高等数学基本方法: 定积分

Collection of Calculus Tips: Definite integral

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等数学期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Calculus (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 定积分计算

1.1 A. 积分中值定理

定理 1.1 (积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（$a \leqslant b$），则 $\exists \xi \in (m, M)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

成立.

定理 1.2 (推广积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变符号：$g(x) \leq 0$ 或 $g(x) \geq 0$. 则存在 $\xi \in (m, M)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对于两个积分中值定理，需要做如下强调：对于形如 $I = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x$ 的定积分，要注意其中值 ξ 为 n 的数列，即 $I = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n)\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，此时 ξ 不是常数.

例 1.1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

$$I = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\xi_n^2}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\xi_n^2}\cdot\frac{1}{n+1} = 0.$$

需要注意的是 $I = \lim_{n\to\infty}\xi_n^n\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ 因为 $\xi_n \in (0,1)$，所以 $\lim_{n\to\infty}\xi_n^n = 0$，所以 $I = 0$ 的做法是错误的，因为 ξ_n 不是常数，因此 $\lim_{n\to\infty}\xi_n^n$ 可能不等于零，如 $\xi_n = \frac{n}{n+1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

注 1.1. 计算形如 $\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的题，应该考虑三角换元的方法.??

1.2 B. 定积分分部积分技巧

常用技巧：

1. 当给出 $f'(x)$ 的性质时，考虑
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = xf(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x;$$
2. 当给出 $f(b)$ 的性质时，考虑
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a)\\ &= (x-a)f(x)|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 1.2. 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

方法一：分部积分

因为 $f(0)=0$，因此 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(x-\pi) = (x-\pi)|_0^\pi f(x) - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\pi (x-\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2$.

方法二：累次积分交换次序

因为 $I=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$，交换积分次序有 $I=\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t\int_t^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2$.

注 1.2. 形如 $\int_a^b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ 的定积分一般有两种解法：

1. 分部积分

2. 交换次序

例 1.3. 设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2, f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

分部积分法：$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x-1) = (x-1)f(x)|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 (x-1)\arcsin(1-x)^2\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin(1-x)^2\mathrm{d}(1-x)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin u\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

例 1.4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1, F(x)=\int_1^t [f(y)\cdot\int_y^t f(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$，求 $F'(2)$.

易知这是一个含元变限积分，设 $f(x)$ 原函数为 $\phi(x)$，则
$$\begin{aligned}F(t) &= \int_1^t [f(y)\cdot\int_y^t f(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y = \int_1^t f(y)\cdot[\phi(t)-\phi(y)]\mathrm{d}y\\ &= \int_1^t f(y)\cdot\phi(t)\mathrm{d}y - \int_1^t f(y)\cdot\phi(y)\mathrm{d}y\\ &= \phi(t)\int_1^t f(y)\mathrm{d}y - \int_1^t f(y)\cdot\phi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}F'(t) &= \phi'(t)\int_1^t f(y)\mathrm{d}y + \phi(t)f(t) - f(t)\phi(t)\\ &= f(t)\int_1^t f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以 $F'(2) = f(2)\int_1^2 f(y)\mathrm{d}y = f(2)$.

例 1.5. 设 $f'(x) = \arctan(x-1)^2, f(0) = 0$，求 $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

易知

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 1 = (x-1)f(x)|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 (x-1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x - 1\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan u\mathrm{d}u\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

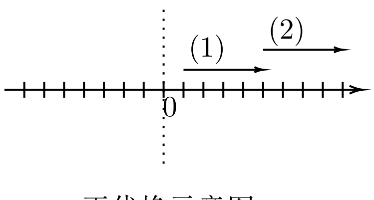
1.3 C. 正代换、反代换、倒代换

定义 1.1. 我们称如下的换元方式为正代换（平移代换）:

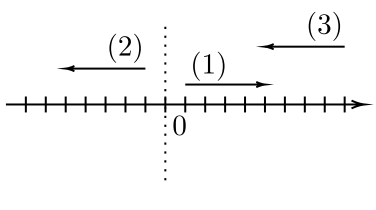
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{a\pm k}^{b\pm k} f(x\mp k)\mathrm{d}(x\mp k);$$

称如下的还原方式为反代换（翻转代换）:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{-b} f(-x)\mathrm{d}(-x)\\ &= \int_{-a\pm k}^{-b\pm k} f(-x\mp k)\mathrm{d}(-x\mp k).\end{aligned}$$



正代换示意图



反代换示意图

在对限的线性变换中，我们常使用三种代还技巧：1）正代换；2）反代换；3）上下限颠倒乘负号.

1. 正代换. 正代换在换元过程中最大的作用是

1. 将非对称区间平移至对称区间，利用函数的周期性与奇偶性化简；

2. 通过平移消去某些项；

3. 无穷限的区间再现.（常用于被积函数有一定的周期性的情况）

如

$$\int_0^a (x-\frac{a}{2})\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x\cdot f(x+\frac{a}{2})\mathrm{d}x.$$

无穷限的区间再现是指

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a-b}^{+\infty} f(x+b)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x+b)\mathrm{d}x+\int_{a-b}^{a} f(x+b)\mathrm{d}x.$$

当函数 $f(x+b)=kf(x)$ 时，积分可以化为如下方程的解

$$I=k\cdot I+\int_{a-b}^{a} f(x+b)\mathrm{d}x.$$

例 1.6. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x$.

趋势周期函数一般采用区间再现（正反代换），易知

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\pi}^{+\infty} e^{-2(x+\pi)}\cdot|\sin x+\pi|\mathrm{d}x=e^{-2\pi}\int_{-\pi}^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x\\
&=e^{-2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x+e^{-2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x\\
&=e^{-2\pi}\cdot I+e^{-2\pi}\int_0^{\pi} e^{-2(x-\pi)}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x\\
&=e^{-2\pi}\cdot I+\int_0^{\pi} e^{-2x}\cdot\sin x\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

即

$$I=\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\cdot\int_0^{\pi} e^{-2x}\cdot\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cdot\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

注 1.3. 该例体现了将定积分计算转化为方程求解的两个技巧：$\int e^{ax}\cdot\sin bx\mathrm{d}x$ 型分部积分；无穷区间上的区间再现.

例 1.7. 设 $a_n=\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$，求 a_n.

趋势周期函数一般采用区间再现（正反代换），即令 $u=-x+n\pi$，则

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\sin u|\mathrm{d}u=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\mathrm{d}u-\int_0^{n\pi} u|\sin u|\mathrm{d}u\\
&=2n^2\pi-a_n
\end{aligned}$$

所以 $a_n=n^2\pi$.

例 1.8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x+T)=f(x),T>0,f(-x)=f(x)$. 证明

$$\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $t=-x+nT$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x&=\int_{nT}^0(-t+nT)f(-t+nT)\mathrm{d}-t\\&=\int_0^{nT}(-t+nT)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

例 1.9. 求曲线 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x},(x\geq 0)$ 绕 x 轴旋转体体积.

易知 y 仅在 $[2k\pi,(2k+1)\pi],k\geq 0$ 上有定义，则

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$$

令 $t=x-2k\pi$，则

$$\begin{aligned}V&=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi}e^{-2(x+2k\pi)}\sin(x+2k\pi)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4k\pi}\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5(1-e^{-4\pi})}=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.\end{aligned}$$

注 1.4. 对于积分或求和进行变量的平移变换时，表达式中的变量与积分号/求和号中的变量变换方向相反，如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+k}^{b+k}f(x-k)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_n=\sum_{i=1+k}^{n+k}x_{n-k}.$$

例 1.10. 设 $a>0$，则 $I=\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=$

$$\begin{aligned}I&=\int_{-a}^{a}(x+a)\sqrt{2a(x+a)-(x+a)^2}\mathrm{d}x\\&=\int_{-a}^{a}(x+a)\sqrt{2ax+2a^2-(x^2+a^2+2ax)}\mathrm{d}x\\&=\int_{-a}^{a}(x+a)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^3}{2}.\end{aligned}$$

2. 反代换. 反代换在换元过程中最大的作用是

1. 不易破坏三角函数的外层结构，如对于函数 $f(\sin x)$ 或 $f(\cos x)$；

2. 区间再现（三角函数、指数函数，因为三角函数反代换后还是三角函数，指数函数反代换后是指数函数的倒数）.

