线性代数基本概念与方法: 特征值与特征向量

Collection of Linear Algebra Tips:

Eigenvalues and Eigenvectors

王浩铭

2018 年 · 春

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等代数 *I* 期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Linear Algebra (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

1 计算特征值与特征向量

1.1 特征值与特征向量的基本运算性质

1. 若 X 是 A 属于 λ 的特征向量，则 $kX(k \neq 0)$ 也是 A 属于 λ 的特征向量;

2. 若 $X_1, X_2, ..., X_s$ 是 A 属于 λ 的特征向量, 则它们的线性组合 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s$ 也是 A 属于 λ 的特征向量;

Edition 4

3. 设 $|A| \neq 0, X \neq \theta$ 且 $AX = \lambda X$，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的一个特征值，且 X 是 A^{-1} 属于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量；

证明. 因为 A 可逆，则 $AX = \lambda X$ 两侧左乘 A^{-1} 有

$$A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X \Rightarrow \frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X;$$

□

4. 设 $|A| \neq 0, X \neq \theta$ 且 $AX = \lambda X$，则 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的一个特征值，且 X 是 A^* 属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量；

证明. 因为 $A^* = |A|A^{-1}$ 因此对 $\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X$ 两侧乘 $|A|$ 有

$$\frac{|A|}{\lambda}X = |A|A^{-1}X = A^*X,$$

□

5. 设 λ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值，X 是 A 属于特征值 λ 的特征向量，$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个多项式，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的一个特征值，且 X 是 $f(A)$ 属于特征值 $f(\lambda)$ 的特征向量.

证明. 利用数学归纳法. 因为 $A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$，设 $A^kX = \lambda^k X$，因此

$$A^{k+1}X = AA^kX = \lambda^k AX = \lambda^{k+1}X,$$

因此有 $A^mX = \lambda^m X$，即

$$\begin{aligned} f(A)X &= (a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0)X \\ &= a_mA^mX + a_{m-1}A^{m-1}X + \cdots + a_1AX + a_0X \\ &= a_m\lambda^mX + a_{m-1}\lambda^{m-1}X + \cdots + a_1\lambda X + a_0X \\ &= (a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)X \\ &= f(\lambda)X. \end{aligned}$$

□

特别的：

- 若 $B = k_1A + k_2E$，则 B 的特征值为 $\lambda_B = k_1 \cdot \lambda_A + k_2$；
- 若 $C = k_3(A^*)^2 + k_4E$，则 C 的特征值为 $\lambda_C = k_3 \cdot \frac{|A|^2}{\lambda_A^2} + k_4$；

- 由于若 X 是 A 属于 λ_A 的特征值，则 X 也是 A^{-1}, A^* 属于 $\frac{1}{\lambda_A}, \frac{|A|}{\lambda_A}$ 的特征值，因此有

$$(A^* + A^{-1})X = A^*X + A^{-1}X = \frac{|A|}{\lambda_A}X + \frac{1}{\lambda_A}X = (\frac{|A|}{\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_A})X,$$

即若 f_1, f_2, f_3 为多项式，则 $f_1(A) + f_2(A^*) + f_3(A^{-1})$ 的特征值为

$$f_1(\lambda_A) + f_2\left(\frac{|A|}{\lambda_A}\right) + f_3\left(\frac{|A|}{\lambda_A}\right).$$

6. n 阶矩阵 A 与它的转置矩阵 A^T 有相同的特征值.

证明. 因为

$$|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A^T|$$

即 A 与 A^T 有相同的特征多项式，因此有相同的特征值.(A 与 A^T 有相同的特征值，但对于同一特征值的特征向量不一定相同.) □

7. $P^{-1}AP = B$，若 $AX = \lambda X$，则 $B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X)$；若 $BX = \lambda X$，则 $A(PX) = \lambda(PX)$.

证明. 因为 $P^{-1}AP = B$，若 $AX = \lambda X$，则

$$B(P^{-1}X) = P^{-1}APP^{-1}X = P^{-1}AX = \lambda P^{-1}X.$$

若 $BX = \lambda X$，则

$$P^{-1}A = BP^{-1} \Rightarrow P^{-1}APX = BP^{-1}PX = BX = \lambda X \Rightarrow APX = \lambda PX$$

□

8. 若 λ_i 是 $|\lambda E - A| = 0$ 的 k 重根，则 A 至多有 k 个数域 λ_i 的特征向量 $\Rightarrow$ 若 A 有 k 个数域 λ_i 的特征向量，则 λ_i 至少是 $|\lambda E - A| = 0$ 的 k 重根.

