线性代数: 行列式

Linear algebra: The determinant

王浩铭

2017 年 · 冬

这篇笔记的参考资料为刘丽、韩本三《高等代数》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

1 行列式定义

1.1 数域

定义 1.1. 设 P 是含有 0 和 1 的一个数集，若 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为 0）仍在 P 中，则称 P 为一个数域.

若 P 中任意两个数做某一运算后的结果仍在 P 中，则称 P 对这个运算封闭. 根据定义易知：所有的数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$，若 P 是一个数域，则 $1,0 \in P$，因此 $1+1=2, 1+2=3, \ldots$，以及

Edition 4

$0-1=-1, 0-2=-2, \dots$，可知 P 包含所有整数，再由 P 对除法的封闭性即可知，任何一个数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

1.2　排列

定义 1.2 (n 级排列). 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的全排列称为 n 级排列，记作 $i_1 i_2 \dots i_n$.

显然，n 级排列共有 $n!$ 个.

n 级排列中的任意两个数，如果大数排在小数之前，则称这两个数构成一个**逆序**，否则称为**顺序**，一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中逆序的总个数称为此排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，因为 $\tau(12 \dots n) = 0$，因此排列 $12 \dots n$ 为偶排列，并称此排列为**自然排列**.

与此相对应的，完全逆序排列：

$$\tau(n \dots 321) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

即当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n = 4k+2$ 或 $n = 4k+3$ 时，此排列为奇排列.

n 级排列中互换两数的位置称为一次**对换**，若互换的是相邻两数，则称作**相邻对换**.

定理 1.1. 一次对换改变排列的奇偶性.

证明. 先考虑相邻互换：

设 n 级排列

$$\cdots jk \cdots,$$

互换 j, k 两数，经相邻对换后排列变为

$$\cdots kj \cdots,$$

其中 "$\cdots$" 表示那些在变换中不变的数.

显然，这一变换只使 j, k 两数之间的序发生变化，而它们与其他任意数之间的序都保持不变，因此变换前后两个排列的逆序数只是多 1 或少 1，从而有：奇数次相邻对换改变排列的奇偶性，偶数次相邻对换不改变其奇偶性；

不相邻对换的情况，设 n 级排列：

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots,$$

首先通过 $s+1$ 次相邻对换将其变换为：

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots,$$

在通过 s 次相邻对换将其变换为：

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots,$$

从而通过 $2s+1$ 次相邻对换完成了不相邻对换，因此排列的奇偶性改变. □

定理 1.2. n 级排列的全部 $n!$ 个排列中，奇排列、偶排列各占一半.

证明. 设全部的 n 级排列中，奇排列有 s 个，偶排列有 t 个，因此将奇排列的前两个数做对换则变成 s 个偶排列，从而 $s \leq t$；同理将偶排列的前两个数做对换则变成 t 个奇排列，从而 $t \leq s$，因此 $s = t$. □

1.3 n 阶行列式的定义

将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$ 排成 n 行 n 列，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它表示所有位于不同行以及不同列的 n 个元素乘积的代数和，当这 n 个元素的行标按照自然顺序排列时，各项列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的奇偶性按下式冠以符号：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

称 D 为 n **阶行列式**，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

称行列式从左上至右下角的对角线为**主对角线**，从右上至左下角的对角线为**副对角线**.

定理 1.3. n 阶行列式的定义等价于：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

证明. 只需证明：

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)},$$

将排列：$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 按行数从小到大排为：

$$a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}$$

因此排列 $1\cdots s\cdots t\cdots n$ 为自然排列. 现对其中的 a_{sj_s}, a_{tj_t} 做对换，有

$$a_{1j_1}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

因此有

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots t\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} &= (-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} \\ &= -(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} \\ &= (-1)^{\tau(1\cdots t\cdots s\cdots n)}\cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} \\ &= (-1)^{\tau(1\cdots t\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}.\end{aligned}$$

即元素行列逆序数之和不随元素对换的改变而发生改变，因此有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)},$$

即

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

□

2 行列式性质

2.1 行列式基本性质

定义 2.1. 称 n 阶行列式 D 中行列依次互换后得到的行列式为 D 的转置，记作 D^T，即

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 2.1. n 阶行列式 D 等于其转置行列式 D^T.

证明. 定义:

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则由行列式的定义可知:

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \\ &= D \end{aligned}$$

因此有

$$D^T = D.$$

□

定理 2.2. 互换行列式中两行（列）的对应位置元素，行列式变号.

