ldots \qquad p^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

即:

$$a_0 = p(0), \qquad a_1 = p'(0), \qquad a_2 = \frac{p''(0)}{2!}$$
$$a_3 = \frac{p'''(0)}{3!} \qquad \ldots \qquad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$$

将这些系数带入公式 (8) 有:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

□

定理 6.2 (多项式的泰勒 (B.Taylor) 公式). *若 $q(x)$ 是 n 次多项式:*

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

则:

$$q(x) = q(x_0) + \frac{q'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{q''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

证明. 令 $\lambda = x - x_0$，则:

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x_0 + \lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n = p(\lambda) \\ &= p(0) + \frac{p'(0)}{1!}\lambda + \frac{p''(0)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n. \end{aligned} \tag{9}$$

因为 $q(x_0 + \lambda) = p(\lambda)$，两边对 λ 求导有:

$$q'(x_0 + \lambda) = p'(\lambda)$$

故 $q^{(k)}(x_0 + \lambda) = p^{(k)}(\lambda)(k < n)$ ，令 $\lambda = 0$ 有:

$$q^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(0)$$

带入式 (9) 有:

$$\begin{aligned} q(x) &= p(0) + \frac{p'(0)}{1!}\lambda + \frac{p''(0)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n. \\ &= q(x_0) + \frac{q'(x_0)}{1!}\lambda + \frac{q''(x_0)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(x_0)}{n!}\lambda^n. \\ &= q(x_0) + \frac{q'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{q''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{10}$$

□

6.2 任意函数的泰勒公式 · 佩亚诺余项

先考察一般的，不是多项式的任意函数 $f(x)$，假定它在某一点 x_0 存在直至 n 阶的各阶导数，准确来说，这意思就是，函数在含有点 x_0 的某一区间 $[a,b]$ 内是有定义的，且 $\forall x \in [a,b]$ 有直至 $n-1$ 阶的各阶导数：

$$f'(x),\ f''(x),\ \dots\ ,\ f^{(n-1)}(x),$$

并且在点 x_0 还有 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$.

对于函数 $f(x)$ 按式 (10) 构造多项式：

$$q(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{11}$$

因为 $q(x_0) = f(x_0)$, $q'(x_0) = f'(x_0)$, $q''(x_0) = f''(x_0), \dots$ 即多项式及其导数（直至 n 阶为止）在点 x_0 处与函数 $f(x)$ 及其各阶导数有相同的值. 但是只要 $f(x)$ 不是多项式，就不能肯定等式 $f(x) = q(x)$，因此多项式 $q(x)$ 仅是 $f(x)$ 的一个近似式，这样研究两者之差：

$$r(x) = f(x) - q(x) \tag{12}$$

就是重要的事.

定理 6.3 (余项的无穷小条件). *若函数 $r(x)$ 满足：*

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0 \tag{13}$$

则有：$r(x) = o((x-x_0)^n)$.

证明. 利用数学归纳法. 若 $r(x_0) = r'(x_0) = 0$，则：

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x-x_0} = r'(x_0) = 0,$$

即 $r(x) = o(x-x_0)$；设上命题对于任意 $n \geq 1$ 时成立，则，则当 $r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0$ 时有 $r'(x)$ 满足条件，即 $r'(x) = o((x-x_0)^n)$. 依有限增量公式：

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c)(x-x_0) \tag{14}$$

因为 c 在 x_0 与 x 之间，故 $|c-x_0| < |x-x_0|$，于是：

$$r'(c) = o((c-x_0)^n) = o((x-x_0)^n) \tag{15}$$

代入式 (14) 有：

$$r(x) = r'(c)(x-x_0) = o((x-x_0)^n) \cdot (x-x_0) = o((x-x_0)^{n+1}) \tag{16}$$

□

注 6.1. *该定理的意义在于，若一个多项式与函数在某一点 x_0 的从 0 直至 n 阶导数皆相等，则多项式在该点邻域内以 n 阶无穷小的误差逼近函数.*

这里 $r(x)$ 称为佩亚诺 (G.Peano) 余项，因为 $r(x)=f(x)-q(x)$，故：

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots \\ &+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \end{aligned} \tag{17}$$

该式称为**带有佩亚诺余项的泰勒公式**.

定理 6.4 (泰勒公式的唯一性). 函数 $f(x)$ 的带有佩亚诺余项的泰勒公式是唯一的.

