线性代数基本概念与方法: 矩阵运算

Collection of Linear Algebra Tips: Matrix Operations

王浩铭

2018 年 · 春

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等代数 I 期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Linear Algebra (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

1 $\alpha\beta^T$ 与 $\alpha^T\beta$ **2**

2 A^n 运算 **2**

2.1 A.$r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$ . . . 2

2.2 B. 残三角阵 . . . 3

2.3 C. 分块（对角）矩阵 . . . 3

2.4 D. 相似 . . . 5

2.5 E. 初等矩阵 . . . 5

3 伴随矩阵与可逆矩阵 **6**

3.1 A. 伴随矩阵 . . . 6

3.2 B. 可逆矩阵 . . . 8

4 初等矩阵与初等变换 **10**

5 正交矩阵 **11**

6 矩阵方程 **12**

Edition 4

1 $\alpha\beta^T$ 与 $\alpha^T\beta$

1. $\alpha\beta^T$ 与 $\beta\alpha^T$ 是矩阵

2. $\alpha^T\beta$ 与 $\beta^T\alpha$ 是数，且 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = tr(\alpha\beta^T) = tr(\beta\alpha^T)$.

3. $\alpha\alpha^T$ 是对称阵；$\alpha^T\alpha$ 是平方和

4. $A = \alpha\beta^T \Leftrightarrow r(A) = 1$.

例 1.1. 若 $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$，求 $\alpha^T\beta$.

易知 $\alpha^T\beta = tr(\alpha\beta^T) = 9$.

例 1.2. 证明 $A = \alpha\beta^T \Leftrightarrow r(A) = 1$.

$\Rightarrow$

因为 $0 < r(A) = r(\alpha\beta^T) \leq \min\{r(\alpha), r(\beta^T)\} = 1$，所以 $r(A) = r(\alpha\beta^T) = 1$.

$\Leftarrow$

因为 $r(A) = 1$，所以 A 列向量的极大无关组向量个数为 *1*，记 γ_i 为极大无关组，即 $A = (k_1\gamma_i, k_2\gamma_i, \cdots, k_n\gamma_i) = \gamma_i(k_1, k_2, ..., k_n) = \alpha\beta^T$.

2 A^n 运算

2.1 A.$r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$

$A^n = (\alpha\beta^T)^n = \alpha\beta^T\alpha\beta^T \cdots \alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)^{n-1}\alpha\beta^T = tr^{n-1}(\alpha\beta^T)\alpha\beta^T = tr^{n-1}(A)A$.

例 2.1. 已知 A 为 *3* 阶矩阵，且所有元素均为 -1，求 $A^4 + 2A^3$.

易知 $r(A) = 1$，则 $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} [1, 1, 1] = \alpha\beta^T, tr(A) = -3$.

所以 $A^4 = tr^3(A)A = -27A, 2A^3 = 2tr^2(A)A = 18A$，所以 $A^4 + 2A^3 = -9A$.

2.2 B. 残三角阵

形如 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$ 的矩阵称为残三角阵，A 每自乘一次，斜对角线向下减少一排. 且：$A^{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21}a_{32}\cdots a_{n,n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^n=O.$

例 2.2. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 A^n

易知 $A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=E+B$ 则

$$\begin{aligned} A^n &= (E+B)^n = C_n^0E^nB^0 + C_n^1E^{n-1}B^1 + C_n^2E^{n-2}B^2 + C_n^3E^{n-3}B^3 + \cdots \\ &= E + nB + \frac{n(n-2)}{2}B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-2)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2n & 4n^2-n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 C. 分块（对角）矩阵

- 对于对角矩阵而言

$$\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} & & a \\ & b & \\ c & & \end{bmatrix}^n &= \begin{bmatrix} & & a \\ & b & \\ c & & \end{bmatrix}^{2\cdot\frac{n}{2}} = \begin{bmatrix} ac & & \\ & b^2 & \\ & & ca \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} (ac)^{\frac{n}{2}} & & \\ & b^n & \\ & & (ac)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 对于分块对角矩阵而言

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & \\ & B^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^n &= \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^{2\cdot\frac{n}{2}} = \begin{bmatrix} AB & \\ & BA \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} (AB)^{\frac{n}{2}} & \\ & (BA)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 2.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，则 A^n

易知

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$$

其中 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3E + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3E + M$，所以

$$\begin{aligned} B^n &= (3E+M)^n = C_n^0(3E)^n M^0 + C_n^1(3E)^{n-1}M + \cdots \\ &= 3^n E + n3^{n-1}M = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = \alpha\beta^T$，所以

$$C^n = tr^{n-1}(C)C = 6^{n-1}\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所以

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 6^{n-1} & 9\cdot 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1} \end{bmatrix}$$

例 2.4. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$B = P^{-1}AP$，$P$ 为 3 阶可逆矩阵，则 $B^{2004} - 2A^2$.

