高等数学基本方法: 多元函数微积分学

Collection of Calculus Tips: Multivariate Function Calculus

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等数学期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Calculus (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 重极限

1.1 二重极限判定

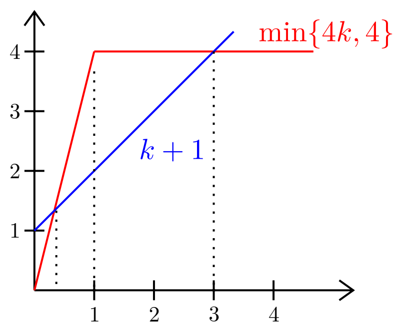
1.1.1 A. 二重极限的计算

若初步判断极限为零（分子阶数高于分母），则首先对极限取绝对值，然后通过夹逼定理或无穷小量与有界变量的乘积计算极限.

1. 之所以称为初步判断是因为多元函数不能直接比较阶数，需要令 $y=x^k$ 代入比较分子分母阶数大小，如 $I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{xy}$，虽然分子是四阶，分母是二阶，但是令 $y=x^k$ 代入有

$$I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+x^{2k})^2}{x^{k+1}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^{\min\{4,4k\}}}{x^{k+1}}.$$

可见，当 $\frac{1}{3}<k<3$ 时，分子阶数高于分母阶数 $I=0$；当 $0<k<\frac{1}{3}$ 或 $k>3$ 时，分子阶数低于分母阶数 $I=\infty$；当 $k=\frac{1}{3}$ 或 $k=3$ 时，分子阶数等于分母阶数 $I=c$，因此极限不存在.



2. 常用不等式：$x^2+y^2\geq 2xy$，更多见「??节」

例 1.1. 求极限 $I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

因为

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\le|y|\to0$$

所以 $I=0$.

例 1.2. 求极限 $I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

因为

$$\begin{aligned}0\le\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}&=\frac{x^2}{|x|+|y|}+\frac{y^2}{|x|+|y|}\\&=\frac{|x|}{|x|+|y|}\cdot|x|+\frac{|y|}{|x|+|y|}\cdot|y|\le|x|+|y|\to0,\end{aligned}$$

所以 $I=0$.

例 1.3. 求极限 $I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2\sin(xy)}{x^2+y^4}$.

因为

$$0\le\left|\frac{xy^2\sin(xy)}{x^2+y^4}\right|\le\left|\frac{xy^2\sin(xy)}{2xy^2}\right|=\frac{1}{2}\cdot|\sin(xy)|\to0,$$

所以 $I=0$.

例 1.4. 若 $f(x,y)-A\cdot x-B\cdot y+C=o(\rho)$，$(\rho\to0)$，证明 $f(x,y)$ 可微.

因为 $f(x,y)-A\cdot x-B\cdot y+C=o(\rho)$，所以 $f(0,0)=-C$，即 $\Delta f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=A\cdot x+B\cdot y$，又因为

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to}\frac{A\cdot x}{x}=A,$$

所以 $f'_x(0,0)=A+\alpha$，同理 $f'_y(0,0)=B+\beta$，所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\alpha\cdot x+\beta\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

又因为

$$\begin{aligned}0\le\left|\frac{\alpha\cdot x+\beta\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|&=\left|\frac{x+\beta\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdot\alpha+\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdot\beta\\&\le\frac{1}{2}\cdot\alpha+\frac{1}{2}\cdot\beta\to0,\end{aligned}$$

所以 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=0$，可微.

1.1.2 B. 二重极限不存在的判断

第一步：令 $y=x^k$，若分子阶数始终大于分母阶数，则通过夹逼定理或无穷小与有界变量的乘积证明极限为零（参考「A. 二重极限的计算」，1.1.1节）；

第二步：若分子阶数与分母阶数在 $k=k_0$ 时相交，则令 $y=ax^{k_0}$，代入极限式，可得出一个为 a 的函数的极限结果，即二重极限结果不唯一，极限不存在.

例 1.5. 证明极限不存在 $I=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$，

令 $y=x^k$，则

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{x^{1+2k}}{x^2+x^{4k}}=\frac{x^{1+2k}}{x^{\min\{2,4k\}}},$$

画图可知分子阶数与分母阶数在 $k=\frac{1}{2}$ 时相等，则令 $y=a\sqrt{x}$，代入有

$$\frac{ax^2}{x^2+ax^2}=\frac{a}{1+a}$$

即极限不唯一，所以重极限不存在.

1.2 可微性判定

有四种充分判定：

1. 若 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微（或者一个偏导数存在，另一个偏导数连续）；

   证明. 设 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在，$f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则把函数的全增量 Δu 改写为

$$\begin{aligned}\Delta u=&[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\\&+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\end{aligned}$$

   对上式应用拉格朗日中值定理，则

$$[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]=f'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x$$

   因为 $f'_x(x,y)$ 连续，所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0),$$

   即

$$f'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)+\alpha$$

   因此

$$[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]=f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

对下式应用导数定义

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]}{\Delta y}=f'_y(x_0,y_0)\Rightarrow\frac{[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]}{\Delta y}=f'_y(x_0,y_0)+\beta$$

因此

$$[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\beta\cdot\Delta y$$

综上

$$\begin{aligned}\Delta u&=f'_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,y+\Delta y)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y\\&=f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0+y_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y.\end{aligned}$$

□

2. 若 $f(x,y)-A\cdot x-B\cdot y+C=o(\rho)$，$(\rho\to 0)$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

3. 若 $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=0$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

4. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\tau}$ 存在，其中 $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\tau}{\rho}=0$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

证明. 因为 $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\tau}$ 存在, 所以 $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)=0$, 所以 $\Delta f=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)$.

因此

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{\tau}\cdot\frac{\tau}{\rho}=0,$$

同理 $f'_y(0,0)=0$，因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\tau}\cdot\frac{\tau}{\rho}=0.$$

□

注 1.1. *注意从极限式* $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\tau}$ *中求* f'_x,f'_y *的方法.*

以及一种必要判定:
若 $f'_x(x,y)$ 或 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不可微.

注 1.2. *对于一道可微性的题目一般按照如下顺序:*

1. *判断* $f(x,y)$ *在点* (x_0,y_0) *是否连续;*

2. *判断* $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ *是否存在;*

3. *判断* $f(x,y)$ *在点* (x_0,y_0) *是否可微;*

4. *判断* $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ *在点* (x_0,y_0) *是否连续.*

$$
\begin{tikzcd}
\text{偏导连续} \arrow[r] & \text{函数可微} \arrow[r] \arrow[d] & \text{函数连续} \\
 & \text{偏导存在} &
\end{tikzcd}
$$

例 1.6. 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在；

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

B.

例 1.7. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 连续

B. 两个偏导数都不存在

C. 两个偏导数都存在但不可微

D. 可微

注意：本题题干没有给出 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的数值，因此 A, C, D 必错.

因为 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{f(x,0)-x^2}{|x|} = 1$，所以 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{|x|} = 1$，即 $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,0)}{x} = 1$，$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x,0)}{-x} = 1$，$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x,0)}{x} = -1$，因此无论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否连续两个偏导数都不存在.

2 偏导数与全微分的计算

2.1 求某一点处的偏导数与全微分

这类题多用定义求解.

例 2.1. 设 $z = \ln(1+xy^2)$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{0,1}$

z 对 x 的偏导易求，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{1+xy^2}$，因此 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{0,1} = 1$，因此

$$
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{0,1} = \lim_{y\to 1} \frac{z(0,y)-z(0,1)}{y} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y-1} = 2.
$$

2.2 已知偏导数与全微分求函数

1. 具体偏导数求函数. 主要有五种方法:

1. 双偏积分

   将 $\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y$ 中两个偏微分分别积分, 得到 $u = \int u_x\mathrm{d}x = F_1 + \phi(y)$, 以及 $u = \int u_y\mathrm{d}y = F_2 + \varphi(x)$, 通过 $u = F_1 + \phi(y) = F_2 + \varphi(x)$ 一起求出待定函数 $\phi(y), \varphi(x)$.

2. 偏积分 + 偏导

   将 $\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y$ 中一个偏微分分别积分, 得到 $u = \int u_x\mathrm{d}x = F_1 + \phi(y)$, 在对另一变量求偏导, 得到 $u_y = F'_{1y} + \phi'(y)$, 求出 $\phi(y)$.

3. 双偏导

   一般用来判断某些参数, 若 u_x, u_y 有连续偏导数, 即 u_{xy}, u_{yx} 连续, 则可以利用 $u_{xy} = u_{yx}$ 的结论计算.

