微积分 I: 定积分 II

Calculus I: Definite integral II

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 定积分的计算、变换与应用

1.1 积分学基本公式

定理 1.1 (牛顿-莱布尼兹公式（Newton-Leibniz formula）)**.** 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上连续函数，$F(x)$ 为其任意一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明. 由定理**??** 可知 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的一个原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 任意一个原函数，由定理**??** 可知

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

令 $x = a$，则 $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$，即

$$F(a) = -C,$$

因此有

$$\Phi(x) = F(x) - F(a),$$

令 $x = b$ 则

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

□

如果把积分中值定理中的结论应用的上式，则有

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)\cdot(b-a).$$

其中 $c \in [a,b]$，又因为定理**??**，有

$$F(b) - F(a) = f(c)\cdot(b-a) = F'(c)\cdot(b-a).$$

这就是有限增量公式. 由此借助牛顿莱布尼兹公式，我们建立了积分中值定理与微分中值定理的联系.

注 1.1. 上面的推导中隐含了 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的导数在端点 a,b 也成立的条件. 但是事实上并不需要函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的原函数，则在其端点上只要 $F(x)$ 连续即可.

因此对于这样的积分 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$，我们可以这样写

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{x}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^a = \frac{\pi a^2}{2},$$

即使在点 $\pm a$ 处原函数的导数的问题还待研究.

对于注1.1的性质，下面我们在更一般的假定下建立基本公式.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，在 (a,b) 上连续；则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，即且在 (a,b) 上有

$$F'(x)=f(x),$$

则用任意方法划分区间 $[a,b]$

$$x_0=a<x_1<x_2<...<x_1<x_{i+1}<...<x_n=b,$$

因此有

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1})-F(x_i)].$$

由于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，因此在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上连续，在 (x_i,x_{i+1}) 上可导，因此对上式右侧应用有限增量公式有

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}F'(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

其中 $x_i\in(x_i,x_{i+1})$，即

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

因为 $f(x)$ 可积，因此其黎曼和极限存在，故对上式取极限有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

注意到，这里我们只要求 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导即可.

1.2 定积分分部积分与换元公式

1.2.1 （一）定积分分部积分法

定理 1.2. *设函数 $f(x),g(x),\phi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且有*

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\phi(x)-\int g(x)\mathrm{d}x,$$

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\phi(x)|_a^b-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 设 $\Phi(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$，则函数 $\phi(x)-\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[\phi(x)-\Phi(x)]_a^b=\phi(x)|_a^b-\Phi(x)|_a^b.$$

因为 $\Phi(x)$ 为 $g(x)$ 的原函数，则

$$\Phi(x)|_a^b=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \phi(x)|_a^b - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

□

特别地，由定积分分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u,$$

有

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

以及推广公式

$$\begin{aligned}\int_a^b uv^{(n+1)}\mathrm{d}x &= [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} + ... + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\mathrm{d}x \\ &= \left.\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot u^{(i)}v^{(n-i)}\right|_a^b + (-1)^{n+1} \cdot \int_a^b u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定积分的分部积分法与不定积分的分部积分法最重要的区别在于，定积分分部积分可以通过**合理选择一个函数使之在上下限处为零，从而去掉 $uv|_a^b$，化简计算.** 如若 $f(b)=0$，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) &= (x-a)\cdot f(x)|_a^b - \int_a^b (x-a)\cdot f'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b (x-a)\cdot f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

1.2.2 （二）定积分换元积分法

由牛顿莱布尼兹公式（公式1.1）可以建立**定积分符号下的换元法则**.

设要求积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 令 $x=\phi(t)$，使 $\phi(t)$ 满足如下条件：

1) $\phi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且若 $t\in[\alpha,\beta]$ 有 $\phi(t)\in[a,b]$；

2) $\phi(\alpha)=a, \phi(\beta)=b$；

3) 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续导数 $\phi'(t)$ 存在.

则公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$$

成立.

由于假定被积函数是连续的，因此这些函数的定积分是存在的（定理??），且不定积分也是存在的（定理??），因此可以对积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$ 两侧使用牛顿莱布尼兹公式.

设 $F(x)$ 是 $f(x)\mathrm{d}x$ 的一个原函数，则 $\Phi(t)=F(\phi(t))$ 是 $f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$ 的一个原函数. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

而

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha) = F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha)) = F(b)-F(a),$$

由此得证.

下面举几个例子.