1.2 数字型矩阵

1. 求特征值与特征向量——利用直接法

   通过解特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 求出特征值 λ_i，再求得 $(\lambda_i E - A)x = \theta$ 的基础解析，从而得到特征向量.

2. 求特征值与特征向量——利用基本运算性质以及相似的必要条件

   通过特征值与特征向量的运算性质，可以建立抽象矩阵与具体矩阵的关系，从而求得抽象矩阵的特征值与特征向量；

   当某一具体矩阵可以分解为两个易求特征值的矩阵时（一般为对角阵、三角阵、单位阵、秩为 1 的矩阵等），也可以通过该方法求得特征值与特征向量.

3. 求特征值与特征向量——利用初等矩阵与初等变换

   因为 $P(i,j)^{-1}=P(i,j), P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k})), P(j-ki)^{-1}=P(j+ki)$，所以对矩阵 A 进行初等行变换 P 在进行对应的初等列变换 P^{-1} 得到 B，则 $A\sim B$，$\lambda_A=\lambda_B$.

   这一技巧常用于选填题中的隐性爪型矩阵.

4. 求特征值——利用特殊矩阵

   上下三角阵、对角阵的特征值就是对角线元素.

5. 求特征值——利用矩阵的迹与行列式

   易知 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，以及 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

   对于秩为 1 的矩阵 A 有 $|\lambda E-A|=\lambda^n-tr(A)\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda-tr(A))$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=tr(A)$.

6. 求特征值——利用特征向量与矩阵的行向量

   若给出矩阵 A 的某行行向量 (a_{i1},a_{i2},a_{i3})，以及特征向量 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=\lambda x_i$$

   从而解出 λ.（若 λ 易知，则可以求参数）

7. 求特征向量——利用相似传递性

   若 $Q^{-1}AQ=B, M^{-1}BM=\Lambda$，则 $M^{-1}Q^{-1}AQM=\Lambda$，所以 $P=QM$；

   类似的，若 $P^{-1}AP=C, Q^{-1}BQ=C, M^{-1}AM=B$，则 $QP^{-1}APQ^{-1}=B$，即 $M=PQ^{-1}$.

8. 求特征向量——利用正交的方法

   因为实对称矩阵不同特征值的特征向量正交，对于 3 阶矩阵 A，设特征值为 a,b,b，若已知特征值 a 的特征向量为 x，则特征值 b 的特征向量为方程 $x^Ty=0$ 的基础解析 y_1,y_2（因为 $x\neq\theta$ 所以 $r(x^T)=1$，从而 $x^Ty=0$ 基础解系有 $n-r(x^T)=3-1=2$ 个无关向量），从而 $P=(x,y_1,y_2)$；

   若已知特征值 a 的特征向量为 x，以及特征值 b 的一个特征向量为 y_1，则特征值 b 的另一个特征向量 y_2 为方程组 $\begin{cases}x^Ty_2=0\\ y_1^Ty_2=0\end{cases}$ 的解，从而 $P=(x,y_1,y_2)$.

例 1.1. 求 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

易知 $r(A)=1$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_4=tr(A)=13$.

例 1.2. 已知 $a \neq 0$，求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值.

方法一：直接法

转化为隐性爪型行列式求解.

方法二：转换

因为

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + (1-a)E = aB + (1-a)E \end{aligned}$$

所以 $\lambda_A = a\lambda_B + 1 - a$，因为 $r(B) = 1$，所以 $\lambda_{B1} = \lambda_{B2} = \lambda_{B3} = 0, \lambda_{B4} = tr(B) = 4$，所以 $\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = \lambda_{A3} = 1 - a, \lambda_{A4} = 3a + 1$.