4. 凑微分

   将 $\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y$ 凑成 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}f(x, y) + \mathrm{d}g(x, y) = \mathrm{d}[f(x, y) + g(x, y)]$ 的形式, 从而 $u = [f(x, y) + g(x, y)]$.

5. 微分方程

例 2.2. 已知 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, 且当 $x = 0$ 时, $z = \sin y$, 当 $y = 0$ 时, $z = \sin x$, 则 $z(x, y) =$

方法一: 双偏积分

因为

$$z_x = \int z_{xy}\mathrm{d}y = y + \phi(x)$$

所以

$$z = \int z_x\mathrm{d}x = xy + \int \phi(x)\mathrm{d}x + \varphi(y) = xy + \Phi(x) + \varphi(y),$$

因为

$$z(0, y) = \Phi(0) + \varphi(y) = \sin y$$

$$z(x, 0) = \Phi(x) + \varphi(0) = \sin x$$

所以

$$z = xy + \Phi(x) + \varphi(y) = xy + \sin y + \sin x - [\Phi(0) + \varphi(0)]$$

令 $x = 0$, 所以 $z(0, 0) = \Phi(0) + \varphi(0) = \sin 0 = 0$, 因此

$$z = xy + \sin y + \sin x.$$

方法二：偏积分 + 偏导

因为

$$z_x = \int z_{xy}\mathrm{d}y = y + \phi(x)$$

而 $z(x,0) = \sin x$，所以 $z'_x(x,0) = \cos x$，因此 $z_x(x,0) = \phi(x) = \cos x$，所以 $z_x = y + \cos x$. 所以 $z = \int z_x \mathrm{d}x = xy + \sin x + \varphi(y)$，因为 $z(0,y) = \sin y$，所以 $\varphi(y) = \sin y$，即

$$z = xy + \sin y + \sin x.$$

例 2.3. 设 $f(x)$ 有连续一阶导数，且有 $[xy - yf(x)]\mathrm{d}x + [f(x) + y^2]\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$，求 $f(x)$ 以及 $u(x,y)$，其中 $f(0) = -1$.

易知 $u_x = xy - yf(x), u_y = f(x) + y^2$，因为 $f(x)$ 有一阶连续导数，所以 $u_{xy} = u_{yx}$，即

$$x - f(x) = f'(x)$$

解得 $f(x) = Ce^{-x} + (x-1)$. 因为 $f(0) = -1$，所以

$$f(x) = x - 1.$$

因此有

$$y\mathrm{d}x + (x + y^2 - 1)\mathrm{d}y = \mathrm{d}u,$$

方法一：双偏积分

因为

$$u = \int u_x \mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}x = yx + \phi(y)$$

$$u = \int u_y \mathrm{d}y = \int x + y^2 - 1\mathrm{d}y = xy + \frac{y^3}{3} - y + \varphi(x)$$

所以

$$\phi(y) = \frac{y^3}{3} - y + \varphi(x)$$

因此 $\varphi(x) = 0, \phi(y) = \frac{y^3}{3} - y + C$，即

$$u = xy + \frac{y^3}{3} - y + C.$$

方法二：偏积分 + 偏导

因为

$$u = \int u_x \mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}x = yx + \phi(y)$$

对 y 求偏导有

$$u_y = x + \phi'(y) = x + y^2 - 1$$

所以

$$\phi(y)=\int y^2-1\mathrm{d}y=\frac{y^3}{3}-y+C.$$

所以

$$u=xy+\frac{y^3}{3}-y+C.$$

方法三：凑微分

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=y\mathrm{d}x+(x+y^2-1)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+(y^2-1)\mathrm{d}y\\&=d(xy)+d\left(\frac{y^3}{3}-y\right)=d\left(xy+\frac{y^3}{3}-y\right)\end{aligned}$$

所以

$$u=xy+\frac{y^3}{3}-y+C.$$

2. 抽象偏导数关系求函数. 一般需要由题干条件性质构造中间变量，再对底层变量求导，最后代入条件证明. 其中二阶导数到函数有三种方法：

1. 微分方程
2. 换元技巧：2 换 1
3. 对其他变量导数为 0

例 2.4. 设 (r,θ) 为极坐标，$u=u(r,\theta)$ 具有二阶连续偏导数，并满足 $u_\theta\equiv 0$，且

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

求 $u(r,\theta)$.

题干中给出了 x,y 的二阶导数性质，因此以 x,y 为底层变量，因为 $u_\theta\equiv 0,r=\sqrt{x^2+y^2}$，所以

$$u_x=u_r\cdot r_x=u_r\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=u_r\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=u_r\cdot\frac{x}{r}$$

以及

$$\begin{aligned}u_{xx}&=u_{rr}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+u_r\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\\&=u_{rr}\cdot\frac{x^2}{r^2}+u_r\cdot\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}\\&=u_{rr}\frac{x^2}{r^2}+u_r\cdot(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})\end{aligned}$$

有对称性知

$$u_{yy}=u_{rr}\frac{y^2}{r^2}+u_r\cdot(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})$$

因此

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+u_t\frac{1}{r}=0$$

即 $u_{rr}+u_r\cdot\frac{1}{r}=0$ 从而

$$r\cdot u_{rr}+u_r=(r\cdot u_r)'=0$$

即 $r\cdot u_r=C$，从而 $u=C_1\ln r+C_2$.

例 2.5. 若对任意 $t>0$，有 $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$，则称函数 $f(x,y)$ 是 n 次齐次函数，证明若 $f(x,y)$ 可微，则 $f(x,y)$ 是 n 次齐次函数 $\Leftrightarrow x\cdot f_x+y\cdot f_y=nf(x,y)$.

$\Rightarrow$

令 $F(t)=f(tx,ty)=t^nf(x,y)$，则 $F'(t)=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$ 所以

$$txf_1(tx,ty)+tyf_2(tx,ty)=nt^nf(x,y)=nf(tx,ty)$$

令 $tx=x,ty=y$，所以

$$x\cdot f_x+y\cdot f_y=nf(x,y).$$

$\Leftarrow$

因为

$$xf_1(x,y)+yf_2(x,y)=nf(x,y)$$

令 $x=tu,y=tv$，则

$$tuf_1(tu,tv)+tvf_2(tu,tv)=nf(tu,tv)$$

令 $F(t)=f(tu,tv)$，则

$$tF'(t)=nF(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}F}{F}=n\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

两侧积分有 $F(t)=C\cdot e^{\ln t^n}=C\cdot t^n$，因为 $F(0)=f(u,v)=C$，所以 $f(tu,tv)=t^n\cdot f(u,v)$，因此

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y).$$

注 2.1. 试图用微分方程解函数，需要设法将偏微分方程转换为常微分方程.

例 2.6. 设 f 有一阶连续导数，证明 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)\Leftrightarrow xz'_x+yz'_y=0$.

$\Rightarrow$

因为 $z'_x=f'\cdot\frac{1}{y},z'_y=-f'\cdot\frac{x}{y^2}$，所以 $xz'_x+yz'_y=f'\cdot\frac{x}{y}-f'\cdot\frac{x}{y}=0$.

$\Leftarrow$

令 $\frac{x}{y}=u,y=v$，所以 $z=z(x,y)=z(yu,v)=z(uv,v)=g(u,v)$，所以

$$z'_x=g'_u\cdot u'_x+g'_v\cdot v'_x=g'_u\cdot\frac{1}{y}$$

$$z'_y=g'_u\cdot u'_y+g'_v\cdot v'_y=-g'_u\cdot\frac{x}{y^2}+g'_v$$

所以 $xz'_x+yz'_y=g'_u\cdot\frac{x}{y}-g'_u\cdot\frac{x}{y}+yg'_v=0$，所以 $g'_v=0$，即 $z=g(u,v)$ 仅是 u 的函数，即 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.

