微积分 I: 极限

Calculus I: Limit

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

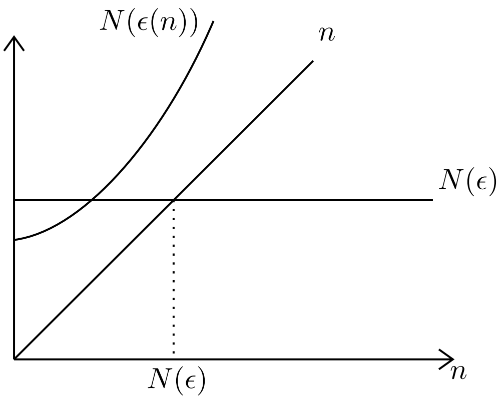
Edition 4

1 数列的极限

1.1 数列极限的概念

定义 1.1 (数列的极限)**.** 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t.} \forall n > N$，有 $|x_n - a| < \epsilon$，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

注 1.1. 极限定义中的 ϵ 是任意给定 的，即 ϵ 不能是 n 的函数. 因为 N 是 ϵ 的函数，若 ϵ 是 n 的函数，则可能不存在 n，使得 $n > N(\epsilon(n))$ 成立.



例 1.1. 判断：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则当 n 充分大时，有 $a_n > a - \frac{1}{n}$.

错误，如令 $a_n = a - \frac{2}{n}$.

注 1.2. 数列的极限与其前有限项无关，因此若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$，其中 k 为任意给定值.

1.2 数列极限的性质

数列的极限有以下性质：

性质 1.1 (唯一性)**.** 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = b$，则 $a = b$.

证明. 利用反证法，若 $a \neq b$，不妨设 $a > b$，令 $\lambda = a - b, \epsilon = \frac{\lambda}{2}$ ，因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ ，则 $\exists N_1, N_2 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_1$ 有 $|x_n - a| < \epsilon, \forall n > N_2$ 有 $|x_n - b| < \epsilon$ ，令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则 $\forall n > N$ 有 $|x_n - a| < \frac{\lambda}{2} = \frac{a-b}{2}, |x_n - b| < \frac{\lambda}{2} = \frac{a-b}{2}$ ，即：

$$x_n > \frac{a+b}{2}, x_n < \frac{a+b}{2}$$

同时成立，矛盾，故 $a = b$. □

性质 1.2 (有界性)**.** 若数列收敛，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ，则 $\exists M > 0, \text{s.t.} |x_n| \leq M$.

证明. 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ，则 $\exists N > 0, \text{s.t.} \forall n > N$ ，有 $|x_n - a| < 1$ ，故 $|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < |a| + 1$ ，令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_N|, |a| + 1\}$ ，则有 $|x_n| \leq M$. □

性质 1.3 (不等式性)**.** 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, a > b$ ，则 $\exists N > 0, \text{s.t.} \forall n > N$ 有 $x_n > y_n$.

证明. 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, a > b$ ，令 $\epsilon = \frac{a-b}{2}$ ，则 $\exists N_1, N_2 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_1$ 有 $|x_n - a| < \epsilon, \forall n > N_2$ 有 $|y_n - b| < \epsilon$ ，令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则 $\forall n > N$ 有 $|x_n - a| < \frac{a-b}{2}, |y_n - b| < \frac{a-b}{2}$ ，即 $x_n > \frac{a+b}{2}, y_n < \frac{a+b}{2}$ ，即 $x_n > y_n$. □

推论 1.1 (保号性). 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ ，则 $\exists N > 0, \text{s.t.} \forall n > N$ 有 $x_n > 0$.

证明. 令 $y_n \equiv 0$ ，由性质1.3可证. □

推论 1.2. 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \exists N > 0, \text{s.t.} x_n \geq y_n$ ，则 $a \geq b$.

证明. 利用反证法. 设 $a < b$ ，则由性质1.3知：$\exists N_1 > 0, \forall n > N_1 \text{s.t.} x_n < y_n$ ，令 $N_2 = \max\{N, N_1\}$ ，则 $\forall n > N_2, \text{s.t.} x_n < y_n, x_n \geq y_n$ 同时成立，矛盾，则 $a \geq b$. □

注 1.3. 由于数列极限与其前有限项无关，因此只有当 n 充分大时，数列极限的不等式性及其推论才成立.

