微积分 II: 多元函数微积分 II

Calculus II: Multivariable function calculus II

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 高阶导数

1.1 高阶导数

若函数 $u=f(x,y,z)$ 在某一开区域 $\mathcal{D}$ 中有关于其中一个变元的偏导数，则这偏导数本身仍是 x,y,z 的函数，故能在某一点 (x_0,y_0,z_0) 有关于同一变元或另一变元的偏导数，这些后来得到的偏导数，对于起先的函数 u 而言，就称为**二阶偏导数**.

例如，若一阶偏导数时关于 x 取的，则它（一阶导数）关于 x,y,z 的导数就记为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x\partial z}.$$

或

$$u''_{x^2}=f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0),\ u''_{xy}=f''_{xy}(x_0,y_0,z_0),\ u''_{xz}=f''_{xz}(x_0,y_0,z_0),$$

三阶导数、四阶导数等等，可以用类似的方法归纳的得出定义. 注意，关于不同变元的高阶偏导数，例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z^2},\cdots$$

称为**混合偏导数**.

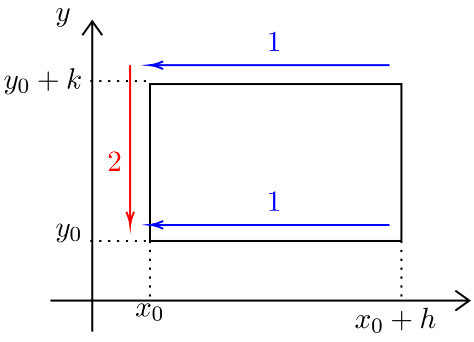
1.2 混合导数

需要注意：从混合导数的定义中不能必然导出关于同样诸变元但依不同次序取混合导数的结果必然相等.

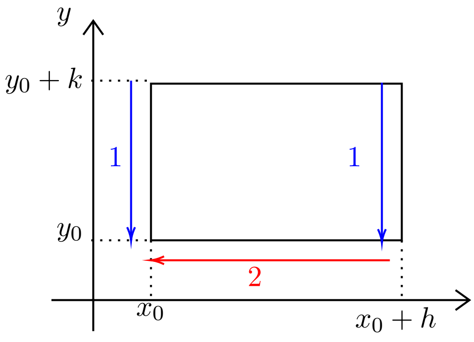
定理 1.1 (混合导数的关系). *假定 1) 函数 $f(x,y)$ 定义于开区域 $\mathcal{D}$ 中；2) 在这区域中存在一阶偏倒数 f'_x,f'_y，以及二阶混合偏导数 f''_{xy},f''_{yx}；3) 这些二阶导数 f''_{xy},f''_{yx} 作为 x,y 的函数，它们在 $\mathcal{D}$ 中某一点 (x_0,y_0) 处连续，那么在这点有*

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

证明. 首先分析 $f''_{xy}(x_0,y_0),f''_{yx}(x_0,y_0)$ 意味着什么过程，$f''_{xy}(x_0,y_0)$ 为 f 先在 y_0 的邻域内，对每一个 y 固定然后对 x 求导，得到关于 y 的函数 $\phi(y)$，然后在对 y 求导；而 f''_{yx} 则正好相反，如图：



f''_{xy}



f''_{yx}

因此对于 $f''_{xy}(x_0,y_0)$，我构造辅助函数：

$$\phi(y)=\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h},$$

因此有

$$\phi'(y)=\frac{f'_y(x_0+h,y)-f'_y(x_0,y)}{h}.$$

对 $\phi(y)$ 构造表达式：

$$W=\frac{\phi(y_0+k)-\phi(y_0)}{k}.$$

对其应用有限增量公式有：

$$W=\phi'(y_0+\theta\cdot k)=\frac{f'_y(x_0+h,y_0+\theta\cdot k)-f'_y(x_0,y_0+\theta\cdot k)}{h}$$

再对 x 应用有限增量公式有：

$$W=f'_{yx}(x_0+\theta_1\cdot h,y_0+\theta\cdot k).$$

同理，对于 $f''_{yx}(x_0,y_0)$, 构造辅助函数：

$$\psi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k},$$

因此有

$$\psi'(x)=\frac{f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)}{k},$$

对 $\psi(y)$ 构造表达式：

$$V=\frac{\psi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}.$$

对其应用有限增量公式有：

$$V=\psi'(x_0+\theta_2\cdot h)=\frac{f'_x(x_0+\theta_2\cdot h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta_2\cdot h,y_0)}{k},$$

再对 y 应用有限增量公式有：

$$V=f'_{xy}(x_0+\theta_2\cdot h,y_0+\theta_3\cdot k).$$

因为

$$W=V=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{hk},$$

因此有

$$f'_{yx}(x_0+\theta_1\cdot h,y_0+\theta\cdot k)=f'_{xy}(x_0+\theta_2\cdot h,y_0+\theta_3\cdot k).$$

因为 $\theta,\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 均为有界量，又因为条件 3）可知：令 $h,k\to 0$ 时，有

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

□

把该定理与累次极限与 n 重极限的关系（定理??）相比较是很有趣的.