证明. 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将其 s 行 t 列互换得到 D'，并设

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

□

推论 2.1. 有两行（列）对应位置元素相同的行列式等于零.

证明. 设行列式 D 中有两行对应位置元素相同, 互换这相同的两行, 则有 $D=-D$, 因此 $D=0$. □

定理 2.3. 数 k 乘以行列式中的某行（列）等于数 k 乘以次行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明. 设

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由行列式的定义有:

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \cdot \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= k \cdot D. \end{aligned}$$

□

注 2.1. 设 D 是 n 阶行列式，则 $|c \cdot D| = c^n \cdot |D|$.

推论 2.2. 若行列式 D 的某一行（列）的对应元素全为 0，则 $D = 0$.

推论 2.3. 若行列式 D 的某两行（列）的对应位置元素成比例，则 $D = 0$.

定理 2.4. 行列式 D 中某行（列）元素均表示为两数之和，则 D 可以拆分为两个行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明. 由行列式的定义有:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

注 2.2. 注意行列式与矩阵在运算上的不同，设 α, β, γ 为三维向量，则:

$$(\alpha, \beta_1, \gamma) + (\alpha, \beta_2, \gamma) = (2\alpha, \beta_1 + \beta_2, 2\gamma),$$

而

$$|\alpha,\beta_1,\gamma|+|\alpha,\beta_2,\gamma|=|\alpha,\beta_1+\beta_2,\gamma|;$$

相似的，

$$(2\alpha,2\beta,2\gamma)=2(\alpha,\beta,\gamma),$$

而

$$|2\alpha,2\beta,2\gamma|=2^3\cdot|\alpha,\beta,\gamma|.$$

注 2.3. 注意行列式的拆分与矩阵的加法有很大不同，如对矩阵按列划分为

$$A=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2,\gamma_1+\gamma_2),$$

则有 $A=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$，即矩阵 A 可以分为两个矩阵的和；但是若对行列式 $|A|$ 拆分，则需要拆分出 $2^4=16$ 个行列式的和，此时需要灵活的运算。

一是采用**矩阵分解法**，在 $|A_{n\times n}|$ 的每一列都可以表示为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基的线性组合的时候常采用这种方法：

证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

可以看出，上式左侧行列式的每一列都可以被右侧行列式列向量线性表示，如左侧第一列等于右侧第一列的 a 倍加上右侧第二列的 b 倍，等等. 因此有：

$$\begin{bmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

第二种方法是**拆开省略法**，当行列式每一行的元素不能明显的找到基时，常采用这种方法，其关键在于省略为零的行列式，保留非零的行列式，因为行列式非零，因此当我们确定某一列后，其余的列变回限定在一定范围内：

计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

易知

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix}$$

当第一列选择 $(1,1,1,1)^T$ 时，第二三四列只能选择 $(0,-x,0,0)^T,(0,0,y,0)^T,(0,0,0,-y)^T$，否则行列式为零，由此该行列式拆分的非零行列式只有五个，即

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} \\ &\quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix} \\ &= xy^2 - xy^2 + x^2y - x^2y + x^2y^2 = x^2y^2.\end{aligned}$$

推论 2.4. 将行列式中某行（列）元素的 k 倍加到另一行（列），行列式的值不变，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2.2 行列式按行（列）展开定理

定义 2.2. 设 D 是 n 阶行列式，划去 D 中第 i 行 j 列的元素 a_{ij} 所在的行与列，其余 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，并且称

$$A_{ij} = (-1)^{1+j} \cdot M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 2.5. 若 n 阶行列式 D 的第 i 行元素中除了 a_{ij} 均为零，则此行列式等于元素 a_{ij} 与其代数余

子式 A_{ij} 的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}\cdot A_{ij}.$$

证明. 首先考虑 $i=j=n$ 的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为 D 中第 n 行元素中除 a_{nn} 外均为零，因此在 D 的展开式中含有因子 a_{nj_n} $(j_n\neq n)$ 的项都为零，于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nn} \\ &= a_{nn}\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}} \\ &= a_{nn}\cdot M_{nn}=a_{nn}\cdot(-1)^{n+n}M_{nn}=a_{nn}\cdot A_{nn}. \end{aligned}$$

其次考虑一般情况：此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将第 i 行依次与下面的第 $i+1$ 行，$i+2$ 行，$\cdots$，第 n 行做互换，通过 $n-i$ 次互换后得到：

$$D=(-1)^{n-i}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

将第 j 列依次与右侧的第 $j+1$ 列，$j+2$ 列，$\cdots$，第 n 列做互换，通过 $n-j$ 次互换后得到：

$$D=(-1)^{n-i}(-1)^{n-j}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot M_{ij}=a_{ij}\cdot A_{ij}.$$