方法三：初等变换

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{r_4,r_3,r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a-1 & 1-a & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{c_1+c_2,c_3,c_4} \begin{bmatrix} 3a+1 & a & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} = B \end{aligned}$$

即

$$P_3P_2P_1AQ_1Q_2Q_3 = B$$

其中

$$P_3=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\-1&&&1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\-1&&1&\\&&&1\end{bmatrix},P_1=\begin{bmatrix}1&&&\\-1&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},Q_2=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\1&&1&\\&&&1\end{bmatrix},Q_3=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\1&&&1\end{bmatrix}$$

因此 $Q_1=P_1^{-1},Q_2=P_2^{-1},Q_3=P_3^{-1}$，所以 $A\sim B$，因此 $\lambda_A=\lambda_B=3a+1,1-a,1-a,1-a$.

例 1.3. n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{bmatrix}$$

计算 $r(A)$

易知

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a-1&&&\\&a-1&&\\&&a-1&\\&&&a-1\end{bmatrix}=B+(a-1)E$$

因为 $r(B)=1$，所以 B 的特征值为 $0,\cdots,0,n$，$(a-1)E$ 的特征值为 $a-1,\cdots,a-1,a-1$，从而 A 的特征值为 $a-1,\cdots,a-1,a-1+n$.

因为 A 为实对称矩阵，则

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}a-1+n&&&\\&a-1&&\\&&a-1&\\&&&a-1\end{bmatrix}$$

若 $a=1$，则 $r(A)=r(\Lambda)=1$；若 $a=1-n$，则 $r(A)=r(\Lambda)=n-1$；若 $a\neq1$ 且 $a\neq1-n$，则 $r(A)=r(\Lambda)=n$.

例 1.4. 已知 3 阶矩阵 A 的第一行元素全为 1，且 $\alpha_1=[1,1,1]^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(1,-1,0)^T$ 是矩阵 A 的三个线性无关的特征向量，求 A 以及 $(A-3E)x=\theta$ 的通解.

设 A 的第一行向量为 γ^T，因为 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，所以

$$\begin{cases}\gamma^T\alpha_1=1+1+1=\lambda_1\cdot 1\\ \gamma^T\alpha_2=1+0-1=\lambda_2\cdot 1\\ \gamma^T\alpha_3=1-1+0=\lambda_3\cdot 1\end{cases}$$

从而 A 的特征值为 $3,0,0$,因此 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$,从而 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. $(A-3E)x=\theta$ 的基础解系就是 A 属于 $\lambda=3$ 的无关的特征向量，因此通解为 $k\alpha_1$.

例 1.5. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，$r(A)=2$，且 $AB-6B=O$，其中 $B=\begin{bmatrix}1&2&-a\\1&a&2\\0&1&3\end{bmatrix}$

1. 求 a
2. 求 A 的特征值与特征向量
3. 求 A 与 $(A-3E)^{100}$.

1. 因为 $(A-6E)B=O$，所以 $r(A-6E)+r(B)\le 3$，因为 $r(A)=2$，所以 $A\neq 6E$，则 $r(A-6E)\ge 1$，所以 $r(B)\le 3-r(A)\le 2$，所以 $|B|=0$，从而 $a=1$.
2. 因为 $(A-6E)B=O$，所以 B 的列向量是 $(A-6E)x=\theta$ 的解，因为子式 $\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $r(B)\ge 2$，因此 $r(B)=2$，即 $(A-6E)x=\theta$ 有两个线性无关的解向量，从而 $\lambda=6$ 是 $(\lambda E-A)x=\theta$ 至少二重根，因为 $|A|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 A 的特征值，从而 A 的特征值为 $6,6,0$，而 A 属于 $\lambda=6$ 的特征向量为 $k_1(1,1,0)^T+k_2(2,1,1)^T$，而 A 属于 $\lambda=0$ 的特征向量与 $(1,1,0)^T,(2,1,1)^T$ 正交，从而为 $(-1,1,1)^T$.
3. 因为
$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{bmatrix}$$
从而 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\4&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$ 因为 $A\sim\Lambda$，所以 $A-3E\sim\Lambda-3E=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&-3\end{bmatrix}$，所以 $(\Lambda-3E)^{100}=3^{100}E=Q$，而 $(A-3E)^{100}=PQP^{-1}=Q=3^{100}E$.

例 1.6. 若 A 而 2 解矩阵，且 $|A|<0$，证明 A 可以对角化.

因为 $|A|=\lambda_1\lambda_2<0$，所以 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因此可以对角化.

例 1.7. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为.