1. 计算积分

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x,\ J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x\ (m\in N).$$

分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
J_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\mathrm{d}(-\cos x)\\
&= -[\cos x\cdot\sin^{m-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x[1-\sin^2 x]\mathrm{d}x\\
&= (m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m,
\end{aligned}$$

整理得到递推公式：

$$J_m = \frac{m-1}{m}J_{m-2}.$$

依此公式 J_m 可以一次地化为 $J_0=\frac{\pi}{2}$ 或 $J_1=1$，即当 $m=2n$ 时有

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)...3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)...4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

当 $m=2n+1$，则

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{(2n)\cdot(2n-2)...4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)...3}\cdot 1.$$

而对于 J'_m 也能得到完全相同的结果，令 $m!!$ 表示不超过 m 而又与 m 具有相同奇偶性的自然数的乘积则：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } m \text{ 为偶数}\\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{当 } m \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

2. 计算积分

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\mathrm{d}x,\ L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x$$

分部积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}\frac{-\cos nx}{n} \\
&= -\frac{1}{n}\cos^n x \cos nx|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

两端加 K_n 有

$$
\begin{aligned}
2K_n &= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos^n x \sin nx + \cos^{n-1} x \sin x \cos nx] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x [-\cos x \sin nx + \sin x \cos nx] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(1-n)x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} + K_{n-1}.
\end{aligned}
$$

整理有

$$
K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
K_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}K_{n-1} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}K_{n-2}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^2}K_{n-2}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^2}(\frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2}K_{n-3}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \frac{1}{2^3}K_{n-3} \\
&= ... \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}K_0 \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + ... + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + ... + \frac{2^n}{n}\right).
\end{aligned}
$$

类似的

$$
L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.
$$

3. 计算积分

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x \mathrm{d}x.
$$

考虑积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos{(m+2)x} \mathrm{d}x.$$

两次分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos{(m+2)x} \mathrm{d}x =& \frac{1}{m+2}[\cos^{m+2} x \sin(m+2)x - \cos^{m+1} x \sin x \cos{(m+2)x}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &+ \frac{1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-(m+1)\cos^m x \sin^2 x + \cos^{m+2} x] \cos(m+2)x \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

用 $1-\cos^2 x$ 替换 $\sin^2 x$ 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos{(m+2)x} \mathrm{d}x \\ &\quad = -\frac{m+1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x \mathrm{d}x = 0.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，$f(b)=0$，当 $x\in[a,b]$ 时，$|f'(x)|\le M$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\cdot M.$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) &= f(x)(x-a)|_a^b - \int_a^b (x-a)\mathrm{d}f(x) \\ &= -\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\le M\cdot\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \\ &= M\cdot\frac{(b-a)^2}{2}.\end{aligned}$$

□

注 1.2. 上面四个例子均利用了定积分的分部积分公式 $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$ 其共同特点均为通过一定的变换,使得项 $uv|_a^b = 0$,这是定积分分部积分公式相较于不定积分分部积分公式最大的区别与化简技巧.

1.3 定积分计算技巧

1.3.1 （一）对称区间上奇偶函数的积分

对于对称区间上的定积分，首先要观察被积函数的奇偶性，并有如下结论:

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为可积函数或连续函数，则:

1.
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

证明. 显然成立. □

2. 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[-a,a]$ 为奇函数；若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[-a,a]$ 为偶函数.

证明. 若 $f(x)$ 为偶函数，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则
$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t,$$
令 $s=-t$，因为 $f(x)$ 为偶函数，故有
$$F(-x)=\int_0^x f(-s)\mathrm{d}-s=-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s=-F(x).$$
若 $f(x)$ 为奇函数类似. □

3. 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上全体原函数均为偶函数；若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上只有一个原函数为奇函数，即 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

证明. 由定理**??**以及定理**??**可知，设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则
$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$
因为 $f(x)$ 为奇函数，由结论 (b) 有:
$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x).$$
若 $f(x)$ 为偶函数，由结论 (b) 有:
$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=-F(x)+2C.$$
因此当且仅当 $C=0$ 时，即 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 时有
$$F(-x)=-F(x).$$
□

注 1.3. 需要注意的是，若 $f(x)$ 为偶函数，且 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0$ 时，有 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 此时 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是奇函数，但它和 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是同一概念.

1.3.2 （二）周期函数的积分

设 $f(x)$ 以 T 为周期，及对任意实数 x 有 $f(x+T)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上可积，则

1. $f(x)$ 在任何区间长度为 T 的区间上积分值相等，即

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 因为

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $u=t-T$，因此

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u,$$

代入有

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

注：只有当 $f(x)$ 连续时，才有它的变限函数可导，才能用如下方法证明，设：

$$\phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\phi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

因此有

$$\phi(a) = \phi(0).$$

2. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为以 T 为周期的周期函数的充要条件为

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

证明. 充分性：

设 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}g(x+T)-g(x) &= \int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因为 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$，所以 $g(x) = g(x+T)$.

必要性：

因为 $g(x) = g(x+T)$，即

$$g(x+T) - g(x) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

即

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

□

3. $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充分条件为

$$\lim_{X\to\infty}\int_0^X f(t)\mathrm{d}t\text{收敛}.$$

证明. 若 $\lim_{X\to\infty}\int_0^X f(t)\mathrm{d}t$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\cdot T} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(n-1)\cdot T} f(t)\mathrm{d}t$$

所以对 $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \text{s.t.} \left|\int_{(n-1)\cdot T}^{n\cdot T} f(t)\mathrm{d}t\right| < \epsilon$，即

$$\left|\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{(n-1)\cdot T}^{n\cdot T} f(t)\mathrm{d}t\right| < \epsilon,$$

即

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

□

4. $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充分条件为 $f(x)$ 为奇函数

证明.