2.3 求含有抽象函数的复合函数的偏导数与全微分

关于抽象复合函数一般有以下几点注意:

1. 多元复合函数可导性要求外层函数有连续导数;
2. 对于形如 $z=f(u,v),u=\phi(x,y),v=\varphi(x,y)$ 的复合函数，一般对底层变量 x,y 求偏导;
3. 底层变量与中间变量的选择可以遵从如下经验:
   - 若题干中同时给出了 z 对 x,y 与 u,v 的二阶导数的等式性质，则以哪组变量为底层变量均可，将 z 对底层变量求偏导，并构造所给出的二阶导数的等式性质，并代入所给出的另一组变量的等式性质.
   - 若题干中仅给出一组变量的二阶导数的等式性质，则以该组变量为底层变量. 此类题一般要求函数形式，通常涉及微分方程.
4. 微分形式不变性

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= z_x\cdot\mathrm{d}x+z_y\cdot\mathrm{d}y\\
&=[z_u\cdot u_x+z_v\cdot v_x]\cdot\mathrm{d}x+[z_u\cdot u_y+z_v\cdot v_y]\cdot\mathrm{d}y\\
&=z_u\cdot[u_x\cdot\mathrm{d}x+u_y\cdot\mathrm{d}y]+z_v\cdot[v_x\cdot\mathrm{d}x+v_y\cdot\mathrm{d}y]\\
&=z_u\cdot\mathrm{d}u+z_v\cdot\mathrm{d}v\\
&=f_u\cdot\mathrm{d}u+f_v\cdot\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

其中 $z=f(u,v),u=\phi(x,y),v=\varphi(x,y)$ 都应有连续导数,

例 2.7. 设函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(x)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $f_{uv}=$

对底层变量 x 求偏导有

$$f_x=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x=f_u\cdot g(y)=1,$$

再对底层变量 x 求偏导有

$$g(y)\cdot[f_{uu}\cdot g(y)]=0$$

因为 $g(y)\neq 0$，所以 $f_{uu}=0$.

因为 $f_u=\frac{1}{g(y)}$，所以 f_u 对底层变量 y 求偏导有

$$f_{uu}\cdot xg'(y)+f_{uv}=f_{uv}=-\frac{g'(y)}{g^2(y)}.$$

例 2.8. 设 $u=f(x,y,z),y=\phi(x,t),t=\psi(x,z)$，其中 f,ϕ,ψ 可微，且 u_x.

易知

$$\begin{aligned} u_x &= f_x + f_y \cdot y_x \\ &= f_x + f_y \cdot [\phi_x + \phi_t \cdot t_x] \\ &= f_x + f_y \cdot [\phi_x + \phi_t \cdot \psi_x] \\ &= f_x + f_y \cdot \phi_x + f_y \cdot \phi_t \cdot \psi_x. \end{aligned}$$

例 2.9. 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$$

确定 a, b 的值，使等式在变换 $s = x + ay, t = x + by$ 下有 $u_{st} = 0$.

题目中给出了 x, y 以及 s, t 的二阶导数等式性质，因此以哪组变量为底层变量均可.

方法一：以 x, y 为底层变量

$$u_x = u_s \cdot s_x + u_t \cdot t_x = u_s + u_t,$$

所以

$$\begin{aligned} u_{xx} &= [u_{ss} + u_{st}] + [u_{ts} + u_{tt}] = u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt} \\ u_{xy} &= [u_{ss} \cdot s_y + u_{st} \cdot t_y] + [u_{ts} \cdot s_y + u_{tt} \cdot t_y] \\ &= [u_{ss} \cdot a + u_{st} \cdot b] + [u_{ts} \cdot a + u_{tt} \cdot b] \\ &= au_{ss} + (a + b) \cdot u_{st} + bu_{tt}. \end{aligned}$$

以及

$$u_y = u_s \cdot s_y + u_t \cdot t_y = au_s + bu_t$$

所以

$$\begin{aligned} u_{yy} &= a \cdot [au_{ss} + bu_{st}] + b \cdot [au_{ts} + bu_{tt}] \\ &= a^2 u_{ss} + 2ab u_{st} + b^2 u_{tt}. \end{aligned}$$

代入 $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 0$ 有

$$(5a^2 + 12a + 4) \cdot u_{ss} + [10ab + 12(a + b) + 8] \cdot u_{st} + (5b^2 + 12b + 4) \cdot u_{tt} = 0$$

有题设知 $5a^2 + 12a + 4 = 0, 5b^2 + 12b + 4 = 0, 10ab + 12(a + b) + 8 \neq 0$，解得 $a = -2, b = -\frac{2}{5}$ 或 $a = -\frac{2}{5}, b = -2$.

方法二：以 s, t 为底层变量

因为 $s = x + ay, t = x + by$，所以 $x = -\frac{b}{a-b}s + \frac{a}{a-b}t, y = \frac{1}{a-b}s - \frac{1}{a-b}t$，所以

$$u_s = u_x \cdot x_s + u_y \cdot y_s = -\frac{b}{a - b} \cdot u_x + \frac{1}{a - b} \cdot u_y.$$

以及

$$\begin{aligned}u_{st} &= -\frac{b}{a-b}\cdot[u_{xx}\cdot x_t + u_{xy}\cdot y_t] + \frac{1}{a-b}\cdot[u_{yx}\cdot x_t + u_{yy}\cdot y_t]\\ &= -\frac{b}{a-b}\cdot[u_{xx}\cdot\frac{a}{a-b} + u_{xy}\cdot-\frac{1}{a-b}t] + \frac{1}{a-b}\cdot[u_{yx}\cdot\frac{a}{a-b} + u_{yy}\cdot-\frac{1}{a-b}t]\\ &= -\frac{ab}{(a-b)^2}u_{xx} + \frac{a+b}{(a-b)^2}u_{xy} - \frac{1}{(a-b)^2}u_{yy} = 0\end{aligned}$$

所以

$$\frac{-ab}{4} = \frac{a+b}{12} = \frac{-1}{5}$$

解得 $a=-2, b=-\frac{2}{5}$ 或 $a=-\frac{2}{5}, b=-2$.

例 2.10. 设 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$u_{xx}=u_{yy}$，且 $u(x,2x)=x, u_1(x,2x)=x^2$，则 $u_{11}(x,2x)=$

令 $f(x)=u(x,2x)$，则 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x,2x)=u_1(x,2x)+2u_2(x,2x)=1$.
$f''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_1(x,2x)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_2(x,2x)=u_{11}+2u_{12}+2u_{21}+4u_{22}=5u_{11}+4u_{12}=0$，所以

$$\begin{cases}5u_{11}+4u_{12}=0\\ u_{11}+2u_{12}=2x\end{cases}$$

因此 $u_{11}=\frac{-4x}{3}$.

2.4 隐函数的偏导数与全微分

计算隐函数有三种常用方法：设 $u=F(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，$F'_z\neq 0$，$z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)$ 确定，则

1. 公式求导：$z_x=-\frac{F_x}{F_z}; z_y=-\frac{F_y}{F_z}$;
2. 复合函数求导：两侧对 x 求导则 $u_x=F_x+F_z\cdot z_x=0$;
3. 微分形式不变性：$\mathrm{d}u=F_x\cdot\mathrm{d}x+F_y\cdot\mathrm{d}y+F_z\cdot\mathrm{d}z=0$.

注意：

- 对于循环的隐函数，求偏导必须闭环
- 题目中 $z=z(x,y)$ 型的函数都是抽象函数，不能将 z'_1, z'_2 直接代入答案.

例 2.11. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数，$z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

微分形式不变性：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= f_x\cdot\mathrm{d}x+f_y\cdot\mathrm{d}y+f_z\cdot\mathrm{d}z\\ &= f_x\cdot\mathrm{d}x+f_y\cdot\mathrm{d}y+f_z\cdot[z_x\cdot\mathrm{d}x+z_y\cdot\mathrm{d}y]\\ &= f_x\cdot\mathrm{d}x+f_y\cdot\mathrm{d}y+f_z\cdot\left[-\frac{F_x}{F_z}\cdot\mathrm{d}x-\frac{F_y}{F_z}\cdot\mathrm{d}y\right],\end{aligned}$$

其中 $-\frac{F_x}{F_z}=\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z};-\frac{F_y}{F_z}=\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f_x\cdot\mathrm{d}x+f_y\cdot\mathrm{d}y+f_z\cdot\left[\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}\cdot\mathrm{d}x+\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}\cdot\mathrm{d}y\right]\\&=\left[f_x+f_z\cdot\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}\right]\mathrm{d}x+\left[f_y+f_z\cdot\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

例 2.12 (循环的隐函数)**.** 设 $y=f(x,t)$，且方程 $F(x,y,t)=0$ 确定了函数 $t=t(x,y)$，其中 f,F 都具有连续的一阶偏导数，求 y_x.

易知 $y=f(x,t)=f(x,g(x,y))$，两侧对 x 求导有

$$y_x=f_1+f_2\cdot(t_x+t_y\cdot y_x)$$

整理有

$$y_x=\frac{f_1+f_2\cdot t_x}{1-f_2\cdot t_y}$$

因为 $t_x=-\frac{F_x}{F_t},t_y=-\frac{F_y}{F_t}$，所以

$$y_x=\frac{f_1+f_2\cdot-\frac{F_x}{F_t}}{1-f_2\cdot-\frac{F_y}{F_t}}=\frac{F_t\cdot f_1-F_x\cdot f_2}{F_t+f_2\cdot F_y}.$$

例 2.13. 设 $y=g(x,z)$ 与 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x-z,xy)=0$ 确定的函数，求 y'_x.