易知 A 为实对称矩阵，且 $r(A)=r(0E-A)=1$，则 A 有特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=0$. 因为 $A(1,1,1)^T=3(1,1,1)^T$，所以 $\lambda_3=3$，且特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^T$，因此标准型为 $f=3y^2$.

（本题可以通过实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交的性质求得 A）

1.3 抽象型矩阵

两种常用方法：

1. 定义法
   - 利用公式 $A\alpha=\lambda\alpha$ 或 $(A-\lambda E)\alpha=\theta$ 化简
   - 常利用特征多项式证明两矩阵特征值相等，若存在某矩阵可逆，注意 E 恒等变换
   - 注意利用特征值与特征向量的基本运算性质
2. 相似法
   - 若 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，且 $Ax=\lambda x$，则 $BP^{-1}x=\lambda P^{-1}x$，即两者特征值相同；
   - 特征向量即可逆矩阵 P 的列向量，具体求法见相关章节.
   - 当题干中给出可逆矩阵或线性无关的条件时，要意识到可以用相似的做法

例 1.8. 已知 A 为 3 阶非零矩阵，且 $A^2=A$，证明 1 是 A 的特征值.

法一

因为 $A^2-A=(A-E)A=O$,因为 $A\neq O$,所以 $(A-E)x=\theta$ 有非零解,则 $|A-E|=|E-A|=0$,因此 1 为特征值;

法二

因为 $A^2=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因为 $A\neq O$，所以存在 $\alpha_i\neq\theta$ 使得 $A\alpha_i=\alpha_i$，即 A 有特征值 1.

法三：

因为 $A^2-A=(A-E)A=O$，所以 $r(A-E)+r(A)\leq n$，因为 $A\neq O$，所以 $r(A)\geq 1$，所以 $r(A-E)<n$，则 $|A-E|=|E-A|=0$，因此 1 为特征值.

例 1.9. 设 A 是 *3* 阶矩阵，若 $r(A)=2, A^2=A$，求 A 的特征值.

因为 $A^2-A=O$，即 $A(A-E)=O$，因此 $r(A)+r(A-E)\le 3$，因为 $r(E)=2$，所以 $A\neq E$，即

$$1\le r(E-A)=r(A-E)\le 3-r(A)=3-2=1$$

因此 $r(E-A)=1$.

即 $-Ax=\theta$ 有一个无关解，因此 $\lambda=0$ 至少是 $|\lambda E-A|=0$ 的单根；$(E-A)x=\theta$ 有两个无关解，因此 $\lambda=1$ 至少是 $|\lambda E-A|=0$ 的二重根，因此 A 的特征值为 $1,1,0$.（且 A 可以对角化）

本题还可如下证明：

$$3\ge r(A)+r(A-E)=r(A)+r(E-A)\ge r(A+E-A)=r(E)=3$$

所以 $r(A)+r(A-E)=3$，从而 $r(E-A)=r(A-E)=1$.

例 1.10. 已知 $A^2-2A=O$，且 $\alpha=(0,1,1)^T$ 是 $Ax=\theta$ 的基础解析，求 A.

因为 $\alpha=(0,1,1)^T$ 是 $Ax=\theta$ 的基础解析，所以 $r(A)=2$，因此 $\lambda_A=0,2,2$，A 属于 $\lambda=0$ 的特征向量与 α 垂直，即 $x_2+x_3=0$，即 $\beta_1=(1,0,0),\beta_2=(0,1,-1)$，所以

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

解得 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$.

例 1.11. 设 α 为 n 维列单位向量，则
$A.E-\alpha\alpha^T$ 不可逆
$B.E+\alpha\alpha^T$ 不可逆
$C.E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆
$D.E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

易知 E 的特征值为 $1,1,1$；$r(\alpha\alpha^T)=1$，所以 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $0,\cdots,0,1$，所以 $E-\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1,\cdots,1,0$，所以 $|E-\alpha\alpha^T|=0$，A 正确.

例 1.12. 已知 A,B 是 *3* 阶矩阵，且 A 可逆，证明 AB,BA 有相同的特征值.

法一：相似法

$AB = ABE = ABAA^{-1}$，设 $BAX = \lambda X$，则 $AB(AX) = ABAA^{-1}(AX) = ABAX = A\lambda X = \lambda(AX)$，所以 AB, BA 特征值相同.