我们把辅助函数 $\psi(x)$（或 $\phi(y)$）与 W 展开，有

$$\begin{aligned} W &= \frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-(f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0))}{k}\right]. \end{aligned}$$

因此有

$$\lim_{k\to 0} W = \frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h}, \tag{1}$$

以及

$$\lim_{h\to 0} W = \frac{f'_x(x_0,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)}{k}. \tag{2}$$

其中 h,k 为常数. 与是按照定义有

$$f''_{yx}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} W,$$

以及

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)}{k} = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} W.$$

这样，混合导数的存在性问题与 W（作为 h,k 的函数）的累次极限的存在及相等问题是完全相同的. 由于定理条件 3）可知 $f''_{xy}(x,y)$ 以及 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，因此 $f''_{xy}(x,y)$ 有有限极限:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f''_{xy}(x,y) = A$$

因为

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta\cdot h, y_0+\theta_1\cdot k),$$

所以有

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} W = A.$$

因为条件 2）可知，式1以及式2成立，因此由定理??可知 $f''_{xy}(x_0,y_0)$ 与 $f''_{yx}(x_0,y_0)$ 存在且相等.

1.3 复合函数高阶导数 *

设有函数

$$u = f(x_1,x_2,...,x_n),$$

式中 $x_1,x_2,...,x_n$ 又是各变元 $t_1,t_2,...t_m$ 的函数:

$$x_i = \phi_i(t_1,t_2,...,t_m)\ (i=1,...,n).$$

对于函数 f,ϕ_i 假设他们都有关于一切变元的直到 k 阶为止的连续偏导数. 把 u 看做变元 $t_1,...,t_m$ 的复合函数:

$$u = F(t_1,...,t_m) = f(\phi_1,...,\phi_n),$$

今将证明，复合函数也有直到 k 阶为止的一起连续偏导数.

更准确的讲，我们将证明以下命题:

定理 1.2. 函数 F 的每一 k 阶导数存在，且可由函数 f（关于它的变元 $x_1, x_2, ...x_n$）的导数，以及函数 ϕ_i（关于他的变元 $t_1, ..., t_m$）的导数用乘法与加法来组成，这些导数都不超过 k 阶.

证明. 利用数学归纳法.

对于 $k = 1$，由式**??**已经证明成立，假定这定理对于比 k 低的各阶均为真；将证明它对 k 阶导数也为真.

每一 k 阶导数系由某一 $(k-1)$ 阶导数关于 t_j 中之一变元微分而得出的. 设想某一 $(k-1)$ 阶导数，按照假定，它由函数 f 以及 ϕ_i 关于变元 x 以及 t 的不超过 $(k-1)$ 阶的导数用乘法以及加法而得出，即它是上述导数乘积之和.

关于 t_j 来微分其中的一个乘积，应该轮番的微分它的每一个因子. 若这因子是其中一个函数 ϕ 的不超过 $(k-1)$ 阶的导数，则微分它的结果，我们得到同一函数的不超过 k 阶的导数；若这因子是函数 f 的不超过 $(k-1)$ 阶的导数，那么把这导数看做是变元 t 的复合函数，并对 t_j 来微分它，我们得到若干不超过 k 阶的导数乘积之和.

结果，对于所考察的 k 阶导数，显然也得出刚才所指出的那种形式的表达式，这就证明了我们的命题.

复合函数 F 的导数的连续性由其以 f 以及 ϕ_i 的导数做成 F 的导数的方法而推得，因为 f 与 ϕ_i 的导数假定都是连续的.

□

2 隐函数

2.1 一元隐函数

假定二变元 x, y 的值用方程相互联系着，若把这方程的一切写在左边，则在一般的情形，其形式为:

$$F(x, y) = 0. \tag{3}$$

此处的 $F(x, y)$ 是在某一区域内给定的二元函数. 若对每一 x 值，存在一个或几个 y 值他们与 x 同时满足式3，则函数 $y = f(x)$ 由此确定是单值的或是多值的，于是方程:

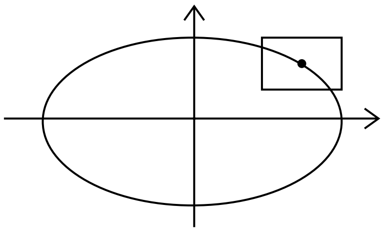
$$F(x, f(x)) = 0 \tag{4}$$

便成为关于 x 的恒等式.

例如，取方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

易知，此方程表示椭圆，它显然确定 y 为 x 在区间 $[-a.a]$ 内的双值函数. 我们现在关心的是该方程所代表的椭圆曲线（或其一部分）能否用普通方程 $y = f(x)$ 右边的单值函数来表示. 其几何意义为曲线（或它的一部分）能否与平行于 y 轴的直线仅相交于一点.