因为 $y'_x=g'_1+g'_2\cdot[z'_x+z'_y\cdot y'_x]$，所以 $y'_x=\frac{g'_1+g'_2\cdot z'_x}{1-g'_2\cdot z'_y}$，又因为 $f'_1\cdot(1-z'_x)+f'_2\cdot y=0$，所以 $z'_x=\frac{f'_1+f'_2\cdot y}{f'_1}$；$-f'_1\cdot z'_y+f'_2\cdot x=0$，所以 $z'_y=\frac{f'_2\cdot x}{f'_1}$，代入有

$$y'_x=\frac{g'_1+g'_2\cdot z'_x}{1-g'_2\cdot z'_y}=\frac{g'_1+g'_2\cdot\frac{f'_1+f'_2\cdot y}{f'_1}}{1-g'_2\cdot\frac{f'_2\cdot x}{f'_1}}=\frac{f'_1g'_1+f'_1g'_2+f'_2g'_2y}{f'_1-g'_2f'_2x}$$

例 2.14. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$f_y\neq 0$，证明对任意常数 C，$f(x,y)=C$ 为一条直线 $\Leftrightarrow f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}=0$.

$\Rightarrow$

因为 $f(x,y)=C$ 为一条直线，所以 $y_x=-\frac{f_1}{f_2}=c\Rightarrow f_1=-c\cdot f_2$ 所以 $f_{11}=-cf_{21},f_{12}=-cf(22)$，$f_{11}=c^2f_{22}$，所以

$$f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}=f_2^2c^2f_{22}-2c^2f_2^2f(22)+c^2f_2^2f_{22}=0.$$

$\Leftarrow$

因为 $f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}=0$，所以 $y_{xx}=0\Rightarrow y_x=c$，即 $f(x,y)=C$ 为一条直线.

3 极值与最值

3.1 求无条件极值

两步法：

1. 必要条件：找驻点与导数不存在的点

   驻点即 $z'_x = 0; z'_y = 0$，对于某些函数，需要以利用行列式求驻点.

2. 充分条件：$AC - B^2$ 验证

   注意，$AC-B^2$ 本质上是在某一点的导数，因此对于一些复杂的一阶偏导数，可以用定义法（先代后求法）求得 A, B, C.

注 3.1. 需要注意对于隐函数 $F(x,y,z)=0$ 而言，一组驻点 (x_0,y_0) 可能确定多个 z，此时需要分别讨论.

另外，判断驻点是否为连续函数的极值点还可以通过定义证明，如 $f(x_0,y_0)=0$，若在 (x_0,y_0) 的去心邻域内恒有 $f(x,y)>(<)0$，则 (x_0,y_0) 为极小（大）值点. 这样方法也通过两步骤完成：

1. 通过极限与无穷小的关系去掉极限号：$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \exists\alpha=o, \text{s.t.} f(x)=a+\alpha$

2. 比较变号无穷小项与保号无穷小项的阶数关系，令 $y=x^k$ 代入判断.

例 3.1. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0,$$

证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求此极值.

因为 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0,$，所以 $f(x,y)=-(x-1)-y+o\rho$，由微分定义可知 $f_1=-1, f_2=-1$，因此 $g_x=f_1\cdot e^{xy}\cdot y+f_2\cdot 2x$，以及 $g_y=f_1\cdot e^{xy}\cdot x+f_2\cdot 2y$，因为 $g_x(0,0)=g_y(0,0)=0$，即 $(0,0)$ 为 $g(x,y)$ 的驻点. 因为

$$\begin{aligned}
A=g_{xx}&=\lim_{x\to 0}\frac{g_x(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_2(1,x^2)\cdot 2x}{x}=2f_2(1,0)=-2,\\
B=g_{xy}&=\lim_{y\to 0}\frac{g_x(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f_1(1,y^2)\cdot y}{y}=f_1(1,0)=-1,\\
C=g_{yy}&=\lim_{y\to 0}\frac{g_y(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f_2(1,y^2)\cdot 2y}{y}=2f_2(1,0)=-2.
\end{aligned}$$

所以 $AC-B^2=4-1=3, A<0$ 所以 $(0,0)$ 为极大值，且 $g(0,0)=f(1,0)=0$.

例 3.2. 设 $x=x(y),z=z(y)$ 由方程组 $\begin{cases}F(y-x,y-z)=0\\ G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0\end{cases}$ 确定，求 x'_y,z'_y.

方程组两侧对 y 求导有

$$\begin{aligned}F'_1\cdot\left(1-x'_y\right)+F'_2\cdot\left(1-z'_y\right)=0\\ G'_1\cdot\left(x+yx'_y\right)+G'_2\cdot\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}z'_y\right)=0\end{aligned}$$

整理有

$$\begin{aligned}F'_1x'_y+F'_2z'_y=F'_1+F'_2\\ yG'_1x'_y+\frac{1}{y}G'_2z'_y=\frac{z}{y^2}G'_2-xG'_1\end{aligned}$$

由克拉默法则有

$$x'_y=\frac{\begin{vmatrix}F'_1+F'_2 & F'_2\\ \frac{z}{y^2}G'_2-xG'_1 & \frac{1}{y}G'_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_1 & F'_2\\ yG'_1 & \frac{1}{y}G'_2\end{vmatrix}}$$

$$z'_y=\frac{\begin{vmatrix}F'_1 & F'_1+F'_2\\ yG'_1 & \frac{z}{y^2}G'_2-xG'_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_1 & F'_2\\ yG'_1 & \frac{1}{y}G'_2\end{vmatrix}}$$

例 3.3 (重点！)**.** 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

(D) 无法判断点 $(0,0)$ 是不是 $f(x,y)$ 的极值点.

已知存在无穷小量 a，使得 $\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+a$，即

$$f(x,y)=xy+(1+a)\cdot[(x^2+y^2)^2]$$

其中 xy 为变号无穷小，$(1+a)\cdot[(x^2+y^2)^2]$ 为保号无穷小，如果变号无穷小是保号无穷小的高阶量，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域内以保号的形式趋于 0，则为极值点；若变号无穷小是保号无穷小的低阶量，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域内以变号的形式趋于 0，此时 $f(x,y)$ 不是极值点.

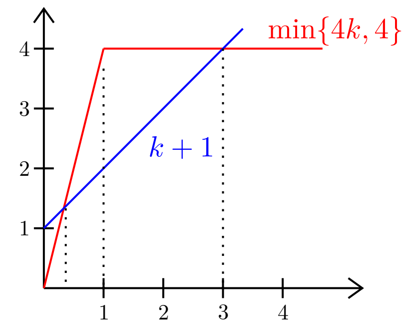
那么判断 $f(x,y)$ 是不是极值点的问题便归结为判断变号无穷小与保号无穷小的阶数问题，令 $y=x^k$ 代入有

$$I=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+x^{2k})^2}{x^{k+1}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^{\min\{4,4k\}}}{x^{k+1}}.$$

可见，当 $\frac{1}{3} < k < 3$ 时，分子（保号无穷小）阶数高于分母（变号无穷小）阶数，此时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域内以变号的形式趋于 0，如令 $y = bx$，则

$$f(x,bx) = bx^2 + (1+a)\cdot[(x^2+b^2x^2)^2] = bx^2\cdot[1+\frac{(1+a)\cdot(x^2+b^2x^2)^2}{bx^2}]$$

可知当 $b>0$ 是 $f(x,bx)$ 在 $(0,0)$ 去心邻域内大于零，当 $b<0$ 是 $f(x,bx)$ 在 $(0,0)$ 去心邻域内小于零，因此 $(0,0)$ 不是极值点.



例 3.4. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{e^{x^2+y^2}-1} = 1$，则
$A.(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 极小值
$B.(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 极大值
$C.(0,0)$ 不是 $f(x)$ 极值
$D.$ 不能确定 $(0,0)$ 是否为 $f(x)$ 极值

因为 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{e^{x^2+y^2}-1} = 1$，所以 $\frac{f(x,y)}{e^{x^2+y^2}-1} = 1+\alpha$，即 $f(x,y) = (1+\alpha)\cdot[e^{x^2+y^2}-1]$，因为 $\forall(x,y)\neq(0,0), e^{x^2+y^2}-1>0$，所以 $f(x,y)>0$，因为 $f(0,0)=0$，所以 $(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 极小值.