1.3 数列极限的判定

数列极限存在性有如下判定方法：

定理 1.1 (夹逼准则). 若 $\exists N > 0, \forall n > N, \text{s.t.} z_n \leq x_n \leq y_n$ ，且 $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ ，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

证明. 因为 $\exists N > 0, \forall n > N, \text{s.t.} z_n \leq x_n \leq y_n$ ，所以 $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = a, a = \lim_{n\to\infty} z_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n$ ，即 $a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq a$ ，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. □

定义 1.2 (上/下界). 若对所考察的集合 $\{x\}, \exists M > 0, \forall x \in \{x\} \text{s.t.} x \leq M$ ，则称 M 为集合 $\{x\}$ 的上界，下界同理.

定义 1.3 (上/下确界). 集合 $\{x\}$ 最小的上界成为上确界，记为 $\sup x$ ；最大的下界成为下确界，记为 $\inf x$.

引理 1.1. 若集合 $\chi = \{x\}$ 上（下）有界，则必有上（下）确界.

证明. 考察两种情况：

1. 若集合 χ 中的元素存在最大数 $\mathbf{x}$ ，则一方面满足 $\forall x \in \chi, \text{s.t.} x \leq \mathbf{x}$ ，即 $\mathbf{x}$ 属于集合 χ 的上界集；另一方面，由于 $\mathbf{x} \in \chi$ ，则对于 χ 的任意上界 A，有 $\mathbf{x} \leq A$ ，即 $\mathbf{x}$ 为集合 χ 的最小上界，即 $\mathbf{x} = \sup\{\chi\}$.
2. 若集合 χ 中的不存在最大数。（待完善）

□

注意. 集合 $\chi = \{x\}$ 有上（下）确界 M 有以下两个特质.

1. $\forall x \in \chi, \text{s.t.} x \leq M$.

2. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{s.t.} x_N > M - \epsilon$.（若 $\forall N, \text{s.t.} x_N \leq M - \epsilon$，则 $M - \epsilon$ 为 χ 上确界，矛盾.）

定理 1.2 (单调有界数列必收敛)**.** 对于一单调递增的数列 $\{x_n\}$，若有上界 $A, \text{s.t.} x_n \leq A$ ，则 $\{x_n\}$ 收敛；对于一单调递减的数列 $\{x_n\}$，若有下界 $a, \text{s.t.} x_n \geq a$ ，则 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. 由于 $\{x\}$ 有上界，则由引理1.1，其有上确界 M ，由上确界的两个特质，可知：$x_n \leq M$ ，且 $\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{s.t.} x_N > M - \epsilon$ ，则对于 $\forall n > N$ ，由 $x_n > x_N$ ，即：

$$M - \epsilon < x_N < x_n \leq M$$

，即 $\forall n > N, \text{s.t.} |x_n - M| < \epsilon$ ，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = M$. □

注 1.4. 数列极限的常用判断方法就是上面两者：夹逼准则、单调有界准则. 对于 n 项求和的数列，常用夹逼准则；对于递推关系的数列（$x_{n+1} = f(x_n)$），常用单调有界准则.

定理 1.3 (数列极限存在的充要条件)**.** 若 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$.

证明. 充分性: 因为 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2 > 0, \forall n > N_1, \text{s.t.} |x_{2n} - a| < \epsilon, \forall n > N_2, \text{s.t.} |x_{2n-1} - a| < \epsilon$ ，令 $N = \max\{2N_1 + 2, 2N_2 + 1\}$ ，则 $\forall n > N, \text{s.t.} |x_n - a| < \epsilon$ ，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

必要性：因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ，所以 $\forall \epsilon > 0, \exists N^* > 0, \forall n > N^*, \text{s.t.} |x_n - a| < \epsilon$ ，令 $N = \frac{N^*+2}{2}$ ，则 $\forall n > N, \text{s.t.} |x_{2n} - a| < \epsilon, |x_{2n-1} - a| < \epsilon$ ，即：

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a, \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$$

□

注意.