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

□

1.3.3 （三）两个积分常用公式

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数;} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数.} \end{cases}$$

证明. 利用分部积分法求的递推公式，前文已证毕. □

注 1.4. 特殊的，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 1$.

2. 设 $f(x)$ 连续，则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

证明详见1.3.5

1.3.4 （四）被积函数的分解与结合

1. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{a} f(-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

2. 若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续时，则

$$\int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{a}[f(x)+f(a-x)]\mathrm{d}x.$$

证明.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x. &= -\frac{1}{2}\int_0^{-a} f(-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-a}^{0} f(-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{a} f(a-x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

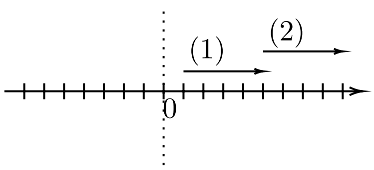
1.3.5 （五）正代换、反代换、倒代换

定义 1.1. 我们称如下的换元方式为正代换（平移代换）：

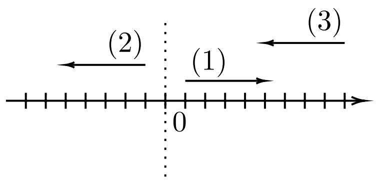
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{a\pm k}^{b\pm k} f(x\mp k)\mathrm{d}(x\mp k);$$

称如下的还原方式为反代换（翻转代换）：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-a}^{-b} f(-x)\mathrm{d}(-x)\\&=\int_{-a\pm k}^{-b\pm k} f(-x\mp k)\mathrm{d}(-x\mp k).\end{aligned}$$



正代换示意图



反代换示意图

在对限的线性变换中，我们常使用三种代还技巧：1）正代换；2）反代换；3）上下限颠倒乘负号.

1. 正代换. 正代换在换元过程中最大的作用是将非对称区间平移至对称区间、通过平移消去某些项、区间再现（无穷限）从而化简积分计算. 如

$$\int_0^a (x-\frac{a}{2})\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x\cdot f(x+\frac{a}{2})\mathrm{d}x.$$

无穷限的区间再现是指

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a-b}^{+\infty} f(x+b)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x+b)\mathrm{d}x+\int_{a-b}^{a} f(x+b)\mathrm{d}x.$$

当函数 $f(x+b)=kf(x)$ 时，积分可以化为如下方程的解

$$I=k\cdot I+\int_{a-b}^{a} f(x+b)\mathrm{d}x.$$

例 1.1. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x$.

易知

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{+\infty} e^{-2(x+\pi)}\cdot|\sin x+\pi|\mathrm{d}x=e^{-2\pi}\int_{-\pi}^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x\\&=e^{-2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x+e^{-2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x\\&=e^{-2\pi}\cdot I+e^{-2\pi}\int_0^{\pi} e^{-2(x-\pi)}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x\\&=e^{-2\pi}\cdot I+\int_0^{\pi} e^{-2x}\cdot\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即

$$I=\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\cdot\int_0^{\pi}e^{-2x}\cdot\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cdot\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

注 1.5. 该例体现了将定积分计算转化为方程求解的两个技巧：$\int e^{ax}\cdot\sin bx\mathrm{d}x$ 型分部积分；无穷区间上的区间再现.

注 1.6. 对于积分或求和进行变量的平移变换时，表达式中的变量与积分号/求和号中的变量变换方向相反，如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+k}^{b+k}f(x-k)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_n=\sum_{i=1+k}^{n+k}x_{n-k}.$$

2. 反代换. 反代换在换元过程中最大的作用是不易破坏三角函数的外层结构，如对于函数 $f(\sin x)$ 或 $f(\cos x)$、区间再现，正反代换效果如下：

正代换 π

$$f(\sin(x+\pi))=f(-\sin(x));$$

$$f(\cos(x+\pi))=f(-\cos(x)).$$

反代换 π

$$f(\sin(-x+\pi))=f(-\sin(-x))=f(\sin x);$$

$$f(\cos(-x+\pi))=f(-\cos(-x))=f(-\cos x).$$

正代换 $\frac{\pi}{2}$

$$f(\sin(x+\frac{\pi}{2}))=f(\cos(x));$$

$$f(\cos(x+\frac{\pi}{2}))=f(-\sin(x)).$$

反代换 $\frac{\pi}{2}$

$$f(\sin(-x+\frac{\pi}{2}))=f(\cos(-x))=f(\cos x);$$

$$f(\cos(-x+\frac{\pi}{2}))=f(-\sin(-x))=f(\sin x).$$

综上可知，当 $f(-\sin x),f(-\cos x)$ 无法很好解决时，反代换往往是十分有效的.

