线性代数基本概念与方法: 二次型

Collection of Linear Algebra Tips: Quadratic

王浩铭

2018 年 · 春

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等代数 I 期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Linear Algebra (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

1 二次型与合同

1.1 确定参数

1. 若 A 经正交变换与 B 合同，则 A 与 B 相似，参数确定的方法同??节，即

    - 利用秩
    - 利用特征值运算性质
    - 利用特征向量构造方程组

Edition 4

2. 若 A 正定，则

- 利用各阶顺序主子式大于零
- 利用所有特征值大于零（将含参特征值按从大到小的顺序排列，从而确定）

例 1.1. 已知 $f=2x_1^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化为标准型 $y_1^2+by_2^2-y_3^2$，求 a.

易知

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}=B$$

则 $tr(A)=tr(B),|A|=|B|$ ，所以 $a=0,b=2$.

例 1.2. 二次型 $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，求 t 的范围.

易知对应的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$$

正定，则顺序主子式均大于 0，因此 $\Delta_1=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=4-t^2>0$，即 $-2<t<2$; $\Delta_3=|A|=-4t^2-4t+8>0$，即 $-2<t<1$.

因此 $-2<t<1$.

例 1.3. A 是 3 阶非零实对称矩阵，且满足 $A^2+2A=O$，若 $kA+E$ 是正定矩阵，求 k.

易知 $A(A+2E)=O$，即 A 的特征值为 0 或 -2，因为 A 是 3 阶非零实对称矩阵，所以 A 的特征值不全为 0，即存在特征值-2，从而 $kA+E$ 存在特征值 $1-2k$，因为 $kA+E$ 正定，所以 $1-2k>0$，即 $k<\frac{1}{2}$.

例 1.4. 已知 $x^TAx=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，$(2,1,2)^T$ 是 A 的特征向量，那么经正交变换二次型的标准型为.

易知

$$\begin{bmatrix}1&a&1\\a&-5&b\\1&b&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda_1\\1\lambda_1\\2\lambda_1\end{bmatrix}$$

所以方程组

$$\begin{cases} 2+a+2=2\lambda_1 \\ 2a-5+2b=\lambda_1 \\ 2+b+2=2\lambda_1 \end{cases}$$

解得 $a=b=2,\lambda_1=3$，因为 $r(A)=2$，所以 $\lambda_2=0$，又因为 $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$，所以 $\lambda_3=-6$，因为 $f=3y_1^2-6y_3^2$.

1.2 配方法求变换矩阵 P

每次变换都应化为 $x\to y\to z$ 的顺序.

例 1.5 (重点)**.** 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$，经可逆线性变换 $x=Py$ 的 $g=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.
1. 求 a
2. 求 P.

1.

因为 $g=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$，所以 g 的正负惯性指数为 $p=2,q=0$，因此 f 的正负惯性指数为 $p=2,q=0$.

因为 f 的二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

因此 A 的特征值为 $1-a,1-a,1+2a$，因此 $1-a>0,1+2a=0$，所以 $a=-\frac{1}{2}$.

2.

由配方法知

$$\begin{aligned} f&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3 \\ &=\left[x_1^2-x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2\right]+x_2^2+x_3^2-x_2x_3-\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2 \\ &=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1-\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x_3 \\ y_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$$

则 $f=y_1^2+y_2^2$ ，且

$$\begin{cases} x_1=y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2+y_3 \\ x_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

再令

$$\begin{cases} y_1=z_1+z_2 \\ y_2=2z_3 \\ y_3=z_2 \end{cases}$$

所以 $f=g=z_1^2+z_2^2+4z_3^2+2z_1z_2$，因此

$$\begin{cases} x_1=y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2+y_3=z_1+2z_2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}z_3 \\ x_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}y_2+y_3=z_2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}z_3 \\ x_3=y_3=z_2 \end{cases}$$

因此 $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

例 1.6. 用配方法化二次型 $f=2x_1x_2+4x_1x_3$ 为标准型，写出变换矩阵 P.

