高等数学基本方法: 无穷级数

Collection of Calculus Tips: Infinite series

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等数学期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Calculus (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 常数项级数

1.1 基本概念

1.1.1 A. 定义

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s,$$

则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，这是极限 s 称为这级数的和，并写成：

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots;$$

若 $\{s_n\}$ 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.

注 1.1. 对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} - a_n$ 的级数，一般采用定义的方法判断敛散性.

1.1.2 B. 性质

1. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛于和 s，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} ku_i$ 收敛于 ks.

2. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$，分别收敛于 s, σ，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.

   若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ 必收敛；若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均发散，则 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ 敛散性不能确定.

3. 在级数中，去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

   这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ 具有相同的敛散性，即若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm a_{n+1}$ 收敛；但是注意，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 未必有相同的敛散性.

4. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数

   $$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \ldots$$

   仍收敛，且其和不变.

   该定理该定理是充分的，而非必要的，即若加括号后所成级数收敛，是不能断定去括号后的级数收敛，但是有若加括号后的级数发散，则去括号后的级数必定发散.

5. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，则其一般项 u_n 收敛于 0.

   该定理是必要而非充分的，即级数的一般项收敛于 0 时，不能推出其级数收敛，最著名的例子便是调和级数:

   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

1.2 正项级数审敛

1. 基本定理：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow s_n$ 有界；

2. 比较判别法

   比较判别法：设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均为正项级数，且 $u_n \leq v_n$. 则

   1) 若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

   2) 若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散，则 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散.

   比较判别法推论：设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均为正项级数，

   (a) 如果 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，且存在正整数 N，使当 $n \geq N$ 时有 $u_n \leq kv_n$, $(k > 0)$ 成立，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

   (b) 如果 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，且存在正整数 N，使当 $n \geq N$ 时有 $u_n \geq kv_n$, $(k > 0)$ 成立，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.

   比较判别法极限形式：设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 均为正项级数，

   (a) 如果 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，且 $0 \leq l < +\infty$，则若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

   (b) 如果 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，且 $0 < l \leq +\infty$，则若 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.

   利用比较审敛法时应注意：

   (a) 当被审敛数列形式为 $n^p, \ln n$ 时，常使用比较审敛法；

   (b) 由比较审敛法的极限形式可知，正项级数可以进行等价无穷小替换（交错级数不行）；

   (c) 对于 $f(n) \cdot u_n$ 的形式，要化为 $\frac{u_n}{\frac{1}{f(n)}}$ 的形式进行讨论.

   (d) 比较审敛法一般选择 p 级数与等比级数进行比较；

   (e) 还可以通过放缩的方法构造比较级数，尤其对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)u_n$ 的级数通过证明 $f(n)$ 有界，即 $|f(n)| \leq M$ 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)u_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. 比值/根值审敛法

   比值审敛法：设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正向级数，如果

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

   则有

   (a) 若 $\rho < 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

   (b) 若 $\rho > 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散；

   (c) 若 $\rho = 1$，则比值审敛法无法确定级数的敛散性.

根值审敛法：设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正向级数，如果

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则有

(a) 若 $\rho < 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；

(b) 若 $\rho > 1$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散；

(c) 若 $\rho = 1$，则比值审敛法无法确定级数的敛散性.

利用比值/根值审敛法时应注意：

(a) 当被审敛数列形式为 a^n，$n!$，n^n 时，常使用比值/根值审敛法；

(b) 含参级数的参数时比值/根值判别法失效时，审敛应回归定义或性质（如必要条件），应用性质有两种方法：

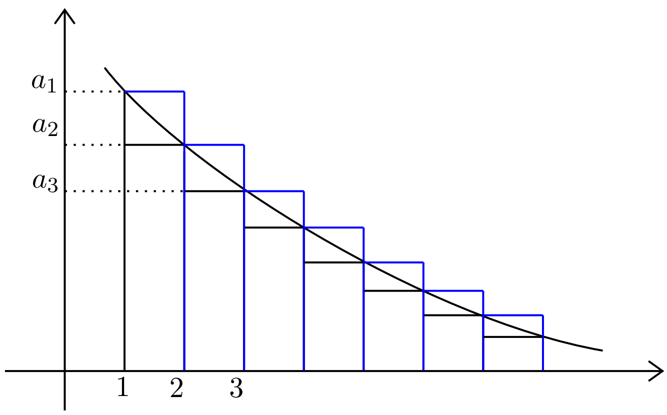
- 直接证明 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$；
- 证明对于任意 n 有：$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ 或 $\sqrt[n]{u_n} > 1$.