由反代换原理可以的得到一个常用的二级结论：

定理 1.3 (区间再现公式)**.** 设 $f(x)$ 为连续函数，则有

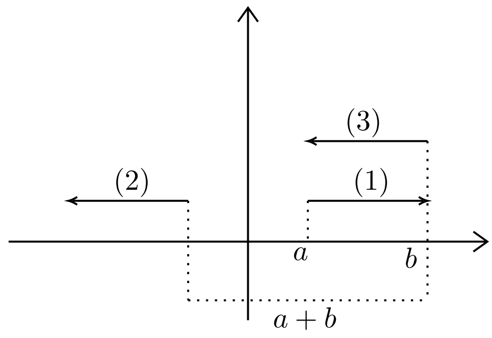
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$$

证明. 令 $t=-x+a+b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)\mathrm{d}-t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$



□

3. 倒代换. 倒代换在换元过程中最大的作用是将无穷限上的反常积分转化为定积分，因此对于对倒代换不敏感的函数（如有理函数、根式、对数函数等）在无穷限上的反常积分可以考虑倒代换.

例 1.2. 证明

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

证明 *1*（正代换法）. 第一个等号:

令

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \left[x-\frac{\pi}{2}\right] f(\sin x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right] f(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right))\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因为 $f(\cos(-x)) = f(\cos(x))$，即 $f(\cos x)$ 为偶函数，所以 $xf(\cos x)$ 为奇函数，故有

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = 0$$

第二个等号:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right))\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

第三个等号

$$\begin{aligned}
\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x &= \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right))\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2} \\
&= \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos x)\mathrm{d}x \\
&= -\pi\int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

证明 2（反代换法）. 第一个等号:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_0^{-\pi} -xf(\sin(-x))\mathrm{d}(-x) \\
&= \int_{\pi}^{-\pi+\pi} (x-\pi)f(\sin-(x-\pi))\mathrm{d}(x-\pi) \\
&= \int_{\pi}^{0} xf(\sin x)\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{0} \pi f(\sin x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此有

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

第三个等号:

$$\begin{aligned}
\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x &= \pi\int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(\sin(-x))\mathrm{d}(-x) \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} f(\sin(-(x-\frac{\pi}{2})))\mathrm{d}(-(x-\frac{\pi}{2})) \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(-x+\frac{\pi}{2}))\mathrm{d}(-x) \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

第二个等号：

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_0^{-\pi} f(\sin(-x))\mathrm{d}(-x)\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\pi+\frac{\pi}{2}} f(\sin(-(x-\frac{\pi}{2})))\mathrm{d}(-(x-\frac{\pi}{2}))\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(\sin(-x+\frac{\pi}{2}))\mathrm{d}-x\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

□

例 1.3. 计算积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

令 $t=\frac{1}{x}, u=\sqrt{t}$ 有

$$\begin{aligned}I=\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t} &= -\int_1^0\sqrt{t}\cdot\ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^{-\frac{3}{2}}\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t = -2\cdot\int_0^1\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}}\\ &= -2\cdot\ln(1+t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\Big|_0^1 + 2\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\cdot\ln(1+t)\\ &= -2\cdot\ln 2+2\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}\cdot t\\ &= -2\cdot\ln 2+4\cdot\int_0^1\frac{u}{u}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}\cdot u\\ &= -2\cdot\ln 2+4\cdot\arctan u|_0^1 = \pi-2\cdot\ln 2.\end{aligned}$$

例 1.4. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

令 $t=\frac{1}{x}$ 有

$$\begin{aligned}I=\int_0^1\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+I+\int_1^{+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\ =\int_0^1\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+I+\int_1^0\frac{\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}\mathrm{d}\frac{1}{t}\\ =\int_0^1\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+I+\int_1^0\frac{1}{t}\cdot\frac{t^4\ln t}{(t^2+1)^2\cdot t^2}\mathrm{d}t\\ =\int_0^1\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+I+\int_1^0\frac{t\cdot\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

1.4 定积分的应用

1.4.1 （一）平面图形的面积

1. 若平面区域 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x)(f(x)\geq g(x)), x=a, x=b, a<b$ 所围成，则 D 的面积为：

$$S_D=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x;$$

2. 若平面区域 D 由曲线 $\rho=\rho(\theta), \theta=\alpha, \theta=\beta, \alpha<\beta$ 所围成，则 D 的面积为：

$$S_D=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

注 1.7. 扇形面积，记半径为 ρ，弧长为 l，则 $l=\frac{\theta}{2\pi}\cdot 2\pi\rho$，因此

$$S=\frac{l\rho}{2}=\frac{\rho^2\cdot\theta}{2}.$$

1.4.2 （二）旋转体体积

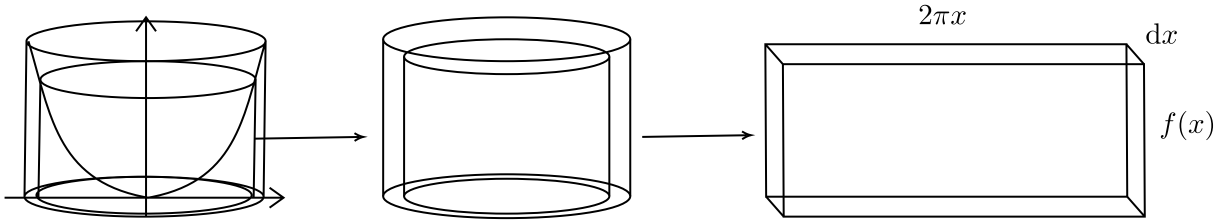
若区域 D 由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ 和直线 $x=a, x=b(0\leq a<b)$ 以及 x 轴所围成，则