若我们想得到这样的单值函数，在椭圆的例子中可以看到，不仅需要限定 x 的变动区域，还要限定 y 的变动区域. 为简明起见，我们可以说，在矩形 $(a,b;c,d)$ 内方程3确定 y 为 x 的单值函数，如果对于区间 (a,b) 内的 x 的每一个值，在区间 (c,d) 内方程3内有且只有一个根.

通常上，我们只关心方程3位于曲线上某一定点 (x_0,y_0) 并取这点的一个邻域作为上述矩形. 这样例如在椭圆的例子中，显然可以断定，除椭圆长轴上的顶点外，在椭圆上任意一点的充分小邻域内可以确定纵坐标 y 为横坐标 x 的单值函数.

2.2 隐函数存在性

定理 2.1 (隐函数存在性定理)**.** *假定*

1) 函数 $F(x,y)$ 在以点 (x_0,y_0) 为中心的某一邻域内

$$\mathcal{D}=[x_0-\Delta,x_0+\Delta;y_0-\Delta',y_0+\Delta']$$

中有定义且连续;

2) $F(x,y)$ 在这一点 (x_0,y_0) 等于零，即 $F(x_0,y_0)=0$;

3) 当 x 为常数时，函数 $F(x,y)$ 随 y 的增加而单调.

那么有以下结论:

i. 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内，方程3确定 y 为 x 的单值函数 $y=f(x)$;

ii. 当 $x=x_0$ 时，这函数具有数值 y_0：$f(x_0)=y_0$;

iii. $f(x)$ 是连续函数.

证明. 先令 (x,y) 沿着通过点 $M_0(x_0,y_0)$ 的铅直线而移动，即固定 $x=x_0$；于是函数 $F(x,y)$ 就变成一个变元 y 的函数 $F(x_0,y)$. 根据 2）可知当 $y=y_0$ 时它等于 0，根据 3）设 $F(x_0,y)$ 单调增，则当 $y>y_0$ 时 $F(x_0,y)>0$，当 $y<y_0$ 时 $F(x_0,y_0)<0$. 因此，特别地，它在点 $A_0(x_0,y_0-\Delta')$ 以及 $B_0(x_0,y_0+\Delta')$ 将有异号的函数值，即

$$F(A_0)=F(x_0,y_0-\Delta')<0,\ F(B_0)=F(x_0,y_0+\Delta')>0.$$

现在再看点 (x,y) 沿着通过 A_0 与 B_0 的两条水平直线而移动，就是固定 $y=y_0-\Delta'$ 或 $y=y_0+\Delta'$. 于是得到两个关于 x 的函数 $F(x,y_0-\Delta')$ 与 $F(x,y_0+\Delta')$. 我们已知，当 $x=x_0$ 时，第一个函数有

负值，第二个函数有正值. 因为条件 1）$F(x,y)$ 连续，因此有局部保号性可知：存在 $\Delta>\delta_0>0$，使得在邻域 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 上有两关于 x 的函数不变号. 于是当 $x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 时有：

$$F(x,y_0-\Delta')<0,\ F(x,y_0+\Delta')<0.$$

现在在区间 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 内固定其任意一值 $\overline{x}$，考察链接点 $\overline{A}(\overline{x},y_0-\Delta')$ 与 $\overline{B}(\overline{x},y_0+\Delta')$. 沿着这线段，我们的函数变为以 y 为变元的函数 $F(\overline{x},y)$，因为根据 1）它是连续的，又已知它在 $\overline{AB}$ 两端异号，即

$$F(\overline{A})=F(\overline{x},y_0-\Delta')<0,\ F(\overline{B})=F(\overline{x},y_0+\Delta')>0.$$

由布尔查诺-柯西定理可知，必存在一点 $\overline{y}\in(y_0-\Delta',y_0+\Delta')$ 使得

$$F(\overline{x},\overline{y})=0.$$

又由 3）得当 $y>\overline{y}$ 时有 $F(\overline{x},y)>0$；当 $y<\overline{y}$ 时有 $F(\overline{x},y)<0$. 于是 $\overline{y}$ 是区间 $(y_0-\Delta',y_0+\Delta')$ 内唯一一点，使得它同 $x=\overline{x}$ 一同满足方程3. 易知在每一铅锤直线 $\overline{AB}$ 上，有且仅有一点 $\overline{M}(\overline{x},\overline{y})$ 使得方程3成立.

这样在 (x_0,y_0) 的矩形邻域

$$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0;y_0-\Delta',y_0+\Delta')$$

内, 方程3确实确定 y 为 x 的单值函数 $y=f(x)$.

同时由于 2）可知 y_0 正是在区间 $(y_0-\Delta',y_0+\Delta')$ 内唯一的 y 值，使得它与 $x=x_0$ 共同满足方程3，因此 $f(x_0)=y_0$.