令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} f&=2x_1x_2+4x_1x_3 \\ &=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_3)y_3 \\ &=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3 \\ &=2y_1^2+4y_1y_3+2y_3^2-2y_2^2+4y_2y_3-2y_3^2 \\ &=2(y_1+y_2)^2-2(y_2-y_3)^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1=y_1+y_2 \\ z_2=y_2-y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

因此 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2$. 其中

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2 - 2z_3 \\ x_3 = y_3 = z_3 \end{cases}$$

1.3 矩阵等价、合同、相似

1. A, B 同型，则 A 与 B 等价
   $\Leftrightarrow A$ 经过初等变换得到 B
   $\Leftrightarrow PAQ = B$，P, Q 可逆
   $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

2. A, B 均为 n 阶矩阵，A 与 B 相似
   $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$
   $\Leftrightarrow \lambda_A = \lambda_B$ 且 $r(\lambda_{A_i}E - A) = r(\lambda_{B_i}E - B)$

3. A, B 均为 n 阶矩阵，A 与 B 合同
   $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC = B$
   $\Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$

易知：相似 $\Rightarrow$ 合同 $\Rightarrow$ 等价.

2 正定二次型的判断

2.1 正定的性质

n 元二次型 x^TAx 正定的充要条件

1. $p_A = n$;

2. $\lambda_A > 0$;

3. $A \simeq E$;

4. 存在可逆矩阵 C，使得 $A = C^TC$

n 元二次型 x^TAx 正定的必要条件

1. A 的各阶顺序主子式 Δ_i 大于零（$|A| > 0$）

2. 若 A 为正定矩阵，则 A^{-1}, A^{*}, A^{k}（k 为正整数）都是正定矩阵；

3. 若 A, B 为 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 为 n 阶正定矩阵；

4. 若 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶正定矩阵，则 $a_{ii}>0$（若 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶负定矩阵，则 $a_{ii}<0$）.

2.2 判定具体矩阵正定

判定具体矩阵是否正定首先利用正定的必要条件判断，若均满足则利用充分条件判定，主要利用（1）顺序主子式；（2）求特征值

例 2.1. 下列矩阵中正定的是

$A.\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&-3\end{bmatrix}$ $B.\begin{bmatrix}1&3&4\\3&9&2\\4&2&6\end{bmatrix}$ $C.\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&7&10\end{bmatrix}$ $D.\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&5&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$

A. 因为 $a_{33}=-3<0$，所以 A 不是正定矩阵；B. 因为 $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&3\\3&9\end{vmatrix}=0$，所以 B 不是正定矩阵；$C.|C|=0$，所以 C 不是正定矩阵；D. 因为 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3>0$，所以 D 是正定矩阵

2.3 判定抽象矩阵正定

第一步：证明矩阵是实对称矩阵；
第二步：证明正定，主要有几种方法：

1. 利用正定的定义，即证明 $x^TAx>0$

   若直接在 A 左右两侧乘 x 不方便求解，则应考虑适当的可逆线性变换.

2. 利用特征值，即证明 $\lambda_A>0$

3. 利用惯性定理，即证明 $A\simeq B$，其中 B 正定

4. 证明 $A\simeq E$，或者存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$.

对于由 A 正定来证明 $f(A)$（如 A 的多项式，A^TA 等）正定的常用方法由特征值法、定义法

例 2.2. 已知 A 正定，证明 A^{-1} 正定.

因为 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，所以 A 是对称矩阵.
法一：利用定义
已知 A 正定，则 A 可逆，对 $x^TA^{-1}x$ 做坐标变换 $x=Ay$ 有

$$x^TA^{-1}x=(Ay)^TA^{-1}Ay=y^TA^Ty=y^TAy$$

因为 A 可逆，所以对于任意 $x\neq\theta$ 有 $y\neq\theta$，从而 $x^TA^{-1}x=y^TAy>0$，即 A^{-1} 正定.

法二：利用特征值

因为 A 正定，所以 $\lambda_A>0$，从而 $\lambda_{A^{-1}}=\frac{1}{\lambda_A}>0$，所以 A^{-1} 正定.

法三：与已知正定矩阵合同

因为 A 正定，则 A 可逆且对称，因此

$$A^TA^{-1}A=A^T=A$$

从而 $A^{-1}\simeq A$，有惯性定理可知 A^{-1} 正定.