正反代换效果如下：

正代换 π

$$f(\sin(x+\pi)) = f(-\sin(x));$$
$$f(\cos(x+\pi)) = f(-\cos(x)).$$

反代换 π

$$f(\sin(-x+\pi)) = f(-\sin(-x)) = f(\sin x);$$
$$f(\cos(-x+\pi)) = f(-\cos(-x)) = f(-\cos x).$$

正代换 $\frac{\pi}{2}$

$$f(\sin(x+\frac{\pi}{2})) = f(\cos(x));$$
$$f(\cos(x+\frac{\pi}{2})) = f(-\sin(x)).$$

反代换 $\frac{\pi}{2}$

$$f(\sin(-x+\frac{\pi}{2})) = f(\cos(-x)) = f(\cos x);$$
$$f(\cos(-x+\frac{\pi}{2})) = f(-\sin(-x)) = f(\sin x).$$

综上可知，当 $f(-\sin x), f(-\cos x)$ 无法很好解决时，反代换往往是十分有效的.

由反代换原理可以的得到一个常用的二级结论：

定理 1.3 (区间再现公式)**.** 设 $f(x)$ 为连续函数，则有

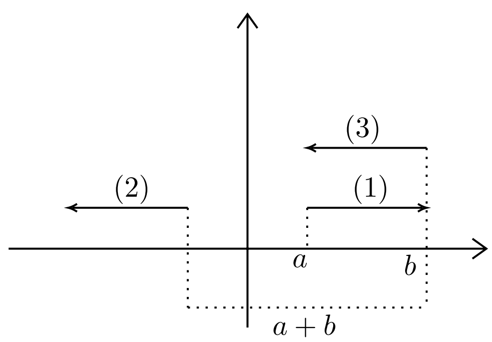
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.$$

证明. 令 $t=-x+a+b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^a f(a+b-t)\mathrm{d}-t = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$



□

对于某些不好求原函数的被积函数（通常含有三角函数、指数函数），一种方法是进行反代换，其核心原则是在换元的同时使区间不变，即区间再现.

例 1.11. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\mathrm{d}x$.

法一：反代换

令 $t=-x$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^4 -t\mathrm{d}t\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^t}\sin^4 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t+1}{1+e^t}\sin^4 t\mathrm{d}t\\&=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

法二：对称区间非奇非偶函数定积分组合积分技巧

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)+f(-x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cdot\left[\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cdot\frac{e^x+1}{1+e^x}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

注 1.5. 注意，本题利用反代换的时候需要注意判断原点是否为瑕点.

例 1.12. $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

法一：反代换

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx-I\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{\sin x}{1+u^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\sin x}\right)=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi^2}{4}$$

法二：正代换

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \pi \arctan\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

例 1.13. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left[1+\tan\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}(-x)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{8}
\end{aligned}
$$

3. 倒代换. 倒代换在换元过程中最大的作用是将无穷限上的反常积分转化为定积分，因此对于对倒代换不敏感的函数（如有理函数、根式、对数函数等）在无穷限上的反常积分可以考虑倒代换.

例 1.14. 计算积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

令 $t = \frac{1}{x}, u = \sqrt{t}$ 有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^0 \sqrt{t}\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t} = -\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 t^{-\frac{3}{2}}\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t = -2\cdot\int_0^1 \cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}}\\
&= -2\cdot\ln(1+t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg|_0^1 + 2\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\cdot\ln(1+t)\\
&= -2\cdot\ln 2 + 2\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}\cdot t\\
&= -2\cdot\ln 2 + 4\cdot\int_0^1 \frac{u}{u}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}\cdot u\\
&= -2\cdot\ln 2 + 4\cdot\arctan u|_0^1 = \pi - 2\cdot\ln 2.
\end{aligned}
$$

例 1.15. 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

令 $t=\frac{1}{x}$ 有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^{+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^{0}\frac{\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}\mathrm{d}\frac{1}{t}\\
&= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^{0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^4\ln t}{(t^2+1)^2\cdot t^2}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^{0}\frac{t\cdot\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

1.4 D. 定积分几何意义

1. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}a^2$;

2. $\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}a^2$;

3. $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a^2$.

例 1.16. 计算累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}x$.

化为极坐标则有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}r\mathrm{d}r\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2\cos\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}\mathrm{d}r\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta = \frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

例 1.17. $I=\int_{-1}^1\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int_{-1}^1\frac{\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= 4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 4\int_0^1[1-\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x\\
&= 4-4\int_0^1[\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x = 4-\pi.
\end{aligned}
$$

例 1.18. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\cdot\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$

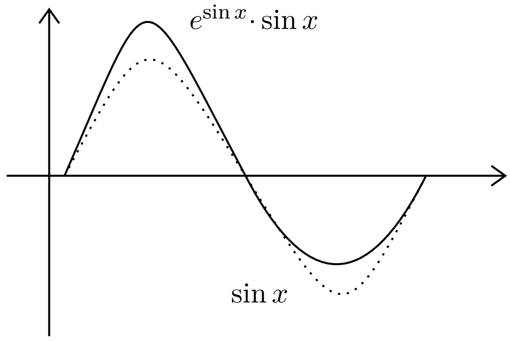
(A) 为正常数

(B) 为负常数

(C) 为 *0*

(D) 不是常数.

因为 $e^{\sin t}\cdot\sin t$ 以 2π 为周期，所以 $F(x)$ 为常数，下面判断正负，因为当 $0<x<\pi$ 时 $\sin x>0$，$e^{\sin x}>1$；同理当 $\pi<x<2\pi$ 时 $\sin x<0$，$e^{\sin x}<1$，因此函数图像为



因此 $F(x)>0$，为正常数.

例 1.19. 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x, k=1,2,3$，则

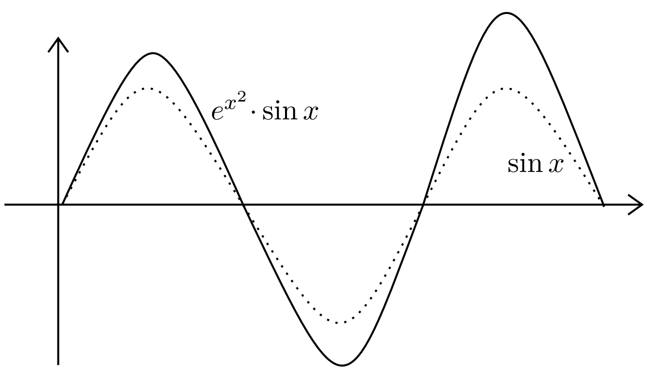
(A) $I_1<I_2<I_3$

(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$

(D) $I_2<I_1<I_3$.

易知 e^{x^2} 项使函数图像变为



所以 $I_3>I_1>I_2$.

例 1.20. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则

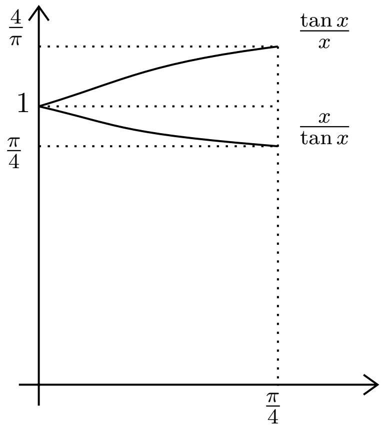
(A) $I_1>I_2>1$

(B) $1>I_1>I_2$

(C) $I_2>I_1>1$

(D) $1>I_2>I_1$

易知 $\sin x<x<\tan x$，所以 $\frac{\tan x}{x}>1>\frac{x}{\tan x}$，因为 $x\to 0$ 时有 $\frac{\tan x}{x}\to 1, \frac{x}{\tan x}\to 1$；$x\to\frac{\pi}{4}$ 时有 $\frac{\tan x}{x}\to\frac{4}{\pi}, \frac{x}{\tan x}\to\frac{\pi}{4}$，所以两个定积分图像为



因此 $I_2<I_1<1$

1.5 E. 三角函数定积分

1. 三角高次幂定积分.

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数;}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

2.

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数;}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

证明.

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\mathrm{d}x$$

□

3.

$$\int_0^{\pi} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = 2 \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数;} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

证明. 因为

$$I = \int_0^{\pi} \cos^n x \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n (x + \frac{\pi}{2}) \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin^n (x) \mathrm{d}x$$

所以当 n 为奇数时，$(-1)^n \sin^n(x)$ 为奇函数，$I = 0$；当 n 为偶数时 $(-1)^n \sin^n(x)$ 为偶函数 $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$. □

4.

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = 4 \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数;} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

2. 一般函数三角定积分.