下面来证明 $y=f(x)$ 的连续性. 对于点 (x_0,y_0)，由于 3）可知对于任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内任意一点 x 在区间 $(y_0-\epsilon,y_0+\epsilon)$ 内存在唯一的 $y=f(x)$ 值，它同 x 一起构成方程3的解，即当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时有

$$|f(x)-y_0|=|f(x)-f(x_0)|<\epsilon,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，对于任意点 $\overline{x}$ 函数的连续性证明与对于点 x_0 的证明相似，因为对于点 $\overline{M}(\overline{x},\overline{y})$ 它与 (x_0,y_0) 有相同的条件，因此 $f(x)$ 在 $\overline{x}$ 连续，$\overline{x}\in(x_0-\Delta,x_0+\Delta)$. □

注 2.1. *证明的核心在于：（1）连续函数局部保号性；（2）零点定理；（3）单调性证明唯一性.*

2.3 隐函数可微性

现在我们将加强对 $F(x,y)$ 的的假定，这样便可证明函数 $y=f(x)$ 的导数也存在.

定理 2.2 (隐函数可微性定理)**.** *假定*

1）函数 $F(x,y)$ 在以点 (x_0,y_0) 为中心的某一邻域内

$$\mathcal{D}=[x_0-\Delta,x_0+\Delta;y_0-\Delta',y_0+\Delta']$$

中有定义且连续；

2) 在 $\mathcal{D}$ 中偏导数 F'_x, F'_y 存在且连续;

3) $F(x,y)$ 在这一点 (x_0,y_0) 等于零, 即 $F(x_0,y_0)=0$;

4) $F'_y(x,y)$ 异于零.

那么除了定理2.1中的结论, 我们还有: 函数 $f(x)$ 有连续导数.

证明. 设 $F'_y(x_0,y_0)>0$，则对于因为 2）可知 $F'_y(x,y)$ 连续，由局部保号性可知，存在 $\delta'>0$ 使得在邻域

$$[x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta, y_0+\delta]$$

一切点有 $F'_y(x,y)>0$. 对于这个正方形而言，隐函数存在性定理（定理2.1）中的一切条件均满足，因此可以得到隐函数存在性定理中的所有结论. 下面证明 $f'(x)$ 的连续性.

现给 x 以一增量 Δx，那么自变量终值 $x+\Delta x$ 对于的函数值得终值为 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$，它们共同满足方程3，即：$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$，因此

$$\Delta F(x,y)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0.$$

因为 2)，由定理**??**可知 F 的增量可写为:

$$\Delta F(x,y)=F'_x(x,y)\cdot\Delta x+F'_y(x,y)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y.$$

其中 α,β 依赖于 $\Delta x,\Delta y$，且当 $\Delta x,\Delta y$ 同时趋于零时也趋于零. 由此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}.$$

由于隐函数存在性定理已证 $f(x)$ 连续，因此当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y\to 0$，即 $\alpha,\beta\to 0$. 又因为 4）可知 $F'_y(x,y)\neq 0$，因此上式右边极限存在，即 y 对 x 的导数存在:

$$f'(x)=y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

用 $f(x)$ 代换 y，就有

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}.$$

证毕. □

注 2.2. 上面证明是利用全微分构造出导数形式, 类似的技巧在证明复合函数导数公式中也有应用, 见**??**节.

在上面的证明中，我们得到了隐函数的求导法则，即

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

现在可以继续讨论下去，若 $F(x,y)$ 有连续的二阶导数，令 $u=u(x,y)=F'_x(x,y), v=v(x,y)=F'_y(x,y)$，因此 $y'_x=-\frac{u}{v}$，则由定理??可知：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y'_x=\mathrm{d}\frac{u}{v}&=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\\
&=-\frac{v(x,y)\mathrm{d}u(x,y)-u(x,y)\mathrm{d}v(x,y)}{v^2(x,y)}\\
&=-\frac{v(x,y)[u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y]-u(x,y)[v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y]}{v^2(x,y)}\\
&=-\frac{[v(x,y)u'_x-u(x,y)v'_x]\mathrm{d}x+[v(x,y)u'_y-u(x,y)v'_y]\mathrm{d}y}{v^2(x,y)},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'_x&=-\frac{[v(x,y)u'_x-u(x,y)v'_x]+[v(x,y)u'_y-u(x,y)v'_y]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{v^2(x,y)}\\
&=-\frac{[v(x,y)u'_x-u(x,y)v'_x]+[v(x,y)u'_y-u(x,y)v'_y](-\frac{u}{v})}{v^2(x,y)}\\
&=-\frac{v^2u_x-vuv_x-uvu_y+u^2v_y}{v^3}.
\end{aligned}$$

因为

$$u_x=F''_{xx}, v_x=F''_{yx}, u_y=F''_{xy}, v_y=F''_{yy},$$

因此

$$\begin{aligned}
y''&=-\frac{F_y^2F_{xx}-F_yF_xF_{xy}-F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}{F_y^3}\\
&=-\frac{F''_{xx}F'^2_y-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}.
\end{aligned}$$

由此可见，二阶导数也是 x 的连续函数.

注 2.3. 对于隐函数二阶导数公式，我们要做如下强调.