1. $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2 > 0, \forall n > N_1, \text{s.t.} |x_{2n} - a| < \epsilon, \forall n > N_2, \text{s.t.} |x_{2n-1} - a| < \epsilon$. 即 $\forall \epsilon > 0$, 当 $n = N_1 + 1, N_1 + 2, \ldots, \text{s.t.} |x_{2n} - a| < \epsilon$. 即 $|x_{2N_1+2}|, |x_{2N_1+4}|, |x_{2N_1+6}|, \cdots < \epsilon$. 又因为当 $n = N_2 + 1, N_2 + 2, \ldots, \text{s.t.} |x_{2n-1} - a| < \epsilon$. 即 $|x_{2N_2+1}|, |x_{2N_2+3}|, |x_{2N_2+5}|, \cdots < \epsilon$. 则 $\forall \epsilon > 0$, 令 $N = \max\{2N_1 + 2, 2N_2 + 1\}$ ，有 $\forall n > N, \text{s.t.} |x_n - a| < \epsilon$.

2. $\forall \epsilon > 0, \exists N^* > 0, \forall n > N^*, \text{s.t.} |x_n - a| < \epsilon$. 即 $\forall \epsilon > 0$, 当 $n = N^* + 1, N^* + 2, \ldots, \text{s.t.} |x_n - a| < \epsilon$. 则 $\forall \epsilon > 0$, 令 $2n > 2n - 1 > N^* + 1$, 故 $n > \frac{N^*+2}{2}$, 有即 $\forall \epsilon > 0, \text{s.t.} |x_{2n} - a| < \epsilon, |x_{2n-1} - a| < \epsilon$.

2 函数的极限

2.1 函数极限的概念

定义 2.1 (函数的极限)**.** 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{s.t.} \forall x > X$ ，有 $|f(x) - a| < \epsilon$ ，记为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

定义 2.2 (函数的极限)**.** 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.} \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ ，有 $|f(x) - a| < \epsilon$ ，记为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

注 2.1. 注意去心邻域为开集，事实上极限的三个定义自变量都是在开集内。

注 2.2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x)$ 在点 x_0 的值没有关系。**但是**，$f(x)$ 在点 x_0 的极限存在必须要求 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内处处有定义，否则极限不存在.

例 2.1. 极限 $I = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sin\frac{1}{x}}$.

易知 $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 是震荡趋于零，即函数 $\frac{\sin\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sin\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 的任意去心邻域内都存在无定义点，因此极限不存在.

2.2 函数极限的性质

函数极限有以下性质:

性质 2.1 (唯一性)**.** 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$，且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$，则 $a=b$.

证明. 利用反证法，若 $a\neq b$，不妨设 $a>b$，令 $\lambda = a-b, \epsilon = \frac{\lambda}{2}$ ，因为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ，且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ ，则 $\exists \delta_1,\delta_2 > 0, \text{s.t.} \forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 有 $|f(x)-a|<\epsilon, \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 有 $|f(x)-b|<\epsilon$ ，令 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ ，则 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)-a| < \frac{\lambda}{2} = \frac{a-b}{2}, |f(x)-b| < \frac{\lambda}{2} = \frac{a-b}{2}$ ，即:

$$f(x) > \frac{a+b}{2}, f(x) < \frac{a+b}{2}$$

同时成立，矛盾，故 $a=b$. □

性质 2.2 (局部有界性)**.** 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ，则 $\exists \delta > 0, M > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} |f(x)| < M$.

证明. 因为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ，所以对于 $\epsilon = 1, \exists\delta > 0, \text{s.t.} \forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ ，有 $|f(x)-a| < \epsilon = 1$ ，即 $|f(x)| = |f(x)-a+a| \leq |f(x)-a| + |a| < 1+|a|$ ，令 $M = 1+|a|$ ，则 $|f(x)| < M$. □

性质 2.3 (不等式性)**.** 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ ，且 $a>b$ ，则 $\exists\delta>0, M>0, \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} f(x) > g(x)$.

证明. 对于 $\epsilon = \frac{a-b}{2}, \exists\delta > 0, M > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} |f(x)-a| < \frac{a-b}{2}, |g(x)-b| < \frac{a-b}{2}$ ，即

$$f(x) > \frac{a+b}{2}, g(x) < \frac{a+b}{2}$$

，即 $f(x) > g(x)$. □

推论 2.1 (保号性)**.** 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ ，则 $\exists\delta>0, M>0, \forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} f(x) > 0$.