(c) 由比值/根值审敛法判断级数发散的说明级数不满足收敛的必要条件，即 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

(d) $n^{\frac{1}{n}} \to 1, n^{\frac{1}{n}} > 1, (n > 1)$.

4. 积分判别法

设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上单调减、非负、连续函数，且 $a_n = f(n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散性.



易知：

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n \leq a_1 + \int_1^N f(x)\mathrm{d}x,$$

又因为

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \geq \int_1^N f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_1^N f(x)\mathrm{d}x \leq s_N \leq a_1 + \int_1^N f(x)\mathrm{d}x$$

以及

$$s_N - a_1 \leq \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \leq s_N$$

因为 a_1 为确定常数，$s_n, \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调，所以当 $\int_1^N f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 s_N 有界，即 s_n 收敛；当 s_n 收敛时，$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 有界，即 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 收敛.

对于形如 $\frac{1}{n^p}, \frac{1}{n\ln^p n}$ 的级数，常用积分审敛法.

例 1.1. 审敛 $(a>0)$：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$

1. 由数列形式可知采用根值判别法，因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{na}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1} = a$，所以当 $0<a<1$ 时数列收敛；当 $a>1$ 时，数列发生；当 $a=1$ 时根值审敛法失效，此时有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0,$$

所以发散.

2. 有数列形式可知采用比值审敛法，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot(n+1)}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$$

当 $a>e$ 时，发散；当 $0<a<e$ 时收敛，当 $a=e$ 时，因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$$

因此 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，因此发散.

例 1.2. 审敛：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$

因为 $n^{\frac{1}{n^2+1}}-1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1 = \frac{\ln n}{n^2+1} \leq \frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，所以收敛.

注 1.2. $\ln^a n << n^b << c^n << n! << n^n$.

例 1.3. 设 $\lim_{n\to\infty} n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot u_n = 1$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

易知 $n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot u_n = \frac{u_n}{\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}$，因为 $2n\sin\frac{1}{n}\to 2$，由保号性可知，当 n 足够大时有 $2n\sin\frac{1}{n} > \frac{3}{2}$，则当 n 足够大时有 $\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 由比较审敛法及其极限形式客户组 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

注 1.3. 因为 $\frac{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}{n^2} = n^{2n\sin\frac{1}{n}-2} = n^{2(n\cdot(\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o^3)-1)} = n^{2(1-\frac{1}{6}\frac{1}{n^2}-1)} = n^{-\frac{1}{3n^2}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{3n^2}}} \to 1$，所以 $\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n^2}$.

1.3 交错级数与任意项级数审敛

1. 交错级数审敛的核心是莱布尼兹准则：如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

   (a) $u_n \geq u_{n+1}$；

   (b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,

   则有，级数收敛，且其和 $s \leq u_1$，其余项 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

2. 莱布尼兹定理是充分条件，即若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，是不能判断一般项 u_n 单调递减的，如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛但是其一般项 $\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 不单调递减.

3. 任意性级数审敛的核心是：绝对收敛的级数一定条件收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

4. 若由比值/根值审敛法判断 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

5. 条件收敛的级数所以正（负）项构成的级数发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n\pm|u_n|}{2}$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛；

6. 因为 $||a_n|-|b_n|| \leq |a_n-b_n| \leq |a_n|+|b_n|$，所以

   - 绝对收敛 + 条件收敛 = 条件收敛；
   - 绝对收敛 + 绝对收敛 = 绝对收敛；
   - 条件收敛 + 条件收敛 = 条件收敛或绝对收敛.