3.2 求最大值与最小值

求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最值的三个步骤

1. 求 $f(x,y)$ 在 D 内部的驻点:

   需要注意

   - 如果 D 内有唯一的极大（小）值点，则它就是 D 上的最大（小）值
   - 如果极值点在 D外部取到，则 D 上的最值点在边界上
   - 内部不包括边界

2. 求 $f(x,y)$ 在 D 边界上的最值点:

   有两种方法:

   (a) 简单的边界可以代入;

   (b) 复杂的边界考虑拉格朗日乘数法，构造拉格朗日函数有几点注意:

- 约束条件可以代入$f(x,y)$ 中来简化拉格朗日函数；
- 先解 λ，再解 x,y；
- 当 $f(x,y)$ 形式复杂时可以对其做单调变换，常见形式为当 $f(x,y)$ 为多项连乘或者幂指形式时将拉格朗日函数构造为

$$L = \ln f - \lambda \cdot \phi.$$

(c) 对于拉格朗日函数 $L = f(x,y) + \lambda \cdot \phi(x,y)$，解驻点的时候有几种方法：

- 由 $L_x = 0, L_y = 0$ 联立消去 λ（需要分母不为零），并得到 x,y 的关系 $g(x,y) = 0$；联立 $g(x,y) = 0$ 与 $L_\lambda = 0$ 求得 (x^*, y^*) 代入 $f(x,y)$ 求得极值 M；
- 由 $L_x = 0, L_y = 0, L_\lambda = 0$ 联立求得 λ，代回 $L_x = 0, L_y = 0$，并求出 (x^*, y^*) 代入 $f(x,y)$ 求得极值 M；
  求 λ 的过程常利用方程组的行列式技巧（此时 x,y 为未知量，特点是 x,y 均为一次项，若 $(x,y) \neq 0$，则由 λ 构成的系数矩阵行列式为 0 从而求得 λ.）
- 由 $L_x = 0, L_y = 0$ 联立求得式 $f(x,y) = g(\lambda, x, y)$，联立 $L_\lambda = 0$ 将 $g(\lambda, x, y)$ 化为 $G(\lambda)$，得到 $f(x,y) = G(\lambda)$；由 $L_x = 0, L_y = 0$ 联立求得 λ，从而得到极值 $M = G(\lambda)$.

3. 比较：

   比较 D 内部驻点与边界上的最值点从而确定 D 上最值.

对于一些形如 $x^2+y^2+Ax+BY+C$ 或者有明确几何意义的函数（如圆、椭圆），可以考虑用其几何意义（如 D 上距离某点最大最小距离、切线斜率相同等）求最值. 点 (x_0, y_0) 到直线 $ax+by+c=0$ 距离公式

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

在求其极值常求 d^2 的极值.

例 3.5. 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值与最小值.

方法一：拉格朗日乘数法.

因为 $z_x = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, z_y = 2y + 16 = 0 \Rightarrow y = -8$，所以驻点为 $(-6, 8) \notin D$，因此最值在 D 边界上取到.

构造拉格朗日函数

$$L = f(x,y) - \lambda \cdot \phi(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 25)$$

因为约束条件 $x^2 + y^2 = 25$，代入 $f(x,y)$，所以拉格朗日函数化简为

$$L = 25 - 12x + 16y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 25)$$

由 $L_x = 0, L_y = 9, L_\lambda = 0$ 求得 $x = 3, y = -4$ 或 $x = -3, y = 4$，因为 $f(3,-4) = -75, f(-3,4) = 125$，所以 f 在 D 上的最小值为 -75，最大值为 125.

方法二：几何方法

易知 $f(x,y) = (x-6)^2 + (y+8)^2 - 100$，因此 D 上距离点 $(6,8)$ 最大的点就是 f 的极大值；距离点 $(6,8)$ 最小的点就是 f 的极小值，这两个点为过原点与 $(6,8)$ 的直线 $y = -\frac{4}{3}x$ 与圆 D 的就两个交点，求得 $x = 3, y = -4$ 或 $x = -3, y = 4$.

例 3.6. 已知三角形周长为 $2p$，求使它绕自己一边旋转时所构成旋转体体积最大的三角形.

设三边长 x, y, z，三角形绕 y 边旋转，y 边高为 h，则旋转体体积为 $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 y$，约束条件为 $x + y + z = 2p$，下面求 h 与 x, y, z 的关系.

由海伦公式可知

$$S_\Delta = \frac{yh}{2} = \sqrt{p \cdot (p-x) \cdot (p-y) \cdot (p-z)},$$

所以

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot p \cdot \frac{(p-x) \cdot (p-y) \cdot (p-z)}{y}$$

其中 $x + y + z = 2p$，因为 $y = \ln x$ 单调，所以 V 与 $\ln V$ 在同一点取得最值，因此构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L &= \ln V - \lambda \cdot \phi \\ &= \ln(p-x) + \ln(p-y) + \ln(p-z) - \ln y + \lambda(x+y+z-2p), \end{aligned}$$

所以 $L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0$ 求得 $x = z = \frac{3p}{4}, y = \frac{p}{2}, V_{\max} = \frac{\pi}{12}p^3$.

例 3.7. 设曲面 $S: (x-y)^2 - z^2 = 1$，求坐标原点到 S 的最短距离.

构造拉格朗日函数 $L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot ((x-y)^2 - z^2 - 1)$，则

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ L_y &= 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \\ L_z &= 2z - 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda &= (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

由 L_z 可知 $\lambda = 1$ 或 $z = 0$；若 $\lambda = 1$ 则 $x = y = 0$ 所以 z 不存在，因此 $z = 0$，由 $L_x = L_y = 0$ 可知 $x = -y$，因此 $(1/2, -1/2, 0)$ 或 $(-1/2, 1/2, 0)$，最短距离为 $d = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 3.8. 求 $xy = 4$ 与 $2x + y = 1$ 之间的最短距离.

易知 $xy=4$ 上任一点 (x,y) 距离直线 $2x+y=1$ 的距离为 $d=\frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}}$，构造拉格朗日函数：$L=\frac{(2x+y-1)^2}{5}-\lambda(xy-4)$，所以

$$
\begin{aligned}
L_x &= \frac{4(2x+y-1)}{5}-\lambda y=0\\
L_y &= \frac{2(2x+y-1)}{5}-\lambda x=0\\
L_\lambda &= xy-4=0
\end{aligned}
$$

由 $L_x=L_y=0$ 可知 $y=2x$，所以 $x=\pm\sqrt{2}, y=\pm 2\sqrt{2}$，所以

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\\
d_2 &= \frac{|-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-1|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

所以最小距离为 $d_1=\frac{4\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}$.

例 3.9. 求函数 $f(x,y)=(1+x)^2+(1+y)^2$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

拉格朗日函数：$L=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda\cdot(x^2+y^2+xy-3)$，则

$$
\begin{aligned}
L'_x &= 2(1+x)+\lambda\cdot(2x+y)=0\\
L'_y &= 2(1+y)+\lambda\cdot(2y+x)=0\\
L'_\lambda &= x^2+y^2+xy-3.
\end{aligned}
$$

联立 $L'_x=0, L'_y=0$ 消去 λ，有 $(x-y)(x+y-1)=0$，则 $x=y$ 或 $x+y=1$.

若 $x=y$，代入 $L'_\lambda=0$ 有 $(x,y)=(1,1)$ 或 $(-1,-1)$；若 $x+y=1$ 代入 $L'_\lambda=0$ 有 $(x,y)=(-1,2)$ 或 $(2,-1)$；比较有 $\max f(x,y)=f(2,-1)=f(-1,2)=9$.

例 3.10. 设中心在原点的椭圆 $x^2-4xy+5y^2=1$，求该椭圆的长半轴与短半轴.

拉格朗日函数 $L=x^2+y^2+\lambda\cdot(x^2-4xy+5y^2-1)$，所以

$$
\begin{aligned}
L'_x &= 2x+2\lambda x-4\lambda y=0\\
L'_y &= 2y-4\lambda x+10\lambda y=0\\
L'_\lambda &= x^2-4xy+5y^2-1=0.
\end{aligned}
$$

因为 $L'_x\times\frac{x}{2}+L'_y\times\frac{y}{2}=x^2+y^2+\lambda\times(x^2-4xy+5y^2), L'_\lambda=x^2-4xy+5y^2-1=0$，所以 $d^2=x^2+y^2=-\lambda$，即 $d=\sqrt{-\lambda}$. 因为 $(x,y)\neq(0,0)$，所以

$$
\begin{aligned}
L'_x &= (1+\lambda)x-2\lambda y=0\\
L'_y &= -2\lambda x+(1+5\lambda)y=0
\end{aligned}
$$

有非零解，即 $\begin{vmatrix} 1+\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1+5\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+1=0$，所以 $\lambda=-3\pm2\sqrt{2}$.