证明. 令 $g(x)\equiv 0$ ，由性质2.3可证. □

推论 2.2. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ ，且 $\exists\delta>0, M>0, \forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} f(x)\geq g(x)$ ，则 $a\geq b$.

证明. 利用反证法. 若 $a<b$ ，且 $\exists\delta>0, M>0, \forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} f(x)\geq g(x)$ ，则由性质2.3可知，$\exists\delta_1 > 0, M>0, \forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1), \text{s.t.} f(x) < g(x)$ ，令 $\delta_2 = \min\{\delta,\delta_1\}$ ，则 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2), \text{s.t.} f(x)\geq g(x), f(x) < g(x)$ 同时成立，矛盾. □

2.3 函数极限的判定

函数极限存在性的判断有如下方法：

定理 2.1 (夹逼准则)**.** 若 $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ，且 $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = a$ ，则 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

证明. 因为 $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ，由推论2.2可知：

$$a = \lim_{x \to x_0} h(x) \leq \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) = a$$

即：$a \leq \lim_{x \to x_0} f(x) \leq a$ ，即 $\leq \lim_{x \to x_0} f(x) = a$. □

定理 2.2 (函数极限存在的充要条件)**.** $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$

证明. 充分性：因为 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$ ，所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta 2), \text{s.t.} |f(x) - a| < \epsilon$ ，令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ，则 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x) - a| < \epsilon$ ，即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

必要性：因为 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ，所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x) - a| < \epsilon$ ，所以 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \text{s.t.} |f(x) - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \text{s.t.} |f(x) - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$. □

例 2.2. 设 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ ，则 $\lim_{x \to 0} f(x)$ 为：

$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0; \lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \infty$ ，因为 $\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} \neq \lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ ，所以极限不存在.

注 2.3. 有三种情况极易出题，必须讨论左右极限：

1. 分段函数：分段函数或带绝对值的函数，在其分界点处必须讨论左右极限；
2. 指数型极限：含有 $a^{\frac{1}{x}}$ 的极限必须要对 $x \to 0^+$ 和 $x \to 0^-$ 分别求极限. 含有 a^x 的极限要对 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 分别求极限.
3. 反三角函数：含有 $\arctan\frac{1}{x}, \text{arccot}\frac{1}{x}$ 的极限必须要对 $x \to 0^+$ 和 $x \to 0^-$ 分别求极限. 含有 $\arctan x, \text{arccot} x$ 的极限要对 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 分别求极限.

3 无穷小与无穷大

3.1 无穷小（大）的概念

定义 3.1 (无穷小)**.** 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ ，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 的无穷小.

注意：无穷小是函数的概念，用 $\epsilon - \delta$ 语言表示为：$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x)| < \epsilon$.

定义 3.2 (无穷大)**.** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 某一去心邻域内有定义，对于 $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x)| > M$ ，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 的无穷大.

定义 3.3 (无界变量). 对于任意 $M > 0$，存在 $N, \text{s.t.} |x_N| > M$，则称 $\{x_n\}$ 为无界变量.

注 3.1. 无穷大量一定是无界变量，无界变量不一定时无穷大量. 无穷大量的特点是当 n 充分大时，任意n 有 x_n 满足条件；无界变量的特点是仅存在N，使 x_N 满足条件. 无界变量的典型是

$$x_n = \begin{cases} n, & n\text{为偶数;} \\ 0, & n\text{为奇数.} \end{cases}$$

3.2 无穷小（大）的性质

无穷小（大）有如下性质：

定理 3.1 (极限与无穷小的关系). 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$ 中，$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \exists \alpha = o, \text{s.t.} f(x) = a + \alpha$.

证明. 充分性：因为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ，所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x) - a| = |f(x) - a - 0| < \epsilon$ ，即 $\lim_{x\to x_0}(f(x) - a) = 0$ ，即 $x \to x_0$ 时 $f(x) - a$ 为无穷小，令 $\alpha = f(x) - a$ ，则 $f(x) = a + \alpha$.