□

定理 2.6 (行列式一阶展开定理)**.** n 阶行列式 D 等于它的任意一行（列）的元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

证明. 由定理2.6 可知:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} D = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = & \, a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \end{aligned}$$

□

推论 2.5. n 阶行列式 D 等于它的任意一行（列）的元素与其它行（列）代数余子式的乘积之和为零，即

$$a_{s1}A_{i1} + a_{s2}A_{i2} + \cdots + a_{sn}A_{in} = 0, \ (s \neq i)$$

或

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = 0, \ (s \neq j).$$

证明. 因为

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因此

$$a_{s1}A_{i1}+a_{s2}A_{i2}+\cdots+a_{sn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

$\square$

定理2.6以及推论2.5 可以合并表示为以下形式：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}A_{ij}=\begin{cases} D, & s=i \\ 0, & s\neq i, \end{cases}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{ij}=\begin{cases} D, & s=j \\ 0, & s\neq j. \end{cases}$$

定理 2.7 (拉普拉斯（Laplace）定理)**.** n 阶行列式 D 等于其取定的 k 行（列）的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式乘积之和，即若取定 D 的 k 行（列）的所有 k 阶子式为 $N_1, N_2, ..., N_t$，其对应的代数余子式为 $A_1, A_2, ..., A_t$，则

$$D=\sum_{i=1}^{t} N_iA_i,\ t=C_n^k.$$

拉普拉斯定理的一个重要应用是下列行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{mm} & C_{mn} \\ O & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

按其前 m 列展开有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A|\cdot|B|. \end{aligned}$$

类似的，对于行列式

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & B_{nn} \\ A_{mm} & C_{mn} \end{vmatrix}.$$

将其第 $n+1$ 行向上互换 n 次，将 $n+2$ 行向上互换 n 次，...，将第 $n+m$ 行向上互换 n 次有

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

因此有

$$D' = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} A_{mm} & C_{mn} \\ O & B_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A_{mm}| \cdot |B_{nn}|.$$

定理 2.8 (行列式乘法定理)**.** 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 n 阶行列式

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

证明. 构造 $2n$ 阶行列式

$$D_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

因此 $D_0=D_1D_2$. 考虑对 D_0 进行初等变换构造出 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ 的项，将其第 $n+1$ 行乘 a_{11} 加到第一行，将其第 $n+2$ 行乘 a_{12} 加到第一行，...，将将其第 $n+n$ 行乘 a_{1n} 加到第一行，即对 D_0 做变换：$r_1+a_11r_{n+1}+\cdots+a_{1n}r_{n+n}$，有

$$D_0=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

对第 2 行至第 n 行做类似变换有

$$D_0=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|-E_n|\cdot D=(-1)^{n(n+1)}D=D.$$

因此 $D=D_0=D_1D_2$. □

3 行列式的计算

3.1 展开式性质与矩阵方法

例 3.1. 设 4 阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 与 $B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_1)$，其中 $|A|=a,|B|=b$，求 $|A+B|$.

因为 $A+B=(\alpha+\beta,\gamma_1+\gamma_2,\gamma_2+\gamma_3,\gamma_3+\gamma_1)$，所以有

$$\begin{aligned}|A+B| &= |\alpha+\beta,\gamma_1+\gamma_2,\gamma_2+\gamma_3,\gamma_3+\gamma_1| \\ &= |\alpha,\gamma_1+\gamma_2,\gamma_2+\gamma_3,\gamma_3+\gamma_1|+|\beta,\gamma_1+\gamma_2,\gamma_2+\gamma_3,\gamma_3+\gamma_1| \\ &= |A\cdot X|+|B\cdot X|=(|A|+|B|)\cdot|X|.\end{aligned}$$

其中

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

所以 $|X|=2$，即 $|A+B|=2(a+b)$.

3.2 降阶计算

降阶计算的实质是通过第三类初等变换（推论2.4）化简为某行（列）只有一个元素不为零的行列式，再用行列式一阶展开定理（定理2.6）对这一行（列）展开，从而得到一个低一阶的行列式.

注意，降阶计算中最重要的是利用第三类初等变换对原行列式进行变换，主要的变换方式有：

1. 一对一；

2. 一对多：一般在有相同元素的行或列中使用；

3. 多对一：可以构造出有相同元素的行货列，常与一对多联合使用；

4. 行与列.