7. $f(n)a_n$ 转化为 $\frac{a_n}{\frac{1}{f(n)}}$ 来分析；

8. 数列 a_n 收敛，则 a_n 有界 M；

9. 形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}-a_n$ 的级数，有两种证明方法：

   - 采用定义来证明：

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) &= a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_{n+1}-a_n \\ &= a_{n+1}-a_1\end{aligned}$$

   因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}-a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{a_n\}$ 有界；

   - 递推关系：$a_{n+1}=f(a_n)$，若 $|f'(x)|<h<1$，则

   $$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n| &= |f(a_n)-f(a_{n-1})| = |a_n-a_{n-1}|\cdot|f'(\xi_n)| \\ &\leq h\cdot|a_n-a_{n-1}| \leq h^2\cdot|a_{n-1}-a_{n-2}| \leq \cdots \leq h^n|u_1-u_0|\end{aligned}$$

   从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 绝对收敛

   注意：若仅有 $|f'(x)|<1$，则该证法错误，因为若 $f'(\xi)\to 1$，有可能 $|a_{n+1}-a_n| \nrightarrow 0$.

10. 级数递推关系

- 中值定理：$|a_{n+1}-a_n|=|f(a_n)-f(a_{n-1})|=|a_n-a_{n-1}|\cdot|f'(\xi_n)|\le h^n\cdot C$；或 $|a_n|=|a_n-f(0)|=|a_{n-1}-f(0)|\cdot|f'(\xi_n)|\le h^n\cdot C$.
- 放缩：尤其常见于二阶递归的情况

例 1.4. 审敛：$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$.

因为

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})&=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)\\&=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-\sqrt{n^2}\pi)\\&=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+\sqrt{n^2}}\right)\end{aligned}$$

当 n 充分大时，有 $\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+\sqrt{n^2}}\right)$ 单调减，因为 $\sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+\sqrt{n^2}}\right)\to 0$，由莱布尼兹准则可知收敛.

例 1.5. 设 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的敛散性.

因为 $|u_n|=\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\le\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$，所以绝对收敛.

例 1.6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数必收敛的是
$A.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$
$B.\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$
$C.\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$
$D.\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

D.

例 1.7. 设 $u_n\ne 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，所以当 n 充分大时有 $u_n>0$，则 $\frac{\left|(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}}\to 2$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 不绝对收敛.

因为 $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\cdots+(-1)^{N+1}\frac{1}{u_{N+1}}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{N+1}}{u_{N+1}}\to\frac{1}{u_1}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛.

注 1.4. 两个经典错误：

1. 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$ 得 $(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\sim(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$，而 $(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛. 错误，因为等价无穷小替换的原理为比较审敛法的极限形式，只适用于正项级数；

2. 对交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 有 $u_n < v_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛. 错误，因为比较审敛法只适用于正项级数.

例 1.8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

因为 $s_N = \sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n) = a_{N+1}-a_1 \to c$，则当 n 足够大时有 $a_n \le |a_1|+|c| = M$，因此 $|a_n b_n| = |a_n|\cdot|b_n| \le M\cdot|b_n|$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

例 1.9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$ 收敛，判断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

法一：

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$ 收敛，由必要条件可知 $\lim_{n\to\infty} a_n 2^n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 0$，由比较审敛法极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

法二：

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$ 收敛，由必要条件可知 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n 2^n = 0$，即数列 $(-1)^n a_n 2^n$ 收敛，因此数列 $(-1)^n a_n 2^n$ 有界，即 $|a_n 2^n| \le M$，即 $|a_n| \le \frac{M}{2^n}$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例 1.10. 设极限 $\lim_{n\to\infty} n a_n$ 存在，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

法一：

设 $\lim_{n\to\infty} n a_n = b$，则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\frac{1}{n^2}} = b^2$，由比较审敛法极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

法二：

因为，$\lim_{n\to\infty} n a_n$ 存在，即数列收敛，因此数列有界，即 $|n a_n| \le M$，因此 $a_n^2 \le \frac{M^2}{n^2}$，由比较审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

例 1.11. 若 $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{2}\ln(1+a_{n-1})$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

易知 $a_n = f(a_{n-1})$, 其中 $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$, 且 $f'(x) = \frac{1}{2(1+x)}, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} < 0$, 所以 $0 < f'(x) < \frac{1}{2}, (x > 0)$.