必要性：因为 $f(x) = a + \alpha$ ，即 $f(x) - a = \alpha$ ，又因为 $x \to x_0$ 时 α 为无穷小，即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |\alpha| < \epsilon$ ，则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x) - a| = |\alpha| < \epsilon$ ，即 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. □

注 3.2. 极限的 $\epsilon - \delta$ 定义在证明中起到重要作用：若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x) - a| < \epsilon$，则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$；若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |\alpha(x)| < \epsilon$，则 $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

注 3.3. 无穷小的这一性质在计算极限时十分有用，对于 $\lim f(x) = a \neq 0$ 的极限，我们常可以将其转化为 $f(x) = a + o$，然后在利用等价阶运算求极限.

如极限 $I = 1 - \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt[3]{1+x^3} \cdot \sqrt[4]{1+x^4}$，因为 $\sqrt{1+x^2} \sim 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2$；$\sqrt[3]{1+x^3} \sim 1 + \frac{1}{3} \cdot x^3$；$\sqrt[4]{1+x^4} \sim 1 + \frac{1}{4} \cdot x^4$；因此 $\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt[3]{1+x^3} \cdot \sqrt[4]{1+x^4} \sim 1 + \frac{1}{24} \cdot x^{24} + o^{24}$，从而 $I \sim -\frac{1}{24} \cdot x^{24}$，然后再利用等价阶计算。

极限 $I = \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ 也可如此计算。

定理 3.2 (无穷小的倒数为无穷大). 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$ 中，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大；若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

证明. 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$ 中,若 $f(x)$ 为无穷小,则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} 0 < |f(x)| < \epsilon$ ，令 $M = \frac{1}{\epsilon}$ ，则 $|\frac{1}{f(x)}| > M$ ，由定义知：$x \to x_0$ 中 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大. □

注意. 在 $x \to x_0$ 的过程中，要求 $f(x) \neq 0$，如：函数 $g(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$，虽然 $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$，但是在 $x \to x_0$ 的过程中，$\frac{1}{g(x)}$ 不是无穷大，因为对于 $\forall \delta > 0, \exists x \in \mathring{U}(0, \delta), \text{s.t.} \frac{1}{g(x)}$ 无定义，也就不满足无穷大的 $\epsilon - \delta$ 定义.

3.3 无穷小的阶

首先明确几个概念:

定义 3.4. 若 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同一自变量变化过程的的无穷小，且:

- $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ ，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;
- $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ ，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的低阶无穷小;
- $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$ ，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的同阶无穷小;
- $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ ，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;
- $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq 0$ ，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

对于等价无穷小有如下几个性质:

定理 3.3. $\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$.

证明. 充分性: 因为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ ，即 $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ ，即 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1|=|\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}|<\epsilon$ ，即 $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0$ ，即在 $x\to x_0$ 中，$\alpha(x)-\beta(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，即 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$ ，即 $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$.

必要性: 因为 $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$ ，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$ ，即:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

□

定理 3.4 (等价无穷小替换). 若 $\alpha(x)\sim\alpha^*(x),\beta(x)\sim\beta^*(x)$ ，且 $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$ 存在，则:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$$

证明.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\alpha^*(x)}{\alpha^*(x)}\cdot\frac{\beta^*(x)}{\beta^*(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta^*(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$$

□

推论 3.1 (等价无穷小传递性). 若 $\alpha(x)\sim\beta(x),\beta(x)\sim\gamma(x)\Rightarrow\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

证明. 由定理3.4可知:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta(x)}=1\Rightarrow\alpha(x)\sim\gamma(x)$$

□

例 3.1 (一些等价无穷小). $x \to 0$ 时:

$$\sin x \sim x \qquad \tan x \sim x \qquad \arcsin x \sim x \qquad \arctan x \sim x \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x \qquad \mathrm{e}^x - 1 \sim x \qquad a^x - 1 \sim x\ln(a) \qquad (1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln(a)}$$

性质 3.1. 无穷大的阶一般有以下结论：对于 $\alpha, \beta > 0, a > 1$,

当 $x \to \infty$ 时:

$$\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x,$$

当 $n \to \infty$ 时:

$$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

由此性质可以得到一个常用极限:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{x}}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

4 极限的运算

4.1 极限运算法则

定理 4.1. 两个无穷小之和仍为无穷小.