所以 $-\lambda=3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$，所以 $d_1=\sqrt{2}-1, d_2=\sqrt{2}+1$ 分别为短轴与长轴

例 3.11. 用条件极值的方法证明：对于任意常数 a,b,c 有

$$abc^3 \le \frac{27}{5^5} \cdot (a+b+c)^5.$$

方法一：拉格朗日乘数法

令 $\frac{1}{5} \cdot (a+b+c) = k$，则只需证明在 $a+b+c=5k$ 的条件下 $abc^3 \le 27k^5$ 构造拉格朗日函数：

$$L = \ln a + \ln b + 3\ln c - \lambda \cdot (a+b+c-5k),$$

所以

$$L_a = \frac{1}{a} - \lambda = 0$$
$$L_b = \frac{1}{b} - \lambda = 0$$
$$L_c = \frac{3}{c} - \lambda = 0$$
$$L_\lambda = a+b+c-5k = 0$$

解得 $\lambda = \frac{1}{k}, a=k, b=k, c=3k$ 由于可能存在的极值点唯一，所以所求最大值存在，且在 $a=k, b=k, c=3k$ 时取到，最大值为 $k \cdot k \cdot (3k)^3 = 27k^5$ 所以 $abc \le 27k^5 = \frac{27}{5^5} \cdot (a+b+c)^5$.

方法二：初等数学法

观察到不等式两边均为五次项，因此即证明在 $a+b+c = a+b+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3} = 5k$ 的条件下，$\frac{abc^3}{27}$ 的最大值小于等于 k^5. 因为

$$\frac{abc^3}{27} = a \cdot b \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3}$$

因为当 $a=b=\frac{c}{3}=k$ 时上式取得最大值，因此 $\frac{abc^3}{27} = \frac{27k^5}{27} = k^5$，证毕.

注 3.2. 若 $x+y+z=k$，则当 $x=y=z=\frac{k}{3}$ 时，xyz 取到最大值.

例 3.12. 已知 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, x,y>1$，求证 $xy \le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$.

令 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}=k$，则只需证明在 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}=k$ 的条件下 $xy \le k$ 即可，构造拉格朗日函数：

$$L = xy + \lambda \cdot (\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-k)$$

所以

$$L_x = y + \lambda \cdot x^{p-1} = 0$$
$$L_y = x + \lambda \cdot y^{q-1} = 0$$
$$L_\lambda = \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-k = 0,$$

所以 $xy + \lambda \cdot x^p = xy + \lambda \cdot y^q = 0$，即 $x^p = y^q$，所以 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-k = x^p \cdot (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) - k = x^p - k = 0$，即 $x = k^{\frac{1}{p}}, y = k^{\frac{1}{q}}$，所以 $xy = k^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = k$.

例 3.13. 某公司通过电视和网络两种方式做广告，销售收入为 R，电视广告费为 x_1，网络广告费为 x_2，且

$$R(x_1, x_2) = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2$$

1. 在广告费用不限的情况下，求最佳广告方案；

2. 在广告费用总额为 1.5 万元的情况下，求最佳广告方案.

1. 设利润为 W，则 $W = R - x_1 - x_2$，所以

$$\begin{aligned} W'_{x_1} &= 13 - 8x_2 - 4x_1 = 0 \\ W'_{x_2} &= 31 - 8x_1 - 20x_2 = 0 \end{aligned}$$

解的 $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{4}$. 因为

$$\begin{aligned} A = W''_{x_1x_1} &= -4 \\ B = W''_{x_1x_2} &= -8 \\ C = W''_{x_2x_2} &= -20 \end{aligned}$$

所以 $AC - B^2 = 80 - 64 = 16 > 0$，因为 $A = -4 < 0$，所以 W 取极大值，$x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{4}$ 为最佳方案.

拉格朗日函数：$L = W - \lambda(x_1 + x_2 - 1.5)$，则

$$\begin{aligned} L_1 &= 13 - 8x_2 - 4x_1 - \lambda = 0 \\ L_2 &= 31 - 8x_1 - 20x_2 - \lambda = 0 \\ L_\lambda &= x_1 + x_2 - 1.5 = 0 \end{aligned}$$

联立 $L_1 = 0, L_2 = 0$，消去 λ，有 $x_1 = 0, x_2 = 1.5$

4 计算二重积分

计算二重积分常利用被积函数与积分域的特殊性解题

1. 被积函数的特殊性是指：奇偶性、轮换形式不变性、适用极坐标等

2. 积分域的特殊性是指：对称性、平移对称性、轮换对称性、适用极坐标等

4.1 利用直角坐标计算二重积分

计算二重积分的基础是将二重积分化为累次积分，即二次定积分. 累次积分有两种次序，选择那种次序由积分区域与被积函数 $f(x, y)$ 来确定.

1. 适合先 y 后 x 的积分区域

   设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，并且积分区域 $\mathcal{D}$ 可由不等式组：

$$a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$$

   来表示，则二重积分可化为如下二次定积分：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. 适合先 x 后 y 的积分区域

   设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，并且积分区域 $\mathcal{D}$ 可由不等式组：

$$c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$$

   来表示，则二重积分可化为如下二次定积分：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3. 当积分区域 $\mathcal{D}$ 为矩形

   设函数 $f(x,y)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 上连续，积分区域 $\mathcal{D}$ 可又不等式

$$a \le x \le b,\ c \le y \le d,$$

   来表示，其中 $a,b,c,d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$；而 $f(x,y)$ 可以写为 $g(x)\cdot h(y)$ 的形式，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

   这一性质的证明是显然的，但是在应用中却有巨大作用.

4.2 二重积分换元法

4.2.1 A. 二重积分换元

极坐标变换、区间平移均是二重积分换元法的应用.

定理 4.1. *设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续，若变换*

$$T: x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 $\mathcal{D}$' 变为 xOy 平面上的 $\mathcal{D}$，且满足：

1. *$x(u,v), y(u,v)$ 在 $\mathcal{D}$' 上具有一阶连续偏导数；*
2. *在 $\mathcal{D}$' 上雅克比式*

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \ne 0;$$

3. *变换 $T: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 是一对一的.*

则有：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

4.2.2 B. 累次积分换元

累次积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} g(x,y)\mathrm{d}y$$

中，$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} g(x,y)\mathrm{d}y$ 是一个含元变限积分，对含元变限积分进行计算，一般需要将 x 换到积分外面，换元过程中视 x 为常数；

对于交叉边量的累次积分，如

$$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\int_{\psi(t)}^{\phi(x)} g(x,y)\mathrm{d}y$$

则需要通过交换次序的方法，使交叉变量归一，在利用洛必达法则求解.

例 4.1. 设 $f(x)$ 连续，证明

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t,$$

其中 $D=\{|x|\le\frac{A}{2},|y|\le\frac{A}{2}\}$.

因为 $\iint_D f(x-y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y)\mathrm{d}y$，令 $x-y=u$（视 x 为常数），所以

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y)\mathrm{d}y=\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(u)\mathrm{d}u$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x-y)\mathrm{d}\sigma&=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-A}^{0}\mathrm{d}u\int_{-\frac{A}{2}}^{u+\frac{A}{2}} f(u)\mathrm{d}u+\int_0^A\mathrm{d}u\int_{u-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

例 4.2. 设 $f(x,y)$ 是定义在 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上的连续函数，$f(0,0)=-1$，求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-x^3}}.$$

交换积分次序有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-x^3}} &= \lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^x\left[\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{-x^2f(\xi,x)}{3x^2} = -\frac{1}{3}f(0,0) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

4.3 利用坐标平移计算二重积分

设 $\mathcal{D}$ 为平面有界闭区域，$f(x,y)$ 在 $\mathcal{D}$ 上连续. 将 $\mathcal{D}$ 向左平移 a 个单位需作如下变换：

$$u = x - a;$$

将 $\mathcal{D}$ 向下平移 b 个单位需作如下变换：

$$v = y - b.$$

即换元 $x = u + a, y = v + b$，由（三）可知，雅克比式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此有：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}'} f(u+a,v+b)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

一般当 $g(u,v) = f(u+a,v+b)$ 为奇偶函数或 $\mathcal{D}'$ 对称时，采用这种方法.