1. 在计算 y'_x 的时候，$y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数，$F(x,y(x))=0$，两侧求导有

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'_x(x)=0,$$

即 $y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$，由此通过复合函数求导法则可以求得隐函数求导公式.

2. **上面的 $F'_x(x,y),F'_y(x,y)$ 的含义是 $F'_1(x,y),F'_2(x,y)$，是对位置求导，不是对全局 x 求导，因此在计算 y'_x 时要利用链式法则，因为此时是对全局 x 求导，要对每个位置下的变量求到底**.

3. 利用复合函数求导方法可以求得隐函数的二阶导数，需要注意的是 F'_x,F'_y 的脚标是位置变量，

不是全局变量：

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)} \\ &= -\frac{[F_{11}+F_{12}y']F_2-[F_{21}+F_{22}y']F_1}{F_2^2(x,y)} \\ &= -\frac{F_2^2F_{11}-F_1F_2F_{12}-F_1F_2F_{21}+F_1^2F_{22}}{F_2^3} \\ &= -\frac{F''_{xx}F_y'^2-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}F_x'^2}{F_y'^3}. \end{aligned}$$

与一元隐函数相似的我们可以得到多元隐函数的存在性与微分定理：

定理 2.3 (多元隐函数可微性定理)**.** *假定*

1) 函数 $F(x,y,z)$ 在以点 (x_0,y_0) 为中心的某一邻域内有定义且连续；

2) 在 $\mathcal{D}$ 中偏导数 F'_x,F'_y,F'_z 存在且连续；

3) $F(x,y,z)$ 在这一点 (x_0,y_0,z_0) 等于零，即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$；

4) $F'_z(x,y,z)$ 异于零.

那么我们有结论：

i. 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内，方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 z 为 x,y 的单值函数 $z=f(x,y)$；

ii. 当 $x=x_0,y=y_0$ 时，这函数具有数值 z_0：$f(x_0,y_0)=z_0$；

iii. $f(x,y)$ 是连续函数；

iv. f'_x,f'_y 连续，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

这里仅简单推导上式：将 $z=f(x,y)$ 代入 $F(x,y,z)=0$，则有

$$F(x,y,f(x,y))=0,$$

对 x 求偏导有：

$$F'_x+F'_z\cdot z'_x=0$$

因此有

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}.$$

z 对 y 的偏导也同理.

注 2.4 (隐函数求导与复合函数求导的区别)**.** 注意对于二元函数 $z=F(x,y)$ 令 $z=0$ 得到 $F(x,y)=0$，由此方程确定的隐函数求导公式：

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

是对 $z=F(x,y)$ 在某一路径上全微分得到的，因此此时 x,y 之间没有映射关系，即 F'_x 中没有 $F'_yy'_x$ 项.

3 多元函数极值

本节内容属于优化理论的范畴，这里仅做简单介绍.

3.1 多元函数的极值与最值

定义 3.1. 设 $u=f(x,y)$ 在 $\mathcal{D}$ 上有定义，$M_0(x_0,y_0)$ 为 $\mathcal{D}$ 的内点，若存在 M_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(M_0)\subset\mathcal{D}$，使得 $\forall M\in\mathring{U}(M_0)$ 有：

$$f(M)<(>)f(M_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 有极大值（极小值），称 M_0 为函数 $f(x,y)$ 的极大值点（极小值点）.

定理 3.1 (二元函数极值存在的必要条件)**.** 设 $u=f(x,y)$ 在 $\mathcal{D}$ 上有定义，$M_0(x_0,y_0)$ 为 $\mathcal{D}$ 的内点，若函数 $u=f(x,y)$ 在点 M_0 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 存在，且在这点取极值，则必有：

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0.$$

证明. 设在该点取极大值，由极值的定义知 $u=f(x,y)$ 在 M_0 的某一邻域内有 $\forall M\in\mathring{U}(M_0)$ 有：$f(M)<f(M_0)$，那么固定 $x=x_0$，此时 $f(x_0,y)$ 便成为关于 y 的一元函数，因此有 $f(x_0,y_0)$ 是 $f(x_0,y)$ 的极值，由一元函数极值存在的必要条件（定理**??**）知 $f'_y(x_0,y_0)=0$，同理 $f'_x(x_0,y_0)=0$. □

定理 3.2 (二元函数极值存在的充分条件)**.** 设 $u=f(x,y)$ 在 $\mathcal{D}$ 上有定义且连续，$M_0(x_0,y_0)$ 为 $\mathcal{D}$ 的内点，且 $f(x,y)$ 在 M_0 处有连续的一阶与二阶导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C.$$

则 $f(x,y)$ 在点 M_0 是否取得极值的条件如下：

1. $AC-B^2>0$ 时有极值，$A>0$ 时有极小值，$A<0$ 时有极大值；
2. $AC-B^2<0$ 时没有极值；
3. $AC-B^2=0$ 时需要另作讨论.