易知 $a_n \ge 0$，所以

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |a_n - f(0)| = |f(a_{n-1}) - f(0)| = |a_{n-1} - f(0)|\cdot f'(\xi) \\
&\le \frac{1}{2}|a_{n-1} - f(0)| \le \frac{1}{2^2}|a_{n-2} - f(0)| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}|a_1 - f(0)| \\
&= \frac{1}{2^n}\ln 2.
\end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例 1.12. 已知 $f(x)$ 可导且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ 证明：(*1*) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；(*2*) $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$.

(*1*) 因为

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})| = |x_n-x_{n_1}|\cdot|f'(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot|x_n-x_{n-1}| \leq \frac{1}{2^2}\cdot|x_{n-1}-x_{n-2}| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}\cdot|x_1-x_0|\end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

(*2*)

法一：

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1$，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda$.

因为

$$a_n-1=a_n-f(0)=f(a_{n-1})-f(0)=a_{n-1}\cdot f'(\xi)<\frac{1}{2}\cdot a_{n-1}$$

两侧取极限，有

$$\lambda-1\leq\frac{1}{2}\cdot\lambda$$

从而 $0\leq\lambda\leq 2$.

注意!!：由于极限的不等式性，该做法仅能得到 $\lambda\in[0,2]$，不能得到 $\lambda\in(0,2)$.

法二：

因为 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda$. 即 $\lambda=f(\lambda)$.

下证明在 $(0,2)$ 内 $\phi(x)=x-f(x)=0$ 有根 $x=\lambda$. 因为 $\phi(0)=0-f(0)=-1<0$; $\phi(2)=2-f(2)=1-[f(2)-1]=1-[f(2)-f(0)]=1-[2\cdot f'(\xi)]>0$，有介值定理可知：存在 $\lambda\in(0,2)$ 使得 $\phi(\lambda)=0$.

例 1.13. 设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1}), S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数. (*1*) 求 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径；(*2*) 求 $S(x)$.

(*1*) 因为 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+a_0)=\frac{1}{2}$，易知 $a_n\geq 0$，所以

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1}) \geq \frac{n}{n+1}a_n \\ &\geq \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}a_{n-1} \geq \cdots \geq \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}a_2 \\ &= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

所以 $a_n\geq\frac{1}{n}, (n=2,3,...)$，因此 $|a_nx^n|=|a^n|\cdot|x^n|\geq\frac{1}{n}|x^n|$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 收敛半径为 $R_1=1$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径小于等于 $R_1=1$；

因为 $0 \le a_0 = 1 \le 1, 0 \le a_1 = 0 \le 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$，有归纳法可知 $0 \le a_n \le 1$，因此 $|a_n x^n| \le |x^n|$，因为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛半径为 $R_2 = 1$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径大于等于 $R_2 = 1$；综上 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$.

(2)

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_{n-1} x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_{n-1} x^{n+1}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
S(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^{n+1} \\
&= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \int \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x + \int \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \mathrm{d}x \\
&= 1 + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1\right] - \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1\right] \mathrm{d}x + \int x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x \\
&= 1 + x \cdot [S(x) - 1] - \int [S(x) - 1] \mathrm{d}x + \int x \cdot S(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

所以 $S'(x) = S(x) - 1 + xS'(x) - S(x) + 1 + xS(x)$，因此 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$. 解此微分方程有

$$S(x) = C \cdot e^{-[\ln|x-1|+x]}$$

因为 $S(0) = a_0 = 1$，所以 $C = 1$，因此 $S(x) = e^{-[\ln|x-1|+x]}$.

2 幂级数

2.1 求收敛区间及收敛域

1. 阿贝尔定理：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 当 $x = x_0$ 时收敛，则适合不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛；反之若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 在当 $x = x_0$ 时发散，则适合不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数发散.