例 3.2. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&0&b&c\\0&a&c&b\\b&c&a&0\\c&b&0&a\end{vmatrix}$$

解.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & a & c & b \\ b & c & a & 0 \\ c & b & 0 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & b & c \\ a+b+c & a & c & b \\ a+b+c & c & a & 0 \\ a+b+c & b & 0 & a \end{vmatrix} \qquad (\text{多对一}) \\
&= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & b & c \\ 0 & a & c-b & b-c \\ 0 & c & a-b & -c \\ 0 & b & -b & a-c \end{vmatrix} \qquad (\text{一对多}) \\
&= (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} a & c-b & b-c \\ c & a-b & -c \\ b & -b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} a & c-b & 0 \\ c & a-b & a-b-c \\ b & -b & a-c-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} a & c-b & 0 \\ c-b & a & 0 \\ b & -b & a-c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-c-b)[a^2-(b-c)^2] \\
&= (a+b+c)(a-c-b)(a+b-c)(a-b+c).
\end{aligned}
$$

□

3.3 元素有规律的行列式的计算

常见的规律元素行列式包括：加提；挪移；溢出；三斜线；开爪型；闭爪型等，处理这类行列式的关键是分析和利用元素的规律，通过第三类初等变换技巧进行化简.

例 3.3 (挪移). 计算行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}
$$

解. 依次将第三列与第四列互换，第二列与第三列互换，第三行与第四行互换，第二行与第三行换有

$$
\begin{aligned}
D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} \\
&= (ah-bg)(cf-de).
\end{aligned}
$$

□

注 3.1. 将矩阵沿着对角线方向移动是不改变行列式符号的，因为移动次数一定时偶数.

三斜线行列式是指非零元素只出现在对角线与其上下两条斜线上的行列式，且每条线上的元素必相同. 这类题既可以用数学归纳法也可以用数列知识求解.

例 3.4 (溢出行列式). 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解. 对最后一行展开有:

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+n}b\cdot\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}+(-1)^{2n}a\cdot\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= D=a^n+(-1)^{n+1}b^n. \end{aligned}$$

□

例 3.5 (三斜线行列式). 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}=1-a+a^2-a^3+\cdots+(-a)^n.$$

证明. 对第一行展开有:

$$\begin{aligned} D &= (1-a)\cdot\begin{vmatrix} 1-a & a & \cdots & 0 & \\ -1 & 1-a & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & -1 & 1-a & a \\ 0 & \cdots & -1 & 1-a & \end{vmatrix}-a\cdot\begin{vmatrix} -1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\ &= (1-a)D_{n-1}+aD_{n-2}. \end{aligned}$$

设 $D_{n+1}-pD_n=q\cdot(D_n-pD_{n-1})$ 因此有 $D_{n+1}=(p+q)D_n-pqD_{n-1}$，即

$$\begin{cases} p+q=1-a \\ pq=-a \end{cases}$$

解得 $p=1,q=-a$，即 $D_n-D_{n-1}=-a(D_{n-1}-D_{n-2})$，令 $H_n=D_n-D_{n-1}$ 有

$$H_n=-aH_{n-1},$$

而 $H_2=D_2-D_1=a^2$，因此得 $H_n=(-a)^n$，于是

$$D_n=D_{n-1}+(-a)^n,$$

因为 $D_1=1-a$，所以 $D_n=1-a+a^2-a^3+\cdots+(-a)^n$. □

例 3.6 (三斜线行列式). 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}=\begin{cases}(n+1)a^n & (a=b)\\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & (a\neq b)\end{cases}$$

证明. 按第一行展开有 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ 因此有 $D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$，因此 D_n-bD_{n-1} 是公比为 a 的等比数列，因为 $D_2-bD_1=a^2$，因此有

$$D_n=bD_{n-1}+a^n,$$

若 $b=a$，则 $D_n=aD_{n-1}+a^n$，因此

$$\frac{D_n}{a^n}=\frac{D_{n-1}}{a^{n-1}}+1,$$

即 $\frac{D^n}{a^n}$ 是公差为 1 的等差数列，有 $D_n=(a+1)a^n$.