1. 区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的体积为：

$$V_D=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x;$$

2. 区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的体积为：

$$V_D=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$



3. 区域 D 绕 y 轴旋转一所得到的体积也可以视为两个旋转体体积之差，需要注意的是两个旋转体都是横着绕 y 轴旋转的.

注 1.8. 对于三种求旋转体体积的方法，在此总结：

1. 绕 x 轴旋转的体积微元$\mathrm{d}V_x$ **为竖条绕** x **旋转**：

$$\mathrm{d}V_x=\pi f^2(x)\mathrm{d}x;$$

2. 绕 y 轴旋转的体积微元$\mathrm{d}V_y$ **为竖条绕 y 旋转**:

$$\mathrm{d}V_y = 2\pi x f(x)\mathrm{d}x;$$

3. 绕 y 轴旋转的体积微元$\mathrm{d}V_y$ **也可为横条绕 y 旋转的两旋转体之差**:

$$\mathrm{d}V_{y1} = \pi\phi_1(y)^2\mathrm{d}y;$$

以及

$$\mathrm{d}V_{y2} = \pi\phi_2(y)^2\mathrm{d}y;$$

其中 $\phi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，需要注意的是 $\mathrm{d}V_{y1}$ 与 $\mathrm{d}V_{y2}$ 积分中 y 的范围可能不同!

例 1.5. 求过原点与曲线 $C: y = x^2+1$ 相切的两条切线与 C 所围成的图形绕 y 轴生成的旋转体积 V

易知切线为 $C_1: y = 2x$，以及 $C_2: y = -2x$，求绕 y 轴旋转的旋转体体积下面分别用 *2*，*3* 中的方法计算:

2 法:

$$V = \int_0^1 2\pi x\cdot(x^2+1-2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\pi;$$

3 法:

$$V_1 = \int_0^2 \pi x_1^2\mathrm{d}y = \int_0^2 \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\pi;$$
$$V_2 = \int_1^2 \pi x_2^2\mathrm{d}y = \int_1^2 \pi\sqrt{y-1}^2\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2},$$

因此

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi.$$

2 反常积分

2.1 无穷限的反常积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $t>a$，作定积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，再求极限:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

对于这个变限积分的极限，我们称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

根据极限的结果是否存在，可引入反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与发散的定义.

定义 2.1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $t>a$，若极限 $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；反之若极限不存在，则称反常积分发散.

类似的，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，任取 $t<b$，极限

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分，记为

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

于是有定义：

定义 2.2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，任取 $t>a$，若极限 $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；反之若极限不存在，则称反常积分发散.

设函数 $f(x)$ 在在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，任取 $t\in\mathbb{R}$，反常积分 $\int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 之和称之为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分，记为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

于是有定义：

定义 2.3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，任取 $t\in\mathbb{R}$ ，若反常积分 $\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x$ **都收敛**，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；否则称反常积分发散.

注 2.1. $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分要求 $\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x$ **都收敛**，两者都发散则反常积分发散.

由上述定义与**牛顿-莱布尼兹公式** (定理1.1) 可知，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的一个原函数，若 $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(a);$$

收敛，若 $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 不存在，则反常积分 $\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似的，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上的一个原函数，若 $\lim_{x\to-\infty}F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}F(b)-F(t);$$

收敛，若 $\lim_{x\to-\infty}F(x)$ 不存在，则反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数，若 $\lim_{x\to-\infty}F(x)$ 与 $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 都存在，则反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+\lim_{s\to-\infty}F(a)-F(s)=\lim_{t\to+\infty}F(t)-\lim_{s\to-\infty}F(s).$$

收敛，否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 2.2. 无穷限下的反常积分除了利用极限的方法求解，还可以通过**倒代换**化为有界积分域下的定积分，这一技巧在一些题目中是十分重要的：

1. 计算积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2-1}}$.

解. 令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2-1}}=\int_1^0\frac{\mathrm{d}\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{2\frac{1}{t^2}-1}}$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

□

2.2 无界函数的反常积分

现在我们将定积分推广到被积函数无界的情形.

定义 2.4 (瑕点与瑕积分)**.** 若 $\exists M>0,\forall\delta>0,\exists x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\mathrm{s.t.}f(x)>M$ 则称 x_0 为 $f(x)$ 的瑕点 (也称无界间断点)，无界函数的反常积分称为瑕积分.