利用二元函数极值存在的必要条件与充分条件，可以总结如下求具有二阶连续偏导数的二元函数极值的方法：

第一步：解方程组：

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0.$$

求得一切实数解，及求得一切驻点；

第二步：对每一个驻点，计算二阶偏导数的值 A,B,C；

第三步：确定 $AC-B^2$ 的符号，按充分条件判断是否为极值.

需要注意的是，若函数在所讨论区域内有偏导数，则由必要条件知，极值只能在驻点处取得；若函数在个别点处偏导数不存在，那么需要单独考虑.

3.2 条件极值 · 拉格朗日乘数法

在上面所讨论的问题中，除了限制在函数的定义域内，并无其他条件，这种情况下取得的极值称为**无条件极值**，当对自变量附加其他的条件时，这种情况下取得的极值称为**条件极值**.

现在来寻求函数 $u=f(x,y)$ 在条件

$$\phi(x,y)=0$$

下取得极值的必要条件.

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得条件极值，则必有

$$\phi(x_0,y_0)=0. \tag{5}$$

假定在 (x_0,y_0) 的某邻域内 $f(x,y)$ 与 $\phi(x,y)$ 均有连续的一阶偏导数，且 $\phi_y(x_0,y_0)\neq 0$，则由隐函数可微性定理（定理2.2）可知隐函数 $\phi(x,y)=0$，在 (x_0,y_0) 某邻域内可以确定一个连续且具有连续导数的关于 x 的单值函数 $y=\psi(x)$，将其带入 $u=f(x,y)$ 有

$$u=f(x,\psi(x)).$$

于是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得的极值就相当于 $f(x,\psi(x))$ 在点 x_0 处取得的极值. 由一元函数极值存在的必要条件（定理**??**）有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0,$$

由隐函数求导公式有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=-\frac{\phi'_x(x_0,y_0)}{\phi'_y(x_0,y_0)},$$

代入有

$$f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\phi'_x(x_0,y_0)}{\phi'_y(x_0,y_0)}=0, \tag{6}$$

式5以及式6即为函数 $u=f(x,y)$ 取得条件极值的**必要条件**.

令 $\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\phi'_y(x_0,y_0)}=-\lambda$，则必要条件变为：

$$\begin{aligned}&f'_x(x_0,y_0)+\lambda\cdot\phi'_x(x_0,y_0)=0;\\&f'_y(x_0,y_0)+\lambda\cdot\phi'_y(x_0,y_0)=0;\\&\phi(x_0,y_0)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

注 3.1. 第二条实际上是指 $\phi'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

引入辅助函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot\phi(x,y),$$

不难看出7的前两式正为：

$$L'_x(x_0,y_0)=0,\ L'_y(x_0,y_0)=0.$$

函数 $L(x,y)$ 称为**拉格朗日函数**，λ 称为**拉格朗日乘子**. 由此我们引出**拉格朗日乘数法**:

要找函数 $u=f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 的可能极值点，先做拉格朗日函数:

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot\phi(x,y),$$

其中 λ 为参数，对拉格朗日函数求一阶偏导，并使之为零，得到联立方程组

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda\cdot\phi'_x(x_0,y_0)=0;\\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\cdot\phi'_y(x_0,y_0)=0;\\ \phi(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

由此方程组解出 x,y,λ，这样就得到 $f(x,y)$ 在附加条件下的可能极值点，注意因为应用的是必要条件，所以所求点是否为极值点还需再讨论.

拉格朗日乘子法可以推广到多于两个自变量的情形，例如函数

$$u=f(x,y,z,t),$$

在条件

$$\phi(x,y,z,t)=0,$$

$$\psi(x,y,z,t)=0$$

的条件下求最值，则作拉格朗日方程:

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda\cdot\phi(x,y,z,t)+\mu\cdot\psi(x,y,z,t),$$

对拉格朗日函数求一阶偏导，并使之为零则得到连立方程组:

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z,t)+\lambda\cdot\phi'_x(x,y,z,t)+\mu\cdot\psi'_x(x,y,z,t)=0;\\ f'_y(x,y,z,t)+\lambda\cdot\phi'_y(x,y,z,t)+\mu\cdot\psi'_y(x,y,z,t)=0;\\ f'_z(x,y,z,t)+\lambda\cdot\phi'_z(x,y,z,t)+\mu\cdot\psi'_z(x,y,z,t)=0;\\ f'_t(x,y,z,t)+\lambda\cdot\phi'_t(x,y,z,t)+\mu\cdot\psi'_t(x,y,z,t)=0;\\ \phi(x,y,z,t)=0;\\ \psi(x,y,z,t)=0. \end{cases}$$

由此求得 x,y,z,t,λ,μ，即可得到 $f(x,y,z,t)$ 在附加条件下的可能极值点.