证明. 设 $x \to x_0$ 的过程中 $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小，则 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = \lim_{x\to x_0}\beta(x) = 0$ ，即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{2}, |\beta(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ ，即 $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \epsilon$ ，所以 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) + \beta(x) = 0$ ，即：$\alpha(x) + \beta(x)$ 为无穷小. □

推论 4.1. 有限个无穷小之和为无穷小.

证明. 利用数学归纳法. 首先，由定理4.1可知，两个无穷小之和为无穷小，设 k 个无穷小之和为无穷小，则由定理4.1知：$k+1$ 个无穷小之和为无穷小，则有限个无穷小之和为无穷小. □

定理 4.2. 有界函数与无穷小乘积为无穷小.

证明. 设 $f(x)$ 为有界函数，即 $\exists M > 0, \forall x \in D_f, \text{s.t.} |f(x)| \leq M$ ，设 $x \to x_0$ 过程中，$\alpha(x)$ 为无穷小，则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} |\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{M}$ ，因为:

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| \leq M \cdot |\alpha(x)| < \epsilon$$

，所以 $\lim_{x\to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$ ，即 $f(x)\alpha(x)$ 为无穷小. □

推论 4.2. 常数与无穷小乘积为无穷小.

推论 4.3. 有限个无穷小乘积为无穷小.

注 4.1. 先证明两个无穷小之积 $\alpha(x)\beta(x)$ 为无穷小. 无穷小是函数极限的概念, 因为 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ 由函数的局部有界性（性质2.2）可知 $\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}\alpha(x)$ 有界，则两个无穷小的乘积为有界函数与无穷小的乘积的问题. 再用数学归纳法，证明有限个无穷小的乘积为无穷小.

定理 4.3. 由无穷小与无穷大的定义，还可以得到

1. 无穷小 $\pm$ 无穷大 $=$ 无穷大;
2. 无穷小 $\times$ 无穷大 $=$ 不一定;
3. 无穷大 $\pm$ 无穷大 $=$ 不一定;
4. 无穷大 $\times$ 无穷大 $=$ 无穷大.

但需要注意的是:

1. 无界变量 $\pm$ 无界变量 $=$ 不一定;
2. 无界变量 $\times$ 无界变量 $=$ 不一定.

如数列

$$x_n=\begin{cases} n, & n\text{为偶数};\\ 0, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

以及

$$y_n=\begin{cases} 0, & n\text{为偶数};\\ n, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

均为无界变量，而 $x_n\cdot y_n=0$.

定理 4.4 (极限四则运算法则)**.** 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a,\lim_{x\to x_0}g(x)=b$ ，则:

1. $\lim_{x\to x_0}f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=a\pm b$;
2. $\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=ab$;
3. 若 $b\neq 0$，则: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}=\frac{a}{b}$.

注意 (保号性)**.** 若 $b\neq 0$ ，则 $\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}g(x)\neq 0$.

证明. 1. 由定理3.1可知: $f(x)=a+\alpha,g(x)=b+\beta$, 则 $f(x)+g(x)=a+\alpha+b+\beta=a+b+(\alpha+\beta)$, 由定理4.1可知 $\alpha+\beta$ 为无穷小，令 $\gamma=\alpha+\beta$ ，则 $f(x)+g(x)=a+b+\gamma$ ，所以 $\lim_{x\to x_0}f(x)+g(x)=a+b=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$.

2. 由定理3.1可知: $f(x)=a+\alpha,g(x)=b+\beta$, 则 $f(x)\cdot g(x)=(a+\alpha)\cdot(b+\beta)=ab+a\beta+b\alpha+\alpha\beta$, 因为 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a,\lim_{x\to x_0}g(x)=b$ ，由局部有界性（性质2.2）可知: $\exists\delta>0M>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}|f(x)|<M,|g(x)|<M$ ，由定理4.2与定理4.1可知 $a\beta+b\alpha$ 为无穷小，又

由引理4.3可知 $\alpha\beta$ 为无穷小，由定理4.1可知 $a\beta+b\alpha+\alpha\beta$ 为无穷小，，令 $\gamma=a\beta+b\alpha+\alpha\beta$ ，则 $f(x)\cdot g(x)=(a+\alpha)\cdot(b+\beta)=ab+\gamma$ ，即：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=ab=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

.