法二：特征多项式
易知

$$|\lambda E - AB| = |\lambda AA^{-1} - AB| = |A(\lambda A^{-1} - B)| = |A(\lambda E - BA)A^{-1}| = |A| \cdot |\lambda E - BA| \cdot |A^{-1}|$$

所以 AB, BA 有相同特征多项式，则有相同特征向量.

例 1.13. 若 A 是实对称矩阵，证明其不同特征值的特征向量正交.

设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 1 x_2$，则

$$\lambda_1 x_2^T x_1 = x_2^T A x_1 = (Ax_2)^T x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1$$

所以 $(\lambda_1 - \lambda_2) x_2^T x_1$，因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $x_2^T x_1 = 0$.

例 1.14. 设 A 为 *2* 阶矩阵，α_1, α_2 为线性无关的 *2* 为列向量，$A\alpha_1 = \theta, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$，求 A 的特征值和特征向量.

法一：定义法
因为 $A\alpha_1 = \theta = 0\alpha_1$，所以 A 有特征值 $\lambda_1 = 0$，特征向量为 $x_1 = \alpha_1$
因为 $A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$，所以所以 A 有特征值 $\lambda_2 = 1$，特征向量为 $x_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

法二：相似法
因为

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 α_1, α_2 无关，所以 $|\alpha_1, \alpha_2| \neq 0$，所以 $(\alpha_1, \alpha_2)^T A(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 即 $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$，因为 $r(B) = 1$，所以 $\lambda_{B1} = 0, \lambda_{B2} = tr(B) = 1$，因为 $(1,0)^T, (2,1)^T$ 是 B 对应于特征值 $0,1$ 的特征向量，则 $P(1,0)^T = (\alpha_1, \alpha_2)(1,0)^T = \alpha_1, P(2,1)^T = (\alpha_1, \alpha_2)(2,1)^T = 2\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 对应于特征值 $0,1$ 的特征向量.

例 1.15. 设 A 是 *3* 阶矩阵 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 *3* 为线性无关的列向量且 $A\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_3, A\alpha_3 = 0$

1. 求 A 的特征值与特征向量

2. 判断 A 能否相似对角化

3. 求 $r(A+E)$

1. 因为 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2-6\alpha_3,0)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\2&-6&0\end{bmatrix}$ 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，所以 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，从而 $A\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\2&-6&0\end{bmatrix}=B$，从而解得 B 的特征值为 $0,2,2$，因此 A 的特征值为 $0,2,2$.

因为 $r(2E-B)=2$，所以 B 属于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\beta=(1,1,-2)^T$，因此 A 属于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $P\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(1,1,-2)^T=\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$；由题干条件有 A 属于 $\lambda=0$ 的特征向量为 α_3.

2. 因为 $r(2E-B)=2$，所以 B 不可对角化，从而 A 不可对角化

3. 因为 $A\sim B$，所以 $A+E\sim B+E$，从而 $r(A+E)=r(B+E)=3$.

2 相似与相似对角化

2.1 相似的必要条件

设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $A\backsim B$，则

1. $r(A)=r(B)$;

证明. 因为 $B=P^{-1}AP$，因此 $R(B)=R(P^{-1}AP)\leq R(A)$，同理 $A=PBP^{-1}$，因此 $R(A)=R(PBP^{-1})\leq R(B)$，因此 $R(A)=R(B)$； □

2. A 与 B 有相同的特征值;

证明. 因为

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}|\cdot|\lambda E-A|\cdot|P|=|\lambda E-A|.$$

因此 A 与 B 有相同的特征多项式，即 A 与 B 有相同的特征值; □

3. $|A|=|B|$

证明. 因为 A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，因此 $|A|=|B|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$； □

4. $tr(A)=tr(B)$;

证明. 因为 A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，因此 $tr(A)=tr(B)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$； □

5. A 与 B 有相同的可逆性，若均可逆则 $A^{-1} \backsim B^{-1}$；

   证明. 因为 $|A| = |B|$，因此 A, B 有相同的可逆性，因为

$$E = BB^{-1} = P^{-1}APB^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = B^{-1};$$

□

6. 设 $f(x)$ 为多项式，则 $f(A) \backsim f(B)$（从而可以利用 $f(B)$ 来求 $f(A)$ 的秩、特征值、行列式、迹）；

   证明. 因为 $B = P^{-1}AP$，因此

$$B^m = P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^mP,$$

   因此有 $P^{-1}f(A)P = f(B)$； □

7. 若 $A_i \backsim B_i, i = 1, 2, ..., s$，则 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_s) \backsim \mathrm{diag}(B_1, B_2, ..., B_s)$.