1. 设 $f(x)$ 连续，则

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

由此得到一个常用的推论：$\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \pi$. 这比分部积分来的方便.

注 1.6. 注：若 f 内为 $\cos x$，则第一个等号与第二个等号均不成立.

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x.$$

证明. 倒代换，令 $t = -x + \frac{\pi}{2}$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(-t + \frac{\pi}{2}), \cos(-t + \frac{\pi}{2})]\mathrm{d}(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t.$$

□

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin x, \cos x) + f(\cos x, \sin x)]\mathrm{d}x.$$

例 1.21. $I=\int^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

法一：三角变换（倒代换）
易知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

法二：待定系数
令

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{A(\sin x+\cos x)'+B(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{A(\cos x-\sin x)+B(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$A(\cos x-\sin x)+B(\sin x+\cos x)=\sin x,$$

则 $A=-\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$，因此

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-(\sin x+\cos x)'+(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[-\ln(\sin x+\cos x)+x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

注 1.7. 形如

$$\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}\mathrm{d}x$$

的积分，法二是一般解法.

例 1.22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}\mathrm{d}x,(p>0).$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p x}{\cos^p x+\sin^p(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x+\cos^p x}{\sin^p x+\cos^p x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

例 1.23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^p x}\mathrm{d}x,(p>0).$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^p x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p x}{\sin^p x+\cos^p x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

3. 三角换元 形如 $\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的题，应该考虑三角换元的方法

例 1.24. 设 $f(x)=x^n\sqrt{1-x^2},x\in[0,1]$ 与 $y=0$ 所围成的平面区域面积为 $S_n,g(x)=\sin^{\frac{n}{2}}x,x\in[0,\pi/2]$ 与 $y=0$ 所围成区域绕 x 轴旋转一周所得体积为 V_n，求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi S_n}{V_n}$.

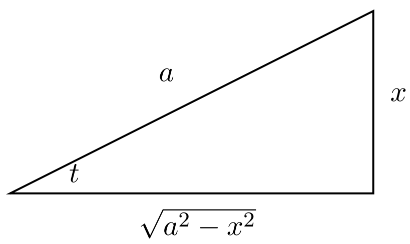
易知 $V_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi g^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^n x\mathrm{d}x=\pi\frac{(n-1)!!}{n!!}$. 又因为

$$\begin{aligned}\pi S_n&=\pi\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}\sin x\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\mathrm{d}x\\&=V_n-V_{n+2}.\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi S_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{V_n-V_{n+2}}{V_n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{V_{n+2}}{V_n}=0$.

4. 对角的调整. 对于 $\sqrt{a^2-x^2},\sqrt{a^2+x^2},\sqrt{x^2-a^2}$ 令 $x=a\sin t,x=a\tan t,x=a\sec t$.

以 $x=a\sin t$ 为例：$\sin t=\frac{x}{a}$，则 $\cos t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\tan t=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.



例 1.25. 求 $\int\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 原函数.

$\int\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=2\sin t}4\int\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=2+\sin 2t=2+2\sin t\cos t=2+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}+C$.

1.6 F. 定积分比较

对于证明形如 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq k$ 的定积分，即证明 $\int_a^b f(x)-kx\mathrm{d}x\geq 0$，令 $\phi(x)=f(x)-kx$，若在 (a,b) 上 $\phi(x)\geq 0$ 则 $\int_a^b|\phi(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

若 (a,b) 上 $\phi(x)$ 异号，则按照如下方法证明：

1. 拆分正负区间，化为两个积分；
2. 通过正代换、反代换将将两积分上下限化为一致，合并积分；
3. 注意被积函数周期性、奇偶性的应用.

例 1.26. 下列结论不正确的是：
$A.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\leq 1$；
$B.\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x>0$；
$C.\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<0$；
$D.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>1$.

$A.$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\leq 1$ 即 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}-\frac{4}{\pi}\leq 0$ 令 $\phi(x)=\tan x-\frac{4}{\pi}$，则 $\phi'(x)=\frac{x\cdot\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$，因为 $x-\sin x\cos x=\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x=\frac{1}{2}\cdot(2x-\sin 2x)>0$，所以 $\phi'(x)>0$，即 $\phi(x)\uparrow$，因为 $\phi(\frac{\pi}{4})=0$，所以在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上 $\phi(x)<0$，即 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\phi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}-\frac{4}{\pi}\leq 0$，即 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\leq 1$；

$B.$ 因为 $\cos x\cdot\ln(2+\cos x)$ 为以 2π 为周期的偶函数，则 $\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$，因为 $2+\cos x>1$，所以 $\ln(2+\cos x)>0$；在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上，$\cos x>0$，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上，$\cos x<0$，因此将积分拆分：

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x\\&=2\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

令 $t=-x+\pi$（反代换），所以

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos(\pi-t)\cdot\ln(2+\cos(\pi-t))\mathrm{d}(-t)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi-t)\cdot\ln(2+\cos(\pi-t))\mathrm{d}t\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\ln(2-\cos t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}I=&2\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x\right]\\=&2\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x+-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\ln(2-\cos t)\mathrm{d}t\right]\\=&2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos x\cdot\ln(2+\cos x)-\cos x\cdot\ln(2-\cos x)]\mathrm{d}x\\=&2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot[\ln(2+\cos x)-\ln(2-\cos x)]\mathrm{d}x\\=&2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(\frac{2+\cos x}{2-\cos x})\mathrm{d}x\\=&2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(1+\frac{2\cos x}{2-\cos x})\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $\frac{2\cos x}{2-\cos x}>0$，所以 $\ln(1+\frac{2\cos x}{2-\cos x})>0$，即 $\cos x\cdot\ln(1+\frac{2\cos x}{2-\cos x})>0$，因此 $I>0$.

C. 因为在 $(0,\pi)$ 内 $\sin x>0$，在 $(\pi,2\pi)$ 内 $\sin x<0$，所以拆分区间，有

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

令 $t=x-\pi$（正代换），有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{x+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}-\frac{\sin x}{x+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\sin x\cdot\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为在 $(0,\pi)$ 内 $\sin x>0$，且 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}>0$，所以 $I>0$.

D. 因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>1$ 即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x>0$，令 $\phi(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$，则 $\phi'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$，其中 $x\cdot\cos x-\sin x=\cos x\cdot(x-\tan x)<0$，则 $\phi'(x)<0$，因此 $\phi(x)\downarrow$，因为 $\phi(\frac{\pi}{2})=0$，所以 $\phi(x)>0$，即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x>0$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>1$.

例 1.27. 设常数 $a>0$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^a}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^a}\mathrm{d}x$，则

A. $I_1>I_2$;

B. $I_1<I_2$;

C. $I_1=I_2$;

D. 与 a 有关.

因为

$$\begin{aligned}I_1-I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^a}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^a}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^a}-\frac{\sin x}{1+x^a}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^a}\cdot(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\cos x-\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上大于零，在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上小于零，因此拆分区间：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^a}\cdot(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^a}\cdot(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

令 $t=-x+\frac{\pi}{2}$，有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^a}\cdot(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}\cdot(\cos(\frac{\pi}{2}-t)-\sin(\frac{\pi}{2}-t))\mathrm{d}(-t)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}\cdot(\sin t-\cos t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^a}\cdot(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}\cdot(\sin t-\cos t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t-\sin t)\cdot\left[\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因为在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上 $\cos t-\sin t>0$，而 $\frac{\pi}{2}-t>t$，因此对于 $a>0$ 有 $\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a}>0$，因此 $I>0$，即 $I_1>I_2$.

1.7 G. 两个定积分相乘

有三种解决思路

1. 转化为矩形区域的二重积分

   常辅助以轮换性解题.

2. 柯西积分不等式

   当两相乘定积分上下限相同时考虑柯西积分不等式. 由柯西不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

   可知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b[\sqrt{f(x)}]^2\mathrm{d}x\int_a^b[\sqrt{g(x)}]^2\mathrm{d}x\\ &\geq \left[\int_a^b\sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}\sigma\right]^2.\end{aligned}$$

3. 辅助原函数法

   当题干中涉及抽象函数的累次积分时可以考虑构造辅助原函数.