因为 $B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P$，而

$$A^{2004}=A^{2\times1002}=\left[\begin{array}{cc|c}0&-1&0\\1&0&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right]^{2\times1002}=\left[\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\0&-1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]^{1002}=E$$

所以 $A^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，即 $B^{2004}-2A^2=E-2\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

2.4 D. 相似

2.5 E. 初等矩阵

- $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2n-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k^n&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\nk&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

例 2.5. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2011}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2011}$

因为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{2011} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4022 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2011} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{2011} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2011} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4022 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4022 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5+4\times 4022 & 4+3\times 4022 & 3+2\times 4022 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 16085 & 12064 & 8043 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3 伴随矩阵与可逆矩阵

3.1 A. 伴随矩阵

设 A 为 n 阶方阵，A^* 为其伴随矩阵，则伴随矩阵 A^* 有以下性质：

1. $AA^* = A^*A = |A|E$;
2. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$;
3. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A^{-1}$;
4. $(A^*)^T = (A^T)^*$;
5. $|A^*| = |A|^{n-1}$;
6. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$, $(n \leq 2)$.
7. $r(A^*) = \begin{cases} n, \ r(A) & = n \\ 1, \ r(A) & = n-1 \\ 0, \ r(A) & \leq n-2 \end{cases}$

伴随矩阵有两种计算方法：

1. 求逆：$A^* = |A|A^{-1}$

2. 利用定义：$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

注意：

- 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij}$ 不要忘记正负号
- A_{ij} 是 A^* 的 j 行 i 列，不要排反

3. 特别的 2 阶矩阵的伴随矩阵为主对角线元素互换，副对角线元素变号：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

例 3.1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 A^*

$A_{11} = -1, A_{12} = -1, A_{13} = 1, A_{21} = 5, A_{22} = 3, A_{23} = -1, A_{31} = 3, A_{32} = 3, A_{33} = -1$，所以 $A^* = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

例 3.2. 证明 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) \leq n-2 \end{cases}$

若 $r(A) = n$，则 $|A| \neq 0$，所以 $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$，所以 $r(A^*) = n$.

若 $r(A) = n-1$，则存在 $n-1$ 阶子式使不为零，即 $A^* \neq O$，因此 $r(A^*) > 0$；又因为 $|A| = 0$，所以 $AA^* = |A|E = O$，所以 $r(A) + r(A^*) \leq n$，即 $0 < r(A) \leq 1$，即 $r(A) = 1$.

若 $r(A) = n-2$，则 $n-1$ 阶子式均为零，故 $A^* = O$，所以 $r(A^*) = 0$.

例 3.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = A^2 - 3A + 2E$，求 B^{-1}.

因为 $B = (A-E)(A-2E) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，所以

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} B^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.2 B. 可逆矩阵

有三种计算方法：

1. 初等变换法：

$$\begin{aligned}(A|E) &\xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1})\\ (A|B) &\xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1}B)\\ \begin{pmatrix}\dfrac{A}{E}\end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix}\dfrac{E}{A^{-1}}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\dfrac{A}{B}\end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix}\dfrac{E}{BA^{-1}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. 利用伴随矩阵：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

3. 利用分块矩阵：

   - $\begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & C^{-1} \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} & & A \\ & B & \\ C & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & C^{-1} \\ & B^{-1} & \\ A^{-1} & & \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

4. 当已知某矩阵 M 可逆时，常考虑 E 恒等变形：

$$\begin{aligned} B &= BE = BMM^{-1} = BM^{-1}M \\ &= EB = MM^{-1}B = M^{-1}MB. \end{aligned}$$

   由于 $(A+B)^{-1}, |A+B|$ 没有具体公式，当题目中涉及这些式子时，E 恒等变形是最常用的技巧

5. 对于 $(A+B)^{-1}$ 还可以通过已知条件配凑为 $(A+B)M = kE$，则 $(A+B)^{-1} = \frac{1}{k}M$.

例 3.4. 设 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为 4 阶单位阵，且 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$，求 $(E+B)^{-1}$.