   证明. 设 $P_i^{-1}A_iP_i = B_i$,则构造矩阵 $P = \mathrm{diag}(P_1, P_2, ..., P_s)$,则 $P^{-1} = \mathrm{diag}(P_1^{-1}, P_2^{-1}, ..., P_s^{-1})$，因此 $P^{-1}AP = B$. □

注 2.1. 矩阵 A, B 有相同特征值是两者相似的必要条件，但若 A 的特征值均为单根，且与 B 的特征值相同，则是两者相似的充分条件；或者 A, B 非互异特征值线性无关特征向量的个数等于重根充数，也可以推出两者相似，因为它们都相似于对角阵.

2.2 判断矩阵相似

首先利用矩阵相似的必要条件（主要是 $\lambda_A = \lambda_B, tr(A) = tr(B), |A| = |B|$）判定两矩阵不相似，若不要条件无法判定（如 A, B 特征值相同），则分三种情况：

1. A, B 均可对角化

   若 A, B 均可对角化且特征值相同，则 $A \sim \Lambda, B \sim \Lambda$，因此 $A \sim B$；

2. A 可以对角化，B 不可对角化

   若 A 可以对角化，B 不可对角化，即对于 B 的某 k 重特征值 λ_i，有 $r(\lambda_i E - A) > n - k$，则 B 属于 λ_i 的线性无关的特征向量小于 k 个，则 $A \sim \Lambda, B \nsim \Lambda$，因此 $A \nsim B$.

3. A, B 均不可对角化

   若 $A \sim B$，$Bx = \lambda x$，则 $A(Px) = \lambda(Px)$，则 A, B 关于特征值 λ 的线性无关的特征向量个数相同，即对于 A, B 的任意特征值 λ_i 若 $r(\lambda_i E - A) = r(\lambda_i E - B)$ 则 $A \sim B$，否则 $A \nsim B$.

例 2.1. 判断 A,B 是否相似

1. $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&4\\0&0\end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

4. $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$

1. 因为 $r(A)=r(B)=1$，则 $\lambda_A=0,1,\lambda_B=0,2$，所以 $A\nsim B$；

2. 因为 A 是对角阵，B 是三角阵，所以 $\lambda_A=3,3,\lambda_B=3,3$，因为 A 是实对称矩阵，所以 A 可对角化；因为 $r(3E-B)=1$，所以 B 属于 $\lambda=3$ 只有 *1* 个向量，即 B 不可对角化，因此 $A\nsim B$；

3. 因为 A,B 是三角阵，所以 $\lambda_A=2,2,2,\lambda_B=2,2,2$，因为 $r(2E-A)=1,r(2E-B)=2$，所以 A,B 关于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量个数不同，即 $A\nsim B$

4. 解特征多项式 $|\lambda E-A|=0,|\lambda E-B|=0$，有 $\lambda_A=3,3,0,\lambda_B=3,3,0$，因为 B 是实对称矩阵，则必可对角化，又因为 $r(3E-A)=1$，所以 A 关于特征值 $\lambda=3$ 有 *2* 个线性无关的特征向量，则 A 可以对角化，因此 $A\sim B$.

例 2.2. 举 *2* 阶矩阵的例子，它们有相同的特征值，但是不相似.

易知 A,B 各有两个特征值，若 $\lambda_{A_1}=\lambda_{A_2}\neq\lambda_{A_2}=\lambda_{B_2}$，则 A,B 均可对角化，则 $A\sim B$；因此 $\lambda_{A_1}=\lambda_{B_1}=\lambda_{A_2}=\lambda_{B_2}=\lambda$，因为 $A\nsim B$，则 A 可对角化，B 不可对角化，因此 $r(\lambda E-A)\neq r(\lambda E-B)$，如 $A=\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$.