注 1.8 (理解 Cauchy-Schwarz 不等式)**.** 设向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n),\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$，则

$$\cos\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}=\frac{|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}\leq 1$$

所以

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|\leq\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

即

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|^2\leq(x_1^2+\cdots+x_n^2)\cdot(y_1^2+\cdots+y_n^2).$$

例 1.28. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq(b-a)^2.$$

方法一：柯西积分不等式

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b [\sqrt{f(x)}]^2 \mathrm{d}x \int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&\geq \left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2 = (b-a)^2.
\end{aligned}
$$

方法二：转化为二重积分

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y \\
&= \iint_{(a,b)\times(a,b)} \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

易知，该二重积分被积区域关于 $y=x$，被积函数具有轮换性，所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{(a,b)\times(a,b)} \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot \iint_{(a,b)\times(a,b)} \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{1}{2}\cdot \iint_{(a,b)\times(a,b)} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2.
\end{aligned}
$$

例 1.29. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，同时单调增，证明

$$
\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right).
$$

令 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$，因为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \iint_D f(x)g(x)\mathrm{d}\sigma - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y\right) \\
&= \iint_D f(x)g(x)\mathrm{d}\sigma - \iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint_D f(x)\cdot[g(x)-g(y)]\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

因为 D 关于 $y=x$ 对称，由轮换性可知

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D f(y)\cdot[g(y)-g(x)]\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{2}\cdot\iint_D [f(x)\cdot[g(x)-g(y)] + f(y)\cdot[g(y)-g(x)]]\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{2}\cdot\iint_D [f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)]\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

因为 $f(x), g(x)$ 都单调增，所以 $[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)]>0$，所以 $I>0$，即

$$
\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right).
$$

例 1.30. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，求 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

方法一：辅助原函数法

令 $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot F(x)|_x^1 \\ &= \int_0^1 [F(1)-F(x)]\cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [F(1)-F(x)]\mathrm{d}F(x) \\ &= F(1)\cdot[F(1)-F(0)] - \frac{1}{2}\cdot[F^2(1)-F^2(0)] \\ &= A^2 - \frac{1}{2}\cdot A^2 = \frac{1}{2}\cdot A^2.\end{aligned}$$

方法二：轮换法

可见，被积函数具有轮换对称性，而积分域与其轮换区间只有边界相交，因此可以采用轮换对称性

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(y)f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\iint_{(0,1)\times(0,1)} f(y)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\cdot A^2.\end{aligned}$$

例 1.31. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且 $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = \sin^4 x$，求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

令 $x-t=u, F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 有 $f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = F'(x)\cdot F(x) = \sin^4 x$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(x)\cdot F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F^2(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}F^2(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = F(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}$，所以 $\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$.

1.8 H. 积分与数列的转换

- $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x, \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$；即 $[0,1]$ 区间可以分为 n 个子区间，而 $[1,n]$ 区间只能分为 $n-1$ 个子区间；
- $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})\mathrm{d}x$；只要积分上下限差额为 $\frac{1}{n}$ 即可；
- 若 $f(x)$ 单调减，则 $f(\frac{k}{n}) < \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x < f(\frac{k-1}{n})$；
- 推论：若 $f(x)$ 单调减，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ 收敛.

例 1.32. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

因为 $f(x)$ 单调减少，所以 $f(k)<\int_{k-1}^k f(x)\mathrm{d}x<f(k-1)$，又因为

$$\begin{aligned} a_n&=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\\ &=f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right]>0, \end{aligned}$$

又因为

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x<0,$$

即 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界，因此 $\{a_n\}$ 收敛.

例 1.33. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $|f'(x)|<M$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|\leq\frac{M}{2n}.$$

因为

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})\mathrm{d}x\right|\\ &=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)-f(\frac{k}{n})\mathrm{d}x\right|\\ &\leq\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f'(\xi_n)|\cdot(\frac{k}{n}-x)\mathrm{d}x\\ &=M\cdot\sum_{k=1}^n\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

1.9 I. 被积函数带参数的积分

Leibniz Integral Rule：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{\alpha(x)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u=\alpha'(x)f(\alpha(x),\beta(x))+\int_{x_0}^{\alpha(x)} f_2'(u,\beta(x))\cdot\beta'(x)\mathrm{d}u}$$

对于含有参数 t 的定积分

$$I(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$$

对 t 求偏导有

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\int_a^b f_t'(x,t)\mathrm{d}x$$

因此

$$I(t)=\int\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

例 1.34. $\int_0^\pi \ln(a^2-2a\cos x+1)\mathrm{d}x$，$a>1$.

$$\begin{aligned}
I'(a)&=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial a}\ln(a^2-2a\cos x+1)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{2a-2\cos x}{a^2-2a\cos x+1}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty\frac{2a-2\frac{1-t^2}{1+t^2}}{a^2-2a\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{t}=4\int_0^\infty\frac{(a+1)t^2+(a-1)}{(a+1)^2t^2+(a-1)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=4\int_0^\infty\frac{M}{(a+1)^2t^2+(a-1)^2}+\frac{N}{1+t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
M(1+t^2)+N(a+1)^2t^2+N(a-1)^2&=[M+N(a+1)^2]t^2+[M+N(a-1)^2]\\
&=(a+1)t^2+(a-1)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}M+N(a+1)^2=a+1\\ M+N(a-1)^2=a-1\end{cases}$$

因此

$$M=\frac{\begin{vmatrix}a+1&(a+1)^2\\a-1&(a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&(a+1)^2\\1&(a-1)^2\end{vmatrix}}=\frac{a^2-1}{2a},\quad N=\frac{\begin{vmatrix}1&a+1\\1&a-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&(a+1)^2\\1&(a-1)^2\end{vmatrix}}=\frac{1}{2a}$$

所以

$$\begin{aligned}
I'(a)&=\frac{2}{a}\int_0^\infty\frac{a^2-1}{(a+1)^2t^2+(a-1)^2}\mathrm{d}t+\frac{2}{a}\int_0^\infty\frac{N}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2(a-1)}{a(a+1)}\int_0^\infty\frac{1}{t^2+\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2}\mathrm{d}t+\frac{2}{a}\int_0^\infty\frac{N}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2(a-1)}{a(a+1)}\cdot\frac{a+1}{a-1}\arctan\left[x\cdot\frac{a+1}{a-1}\right]_0^\infty+\frac{2}{a}\arctan t|_0^\infty\\
&=\frac{2\pi}{a}
\end{aligned}$$

下面计算 $I(1)$，因为

$$\begin{aligned}
I(1)&=\int_0^\pi\ln(2-2\cos x)\mathrm{d}x\xlongequal{t=-x+\pi}\int_\pi^0\ln(2-2\cos(-t+\pi))\mathrm{d}(-t+\pi)=\int_0^\pi\ln(2+2\cos t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^\pi\ln(2-2\cos x)\mathrm{d}x+\int_0^\pi\ln(2+2\cos x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln[4\cdot(1-\cos^2x)]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^\pi2\ln\sin x\mathrm{d}x=\pi\ln2+\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令 $J=\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x$，因此

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ \mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ \mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\ \mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin 2x-\ln 2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\ \mathrm{d}x-\frac{\pi\ln 2}{2}\end{aligned}$$

所以 $J=\frac{J}{2}-\frac{\pi\ln 2}{2}$，得到 $J=-\pi\ln 2$，因此 $I(1)=0$，所以

$$I(a)=\int\frac{2\pi}{a}\mathrm{d}a=2\pi\ln a+c$$

因为 $I(1)=0$ 所以 $c=0$，所以 $I(a)=2\pi\ln a$.

例 1.35 (傅汝兰尼积分 (Frullani integral))**.** 设 $f(x)$ 是定义在 $x\geq 0$ 上的函数，$f(\infty)$ 存在，$f'(x)$ 连续，证明

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln\frac{a}{b}$$

记 $I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$，则

$$I_a'=\int_0^{\infty}\frac{xf'(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}f'(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot[f(\infty)-f(0)]$$

所以

$$I=\int I_a'\mathrm{d}a+\phi(b)=[f(\infty)-f(0)]\int\frac{1}{a}\mathrm{d}a+\phi(b)=[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln a+\phi(b)$$

又因为

$$I_b'=\int_0^{\infty}-\frac{xf'(bx)}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\infty}f'(bx)\mathrm{d}x=-\frac{1}{b}\cdot[f(\infty)-f(0)]$$

所以

$$I=\int I_b'\mathrm{d}b+\psi(a)=-[f(\infty)-f(0)]\int\frac{1}{b}\mathrm{d}b+\psi(a)=-[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln b+\psi(a)$$

所以 $\phi(b)=-[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln b$，所以

$$I=[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln a-[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln b=[f(\infty)-f(0)]\cdot\ln\frac{a}{b}$$

利用傅汝兰尼积分 (Frullani integral) 可以快速求解如下积分

例 1.36. 求以下反常积分

1. $\int_0^{\infty}\frac{\arctan 5x-\arctan x}{x}\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-yx}}{xe^{2x}}\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{1}\frac{x^a-x^b}{\ln x}\mathrm{d}x$

1.

$$I=[f(\infty)-f(0)]\ln\frac{a}{b}=\frac{\pi}{2}\ln 5.$$

2.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-yx}}{xe^{2x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-(y+2)x}}{x}\mathrm{d}x=[f(\infty)-f(0)]\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{y+2}{2}$$

3. $f(x)=e^{-x^2}$，则

$$I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{f(\sqrt{a}x)-f(\sqrt{b}x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$$

4.

$$\int_0^1\frac{x^a-x^b}{\ln x}\mathrm{d}x\xlongequal{\ln x=-t}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(b+1)t}-e^{-(a+1)t}}{t}\mathrm{d}t=\ln\frac{a+1}{b+1}\tag{1}$$

2　变限积分函数及应用

2.1　A. 变限积分的性质

1. 连续性与可导性.

1. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 连续；
2. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则原函数存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 原函数，即 $F'(x)=f(x)$；
3. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有可去间断点 x_0，则原函数不存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不是 $f(x)$ 原函数，但 $F(x)$ 可导，且 $F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；
4. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有跳跃间断点 x_0，则原函数不存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不是 $f(x)$ 原函数，且 $F(x)$ 不可导；
5. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有无穷间断点 x_0，则原函数不存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不存在（$f(x)$ 不可积)；
6. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有振荡间断点 x_0，则原函数可能存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可能是 $f(x)$ 原函数.

2. 奇偶性与周期性.　对于对称区间上的定积分，首先要观察被积函数的奇偶性，并有如下结论:

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为可积函数或连续函数，则:

1. $$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数}\\ 0, & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数.}\end{cases}$$
2. $f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 为奇函数；$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow\int_c^x f(x)\mathrm{d}x$ 为偶函数；

3. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则若 $F(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 为奇函数；若 $F(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 以 T 为周期，及对任意实数 x 有 $f(x+T)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上可积，则

1. $f(x)$ 在任何区间长度为 T 的区间上积分值相等，即
$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$
2. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为以 T 为周期的周期函数的充要条件为
$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0.$$
3. $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充分条件为
$$\lim_{X\to\infty}\int_0^X f(t)\mathrm{d}t\text{收敛}.$$
4. $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充分条件为 $f(x)$ 为奇函数

注 2.1. *1.* $\sin x, \cos x$ 以 2π 为周期；$\sin 2x$ 和 $|\sin x|$ 以 π 为周期；

2. $\sin^{2k} x$ 以 π 为周期，$\sin^{2k+1} x$ 以 2π 为周期；

3. $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}(a\neq 0)$ 为周期.

2.2 B. 变限积分极限

1. 一元变限积分求极限. 一般有三种方法：

1. 洛必达法则

   对含元变限积分即 $F(x)=\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t$ 进行洛必达，一般需要将 x 换到积分外面，方法如下：

   - 对于形如 $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 的变限积分一般通过拆项的方式化为不含元的变限积分；
   - 对于形如 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$ 的变限积分一般通过换元：$x-t=u$ 的方式化为不含元的变限积分，其中 t,u 为积分变元，x 视为常数.
   - 对于一些复杂的含元变现积分还可以通过原函数的方法换出.

   注 2.2.
   - 赋予：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = xf(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x$;
   - 回收：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}F(x) = F(b)-F(a)$.

2. 等价无穷小替换

   若 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

   （注意：这里我们没有要求 $f(x)\sim g(x)$，换句话说，我们没有要求 $f(x), g(x)$ 是 x 趋于 0 时的无穷小.）

3. 积分中值定理

注意积分中值定理得到的 ξ 是变量.

例 2.1. 设 $f(x)$ 连续，$f(0)\neq 0$，求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

方法一（洛必达法则）：

令 $x-t=u$ 则

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}\\&=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}{xf(x)}=\lim_{x\to 0}1+\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{xf(x)}=1+\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(x)}=2$$

所以 $I=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

方法二（等价代换）：

因为 $f(0)\neq 0,f(x)$ 连续，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(0)}=1$，所以 $\int^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x f(0)\mathrm{d}x=xf(0)$. 所以

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(0)-f(0)\int_0^x t\mathrm{d}t}{x^2f(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(0)-\frac{1}{2}x^2f(0)}{x^2f(0)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

方法三（积分中值定理）：

因为 $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=f(\xi_1)\int_0^x (x-t)\mathrm{d}t$；$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=f(\xi_2)x$，所以

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi_1)\int_0^x (x-t)\mathrm{d}t}{f(\xi_2)x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi_1)x^2-f(\xi_1)\frac{1}{2}x^2}{f(\xi_2)x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 2.2. 设 $f(x)$ 连续，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}$.

因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} &\xlongequal{x-t=u} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_x^0 f(u)\mathrm{d}(-u)}{\int_x^0 (x-u)f(u)\mathrm{d}(-u)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + 2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + 2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} \\
&= 2 + \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} = 2 + \lim_{x\to 0}\frac{8x}{f(x)} = 6
\end{aligned}$$

2. 二重变限积分求极限. 常涉及对如下形式的二重积分求导的问题:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{\alpha(x)}\mathrm{d}u\int_{\gamma(x)}^{\beta(u)} f(u,v)\mathrm{d}v$$

一般有三种解决方法:

1. 交换积分次序

   对二重变限积分应用，将二重变限积分转化为一重变限积分;

2. 构造偏导数

   对一重变限积分应用，有两种方法:

   - 设 $(0,0)$ 为零点，则

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(u,x)\mathrm{d}u &= \int_0^x f(u,x)\mathrm{d}u - \boxed{\int_0^x f(0,0)\mathrm{d}u} \\
&= \int_0^x f(u,x)\mathrm{d}u - \int_0^x f(u,0)\mathrm{d}u + \int_0^x f(u,0)\mathrm{d}u - \int_0^x f(0,0)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x [f(u,x) - f(u,0)]\mathrm{d}u + \int_0^x [f(u,0) - f(0,0)]\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

   -

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(u,x)\mathrm{d}u &= \int_0^x f(u,x)\mathrm{d}u - \boxed{\int_0^0 f(u,0)\mathrm{d}u} \\
&= \int_0^x f(u,x)\mathrm{d}u - \int_0^x f(u,0)\mathrm{d}u + \int_0^x f(u,0)\mathrm{d}u - \int_0^0 f(u,0)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x [f(u,x) - f(u,0)]\mathrm{d}u + \int_0^x [f(u,0) - f(0,0)]\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

3. Leibniz Integral Rule

对二重变限积分与一重变限积分都可应用：一重情况：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{\alpha(x)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u - \int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u\right. \\
&\quad \left. + \int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u - \int_{x_0}^{\alpha(x)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u - \int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u - \int_{x_0}^{\alpha(x)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u}{h} \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u - \int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} \frac{f(u,\beta(x+h)) - f(u,\beta(x))}{h}\mathrm{d}u \\
&= \lim_{h\to 0}\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} \frac{f(u,\beta(x+h)) - f(u,\beta(x))}{\beta(x+h)-\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x+h)-\beta(x)}{h}\mathrm{d}u \\
&= \int_{x_0}^{\alpha(x)} f_2'(u,\beta(x))\cdot\beta'(x)\mathrm{d}u \\
I_2 &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u - \int_{x_0}^{\alpha(x)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+h)} f(u,\beta(x+h))\mathrm{d}u}{h} \\
&= \alpha'(x)f(\alpha(x),\beta(x))
\end{aligned}$$

综上，Leibniz Integral Rule：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{\alpha(x)} f(u,\beta(x))\mathrm{d}u = \alpha'(x)f(\alpha(x),\beta(x)) + \int_{x_0}^{\alpha(x)} f_2'(u,\beta(x))\cdot\beta'(x)\mathrm{d}u}$$

注 2.3. 一般而言，在计算 I_1 时，极限号不能直接与积分号互换，这里我们不考虑这一限制.

例 2.3. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 某邻域内连续，$f(0,0)=0$，且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，$f_y'(0,0)=1$，求 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$.