   由阿贝尔定理可知：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 在点 x' 条件收敛，则该点必为端点.

2. 比值/根值求收敛半径：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则 $R = \frac{1}{\rho}$.

对于形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{2n}$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{2n-1}$ 的幂级数，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则 $R = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

3. 有理运算性质：若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 收敛半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ 收敛半径为 R_2，当 $R_1 \neq R_2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)\cdot x^n$ 的收敛半径为 $\min\{R_1, R_2\}$；当当 $R_1 = R_2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)\cdot x^n$ 的收敛半径大于等于 $\min\{R_1, R_2\}$.

   对于比值/根值求收敛半径失效的情形可以考虑拆分幂级数为多个幂级数，再利用有理运算性质计算收敛半径.

例 2.1. 求收敛域：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$

因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{n}} = 3$，所以 $R = \frac{1}{3}$.

当 $x-1 = \frac{1}{3}$ 时，幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{3})^n\frac{1}{n}$ 发散.

当 $x-1 = -\frac{1}{3}$ 时，幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{3})^n\frac{1}{n}$ 条件收敛.

因此收敛域为 $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

例 2.2. 求收敛域：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{n}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}$，所以 $R = \sqrt{2}$，因为当 $x-1 = \pm\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散，所以收敛域为 $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

例 2.3. 求收敛域：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在，而 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{[3+(-1)^{n+1}]^{n+1}}{[3+(-1)^n]^n}$ 不存在，因此不能用比值/根值计算收敛半径.

因为

$$a_n = \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{4^n}{n}, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{2^n}{n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

所以考虑该级数奇次项与偶次项构成的两个幂级数：$I_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$ 和 $I_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2k+1}}{2k+1}}{\frac{2^{2k-1}}{2k-1}} = 4$，所以 I_1 的收敛半径为 $R_1 = \frac{1}{2}$；因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{2k+2}}{2k+2}}{\frac{4^{2k}}{2k}} = 16$，所以 I_1 的收敛半径为 $R_1 = \frac{1}{4}$.

因此 $I_1 + I_2$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\} = \frac{1}{4}$，因为当 $x = \pm\frac{1}{4}$ 时，$I_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ 发散，而 I_1 收敛，因此 $I_1 + I_2$ 发散，则收敛域为 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

例 2.4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，判断 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$ 在 $x = \ln\frac{1}{2}$ 处敛散性.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛由阿贝尔定理可知，$x=-2$ 为其收敛域端点，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$，所以 $a=-1$ 或 $a=-3$；

当 $a=-3$ 时，级数在 $x=-2$ 处为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，矛盾，因此 $a=-1$，因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$，所以收敛区间为 $(-2,0)$，因为 $x=\ln\frac{1}{2} \in (-2,0)$，所以绝对收敛.

2.2 将函数展开为幂级数

2.2.1 A. 有理运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$，与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ 分别在区间 $(-R_1, R_1)$ 以及 $(-R_2, R_2)$ 内收敛，令 $(-R,R) = (-R_1,R_1) \cap (-R_2,R_2)$. 则有

1. 加减法：
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot x^n$$
在 $(-R,R)$ 上成立；

2. 乘法：
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n =& a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ &+ \cdots + \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} x^n + \dots\end{aligned}$$
在 $(-R,R)$ 上成立；

3. 除法，若 $b_0 \neq 0$，则
$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n,$$
其中 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ 的收敛域可能比 $(-R,R)$ 小得多.

2.2.2 B. 分析性质

1. 连续性：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

2. 可导性：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式：
$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n \cdot t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (x \in I).$$
幂级数和函数与逐项积分后所得的幂级数和函数有相同的收敛半径.