2.3 求参数的问题

有三种方法：

1. 利用秩

   - 通过题目条件利用矩阵可对角化与特征矩阵的秩的充要关系（含参矩阵 $A(a)$ 的 k 重特征值 λ_i 满足 $r(\lambda_iE-A(a))=n-k\Leftrightarrow A(a)$ 可对角化）来求参数

- 若 a 不在特征多项式中，则只需对重根进行秩验证；若 a 在特征多项式中，需要注意 a 对重根的影响，并进行分类讨论.
- 若可以求得 $r(A) < n$，即 $|A| = 0$，则可以利用行列式消参.

2. 利用矩阵的运算性质

   即 $tr(A) = \sum \lambda_i, |A| = \prod \lambda_i$，利用这两个性质可以求出两个未知参数

3. 利用特征向量构造方程组

   若给出特征向量 x 与矩阵 A 的具体（含参）形式，通过 $Ax = \lambda x$ 构造方程组，从而求出参数.

例 2.3. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 与对角矩阵 Λ 相似，求 a 的值，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -3 & \lambda & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2 = 0$$

因此 A 的特征值为 $3, 3, -1$，因为 $A \sim \Lambda$，即 A 可对角化，因此 $r(3E - A) = 1$，即 $a = -3$，从而解得 A 属于 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $x_1 = (1, 1, 0)^T, x_2 = (1, 0, 1)^T$，$A$ 属于 $\lambda = -1$ 的特征向量为 $(1, -3, 0)^T$，从而令 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

例 2.4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值有重根，判断 A 能否对角化.

A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 10 + a) \end{aligned}$$

若 $\lambda=2$ 是重根，则 $\lambda=2$ 是方程 $\lambda^2-8\lambda+10+a=0$ 的根，因此 $a=2$，从而特征多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$，特征值为 $2,2,6$，因为 $r(2E-A)=1$，所以 A 可以对角化；

若 $\lambda=2$ 是单根，则 $\lambda^2-8\lambda+10+a=0$ 有重根，即 $\Delta=64-4\times(10+a)=0$，所以 $a=6$，从而特征值为 $2,4,4$，因为 $r(4E-A)=2$，所以 A 不可对角化.

例 2.5. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\sim B=\begin{bmatrix}6&a\\-1&b\end{bmatrix}$，求 a,b 以及可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

因为 $A\sim B$，所以 $tr(A)=4=tr(B)=6+b$，所以 $b=-2$；$|A|=-5=|B|=a-12$，所以 $a=7$.

因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$，所以 $\lambda_A=5,-1$，从而解得 A 属于 $\lambda=5$ 的特征向量为 $x_1=(1,1)^T$，A 属于 $\lambda=-1$ 的特征向量为 $x_1=(-2,1)^T$，所以令 $Q=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$ 有 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}5&\\&-1\end{bmatrix}$

类似的令 $M=\begin{bmatrix}7&-1\\1&1\end{bmatrix}$ 有 $M^{-1}BM=\begin{bmatrix}5&\\&-1\end{bmatrix}$,所以 $Q^{-1}AQ=M^{-1}BM$,则 $MQ^{-1}AQM^{-1}=B$，所以 $P=QM^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-5\\0&2\end{bmatrix}$

例 2.6. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$, 向量 $x=(1,b,1)^T$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量, λ 是特征值, 求 a,b,λ.

由 $A^*x=\lambda x$ 有 $Ax=\frac{|A|}{\lambda}x$，即 $\lambda Ax=|A|x$

$$\begin{cases}\lambda(2+b+1)=|A|\\ \lambda(1+2b+1)=|A|b\\ \lambda(1+b+a)=|A|\end{cases}$$

解得 $a=2,b=1,\lambda=1$ 或 $a=2,b=-2,\lambda=4$.

例 2.7. 设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{bmatrix}$，有正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q.

易知 A 的一个特征向量为 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，因此 $Ax=\lambda_1x$，即

$$\begin{cases}0-2+4=\lambda_1\\ -1+6+a=2\lambda_1\\ 4+2a+0=\lambda_1\end{cases}$$

从而 $\lambda_1 = 2, a = -1$，因此 $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0$，从而 A 的另外的特征值为 $5, -4$，相应的特征向量为 $x_2 = (1\ -1\ 1)^T, x_3 = (1, 0, -1)^T$，因为实对称矩阵不同特征值特征向量正交，因此只需将 x_2, x_3 单位化，从而 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，从而 $Q^T A Q = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}$.