法一（交换积分次序 + 构造偏导数）

因为

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u \xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_0^{x^2}\mathrm{d}u\int_{u^2}^{0}f(t,u)\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}} &= \lim_{x\to0^+}4\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}u\int_{u^2}^{0}f(t,u)\mathrm{d}t}{x^4}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}-\frac{1}{x^3}\left[\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}f(t,0)\mathrm{d}t\right.\\
&\quad\left.+\int_0^{x^2}f(t,0)\mathrm{d}t-\int_0^{0}f(t,0)\mathrm{d}t\right]\\
&= -\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x^2}x^2\frac{f(\xi,x)-f(\xi,0)}{x}+\frac{\int_0^{x^2}f(t,0)\mathrm{d}t-\int_0^{0}f(t,0)\mathrm{d}t}{x^3}\right]\\
&= -\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi,x)-f(\xi,0)}{x}-\lim_{x\to0^+}\frac{2xf(x^2,0)}{3x^2}\\
&= -f_y'(0,0)-0=-1.
\end{aligned}$$

法二（*Leibniz Integral Rule*）

令 $\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u=G(x,t)$，则 $\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u=\int_0^{x^2}G(x,t)\mathrm{d}t$，因为 $G_x'(x,t)=-f(t,x)$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}G(x,t)\mathrm{d}t &= 2xG(x,x^2)+\int_0^{x^2}G'(x,t)\mathrm{d}t\\
&= 2x\int_x^{x}f(t,u)\mathrm{d}u-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}} &= \lim_{x\to0^+}4\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{x^4}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}-\frac{2xf(x^2,x)+\int_0^{x^2}f_y'(t,x)\mathrm{d}t}{3x^2}\\
&= -\frac{2}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x^2,x)}{x}-\frac{1}{3}\lim_{x\to0^+}f_y'(\xi,x)\\
&= -\frac{2}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x^2,x)}{x}-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，则 $f'_x(0,0)$ 存在，因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x^2,x)}{x}&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x^2,x)}{x}+\frac{f(x^2,0)}{x}-\frac{f(x^2,0)}{x}+\frac{f(0,0)}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}f'_y(x^2,\xi)-f'_x(\eta,0)x=1\end{aligned}$$

综上 $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}=-1.$

例 2.4. 设 $D:x^2+y^2\le 2tx, y\ge0(t>0), f(u)$ 在 $u=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，求

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

易知

$$\begin{aligned}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D f(r)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\text{极坐标交换积分次序}}\int_0^{2t}f(r)r^2\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2t}\left(1-\frac{r}{2t}\right)\cdot r^2\cdot f(r)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2t}\left(1-\frac{r}{2t}\right)\cdot r^2\cdot f(r)\mathrm{d}r}{t^4}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2t}r^2\cdot f(r)\mathrm{d}r-\frac{1}{2t}\int_0^{2t}r^3\cdot f(r)\mathrm{d}r}{t^4}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2t}r^3f(r)\mathrm{d}r}{8t^5}=\frac{4}{5}f'(0)\end{aligned}$$

2.3 C. 变限积分等式求函数

变限积分等式求函数，对两侧求导，注意变元不一定是 x，有可能是限上的常数，当此常数为任意常数时.

例 2.5 (好题)**.** 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2e^x$, 求 $f(x)$.

对式 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2e^x$ 两侧求导有

$$f'(x)g(f(x))=f'(x)x=2xe^x+x^2e^x=e^x(2x+x^2),$$

因此当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=e^x(2+x)$，即 $f(x)=\int e^x(2+x)\mathrm{d}x=(x+1)e^x+C,(x>0)$. 下面判断 C，因为 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，即

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)e^x+C=1+C=f(0)=0$$

所以 $C=-1$，即 $f(x)=(x+1)e^x-1$.

注 2.4. **在约去某项时，必须声明它不为零**，这一点在微分中值定理证明题中十分常用。

例 2.6. 设 $f(x)$ 连续，$f(t)>0$，$f(-t)=f(t)$. 令

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t,\ -a\le x\le a,$$

1. 试证曲线 $y=F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的；

2. 当 x 为何值时，$F(x)$ 取最小值？

3. 若 $F(x)$ 的最小值可以表示为 $f(a)-a^2-1$，试求 $f(x)$.

（*1*）对 $F(x)$ 应分类讨论以去掉绝对值，即

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)\mathrm{d}t\\&=x\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-a}^{x}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}tf(t)\mathrm{d}t-x\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-xf(x)+xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

以及

$$F''(x)=2f(x)>0,$$

所以 $F(x)$ 是凹的.

（*2*）因为 $f(-t)=f(t)$，所以

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t\\&=-\int_{a}^{-x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-x}^{a}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2x\cdot f(\xi)\end{aligned}$$

因为 $f(x)>0$，所以 $F'(x)=0\Rightarrow x=0$，因为 $F''(x)>0$，所以 $F(0)$ 为最小值.

(3) 因为

$$\begin{aligned}F(0) &= \int_{-a}^{a} |t| f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{0} -tf(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} tf(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{a} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} tf(t)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{0}^{a} tf(t)\mathrm{d}t = f(a) - a^2 - 1\end{aligned}$$

即

$$2\int_{0}^{a} tf(t)\mathrm{d}t = f(a) - a^2 - 1$$

两侧对 a 求导，有

$$2af(a) = f'(a) - 2a$$

即 $f'(x) - 2xf(x) = 2x$，解微分方程有

$$f(x) = Ce^{x^2} - 1,$$

因为

$$2\int_{0}^{0} tf(t)\mathrm{d}t = f(0) - 1,$$

即 $f(0) = 1$，所以 $C = 2$，因此 $f(x) = 2e^{x^2} - 1$.

例 2.7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上连续，且满足

$$\int_{0}^{x} tf(t^2 - x^2)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

求 $f(x)$.

$$\int_{0}^{x} tf(t^2 - x^2)\mathrm{d}t \xlongequal{t^2-x^2=u} \frac{1}{2}\int_{-x^2}^{0} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

所以

$$\frac{1}{2}\int_{-x}^{0} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

因此 $\frac{1}{2}f(-x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$，所以 $f(x) = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$.

2.4 D. 积分不等式

积分不等式主要有以下几种解法:

1. 转为变上限积分

   将定积分转为变上限积分，实质上就是将积分不等式转化为函数不等式的证明问题，一般需要被积函数的单调性质，一般将区间的右端点转化为变元;

2. 积分中值定理

一般是对一个积分限的两个子区间分别取积分中值定理，在比较中值函数值的大小，一般需要被积函数的单调性质；

3. 变量代换

通过换元，将不同积分限上的定积分转化为相同积分限上的定积分，一般需要被积函数的单调性质；

4. 柯西积分不等式

用于处理两个积分相乘或被积函数为两个函数相乘的情形

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

5. 含有导数的定积分不等式

这类题型有三种考法：

(a) 单端点问题

单端点问题一般会给出某一端点的函数值（如 $f(a)=0$），然后通过定积分牛顿莱布尼兹公式（$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$）或拉格朗日中值定理（$f(x)-f(a)=f'(\xi)\cdot(x-a)$）将函数与导数的性质联系起来.

(b) 双端点问题

双端点问题会给出两个端点的函数值(如 $f(a)=0, f(b)=0$),此类问题需要在区间 $(a,\frac{a+b}{2})$ 和 $(\frac{a+b}{2},b)$ 上分别利用定积分牛顿莱布尼兹公式或拉格朗日中值定理联系函数与导数的性质（不要直接套单端点问题的结论），然后通过 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$ 把双端点联系起来.

(c) 分部积分技巧

若 $f(1)=f(0)=1$，考虑

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x-c)\right| &= \left|(x-c)f(x)|_0^1-\int_0^1 (x-c)f'(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_0^1 (x-c)f'(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |(x-c)|\cdot\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \max_{0<x<1}|f'(x)|\cdot\int_0^1 |(x-c)|\mathrm{d}x \\ &= (c^2-c+\frac{1}{2})\cdot\max_{0<x<1}|f'(x)|\end{aligned}$$

6. 放缩

例 2.8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，单调减，试证

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \ge a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $0<a<1$.

方法一（变为变现积分）

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 所以 $F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(c)$, 其中 $0<c<1$, 因此 $F'(c)=0$，即 $f(c)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. 又因为当 $x>c$ 时 $F'(x)<0$，当 $x<c$ 时 $F'(x)>0$，因此 $F(c)$ 为 $F(x)$ 极大值.

因为 $F(0)=0, F(1)=0$，所以 $\forall x\in(0,1)$ 有 $F(x)\ge 0$.