4　二重积分

4.1　二重积分的概念

定义 4.1 (二重积分)**.** 设函数 $f(x,y)$ 是有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上的有界函数，将闭区域 $\mathcal{D}$ 任意分割成 n 个小闭区域:

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \ldots,\ \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_1$ 表示第 i 个小区域, 也表示它的面积, 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$, 并作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i,$$

如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，且与闭区域 $\mathcal{D}$ 的分法以及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关, 那么称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $\mathcal{D}$ 上的二重积分, 记作 $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i.$$

上述定义中，对区域 $\mathcal{D}$ 的分隔是任意的，若在直角坐标系中，以平行于坐标轴的直线划分 $\mathcal{D}$ 则除了包含边界的一些小闭区域以外（在取极限时，这部分可忽略），都是矩形闭区域，设其变长分别为 $\Delta x,\Delta y$，则有 $\Delta\sigma=\Delta x\cdot\Delta y$，这样二重积分可以记为：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.2 二重积分的性质

二重积分与定积分有类似的性质：

1. 设 α,β 为常数，则

$$\iint_{\mathcal{D}}[\alpha\cdot f(x,y)+\beta\cdot g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\cdot\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\cdot\iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

2. 若闭区域 $\mathcal{D}$ 被划分为有限个部分闭区域，那么在 $\mathcal{D}$ 上的二重积分，等于个部分闭区域的二重积分之和.

   如 $\mathcal{D}$ 分为两个闭区域 $\mathcal{D}_1$ 与 $\mathcal{D}_2$，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{\mathcal{D}_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

3. 若在 $\mathcal{D}$ 上，$f(x,y)=1$，σ 为 $\mathcal{D}$ 的面积，那么

$$\sigma=\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{\mathcal{D}}\mathrm{d}\sigma.$$

4. 如果在 $\mathcal{D}$，$f(x,y)\le g(x,y)$，那么有

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le\iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

   特别地，由于

$$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|,$$

   所以有

$$\left|\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint_{\mathcal{D}}|f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

5. 设 M 与 m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 $\mathcal{D}$ 上的最大值与最小值，σ 是 $\mathcal{D}$ 的面积，则

$$m\cdot\sigma\leq\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leq M\cdot\sigma.$$

这一结论由性质 4、1、3 可以得出.

6. 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，σ 是 $\mathcal{D}$ 的面积，则在 $\mathcal{D}$ 上至少存在一点 (ξ,η) 使得

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

证明. 显然 $\sigma\neq 0$，把性质 5 中的不等式各除 σ，有

$$m\leq\frac{1}{\sigma}\cdot\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leq M.$$

由多元函数布尔查诺-柯西定理可知，则在 $\mathcal{D}$ 上至少存在一点 (ξ,η) 使得

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sigma}\cdot\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

证毕. □

5 二重积分的计算

5.1 利用直角坐标计算二重积分

计算二重积分的基础是将二重积分化为累次积分，即二次定积分. 累次积分有两种次序，选择那种次序由积分区域与被积函数 $f(x,y)$ 来确定.

1. 适合先 y 后 x 的积分区域

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，并且积分区域 $\mathcal{D}$ 可由不等式组：

$$a\leq x\leq b,\ \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)$$

来表示，则二重积分可化为如下二次定积分：

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. 适合先 x 后 y 的积分区域

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，并且积分区域 $\mathcal{D}$ 可由不等式组：

$$c\leq y\leq d,\ \psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)$$

来表示，则二重积分可化为如下二次定积分：

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3. 当积分区域 $\mathcal{D}$ 为矩形

设函数 $f(x,y)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 上连续，积分区域 $\mathcal{D}$ 可又不等式

$$a \le x \le b,\ c \le y \le d,$$

来表示，其中 $a,b,c,d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$；而 $f(x,y)$ 可以写为 $g(x)\cdot h(y)$ 的形式，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

这一性质的证明是显然的，但是在应用中却有巨大作用.

5.2 二重积分换元法

定理 5.1. *设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，若变换*

$$T : x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 $\mathcal{D}$' 变为 xOy 平面上的 $\mathcal{D}$，且满足：

1. $x(u,v), y(u,v)$ 在 $\mathcal{D}$' 上具有一阶连续偏导数；

2. 在 $\mathcal{D}$' 上雅克比式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \ne 0;$$

3. 变换 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 是一对一的.

则有：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

5.3 利用极坐标计算二重积分

多于二重积分 $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 $x = r\cdot\cos\theta, y = r\cdot\sin\theta$，则雅克比式

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\theta + r\cdot\sin^2\theta = r \ne 0$$

因此有

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}'} f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

将二重积分化为累次积分计算时坐标系的选择不仅要看积分区域 $\mathcal{D}$ 的形状，而且要看被积函数 $f(x,y)$ 的形式.

当被积函数形如 $f(\sqrt{x^2+y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y})$ 时；当积分区域为圆域、圆环域，或扇形等或中心在坐标轴上且边界过原点的圆域时适合以极坐标进行计算.