设 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，a 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t\in(a,b)$ 作定积分 $\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$，再取极限：

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

对于这个变限积分的极限，我们称为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由此我们可以引入无界函数反常积分收敛与发散的定义：

定义 2.5. 设函数在区间 $(a,b]$ 上连续，a 为函数 $f(x)$ 的瑕点，若极限 $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为反常积分的值；若极限不存在，则称反常积分发散.

类似的，设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，b 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t\in(a,b)$ 作定积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，再取极限：

$$\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

对于这个变限积分的极限，我们称为无界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的反常积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由此我们有定义：

定义 2.6. 设函数在区间 $[a,b)$ 上连续，b 为函数 $f(x)$ 的瑕点，若极限 $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为反常积分的值；若极限不存在，则称反常积分发散.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,c),(c,b]$ 上连续，c 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 的和称为无界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由此我们有定义：

定义 2.7. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,c),(c,b]$ 上连续，c 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 若反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称两反常积分值的和为反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值；否则称反常积分发散.

注 2.3. $[a,c),(c,b]$ 上的反常积分要求 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ **都收敛**，两者都发散则反常积分发散.

计算无界函数反常积分的值也可以应用**牛顿-莱布尼兹公式**：设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的一个原函数，若 $\lim_{x\to a^+} F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} F(b)-F(t);$$

同理，设 $x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的一个原函数，若 $\lim_{x\to b^-} F(x)$ 存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} F(t)-F(a);$$

设 $x=c$ 为 $f(x)$ 的瑕点，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,c),(c,b]$ 上的原函数，若 $\lim_{x\to c^+} F(x)$ $\lim_{x\to c^-} F(x)$ 均存在，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-} F(t)-F(a)+F(b)-\lim_{s\to c^+} F(s).$$

注 2.4. 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内部有瑕点，则在整个区间 $[a,b]$ 上牛顿——莱布尼兹公式失效，因为此时在 (a,b) 内 $f(x)$ 无原函数，此时必须把区间在瑕点处断开，在分别求极限计算反常积分.

一般的，若在区间 (a,b) 内有第一类间断点与无穷间断点，则在整个区间 $[a,b]$ 上牛顿——莱布尼兹公式失效；但若有（有界）震荡间断点（因为无界震荡函数没有原函数），则牛顿——莱布尼兹公式是否成立可能仍需要探讨.

下面举几个例子：

1. 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

   被积函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在积分区间 $[-1,1]$ 上除点 $x=0$ 外连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$. 由于

   $$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^0 = -\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-1=+\infty.$$

   即反常积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散，由定义知，反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

注 2.5. 如果忽略 $x=0$ 为瑕点，则会得到错误的结果：

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=2.$$

这在计算中是常见的错误.

设有反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，a 可以是 $+\infty$，b 可以是 $-\infty$，a,b 也可以是 $f(x)$ 的瑕点，对于这样的反常积分，在换元函数单调的假定下，可以像定积分一样换元.

2. 计算积分 $\int_0^\pi \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$，$(a>0,b>0)$.

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^\pi\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\pi\frac{\sec^2 x}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}\tan x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}\tan x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\mathrm{d}\tan x
\end{aligned}$$

令 $t=\tan x$ 有：

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a^2t^2+b^2}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2t^2+b^2}\mathrm{d}t\\
&=A+B.
\end{aligned}$$

其中

$$A=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a^2t^2+b^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\cdot t\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{\pi}{2ab}.$$

$$B=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2t^2+b^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\cdot t\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\pi}{2ab}.$$

因此

$$I=A+B=\frac{\pi}{ab}.$$

3. 求反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\mathrm{d}x$

令 $\sqrt{x}=t$，则 $t^2=x$，因此有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2t}{t\sqrt{(t^2+1)^3}}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tan u$，则 $u=\arctan t$ 因此

$$2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 u}{\sec^3 u}\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u=2.$$

因此有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\mathrm{d}x=2.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(0)=1$，求 $\lim_{t\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$.

因为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{-\epsilon}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{+\epsilon}^{1}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\\ &= I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

首先考察 I_2，由推广积分中值定理（定理**??**）可知：

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x = f(\xi_2)\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\\ &= f(\xi_2)\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{1}{1+(\frac{x}{t})^2}\mathrm{d}\frac{x}{t} = f(\xi_2)\cdot\arctan\frac{x}{t}\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon}\\ &= 2f(\xi_2)\cdot\arctan\frac{\epsilon}{t}.\end{aligned}$$

可知，若 $\epsilon\sim t$，则 $\lim I_2=f(0)\cdot 2\arctan\frac{\epsilon}{t}=\frac{\pi}{2}$；若 $\epsilon=o(t)$，则 $\lim I_2=f(0)\cdot 2\arctan\frac{\epsilon}{t}=0$；若 $t=o(\epsilon)$，则 $\lim I_2=f(0)\cdot 2\arctan\frac{\epsilon}{t}=\pi$.