方法二（积分中值定理）

考虑将区间 $[0,1]$ 分为两个子区间 $[0,a],[a,1]$，则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t - a\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t \\
&= (1-a)\int_0^a f(t)\mathrm{d}t - a\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t \\
&= (1-a)af(\xi_1) - a(1-a)f(\xi_2) = a(1-a)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]
\end{aligned}$$

其中 $\xi_1\in[0,a],\xi_2\in[a,1]$，即 $\xi_1<\xi_2$，所以 $f(\xi_1)\ge f(\xi_2)$，即 $I\ge 0$.

方法三（变量代换，构造相同区间）

令 $au=t$，则 $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(au)\mathrm{d}au = a\int_0^1 f(au)\mathrm{d}u$，因此

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = a\int_0^1 f(au)\mathrm{d}u - a\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u \\
&= a\int_0^1 [f(au)-f(u)]\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

因为 $0<a<1$，所以 $au<u$，因此 $f(au)\ge f(u)$，因此 $I\ge 0$.

例 2.9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上可导，且 $f(0)=0, 0<f'(x)<1$，求证

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

化为变限积分：

令 $F(u)=\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]^2 - \int_0^u f^3(x)\mathrm{d}x$，所以 $F'(u)=2\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\cdot f(u)-f^3(u)=f(u)\cdot[2\int_0^u f(x)\mathrm{d}x - f^2(u)]$，令 $\phi(u)=2\int_0^u f(x)\mathrm{d}x - f^2(u)$，所以 $F'(x)=f(u)\phi(u)$. 因为 $\phi'(u)=2f(u)-2f(u)f'(u)=2f(u)\cdot[1-f'(u)]>0$，$f(u)>0$，所以 $F'(u)>0$，因为 $F(0)=0$，所以 $F(u)>0$，因此 $F(1)>0$.

例 2.10. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增，$0 \le g(x) \le 1$. 证明（1）$0 \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le (x-a), x \in [a,b]$；（2）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

（1）因为 $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t = (x-a)g(\xi)$，$0 < g(x) < 1$，所以 $0 \le \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \le (x-a), x \in [a,b]$；

（2）化为变限积分：令 $F(u) = \int_a^{a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x$，所以 $F'(u) = g(u)\cdot f\left[a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t\right] - f(u)g(u)$，因为 $a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t \le a + u - a = u$，$f(x)$ 单调增，所以 $f\left[a + \int_a^u g(t)\mathrm{d}t\right] \le f(u)$，即 $F'(x) < 0$，因为 $F(a) = 0$，所以 $F(b) \le 0$，即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

例 2.11 (含有导数的定积分不等式). （1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，$f(a) = 0$，求证

$$\max_{a\le x\le b} |f'(x)| \ge \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x;$$

（2）若还有 $f(b) = 0$，试证明

$$\max_{a\le x\le b} |f'(x)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x;$$

（1）

方法一（牛顿莱布尼兹公式联系关系）

因为 $|f(x)| = |\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t| = (x-a)\cdot|f'(\xi)| \le (x-a)\cdot \max_{a\le x\le b}|f'(x)|$，所以

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x &\le \max_{a\le x\le b}|f'(x)|\cdot\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \\
&= \max_{a\le x\le b}|f'(x)|\cdot\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \\
&= \max_{a\le x\le b}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}
\end{aligned}$$

所以

$$\max_{a\le x\le b} |f'(x)| \ge \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x;$$

方法二（拉格朗日中值定理联系关系）

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)|\cdot(x-a) \le (x-a)\cdot\max_{a\le x\le b}|f'(x)|$$

（2）

令 $c = \frac{a+b}{2}$，则在区间 $[a,c]$ 上有 $|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi_1)|\cdot(x-a)$；在区间 $[c,b]$ 上有 $|f(x)| = |f(x) - f(b)| = |f'(\xi_2)|\cdot(b-x)$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= |f'(\xi_1)|\cdot\left|\int_a^c (x-a)\mathrm{d}x\right|+|f'(\xi_2)|\cdot\left|\int_c^b (b-x)\mathrm{d}x\right| \\ &= |f'(\xi_1)|\cdot\frac{(a-c)^2}{2}+|f'(\xi_2)|\cdot\frac{(b-c)^2}{2} \\ &= |f'(\xi_1)|\cdot\frac{(a-b)^2}{8}+|f'(\xi_2)|\cdot\frac{(a-b)^2}{8} \\ &\le \frac{(a-b)^2}{4}\cdot\max_{a\le x\le b}|f'(x)|.\end{aligned}$$

例 2.12. （*1*）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$，求证

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x;$$

（*2*）若 $f(1)=0$，求证

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

（*1*）由牛顿莱布尼兹公司与柯西积分不等式可知

$$f^2(x)=\left[\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^x 1\mathrm{d}x\cdot\int_0^x [f'(x)]^2\mathrm{d}x \le x\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

（*2*）在 $[0,0.5]$ 上有

$$f^2(x)=\left[\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^x 1\mathrm{d}x\cdot\int_0^x [f'(x)]^2\mathrm{d}x \le x\int_0^{0.5} [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

在 $[0.5,1]$ 上有

$$f^2(x)=\left[\int_x^1 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_x^1 1\mathrm{d}x\cdot\int_x^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \le (1-x)\int_{0.5}^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(2)\mathrm{d}x &= \int_0^{0.5} f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{0.5}^1 f^2(x)\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^{0.5} x\mathrm{d}x\int_0^{0.5} [f'(x)]^2\mathrm{d}x+\int_{0.5}^1 (1-x)\mathrm{d}x\int_{0.5}^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\cdot\int_0^{0.5} [f'(x)]^2\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\cdot\int_{0.5}^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\cdot\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 2.13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{4}\max_{0<x<1}|f'(x)|$.

因为

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\cdot\max_{0<x<1}|f'(x)|
\end{aligned}$$

例 2.14. 设 $f(x)$ 满足 $f(1)=1, f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}(x\ge 1)$，试证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且不超过 $1+\frac{\pi}{4}$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}>0$，所以 $f(x)\uparrow$，在 $[1,+\infty)$ 上有 $f(x)\ge 1$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}\le\frac{1}{x^2+1}$，因此 $f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t\le\int_1^x\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\arctan t|_1^x=\frac{\pi}{4}(x\to\infty)$，所以 $f(x)\le 1+\frac{\pi}{4}$.

例 2.15. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，证明 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

令 $\tan x=t$，则 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^n\mathrm{d}\arctan t=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
所以 $a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\ge\int_0^1\frac{t^n}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2(n+1)}$.；$a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\le\int_0^1\frac{t^n}{2t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{n-2}}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2(n-1)}$.

例 2.16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

构造辅助函数 $\phi(b)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，所以 $\phi(a)=0$，又因为

$$\begin{aligned}
\phi'(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)=\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b) \\
&= \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'(\xi_1)=\frac{b-a}{2}\cdot\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'(\xi_1)\right]
\end{aligned}$$

因为 $\frac{a+b}{2}<\xi_1<b, f''(x)>0$，所以 $\phi'(b)<0, \phi(b)<0$，即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

构造辅助函数 $\varphi(b)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，所以 $\varphi a=0$，又因为

$$\begin{aligned}
\varphi'(b) &= \frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{(b-a)f'(b)}{2}-f(b)=\frac{1}{2}\cdot\left[(b-a)f'(b)+f(a)-f(b)\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\cdot[f'(b)-f'(\xi_2)]
\end{aligned}$$

因为 $a<\xi_2<b, f''(x)>0$，所以 $\varphi'(b)>0, \varphi(b)>0$，所以 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

注 2.5. 适当构造辅助函数，化简计算.

3 反常积分

3.1 A. 反常积分审敛

1. 简单的反常积分审敛. 对于一般形如 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(x+1)^b}\mathrm{d}x$ 的反常积分，在选填题中出现时可以直接通过阶数判断：$a<1, a+b>1$.