需要注意的是极坐标计算中极径与极角的选择必须以对函数自变量的换元相匹配，且扫过的顺序应为逆时针，如对于平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+(y+1)^2\leq 1\}$，二重积分

$$\iint_D x^2\mathrm{d}\sigma,$$

若令 $x=\rho\cos\theta$，则其极坐标形式只能为

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin x}\rho^3\cos^2 x\mathrm{d}\rho,$$

而不能是

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos x}\rho^3\cos^2 x\mathrm{d}\rho,$$

因为这里的 θ 与换元公式 $x=\rho\cos\theta$ 中的 θ 不一致：

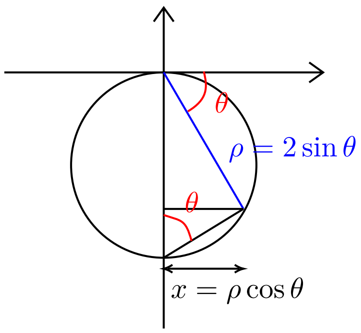


图 1: 第一种极角选择对应的换元

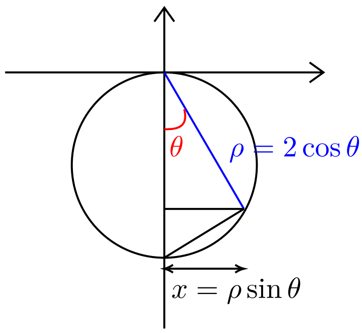


图 2: 第二种极角选择对应的换元

例 5.1. 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

证明. 令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$，则有

$$I=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x}.$$

做换元有

$$I=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y}.$$

即

$$I^2=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x=r\cdot\cos\theta, y=r\cdot\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}I^2&=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\mathrm{d}r\\&=-2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=\pi.\end{aligned}$$

因此有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

□

5.4 利用坐标平移计算二重积分

设 $\mathcal{D}$ 为平面有界闭区域，$f(x,y)$ 在 $\mathcal{D}$ 上连续. 将 $\mathcal{D}$ 向左平移 a 个单位需作如下变换：

$$u = x - a;$$

将 $\mathcal{D}$ 向下平移 b 个单位需作如下变换：

$$v = y - b.$$

即换元 $x = u + a, y = v + b$，由（三）可知，雅克比式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial((u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此有：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}'} f(u+a, v+b)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

一般当 $g(u,v) = f(u+a, v+b)$ 为奇偶函数或 $\mathcal{D}'$ 对称时，采用这种方法.

5.5 利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性计算二重积分

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续

1. 若 $\mathcal{D}$ 关于 x 轴对称，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 为对 } y \text{ 的奇函数} \\ 2\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y) \text{ 为对 } y \text{ 的偶函数.} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap \{y \geq 0\}$.

2. 若 $\mathcal{D}$ 关于 y 轴对称，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 为对 } x \text{ 的奇函数} \\ 2\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y) \text{ 为对 } x \text{ 的偶函数.} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap \{x \geq 0\}$.

3. 若 $\mathcal{D}$ 关于原点对称，即若 $(x,y) \in \mathcal{D} \Rightarrow (-x,-y) \in \mathcal{D}$，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(-x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{若 } f(-x,-y) = f(x,y). \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{D}$ 的右半平面或上半平面.

4. 在任何情况下均有

$$I = \iint_{\mathcal{D}_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}_{yx}} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

成立. 由此可以推出下两条性质.

5. 若积分区域 $\mathcal{D}$ 关于 $y=x$ 对称，即若 $(x,y)\in\mathcal{D}\Rightarrow(y,x)\in\mathcal{D}$，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathcal{D}} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

事实上，若 $f(x,y)+f(y,x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上易于积分时，我们有：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}}\left[f(x,y)+f(y,x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6. 轮换对称性：若 $f(x,y)=f(y,x)$，即被积函数具有轮换对称性，当 $\mathcal{D}_{xy}$ 与 $\mathcal{D}_{xy}$ 最多只有边界重合时，有

$$I=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}_{xy}\cup\mathcal{D}_{yx}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 5.2. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调减少的正值连续函数，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x}\geq\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}.$$

证明. 因为 $f(x)$ 为正值函数，因此不等式可改写为：

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x.$$

即欲证：

$$I=\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x\geq 0.$$

令 $\mathcal{D}=(0,1;0,1)$ 则有

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\mathcal{D}} xf^2(x)\cdot f^3(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\mathcal{D}} yf^3(y)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\mathcal{D}}(x-y)f^2(x)\cdot f^3(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{D}$ 关于 $y=x$ 上对称，因此有

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\mathcal{D}}(x-y)f^2(x)\cdot f^3(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}}(x-y)f^2(x)\cdot f^3(y)+(y-x)f^2(y)\cdot f^3(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}} f^2(x)f^2(y)\cdot[(x-y)f(y)+(y-x)f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}} f^2(x)f^2(y)\cdot(x-y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 单调减少，所以

$$I=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}} f^2(x)f^2(y)\cdot(x-y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 0$$

证毕. □

注 5.1. 若令

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x \geq 0 \\ &= \int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^3(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y \cdot \int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x \geq 0 \\ &= \iint_{\mathcal{D}} x \cdot f^2(x)f^2(y) \cdot [f(y) - f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

一样可证.