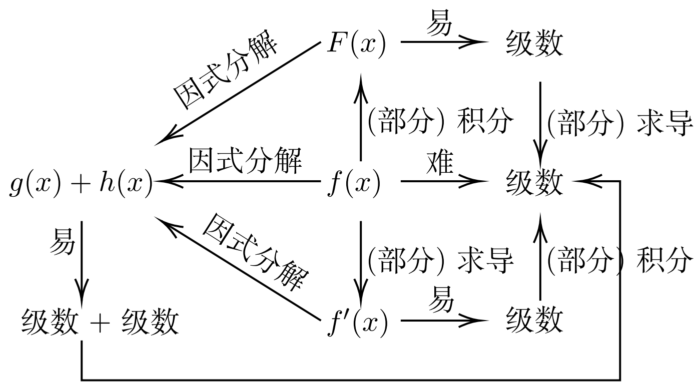
3. 可积性：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，并有逐项求导公式：
$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \ (|x| < R).$$
幂级数和函数与逐项求导后所得的幂级数和函数有相同的收敛半径.

由上述定理可知幂级数和函数在其收敛区间内有任意阶导数；幂级数系数乘除 n 不影响其收敛半径：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{\prime} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n.$$

2.2.3 C. 间接法函数展开

1. 间接法函数展开的基本思想：



2. 利用间接法展开函数时需要将提给函数化简至易知级数函数的最简形式

3. 对于在某点展开的幂级数，需要构造处该点，即将 $f(x)$ 在 $x=c$ 点展开，则应对 $f((x-c)+c)$ 进行化简.

4. 常见已知级数函数：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ (-1 < x < 1).$$

由这三者可推出

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (-1 < x < 1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ (-1 < x \le 1),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ (-1<x<1),$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ (-1\le x\le 1).$$

例 2.5. 将函数展开为幂级数：$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$,因为 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$,又因为 $f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.

注意,当 $x=\pm1$ 时,级数均收敛,但是 $x=1$ 时 $f(x)$ 没有定义,因此 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, x\in[-1,1)$.

例 2.6. 将函数展开为幂级数：$\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

因为 $\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)=\ln\frac{1-x^5}{1-x}=\ln(1-x^5)-\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{5n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n, x\in[-1,1)$.

例 2.7. 将函数 $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ 在 $x=-1$ 处展开.

因为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{1+(x+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n=-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$，所以 $f(x)=(-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x+1)^{n-1}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n+1}{(-1)^n n}\right|=1$，所以收敛半径 $R=1$，当 $x+1=\pm1$ 时级数发散，所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x+1)^{n-1}, x\in(-2,0)$.

2.3 级数求和

1. 级数求和最常见的思想：脚标匹配，利用逐项积分、逐项求导等方法，可以将所求幂级数联系到易知和函数的幂级数，从而得到所求幂级数的和函数

   幂级数遇到脚标不匹配时常用三种方法：

   (a) 加减项

   $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n x^n+u_0x^0=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n,$$

   常在 $u_0=0$ 时使用；

   (b) 串位调整

   $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^{n+1};$$

   (c) 提除项

   $$\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^n;$$

2. 级数求和的另一种思想：通过逐项求导建立微分方程；
3. 对于幂级数中的 q^n 应该凑到 x^n 之中；对于常数项级数求和：令 q^n 中的 q 为幂级数的 x 取值，转化为幂级数求和；
4. 对于和函数无定义而级数收敛的点通过（1）直接代入级数或（2）和函数的连续性取极限求得；
5. 常用结论：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),x\in[-1,1)$.

例 2.8. 求和函数：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

因为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\cdot(-\ln(1-x)-x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$.

易知级数收敛半径为 $R=1$，和函数在 $x=0,x=1$ 处无定义，因此 $f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n(n+1)}=0$；$f(1)=\lim_{x\to1}1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)=1$ 因此

$$f(x)=\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & -1\le x<1,x\ne0\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

例 2.9. 求和函数：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

因为

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}\\&=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n+1}\\&=\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\\&=\frac{x}{2-x^2}.\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}$，所以收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，易知级数在 $x=\pm\sqrt{2}$ 处发散，因此 $f(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例 2.10. 求和函数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，则 $S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$，则 $S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

即 $S''(x)-S(x)=0$（因为在 $\mathbb{R}$ 上级数收敛），特征方程为 $r^2-1=0$，所以 $r_1=1,r_2=-1$，即 $S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$，因为 $S(0)=1,S'(0)=0$，所以 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，则 $S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.