注 3.1. 常见反常积分：

1. 设常数 $a>0$，则

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{p-1}a^{1-p},\\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时发散}\end{cases}$$

2. 设常数 $a>1$，则

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{p-1}(\ln a)^{1-p},\\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时发散}\end{cases}$$

3. 设常数 $a>0$，则

$$\int_0^{a}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{当 } p<1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{1-p}a^{1-p},\\ \text{当 } p\ge 1 \text{ 时发散}\end{cases}$$

4. 设常数 $b>a$，则

$$\int_a^{b}\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{当 } p<1 \text{ 时收敛，其值为 } \dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p},\\ \text{当 } p\ge 1 \text{ 时发散}\end{cases}$$

2. 复杂的反常积分审敛. 当反常积分形式复杂或出现在大题中时，需要利用不定积分的比较判别法

定理 3.1 (反常积分极限审敛法 1). 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，且 $f(x)\ge 0$. 如果存在常数 $p>1$，使得

$$\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=c<+\infty,$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=d>0,$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 3.2 (反常积分极限审敛法 2). 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 连续，且 $f(x)\ge 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 瑕点. 如果存在常数 $0<q<1$，使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$$

存在，则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$$

则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 3.1. 设 m,n 为正整数，则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性

(A) 仅与 m 有关

(B) 仅与 n 有关

(C) 与 m,n 都有关

(D) 与 m,n 都无关

因为 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2$，先考虑 I_1，因为 $\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\frac{\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)}{\sqrt[n]{x}}\sim(-x)^{\frac{2}{m}}x^{\frac{1}{n}}=(x)^{\frac{2}{m}}x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$. 而 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<\frac{1}{n}\le 1$，所以 I_1 收敛.

下面考虑，因为 I_2，$\frac{\frac{\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{1}{(1-x)^p}}=\frac{(1-x)^p\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)}{\sqrt[n]{x}}\sim(1-x)^p\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)=0$，所以 I_2 收敛，因此 I 收敛与 m,n 无关.

注 3.2. $\lim_{x\to 0}x^m\ln^n(x)=0$.

3.2 B. 反常积分性质

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果反常积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛，则反常积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

2. 若 $I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数;}\\ 2\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数.}\end{cases}$$

反之不成立；

3. 对于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_B^A f(x)\mathrm{d}x=I_0\ \exists\Rightarrow\lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}f(x)\mathrm{d}x=I_0.$$

但是

$$\lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x \exists \nRightarrow \lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\int_{B}^{A} f(x)\mathrm{d}x\ \exists$$

这说明若 $f(x)$ 为奇函数，不能说明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0$；类似的：若 $f(x)$ 为奇函数，0 为瑕点，不能说明 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

4. 对于反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f(x)+g(x)\mathrm{d}x$ 有

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^{+\infty} f(x)+g(x)\mathrm{d}x$
收敛	收敛	收敛
收敛	发散	发散
发散	收敛	发散
发散	发散	不一定

5. 对于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有

$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$	$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$
收敛	收敛	收敛
收敛	发散	发散
发散	收敛	发散
发散	发散	发散

这说明，如果奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 发散，那么它在 $(-\infty,+\infty)$ 发散.

3.3 C. 反常积分计算

三种常用方法：（1）定积分取极限；（2）倒代换转化为定积分；（3）换元区间再现

例 3.2 (定积分取极限). 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

易知

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{x}}{(e^{x}+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{(e^x+1)^2}\mathrm{d}(e^x+1) = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\frac{1}{e^x+1} \\ &= -\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = -\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

例 3.3 (倒代换转化为定积分 1). 计算积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

令 $t=\frac{1}{x}, u=\sqrt{t}$ 有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^0 \sqrt{t}\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t} = -\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\ln(1+t)\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{-\frac{3}{2}}\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t = -2\cdot\int_0^1 \cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t^{-\frac{1}{2}} \\
&= -2\cdot\ln(1+t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\bigg|_0^1 + 2\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\cdot\ln(1+t) \\
&= -2\cdot\ln 2 + 2\cdot\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}\cdot t \\
&= -2\cdot\ln 2 + 4\cdot\int_0^1 \frac{u}{u}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}\cdot u \\
&= -2\cdot\ln 2 + 4\cdot\arctan u|_0^1 = \pi - 2\cdot\ln 2.
\end{aligned}
$$

例 3.4 (倒代换转化为定积分 2)**.** 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

令 $t=\frac{1}{x}$ 有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^{+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^0 \frac{\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}\mathrm{d}\frac{1}{t} \\
&= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^0 \frac{1}{t}\cdot\frac{t^4\ln t}{(t^2+1)^2\cdot t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + I + \int_1^0 \frac{t\cdot\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

例 3.5 (换元区间再现 1)**.** 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x$.

易知

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{+\infty} e^{-2(x+\pi)}\cdot|\sin x+\pi|\mathrm{d}x = e^{-2\pi}\int_{-\pi}^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x \\
&= e^{-2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x + e^{-2\pi}\int_{-\pi}^0 e^{-2x}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x \\
&= e^{-2\pi}\cdot I + e^{-2\pi}\int_0^{\pi} e^{-2(x-\pi)}\cdot|\sin x|\mathrm{d}x \\
&= e^{-2\pi}\cdot I + \int_0^{\pi} e^{-2x}\cdot\sin x\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

即

$$
I = \frac{1}{1-e^{-2\pi}}\cdot\int_0^{\pi} e^{-2x}\cdot\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cdot\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.
$$

例 3.6 (换元区间再现 2)**.** 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

构造再现区间，令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$
I = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}\mathrm{d}\frac{1}{t} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t.
$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

可知被积函数为有理式，且反常积分收敛，则

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1+x^{-2}}{x^{-2}+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-x^{-1})^2+2}\mathrm{d}(x-x^{-1})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

4 定积分应用

4.1 A. 求平面图形面积

利用二重积分计算平面图形面积，即

$$S=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma,$$

1. 平面直角坐标系

$$S=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{g(x)}^{f(x)}1\mathrm{d}y=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

2. 极坐标

$$S=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

平面域 D 的面积直接用二重积分 $S=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=$ 计算，然后根据积分域 D 选择计算二重积分的方法（直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性等）。

例 4.1. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$, $(x\geq-1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围图形面积.

易知当 $-1\leq x<0$ 时

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+x)^2.$$

当 $x\geq 0$ 时

$$f(x)=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+f(x)=\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+2x-x^2),$$

所以 $S=\frac{2}{3}\sqrt{2}+1$.

例 4.2 (参数方程求面积). 已知曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}$$

其中 $t \geq 0$，过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0, y_0)，并写成切线的方程；求此切线与 L 以及 x 轴所围成的平面图形的面积.

因为 $y_x = \frac{y_t}{x_t} = \frac{4-2t}{2t}$，所以切线方程为 $y - y_0 = y_x \cdot (x - x_0)$ 代入 $(-1, 0)$，切点 $(t^2+1, 4t-t^2)$，斜率 $y_x = \frac{4-2t}{2t}$ 有

$$0 - (4t - t^2) = \frac{4-2t}{2t} \cdot (-1 - (t^2 + 1))$$

解得 $t = 1, t = -2$（舍），因此切点坐标为 $(2, 3)$，切线方程为 $y = x + 1$.

令 $y = 0$ 求 L 零点，则 $t = 0$ 或 $t = 4$，即零点坐标为 $(1, 0)$ 或 $(17, 0)$，因此面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} y + 1 \mathrm{d}x - \int_{1}^{2} y \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} y + 1 \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} 4t - t^2 \mathrm{d}(t^2 + 1) \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

4.2 B. 求空间体体积

利用二重积分计算空间体体积

1. 旋转体体积

   平面区域 D 绕直线 $L: ax + by + c = 0$（两者不相交）选择形成的旋转体体积，则 D 内某一小区域 $\mathrm{d}\sigma$ 旋转形成的旋转体体积为

   $$\mathrm{d}V = 2\pi r(x, y) \mathrm{d}\sigma,$$

   其中 $r(x, y)$ 为 $\mathrm{d}\sigma$ 到 L 的距离，即

   $$r(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

   则

   $$V = 2\pi \iint_D \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathrm{d}\sigma.$$

   特别的，

   - 当 L 为 x 轴，即 $a = c = 0$，有

   $$V = 2\pi \iint_D \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathrm{d}\sigma = 2\pi \int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y \mathrm{d}y = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x.$$

- 当 L 为 y 轴，即 $b=c=0$，有

$$V=2\pi\iint_D\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_a^b x\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

2. 已知截面面积的体积

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

例 4.3. 设对数螺线 $r=e^{\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ 及射线 $\theta=0,\theta=\pi$ 围成平面图形 D.（*1*）求 D 的面积 S；（*2*）求 D 绕极轴旋转一周的体积 V.

（*1*）易知

$$S=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{e^{\theta}}r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-1).$$

（2）因为 $r(x,y)=y$，所以

$$\begin{aligned}V&=2\pi\iint_D y\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{e^{\theta}}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{15}(\mathrm{e}^{3\pi}+1).\end{aligned}$$