因此 ϵ 应该如何选择，需要考察 I_1,I_3 的性质，因为：

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-1}^{-\epsilon}\frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x = f(\xi_1)\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\\ &= f(\xi_1)\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{1+(\frac{x}{t})^2}\mathrm{d}\frac{x}{t} = f(\xi_1)\cdot\arctan\frac{x}{t}\Big|_{-1}^{-\epsilon}\\ &= f(\xi_1)\cdot[\arctan\frac{-\epsilon}{t}-\arctan\frac{-1}{t}] = f(\xi_1)\cdot[\arctan\frac{1}{t}-\arctan\frac{\epsilon}{t}].\end{aligned}$$

可知，若 $\epsilon\sim t$，则 $\lim I_1=f(\xi_1)\frac{\pi}{4}$；若 $\epsilon=o(t)$，则 $\lim I_1=f(\xi_1)\frac{\pi}{2}$；若 $t=o(\epsilon)$，则 $\lim I_1=0$.

同理可知只有当 $t=o(\epsilon)$ 时才能消除未知项 $f(\xi_1)$ 与 $f(\xi_3)$ 因次令 $\epsilon=\sqrt{t}$ 有：

$$I=I_1+I_2+I_3=0+\pi+0=\pi.$$

注 2.6. 在区间 $[-1,-\epsilon],[\epsilon,1]$ 上，$f(x)$ 不保号，而 $\frac{t}{t^2+x^2}$ 保号，因此只能提取 $f(x)$.

2.3 反常积分审敛法

2.3.1 （一）无穷限反常积分的审敛法

定理 2.1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，且 $f(x)\geq(\leq)0$，若函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

有上界（下界），则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明. 因为 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，因此 $F(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 可导（定理**??**）且 $F'(x)=f(x)\geq(\leq)0$，即 $F(x)$ 单调增（减）且有上（下）界，因此必有 $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 存在，由定义知反常积分收敛. □

由此定理，对于非负函数在无穷限的积分有以下比较审敛原理：

定理 2.2 (反常积分比较审敛原理)**.** 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，如果对于 $x\in[a,+\infty),\text{s.t.}0\le f(x)\le g(x)$，且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

如果对于 $x\in[a,+\infty),\text{s.t.}0\le f(x)\le g(x)$，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明. 因为对于 $x\in[a,+\infty),\text{s.t.}0\le f(x)\le g(x)$，且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，记其为 M，则

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^x g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=M,$$

由定理2.1可知 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 上式中第一个等号成立的原因在于定积分的不等式性（定理**??**）.

利用反证法证明定理的第二条. 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，矛盾. 因此若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散. □

由反常积分的比较审敛原理可以得到下面的比较审敛法：

定理 2.3 (反常积分比较审敛法 1)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，且 $f(x)\ge0$，其中 $a>0$. 如果存在常数 $M>0$ 以及 $p>1$ 使得对于 $x\in[a,+\infty)$ 有

$$f(x)\le\frac{M}{x^p},$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$ 使得对于 $x\in[a,+\infty)$ 有

$$f(x)\ge\frac{N}{x},$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明. 因为对于反常积分 $I=\int_a^{+\infty}\frac{M}{x^p}\mathrm{d}x$（其中 $a>0$）而言，当 $p>1$ 时有 I 收敛；当 $0<p\le1$ 时有 I 发散，即可证明. □

定理 2.4 (反常积分极限审敛法 1)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，且 $f(x)\ge0$. 如果存在常数 $p>1$，使得

$$\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=c<+\infty,$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=d>0,$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明. 由假设 $\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=c<+\infty$, 成立，则存在 $X_1>a>0,\text{s.t.}\forall x>X_1$ 有

$$|x^pf(x)-c|<1,$$

即

$$c-1<x^pf(x)<1+c,$$

即当 $x > X_1$ 时有

$$0 \le f(x) < \frac{1+c}{x^p}.$$

即反常积分 $\int_{X_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 又因为

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_a^{X_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{X_1}^t f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_a^{X_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_{X_1}^t f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{X_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{X_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

同理，存在 $X_2 > a > 0, \text{s.t.} \forall x > X_2$ 有

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2},$$

即

$$0 < \frac{d}{2} < xf(x) < \frac{3d}{2},$$

即当 $x > X_2$ 时有

$$f(x) > \frac{d}{2x} > 0,$$

即反常积分 $\int_{X_2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，进而 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. □

定理 2.5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛，则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

证明. 易知

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

则

$$0 = -|f(x)| + |f(x)| \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$$

即

$$0 \le \frac{1}{2}\cdot[f(x) + |f(x)|] \le |f(x)|$$

，记 $\phi(x) = \frac{1}{2}\cdot[f(x) + |f(x)|]$，因为 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_a^{+\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，又因为 $f(x) = 2\phi(x) - |f(x)|$，所以

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛. □

若函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称之为**绝对收敛**，于是上定理说明：绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