证明. 若在 x_0 附近同时有：

$$\begin{aligned} f(x)=&a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots \\ &+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} f(x)=&b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\dots \\ &+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

则有：

$$\begin{gathered} f(x_0)=a_0=b_0 \\ f'(x_0)=a_1=b_1 \\ \dots \\ f^n(x_0)=a_n=b_n \end{gathered}$$

因此有：

$$a_0=b_0，a_1=b_1，\dots，a_n=b_n$$

即泰勒公式的系数是唯一的. □

在函数可微的充要条件（定理1.3）中曾指出：函数若可微则：

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x);$$

而对带皮亚诺余项的泰勒公式进行简单的移项：

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0)=&f(x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots \\ &+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

即：

$$\Delta f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n)$$

就是上式的完全形态.

6.3 余项的其他形式 · 拉格朗日余项

这一节的内容我们需要做出更多假设，假定函数 $f(x)$ 在全区间 $[x_0, x_0+H]$ 内前 n 阶导数：

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \dots\ ,\ f^{(n)}(x)\ (x \in [x_0, x_0+H])$$

存在且连续，此外在开区间 (x_0, x_0+H) 内 $n+1$ 阶导数 $f^{(n+1)}(x)$ 存在且有限.

因为余项 $r(x)$ 是与 n 有关的，因此下面同一令 $r_n(x)$ 代表余项，则：

$$r_n(x) = f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$$

今将 x 固定在 $[x_0, x_0+H]$ 任意数值，并作变量替换 $z = x_0$，构造一个辅助函数：

$$\phi(z) = f(x) - \left[f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n\right]$$

其中 $z \in [x_0, x]$，则对 $\phi(z)$ 在 (x_0, x) 内存在导数：

$$\begin{aligned}\phi'(z) = &- f'(z)\\ &- \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'(z)}{1!}\right]\\ &- \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right]\\ &- \left[\frac{f''''(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right] + \dots\\ &- \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

化简后有：

$$\phi'(z) = -\frac{f^{n+1}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

取任意函数 $\omega(z)$，它在区间 $[x_0, x]$ 内连续，在区间 (x_0, x) 内可导，且导数不为零. 则由柯西中值定理知：$\exists c \in (x_0, x)$ 使得：

$$\frac{\phi'(c)}{\omega'(c)} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\omega(x) - \omega(x_0)},$$

因为

$$\phi(x_0) = r_n(x),\ \phi(x) = 0,\ \phi'(c) = -\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n$$

带入柯西公式有：

$$r_n(x) = \frac{\omega(x) - \omega(x_0)}{\omega'(c)} \cdot \frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

先把 $\omega(z)$ 换成任意满足条件的函数，就可以得出余项的不同形式，如设 $\omega(z) = (x-z)^p, p > 0$ 则：

$$\omega'(z) = -p \cdot (x-z)^{p-1}, \qquad z \in (x_0\ x)$$

显然函数满足所设条件，因此：

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{(x-x)^p-(x-x_0)^p}{-p\cdot(x-c)^{p-1}}\cdot\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= \frac{(x-x_0)^p}{p\cdot(x-c)^{p-1}}\cdot\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n \end{aligned}$$

因为 $c\in(x_0,x)$，所以 $c=x_0+\theta\cdot(x-x_0), x-c=(1-\theta)\cdot(x-x_0)\ (0<\theta<1)$，则有：

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{(x-x_0)^p}{p\cdot((1-\theta)\cdot(x-x_0))^{p-1}}\cdot\frac{f^{n+1}(x_0+\theta\cdot(x-x_0))}{n!}((1-\theta)\cdot(x-x_0))^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\cdot(x-x_0))}{n!p}\cdot(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

上述公式称为**施勒米希-洛希 (O.schlomilch-Roche) 式**，当给 p 以具体值，就可以得出更特殊的形式，令 $p=n+1$，则得到了**拉格朗日余项**：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\cdot(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}.$$

上述讨论是在全区间 $[x_0,x_0+H]$ 内进行的，当 $x\in[x_0-H,x_0]$ 时可以类比. 综上，**带有拉格朗日余项的泰勒公式**为：

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots \\ &+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 而这就是有限增量公式（定理4.5）：

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$$

的直接推广.