因为 $(E+A)$ 可逆，所以对 E 做 $(E+A)$ 的恒等变化

$$\begin{aligned}E+B&=(E+A)^{-1}(E-A)+E\\&=(E+A)^{-1}(E-A)+(E+A)^{-1}(E+A)\\&=(E+A)^{-1}[E-A+E+A]\\&=2(E+A)^{-1}.\end{aligned}$$

所以 $(E+B)[\frac{1}{2}\cdot(E+A)]=E$，则

$$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-2&4&0&0\\0&-4&6&0\\0&0&-6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$$

例 3.5. 已知 $A^T=A,|A|\neq 0,(A-B)^2=E$，化简 $(E+A^{-1}B^T)^T(E-BA^{-1})^{-1}$.

因为 $|A|\neq 0$，所以对 E 做 A 的恒等变化

$$\begin{aligned}(E+A^{-1}B^T)^T(E-BA^{-1})^{-1}&=(A^{-1}A+A^{-1}B^T)^T(AA^{-1}-BA^{-1})^{-1}\\&=[A^{-1}(A+B^T)]^T[(A-B)A^{-1}]^{-1}\\&=(A^T+B)(A^T)^{-1}A(A-B)^{-1}\\&=(A+B)A^{-1}A(A-B)^{-1}\\&=(A+B)(A-B)^{-1}\end{aligned}$$

因为 $(A-B)^2=E$, 所以 $(A-B)^{-1}=A-B$, 所以 $(E+A^{-1}B^T)^T(E-BA^{-1})^{-1}=(A+B)(A-B)$.

例 3.6. 已知 A,B 均为 n 阶矩阵，且 A 与 $E-AB$ 都是可逆矩阵，证明 $E-BA$ 可逆.

因为

$$|E-BA|=|A^{-1}A-BA|=|(A^{-1}-B)A|=|A^{-1}-B|\cdot|A|=|A^{-1}|\cdot|E-AB|\cdot|A|\neq 0$$

所以 $E-BA$ 可逆.

例 3.7. 设 $A-n\times n$，且 $(A-E)^3=(A+E)^3$，则求 $(A-2E)^{-1}$

因为 $(A-E)^3=(A+E)^3$，即 $A^3+3A^2+3A+E=A^3-3A^2+2A-E$，所以 $3A^2+E=O$，所以 $(A-2E)(3A+6E)=-13E$，因此 $(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{13}(3A+6E)$.

例 3.8. $A-n\times n$，若 $(A+E)^m=O$，证明 A 可逆.

注：利用条件 $(A+E)^m=O$ 寻找 M 使得 $AM=kE$.

因为 $(A+E)^m=C_m^0A^0+C_m^1A^1+\cdots+C_m^{m-1}A^{m-1}+C_m^mA^m=O$，即

$$C_m^1A^1+\cdots+C_m^{m-1}A^{m-1}+C_m^mA^m=-E$$

所以 $A(C_m^1A^0+\cdots+C_m^{m-1}A^{m-2}+C_m^mA^{m-1})=-E$，因此 A 可逆.

4 初等矩阵与初等变换

1. 初等变换

1. 初等矩阵 P 左乘 A，即对 A 进行初等行变换（PA 的行向量可以被 A 的行向量线性表示）
2. 初等矩阵 P 右乘 A，即对 A 进行初等列变换（AP 的列向量可以被 A 的列向量线性表示）;
3. 对 A 进行某初等行（列）变换 P 得到 B，则对 A^{-1},A^T,A^* 进行相应的初等列（行）变换得到 $B^{-1},B^T,\frac{B^*}{|P|}$

$$PA=B\Rightarrow\begin{cases}A^{-1}P^{-1}=B^{-1}\\A^TP^T=B^T\\|P||A|A^{-1}P^{-1}=|B|B^{-1}\Rightarrow A^*P^{-1}=\dfrac{B^*}{|P|}\end{cases}$$

4. 对矩阵 A 进行初等变换化简，可以将其展开为一个简单矩阵 A' 与一系列初等矩阵的乘积;
5. 初等变换不改变矩阵的秩，因此 $r(A)=r(A')$；（见2.5）

2. 初等矩阵

1. 初等矩阵的逆：$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$，$P(i(k))^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$，$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$.
2. 初等矩阵的行列式：$|P(i,j)|=-1$，$|P(i(k))|=k$，$|P(i,j(k))|=1$.
3. 初等矩阵的 n 次幂：$P(i,j)^{2n}=E,P(i,j)^{2n-1}=P(i,j)$，$P(i(k))^n=P(i(k^n))$，$P(i,j(k))^n=P(i,j(nk))$.（见2.5）

例 4.1. *易知 3 阶矩阵 A 可逆，将 A 的第 2 列与第 3 列互换得到 B，将 B 的第 1 列乘以-2 得到 C，若 $PA^*=C^*$，求 P.*