法四：与单位阵合同

因为 A 正定，则存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC=E$ 两侧取逆有

$$(C^TAC)^{-1}=C^{-1}A^{-1}(C^T)^{-1}=C^{-1}A^{-1}(C^{-1})^T=E$$

令 $(C^{-1})^T=Q$，则 $Q^T=C^{-1}$，所以存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^TA^{-1}Q=E$，因此 $A^{-1}\simeq E$，A^{-1} 正定.

例 2.3. 已知 A 正定，$A-E$ 正定，证明 $E-A^{-1}$ 正定.

因为 $(E-A^{-1})^T=E^T-(A^{-1})^T=E-(A^T)^{-1}=E-A^{-1}$，所以 $E-A^{-1}$ 是对称矩阵.

因为 A 正定，$A-E$ 正定，所以 $\lambda_A>0,\lambda_A>1$，所以 $\lambda_{E-A^{-1}}=1-\frac{1}{\lambda_A}=\frac{\lambda_A-1}{\lambda_A}>0$，因此 $E-A^{-1}$ 正定.

例 2.4. *1.* 设 $A-m\times n, r(A)=n$，证明 A^TA 是正定矩阵

2. 设 $A-m\times n, E-n\times n, B=\lambda E+A^TA$，证明 $\lambda>0$ 时 B 正定

3. 设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，证明 $A-B^2$ 可逆.

1. 易证 A^TA 是对称矩阵. 因为 $r(A)=n$，所以 $Ax=\theta$ 只有零解，即对于变换 $x=Ay$，任意 $y\neq\theta$ 有 $x\neq\theta$，所以

$$x^TA^Tx=(Ax)^TAx=(Ax,Ax)>0$$

因此 A^A 正定；

2. 易证 $B=\lambda E-A^TA$ 是对称矩阵.

法一：利用定义

$$x^TBx=x^T(\lambda E+A^TA)x=\lambda x^Tx+x^TA^TAx=\lambda x^TEx+(Ax)^TAx$$

对于任意 $x \neq \theta$ 有 $\lambda x^T E x > 0, (Ax)^T Ax \geq 0$，所以 $x^T B x > 0$.

法二：利用特征值

设 μ 是 $A^T A$ 的任意特征值，则 $A^T A x = \mu x$，因此 $x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \mu x^T x$，对于任意 $x \neq \theta$ 有 $(Ax)^T (Ax) \geq 0, x^T x > 0$，所以 $\mu \geq 0$，从而 $\lambda_B = \lambda + \lambda_{A^T A} > 0$，从而 B 正定.

3. 因为 $B^T = -B$，所以 $A - B^2 = A - BB = A + B^T B$，由 2 可知 $A - B^2$ 正定.

例 2.5. A 是 3 阶对称矩阵，证明矩阵 A 正定的充分必要条件为存在可逆矩阵 C，使得 $A = C^T C$.

$\Rightarrow$

若 A 正定，则存在可逆矩阵 P 使得 $x = Py$ 有 $x^T A x = y^T P^T A P y = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + d_3 y_3^2$，令 $z_i = \sqrt{d_i} y_1$，即 $y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}$，所以 $y = Qz$，其中 $Q = \mathrm{diag}\{\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \frac{1}{\sqrt{d_3}}\}$，因此

$$x^T A x = y^T P^T A P y = z^T (Q^T P^T A P Q) z = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 > 0$$

令 $D = PQ$，$x = Dz$，则 $D^T A D = E$，所以 $A = (D^T)^{-1} D^{-1} = (D^{-1})^T D^{-1} \xlongequal{D^{-1}=C} C^T C$.

$\Leftarrow$

若存在可逆矩阵 C，使得 $A = C^T C$，则

$$A^T = (C^T C)^T = C^T (C^T)^T = C^T C = A$$

所以 A 是对称矩阵, 因为 C 可逆, 则任意 $x \neq \theta$ 有 $Cx \neq \theta$, 因此 $x^T A x = x^T C^T C x = (Cx)^T C x > 0$. 所以 A 正定.