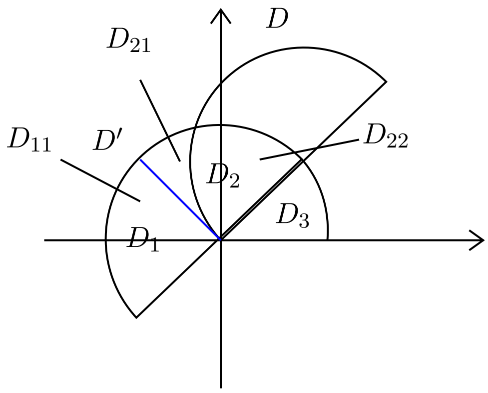
例 4.3. 计算二重积分 $\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2 \le 2, y \ge x\}$.

对 D 向下平移一个单位，向左平移一个单位，使圆心落在原点处，则

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} (x+1)-(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint_{D_1} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= 2\iint_{D_{11}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{D_{21}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

反轮换有

$$\begin{aligned}
I &= 2\iint_{D_{11}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{D_{21}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -2\iint_{D_{21}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{D_{21}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -4\iint_{D_{21}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\iint_{D_{22}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -4\iint_{D_3} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2\mathrm{d}r \\
&= -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$



4.4 利用极坐标计算二重积分

4.4.1 A. 先 r 后 θ

多于二重积分 $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 $x = r\cdot\cos\theta, y = r\cdot\sin\theta$，则雅克比式

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\theta + r\cdot\sin^2\theta = r \neq 0$$

因此有

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}'} f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

将二重积分化为累次积分计算时坐标系的选择不仅要看积分区域 $\mathcal{D}$ 的形状，而且要看被积函数 $f(x,y)$ 的形式.

当被积函数形如 $f(\sqrt{x^2+y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y})$ 时；当积分区域为圆域、圆环域，或扇形等或中心在坐标轴上且边界过原点的圆域时适合以极坐标进行计算. <u>当被积函数与积分域不同时满足适用于极坐标的情形时，以被积函数为主.</u>

需要注意的是极坐标计算中极径与极角的选择必须以对函数自变量的换元相匹配，且扫过的顺序应为逆时针，如对于平面区域 $D = \{(x,y)|x^2+(y+1)^2 \leq 1\}$，二重积分

$$\iint_D x^2\mathrm{d}\sigma,$$

若令 $x=\rho\cos\theta$，则其极坐标形式只能为

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin x}\rho^3\cos^2 x\mathrm{d}\rho,$$

而不能是

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\cos x}\rho^3\cos^2 x\mathrm{d}\rho,$$

因为这里的 θ 与换元公式 $x=\rho\cos\theta$ 中的 θ 不一致：

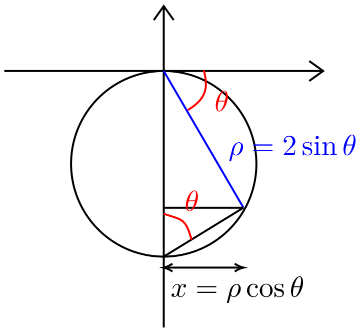


图 1: 第一种极角选择对应的换元

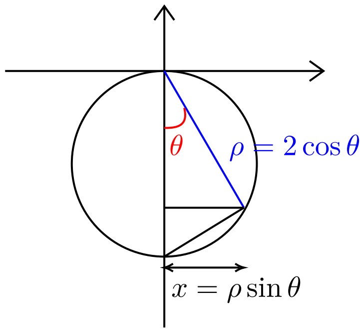


图 2: 第二种极角选择对应的换元

4.4.2 B. 先 θ 后 r

极坐标的交换次序有两种方法：

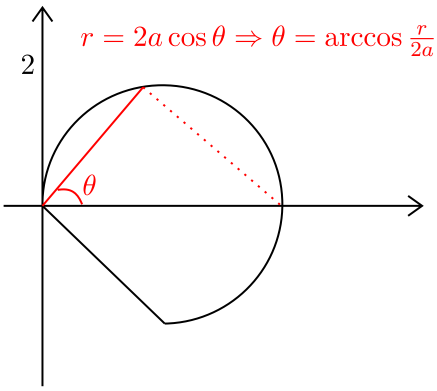
1. 画图定角

   固定 r 不变从极点扫过积分域，确定各极径范围内，扫入扫出点的极角关于极径的函数关系

2. 将极坐标方程 $r=r(\theta)$ 视为为 $r-\theta$ 的直角坐标方程

例 4.4. 交换累次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

方法一：画图定角



由图可知，当 $0 \le r \le \sqrt{2}a$ 时，圆弧从射线 $\theta = \frac{-\pi}{4}$ 扫入积分域，从上半圆弧 $r = 2a\cos\theta(\theta = \arccos\frac{r}{2a})$ 扫出积分域；

当 $\sqrt{2}a \le r \le 2a$ 时，圆弧从下半圆弧 $r = 2a\cos\theta(\theta = -\arccos\frac{r}{2a})$ 扫入积分域，从上半圆弧 $r = 2a\cos\theta(\theta = \arccos\frac{r}{2a})$ 扫出积分域；

因此

$$I = \int_0^{\sqrt{2a}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta + \int_0^{\sqrt{2a}} \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta.$$

方法二：直角坐标

4.4.3 C. 非圆域定径法

在被积函数适用于极坐标而积分域不适用于极坐标的情形，有以下技术：**非圆域定径法**

1. 法一：方程法

   找到非圆域边界的直角坐标方程 $y = f(x)$，代入极坐标即有

   $$r \cdot \sin\theta = f(r \cdot \cos x);$$

2. 法二：几何法

   通过正弦公式等几何方法确定径的极坐标方程.

例 4.5. 设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x| + |y| \le 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 2\}$.

由于被积函数形式，采用极坐标方法计算 $D' = \{(x,y) \mid 1 < x + y \le 2, x, y > 0\}$ 内的积分，下面需要确定的是极径的极坐标方程：

方法一：方程法

易知

$$1 < x + y = r \cdot (\cos\theta + \sin\theta) \le 2$$

所以

$$\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} < r \le \frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

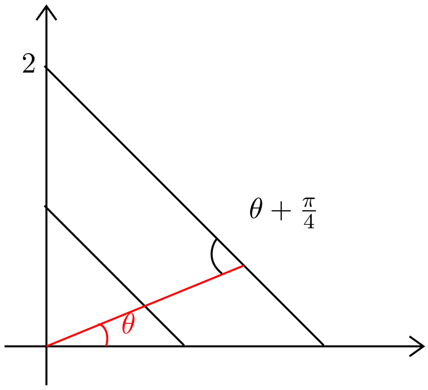
方法二：几何法

由正弦公式可知

$$\frac{r}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})},$$

所以 $r = \frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}$，因此

$$\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} < r \leq \frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}.$$



4.5 利用积分区域的对称性计算二重积分

4.5.1 A. 被积函数的奇偶性

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathcal{D}$ 上连续

1. 若 $\mathcal{D}$ 关于 x 轴对称，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 为对 } y \text{ 的奇函数} \\ 2\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y) \text{ 为对 } y \text{ 的偶函数.} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap \{y \geq 0\}$.

2. 若 $\mathcal{D}$ 关于 y 轴对称，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 为对 } x \text{ 的奇函数} \\ 2\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y) \text{ 为对 } x \text{ 的偶函数.} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap \{x \geq 0\}$.

3. 若 $\mathcal{D}$ 关于原点对称，即若 $(x,y) \in \mathcal{D} \Rightarrow (-x,-y) \in \mathcal{D}$，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(-x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{若 } f(-x,-y) = f(x,y). \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{D}$ 的右半平面或上半平面.

注 4.1. 积分区域对称性与被积函数奇偶性通常伴随坐标平移法、区域拆解法等一起使用.

4.5.2 B. 形心法

1. 如果积分区域关于 $x=a$ 轴对称，则

$$\iint_D x\mathrm{d}x = S_D \cdot a;$$

2. 如果积分区域关于 $y=b$ 轴对称，则

$$\iint_D y\mathrm{d}y = S_D \cdot b.$$

例 4.6. 计算二重积分 $\iint_D y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

方法一：形心法

易知 D 关于 $y=1$ 对称，且 $S_D = 2\times 2 - \frac{\pi}{2}$，所以 $\iint_D y\mathrm{d}\sigma = 4-\frac{\pi}{2}$.