若 $b\neq a$，则对称的有 $D_n=aD_{n-1}+b^n$，联立有

$$bD_{n-1}+a^n=aD_{n-1}+b^n,$$

即 $D_{n-1}=\frac{b^n-a^n}{b-a}$，因此

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

□

综上三斜线行列式一般通过**递推公式**的方法得到 D_n,D_{n-1},D_{n-2} 的关系式，再利用数列技巧求解，其中 D_{n-2} 往往需要两步展开，对于三斜线的展开，我们做如下总结：

对于如下三斜线行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} c & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & c & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & c & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & c \end{vmatrix}$$

对第一行第一列 c 展开得到 D_{n-1}，再对第二行第一列 a 展开，划去第二行，最后对第一行第二列 b（在第二次展开剩下的行列式中为第一行第一列）展开，得到 D_{n-2}，因此有

$$D_n = cD_{n-1} - abD_{n-2}.$$

爪型行列式由于主对角线上斜线或下斜线均为零，因此可以化为三角形行列式：

例 3.7 (闭爪行列式)**.** 证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} a_i c_{i+1} \cdots c_n.$$

证明. 对第一行展开有 $D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i M_{1i}$，对于每个 i 有：

$$M_{1i} = \begin{vmatrix} G_i & O \\ 0 & H_i \end{vmatrix} = |G_i||H_i|.$$

其中

$$H_i = \begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{i-1} \end{vmatrix}, \ G_i = \begin{vmatrix} c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i+1} & c_{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix},$$

所以 $M_{1i} = |G_i||H_i| = b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c_{i+1} \cdots c_n$，因此

$$D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i M_{1i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} a_i c_{i+1} \cdots c_n.$$

□

综上，**闭爪行列式**可以通过对满元素行展开得到两个三角行列式，只需将展开元素列（本题）右侧上侧的元素向左平移就可以很容易的看出这一点.

而**开爪行列式**有两种计算方法，一是**展开法**，即对满元素行展开得到一个对角行列式和一个特殊的闭爪行列式，在对该闭爪行列式满元素行（列）的最后一个元素所在列（行）展开即可求解；二是**多对**一化为三角行列式.

例 3.8 (开爪行列式)**.** 证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix} = a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_1 \cdots c_{i-1} a_i b_i c_{i+1} \cdots c_n.$$

证明 1. 对第一行展开，a_0 的代数余子式 $A_{11} = c_1c_2\cdots c_n$，当 $i \geq 1$ 时，a_i 的代数余子式 $A_{1i+1} = (-1)^i M_{1i+1}$，其中

$$M_{1i+1} = \begin{vmatrix} G_i & O \\ * & H_i \end{vmatrix} = |G_i||H_i|.$$

其中

$$H_i = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{i-1} & 0 & 0 & 0 & c_{i-1} \\ b_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ G_i = \begin{vmatrix} c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix},$$

将 H_i 对第 i 行展开有 $|H_i| = (-1)^{1+i} b_i c_1 c_2 \cdots c_{i-1}$，因此

$$M_{1i+1} = (-1)^{1+i} b_i c_1 c_2 \cdots c_{i-1} c_{i+1} \cdots c_n.$$

即

$$\begin{aligned} D &= a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i M_{1i+1} \\ &= a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_1 \cdots c_{i-1} a_i b_i c_{i+1} \cdots c_n. \end{aligned}$$

证毕. □

证明 2. 易知:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_0 - \frac{b_1a_1}{c_1} - \cdots - \frac{b_na_n}{c_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix} \\ &= \left[a_0 - \frac{b_1a_1}{c_1} - \cdots - \frac{b_na_n}{c_1}\right] \cdot c_1c_2\cdots c_n \\ &= a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_1 \cdots c_{i-1} a_i b_i c_{i+1} \cdots c_n. \end{aligned}$$

□

例 3.9 (范德蒙行列式 (Vandermonde determinant))**.** 证明行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i).$$

证明. 利数学用归纳法.

当 $n=2$ 时有：$D_2 = x_2 - x_1$，成立；设当 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时有

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$

将第 k 行 $-x_1$ 倍加到第 $k+1$ 行，将第 $k-1$ 行 $-x_1$ 倍加到第 k 行，以此类推有

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_{k+1} - x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{k-1}(x_2 - x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1} - x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_{k+1} - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

对第一列展开有

$$D_{k+1} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_{k+1} - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix},$$

由归纳法假设可知

$$D_{k+1} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots \prod_{2\le i<j\le n} (a_j - a_i) = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$

□

总结：

1. 沿着对角线挪移不改变行列式正负号；
2. 溢出行列式对溢出项展开可以构造两个三角行列式；
3. 三斜线行列式对首行展开，得到递推公式，利用数列技巧，求得行列式的值；
4. 闭爪行列式对满元素行展开，得到两个三角行列式，可直接求得行列式的值；
5. 开爪行列式对满元素行展开，的到一个三角行列式与一个溢出行列式，对溢出项展开，得到三角行列式，求得行列式的值.