3. 因为在过程 $x\to x_0$ 中 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}$ ，则：

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}$$

下证明 $\frac{1}{b+\beta}$ 有界. 由于局部有界性（性质2.2）可知，因为 $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$ ，所以：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}|g(x)-b|<\epsilon\Rightarrow b-\epsilon<g(x)=b+\beta(x)<b+\epsilon$ ，令 $\epsilon=\frac{b}{2}$ ，则 $\exists\delta_1>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1),\text{s.t.}\frac{b}{2}<b+\beta(x)<\frac{3b}{2}\Rightarrow\frac{2}{3b}<\frac{1}{b+\beta(x)}<\frac{2}{b}$ ，即 $\frac{1}{b+\beta}$ 有界.
由定理4.2，定理4.1可知 $\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}$ 为无穷小，令 $\gamma=\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}$ ，即 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}+\gamma$ ，即 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

注意. β 是 $x\to x_0$ 过程中的无穷小，是关于 x 的函数，因此 $\frac{1}{b+\beta}$ 也是关于 x 的函数.

□

推论 4.4. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim_{x\to x_0} cf(x)=c\lim_{x\to x_0} f(x)$.

证明. 令 $C(x)\equiv c\Rightarrow\lim_{x\to x_0} C(x)=c$ ，由极限的四则运算法则（4.4）可证. □

推论 4.5. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim_{x\to x_0} f^n(x)=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$.

证明. $\lim_{x\to x_0} f^n(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot f(x)\cdot\cdots\cdot f(x)=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$. □

定理 4.5 (复合函数极限运算法则)**.** 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u),u=g(x)$ 复合而成的函数，$f[g(x)]$ 在 x_0 某去心邻域内有定义，若 $\lim_{u\to u_0} f(u)=a,\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$ ，且 $\exists\delta_0>0,\forall x\in\mathring{U}(x,\delta_0),\text{s.t.}g(x)\neq u_0$ ，则 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=a$.

注意. 要求 $\exists\delta_0>0,\forall x\in\mathring{U}(x,\delta_0),\text{s.t.}g(x)\neq u_0$ 是为了保证极限 $\lim_{u\to u_0} f(u)$ 中，u 始终在 u_0 的去心邻域中趋于 u_0 ，因为 $f(u)$ 有可能在 u_0 处不连续（若 $f(u)$ 在 u_0 处连续，则不需要这条假设，此时在 u_0 邻域和去心邻域内趋于 u_0 是一样的）.

事实上在极限的所有定义中，自变量都是在去心邻域内运动的.

证明. 因为 $\lim_{u\to u_0} f(u)=a$ ，则 $\forall\epsilon>0\exists\eta>0,\forall u\in\mathring{U}(u_0,\eta),\text{s.t.}|f(u)-a|<\epsilon$. 因为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=u_0$ ，则对于 $\epsilon=\eta,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x,\delta),\text{s.t.}|g(x)-u_0|<\eta$. 令 $\delta_1=\min\{\delta_0,\delta\}$ ，则 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ ，有 $0<|g(x)-u_0|<\eta$ ，即 $g(x)=u\in\mathring{U}(u_0,\eta)$ ，即 $|f(u)-a|=|f[g(x)]-a|<\epsilon$ ，即 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=a$. □

定理 4.6 (幂指数函数运算法则)**.** 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a>0,\lim_{x\to x_0} g(x)=b$ ，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$.

证明．因为 $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}$ ，我们先考虑函数 $y = g(x)\ln(f(x))$．由于 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ ，所以 $\exists\delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta), \text{s.t.} f(x) > 0$（保号性），即 $f(x)$ 的值在函数 $\ln(\cdot)$ 的定义域内，由复合函数极限运算法则（4.5）可知：$\lim_{x\to x_0} \ln(f(x)) = \ln(a)$ ，由极限四则运算法则（4.4）可知：$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x)) = b\ln(a)$ ，即：$\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))} = \mathrm{e}^{b\ln(a)} = a^b$． □

例 4.1 (利用变量替换法)**.** 幂指函数通常有两种变换方法：

1. $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}$
2. 当 $f(x) \to 1, g(x) \to \infty$ 时：$f(x)^{g(x)} = \{[1 + f(x) - 1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\}^{[f(x)-1]g(x)} = \mathrm{e}^{[f(x)-1]g(x)}$