2.3.2　（二）无界函数反常积分的审敛法

定理 2.6 (反常积分比较审敛法 2)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 连续，且 $f(x)\geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 瑕点. 如果存在常数 $M>0$ 以及 $q<1$，使得 $\forall x\in(a,b]$ 有

$$f(x)\leq \frac{M}{(x-a)^q}$$

则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得 $\forall x\in(a,b]$ 有

$$f(x)\geq \frac{N}{x-a}$$

则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 2.7 (反常积分极限审敛法 2)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 连续，且 $f(x)\geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 瑕点. 如果存在常数 $0<q<1$，使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$$

存在，则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$$

则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

总结无界函数与无限区间的审敛法，我们有对于反常积分：

$$I=\int_a^{+\infty}\frac{1}{(x-a)^p\cdot x^q}$$

其中 $a>0$，若 $p<1$ 且 $p+q>1$，则 I 收敛.

例 2.1. 判断反常积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

易知

$$f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x^2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}},$$

因此当 $x\to 1^+$ 时 $f(x)\sim\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$；当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\sim\frac{1}{x^3}$，故反常积分 I 收敛.

2.3.3　（三）反常积分收敛的其他性质

1. 若 $I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数;}\\ 2\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数.}\end{cases}$$

反之不成立；

2. 对于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A f(x)\mathrm{d}x = I_0 \ \exists \Rightarrow \lim_{X\to\infty} \int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x = I_0.$$

但是

$$\lim_{X\to\infty} \int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x \exists \nRightarrow \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A f(x)\mathrm{d}x \ \exists$$

这说明若 $f(x)$ 为奇函数，不能说明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$；类似的：若 $f(x)$ 为奇函数，0 为瑕点，不能说明 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. 对于反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f(x)+g(x)\mathrm{d}x$ 有

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^{+\infty} f(x)+g(x)\mathrm{d}x$
收敛	收敛	收敛
收敛	发散	发散
发散	收敛	发散
发散	发散	不一定

4. 对于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有

$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$	$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$
收敛	收敛	收敛
收敛	发散	发散
发散	收敛	发散
发散	发散	发散

这说明，如果奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 发散，那么它在 $(-\infty,+\infty)$ 发散.

2.3.4 （四）常见反常积分

1. 设常数 $a>0$，则

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \begin{cases} \text{当 } p>1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{p-1}a^{1-p}, \\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时发散} \end{cases}$$

2. 设常数 $a>1$，则

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x \begin{cases} \text{当 } p>1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{p-1}(\ln a)^{1-p}, \\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时发散} \end{cases}$$

3. 设常数 $a>0$，则

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \begin{cases} \text{当 } p<1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{1-p}a^{1-p}, \\ \text{当 } p\geq 1 \text{ 时发散} \end{cases}$$

4. 设常数 $b>a$，则

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x \begin{cases} \text{当 } p<1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, \\ \text{当 } p\geq 1 \text{ 时发散} \end{cases}$$

5. Γ 函数

2.4 Γ 函数

定义 2.8 (Γ 函数)**.** 定义如下函数为 Γ 函数：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \ (s>0).$$

下面讨论 Γ 函数的收敛性问题，因为这个积分的积分区间为无穷，又当 $s<1$ 时 $x=0$ 是被积函数的瑕点. 为此我们分别讨论一下两个积分：

$$I_1=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$
$$I_2=\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x.$$

先讨论 I_1. 当 $s\geq 1$ 是，I_1 是定积分；当 $s<1$ 时因为：

$$e^{-x}x^{s-1}=\frac{1}{e^x\cdot x^{1-s}}<\frac{1}{x^{1-s}},$$

又因为 $1-s<1$ 所以由比较审敛法可知 I_1 收敛；

再讨论 I_2. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}x^{s-1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-x}x^{s-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0.$$

所以由极限审敛法，可知 I_2 收敛.

综上可知反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 对于 $s>0$ 均收敛.

接着我们讨论一下 Γ 函数的几个重要性质：

1. 递推公式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$；

证明. 运用分部积分法有

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)&=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x^s\mathrm{d}e^{-x}\\ &=-e^{-x}x^s|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x\\ &=-e^{-x}x^s|_0^{+\infty}+s\Gamma(s).\end{aligned}$$

而

$$-e^{-x}x^s|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x}x^s = 0.$$

所以有

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

□

2. $\Gamma(1) = 1$;

3. $\Gamma(n+1) = n!$;

证明. 因为 $\Gamma(1) = 1, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$，所以有

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!;$$
$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(1) = 2!;$$
$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(1) = 3!;$$
$$\cdots$$

设对于 k 有

$$\Gamma(k) = (k-1)!,$$

则对于 $k+1$ 有

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k) = k!.$$

因此一般的，对于任何常数 n，有

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

□

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

注 2.7.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x,$$

令 $x = t^2$ 有

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{-1} \cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

上式导出的积分 $2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$，这个结果在二重积分中有证明. 在概率统计中与标准正态分布密切相关. 应用 Γ 函数在概率统计中可以大大简化计算.