方法二：坐标平移法 + 奇偶性

易知将 D 向下平移一个单位得到的区域 D' 关于 x 轴对称，因此

$$\begin{aligned} I = \iint_D y\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D'} (y+1)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} y\mathrm{d}\sigma + \iint_{D'} \mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_{D'} \mathrm{d}\sigma = S_{D'} = S_D = 4-\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

方法三：区域拆解法

将特殊区域 D 拆分为两个标准区域的组合，令 $D_1 = \{(x,y)|-2<x<0, 0<y<2\}, D_2 = \{(x,y)|x^2+(y-1)^2<1, -2<x<0\}$. 则 $D = D_1 - D_2$. 因此

$$\begin{aligned} I &= \iint_D y\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} y\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} y\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y - \int_{\frac{pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4-\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

方法四：直角坐标系化为累次积分

繁琐，不宜用.

4.6　轮换法计算二重积分

似于一元定积分的值与积分变量用什么记号无关，二重积分的值与积分变量用什么记号也无关，因此在任何情况下均有

$$I=\iint_{\mathcal{D}_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathcal{D}_{yx}} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

以及

$$I=\frac{1}{2}\cdot\left[\iint_{\mathcal{D}_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathcal{D}_{yx}} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

这一性质称为**轮换不变性**，并有以下结论：

1. 积分区间的轮换对称性：若积分区域 $\mathcal{D}$ 关于 $y=x$ 对称，即若 $(x,y)\in\mathcal{D}\Rightarrow(y,x)\in\mathcal{D}$，则

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathcal{D}} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

事实上，若 $f(x,y)+f(y,x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上易于积分时，我们有：

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}}\left[f(x,y)+f(y,x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 被积函数的轮换对称性：若 $f(x,y)=f(y,x)$，当 $\mathcal{D}_{xy}$ 与 $\mathcal{D}_{xy}$ 最多只有边界重合时，有

$$I=\frac{1}{2}\cdot\iint_{\mathcal{D}_{xy}\cup\mathcal{D}_{yx}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当积分区间关于 $y=x$ 对称（即具有轮换对称性），且被积函数的轮换映射有良好性质（某种意义上的对称），则对二重积分进行轮换是十分重要的技巧.

当积分区间 D 关于 $y=-x$ 对称时，可以进行<u>反轮换</u>，即令 $x=-y,y=-x$，易证其雅克比行列式的绝对值为 1，则若 D 关于 $y=-x$ 对称时有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(-y,-x)\mathrm{d}\sigma.$$

注 4.2. 与轮换法有相似作用的是

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x.$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin x,\cos x)+f(\cos x,\sin x)]\mathrm{d}x.$$

例 4.7. 设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$，$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma$.

方法一：轮换法

因为积分域关于 $y=x$ 对称，所以

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{2}\cdot\left[\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma\right]\\ &=\frac{1}{2}\cdot\iint_D\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{y^2+x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{f}\sigma\\ &=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{R^4\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\end{aligned}$$

方法二：极坐标

繁琐，不宜用.

例 4.8. 设积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$

$A.ab\pi$

$B.\frac{ab}{2}\pi$

$C.(a+b)\pi$

$D.\frac{a+b}{2}\pi.$

方法一：轮换法

因为积分区域关于 $y=x$ 对称，且被积函数有轮换性，则

$$\begin{aligned} I&=\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\cdot\left[\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma+\iint_D\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma\right]\\ &=\frac{a+b}{2}\cdot\iint\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot S_D=\frac{a+b}{2}\pi.\end{aligned}$$

方法二：排除法——具体函数法

令 $f(x)\equiv 1$，代入有 $I=\frac{a+b}{2}\pi$.

方法三：排除法——特殊参数法

令 $a=b=1$ 代入，有 B,C 错；令 $a=b=2$ 代入有 A 错，故选 D.

注 4.3. 在选择题中，**排除法是至关重要的解法*!!!!!***，其中具体有两种方法：

1. 具体函数法，适用于题干中为抽象函数的题目

2. 特殊参数法，适用于题干中有参数，选项中有参数的题目.

例 4.9. 设 $I=\iint_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^3)\mathrm{d}\sigma,J=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^4-y^4)\mathrm{d}\sigma,K=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^3-y^2)\mathrm{d}\sigma$，则

$A.I<J<K;$

$B.I<K<J;$

$C.J<I<K;$

$D.K < J < I.$

令 $D_1=\{|x|+|y|\le 1\}, D_2=\{x^2+y^2\le 1\}$，易知 D_1, D_2 均关于 x, y 轴对称，则

$$I=\iint_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^3)\mathrm{d}\sigma=\iint_{|x|+|y|\le 1}x^2\mathrm{d}\sigma>0;$$
$$K=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^3-y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 1}-y^2\mathrm{d}\sigma<0.$$

因为 D_2 关于 $y=x$ 对称，则有

$$J=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^4-y^4)\mathrm{d}\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 1}(y^4-x^4)\mathrm{d}\sigma=-J$$

所以 $J=0$，所以 $K<J<I.$

例 4.10. 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)\mathrm{d}\sigma$，则
$A.I_1>0;$
$B.I_2>0;$
$C.I_3>0;$
$D.I_4>0.$

考虑 I_1, I_3，因为 D_1, D_3 关于 $y=x$ 对称，则

$$I_1=\iint_{D_1}(y-x)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(x-y)\mathrm{d}\sigma=-I_1,$$

所以 $I_1=0$，同理 $I_3=0$；因为 $(x,y)\in D_2$ 有 $y>x$ 则 $I_2>0$，$(x,y)\in D_4$ 有 $y<x$ 则 $I_4<0$，所以 B 正确.

例 4.11. 计算积分

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}y.$$

易知积分区间 D 关于 $y=x$ 对称，由轮换性可知：

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)+e^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D e^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令 $x+y=u, y=v$，所以 $x=u-v, y=v$，则 $J=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$，所以

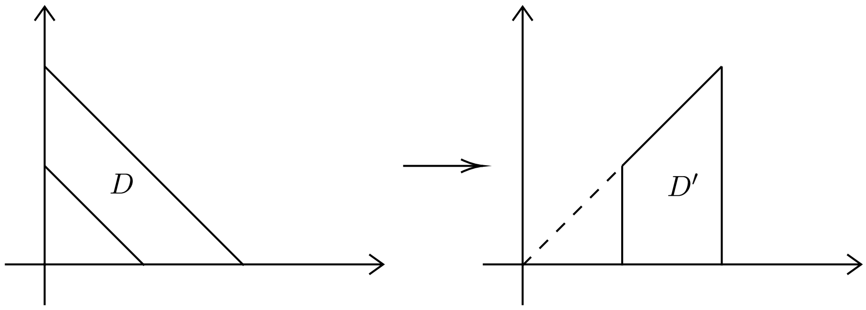
$$I=\iint_D e^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}e^{u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$\begin{cases} y = 2 - x & \Longrightarrow u = 2 \\ y = 1 - x & \Longrightarrow u = 1 \\ x = 0 & \Longrightarrow u = v \\ y = 0 & \Longrightarrow v = 0 \end{cases}$$

所以

$$I = \iint_{D'} e^{u^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_1^2 e^{u^2} \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v = \frac{e^4 - e}{2}$$



4.7 含有绝对值的二重积分

一般思想:

1. 分区域讨论，去掉绝对值
2. 分别计算，再组合构造原积分

这一一般思想具有普遍性，即处理含有绝对值的定积分也遵循这一思想.

例 4.12. 计算 $\iint_D |x^2 + y^2 - 2y| \mathrm{d}\sigma$，其中 D 有 $x^2 + y^2 \le 4$ 所确定.

易知在 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 < 1\}$ 内 $x^2 + y^2 - 2y < 0$，在 $D \backslash D_1$ 内 $x^2 + y^2 - 2y > 0$，因此

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 - 2y) \mathrm{d}\sigma + 2 \iint_{D_1} (2y - x^2 - y^2) \mathrm{d}\sigma.$$

4.8 参数方程二重积分

积分区域 D 由

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定，试求积分 $\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma$.

1. 代点大致描绘积分域形状

2. 直角坐标化累次积分为定积分

3. 代入参数方程.

例 4.13. 积分区域 D 由

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴所围成，计算二重积分 $\iint_D (x+2y)\mathrm{d}\sigma$.

通过代点大致看出积分域的形状为 $\{x|0 < x < 2pi\}$ 与 x 轴上方一弧线所围成的图形，记其直角坐标为 $y = y(x)$，则

$$\begin{aligned} \iint_D (x+2y)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{y(x)} (x+2y)\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \cdot [xy + y^2]_0^{y(x)} \\ &= \int_0^{2\pi} [xy(x) + y^2(x)]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} [(t-\sin t)\cdot(1-\cos t) + (1-\cos t)^2]\mathrm{d}(t - \sin t) \end{aligned}$$