易知 $A\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&1\end{bmatrix}=AP_1P_2=C$ 则 $|A|\cdot|P_1|\cdot|P_2|=2|A|=|C|$，令 $P_1P_2=Q$，则 $AQ=C$，对其两侧取逆有 $Q^{-1}A^{-1}=C^{-1}$ 两侧乘常数 $|C|$ 有：$2|A|Q^{-1}A^{-1}=|C|C^{-1}\Rightarrow$

$2Q^{-1}A^* = C^*$，即

$$\begin{aligned} P &= 2Q^{-1} = 2(P_1P_2)^{-1} = 2P_2^{-1}P_1^{-1} \\ &= 2\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & -\frac{1}{2} \\ & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & & -1 \\ & 2 & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 4.2. 设 A 可逆，交换 A 的第一行与第二行得到 B，则

A. 交换 A^* 的第一行与第二行得到 B^*

B. 交换 A^* 的第一列与第二列得到 B^*

C. 交换 A^* 的第一行与第二行得到 $-B^*$

D. 交换 A^* 的第一列与第二列得到 $-B^*$

因为 $|P| = -1$，所以 D

例 4.3. 设 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价，求 a

因为 $A \cong B$，所以 $r(A) = r(B) = 2$，则 $|A| = (a-2)(a+1)^2 = 0$，所以 $a = 2$.

5 正交矩阵

$$\begin{aligned} A\text{为正交矩阵} &\Leftrightarrow AA^T = A^TA = E \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \\ &\Leftrightarrow A^T, A^{-1}, A^*\text{为正交矩阵} \\ &\Leftrightarrow A\text{的行（列）向量两两正交，且行（列）向量长度为 } 1 \\ &\Rightarrow |A| = \pm 1 \\ &\Rightarrow A^* = |A|A^{-1} = \pm A^{-1} = \pm A^T. \end{aligned}$$

因为正交矩阵可逆，所以要注意灵活运用 E 恒等变形.

例 5.1. A, B 为正交矩阵，$|A| + |B| = 0$，证明 $|A + B| = 0$.

因为 A, B 为正交矩阵，$|A| + |B| = 0$，所以 $|A| \cdot |B| = -1$，即

$$\begin{aligned} |A+B| &= |AE + EB| = |AB^TB + AA^TB| = |A| \cdot |B^T + A^T| \cdot |B| \\ &= |A| \cdot |B + A| \cdot |B| = -|A+B| \end{aligned}$$

所以 $|A+B|=0$.

例 5.2. 证明 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^*$ 为正交矩阵.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}A^*(A^*)^T &= |A|A^{-1}(|A|A^{-1})^T\\ &= |A|^2A^{-1}(A^{-1})^T = A^TA = E.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$

因为 $|A^*|=|A|^{n-1}=\pm1$，所以 $|A|=\pm1$，即 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A=\pm A$，因为 A^* 正交，所以 $(A^*)^*$ 正交，而 $AA^T=(\pm A)(\pm A)^T=(A^*)^*[(A^*)^*]^T=E$，所以 A 正交.

6 矩阵方程

三种常见矩阵方程：

$$AX=B,\ XA=B,\ AXC=B$$

若 A,C 可逆，则有

$$X=A^{-1}B,\ X=BA^{-1},\ X=A^{-1}BC^{-1}$$

其中

$$(A|B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E|A^{-1}B)$$
$$\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\ \hline BA^{-1}\end{pmatrix}$$

例 6.1. 若 $AXA-BXB=BXA-AXB+E$，求 X.

易知 $AXA-BXA=BXB-AXB+E$，因此 $(A-B)XA=(B-A)XB=E$，即

$$(A-B)XA+(A-B)XB=(A-B)X(A+B)=E$$

因为 $n=r(E)=r((A-B)X(A+B))\leq\min\{r(A-B),r(X(A+B))\}\leq n$，所以 $r(A-B)=n$，即 $A-B$ 可逆；同理 $A+B$ 可逆，所以 $X=(A-B)^{-1}(A+B)^{-1}$.

例 6.2. 设 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B.

易知 $ABA^{-1}-BA^{-1}=(A-E)BA^{-1}=3E$, 因为 $n=r(3E)=r((A-E)BA^{-1})\le r(A-E)\le n$ 所以 $r(A-E)=n$，即 $A-E$ 可逆，则

$$\begin{aligned}
B&=3(A-E)^{-1}A=3(A-AA^{-1})^{-1}A=3[A(E-A^{-1})]^{-1}A\\
&=3(E-A^{-1})^{-1}A^{-1}A=3(E-A^{-1})^{-1}\\
&=3(E-\frac{A^*}{|A|})^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}\\
&=6\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right]^{-1}=6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$