线性代数: 线性方程组与 n 维向量空间

Linear algebra: Linear equations

and n dimensional vector Spaces

王浩铭

2017 年 · 冬

这篇笔记的参考资料为刘丽、韩本三《高等代数》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 消元法

定义 1.1 (线性方程组的初等变换). 将对方程组 $AX=\beta$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

的如下三种变换:

1. 交换两个方程的位置;
2. 用一个非零常数乘以某个方程的两边;
3. 把一个方程乘以某个数加到另一个方程上.

称为线性方程组的初等变换.

定义 1.2 (增广矩阵). 将方程组1 的系数矩阵 A 与常数项矩阵 β 和为分块矩阵:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

则称此矩阵为方程组的增广矩阵.

对方程组实施的初等变换等同于对该方程组增广矩形实施的初等行变换.

定理 1.1. 线性方程组经过初等变换所得的新方程组与原方程组同解.

证明. 只需证明线性方程组1经过一次初等变换后所得的新方程组与原方程组通解.

设方程组1 经过一次初等变换后变为方程组

$$A_1X=\beta_1$$

且有增广矩阵 $\overline{A_1}=(A_1|\beta_1)$，由于对矩阵的初等行变换等同以一初等矩阵左乘该矩阵（定理??），即存在初等矩阵 P 使得

$$P\overline{A}=P(A|\beta)=(PA|P\beta)=(A_1|\beta_1)=\overline{A_1}$$

因此若 X_0 是方程组1 的解，则有

$$AX_0=\beta\Rightarrow PAX_0=P\beta\Rightarrow A_1X_0=\beta_1,$$

即 X_0 也是初等变换后的方程组的解；同理，若 Y_0 是变换后的方程组的解，即

$$A_1Y_0=\beta_1\Rightarrow P^{-1}A_1Y_0=P^{-1}\beta_1\Rightarrow AY_0=\beta,$$

即 Y_0 也是初等变换前的方程组的解，因此初等变换前后的方程组同解. □

由于任意矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯型矩阵，则将增广矩阵 $\overline{A}$ 化为阶梯型矩阵后对于的线性方程组可以很方便的求得其解集，从而便可求得原线性方程组的解集.

定理 1.2 (方程组有解的充要条件)**.** *n 元线性方程组 $AX=\beta$ 有解的充分必要条件为 $R(A)=R(\overline{A})$. 且当 $R(A)=R(\overline{A})=r<n$ 时，方程组有无穷多解；且当 $R(A)=R(\overline{A})=r=n$ 时，方程组有唯一解.*

证明. 不失一般性，将方程组1的增广矩阵 $\overline{A}$ 经初等行变换化为阶梯型矩阵 $\overline{A_1}$:

$$\overline{A_1}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$，由此我们得到由此初等变换得到的方程组:

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{1,r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1\\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{1,r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_1\\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r,r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r\\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}\\ \qquad\qquad\qquad 0=0\\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{2}$$

1. 当 $d_{r+1}\neq 0$ 时，这是一个矛盾方程，因此方程组2 无解，即方程组1 无解；

2. 当 $d_{r+1}=0$ 时分两种讨论:

若 $r=n$，则阶梯型方程组为:

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad\qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_r \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$，则由最后一个方程开始可以求出未知量 x_n 的唯一值，代入倒数第二个方程，可以求出未知量 x_{n-1} 的唯一值，以此类推，可以求出方程组1 的唯一解;

若 $r<n$，则阶梯型方程组为:

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{1,r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad\qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{1,r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r,r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$，因此可以改写为:

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-(c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n) \\ \qquad\qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_1-(c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n) \\ \qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-(c_{r,r+1}x_{r,r+1}+\cdots+c_{rn}x_n) \end{cases}$$

显然任给 $x_{r+1},...,x_n$ 的一组值，就可以唯一确定 $x_1,x_2,...,x_r$ 的值，从而得到方程组1 的一组解，因此方程组1有无穷多个解，称变量 $x_{r+1},...,x_n$ 为自由未知量.

□

推论 1.1. 齐次线性方程组

$$AX=\theta$$

有非零解的充分必要条件为 $R(A)<n$.

推论 1.2. 若齐次线性方程组

$$AX=\theta$$

中方程的个数 m 小于未知量的个数 n，则它必有非零解；若 $m=n$ 则齐次线性方程组有非零解的充要条件为 $|A|=0$.

注 1.1. $R(A)\leq\min\{m,n\}$,$R(A_{n\times n})=n\Leftrightarrow|A_{n\times n}|\neq 0$.

注 1.2 (直观理解方程组有解的充要条件以及两个推论)**.** 对于方程组 $AX=B$ 而言:

1. 方程组有界的充要条件是指，方程组的解向量 β 应落在系数矩阵 A 的列向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的张成空间 $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，即 $\beta \in \mathcal{V}$，此时存在向量 X 使得在线性变换 A 后落到 β 上；
2. 若 $R(A) = R(\overline{A}) = n$，则说明 $\beta \in \mathcal{V} = \mathbb{R}^n$，此时线性变换 A 仅是对 $\mathbb{R}^n$ 的平移和伸缩，不改变其维度，因此 X 是唯一的，方程组有唯一解；
3. 若 $R(A) = R(\overline{A}) = r < n$，则说明 $\beta \in \mathcal{V} = \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^n$，其中 $r < n$，此时线性变换 A 使 $\mathbb{R}^n$ 降维，有无数 $X \in \mathbb{R}^n$ 在变换后落在 β 上，方程组有无穷解；
4. 若 $R(A) < R(\overline{A})$，则说明 $\beta \notin \mathcal{V}$，而 $\forall X \in \mathbb{R}^n$ 有 $AX \in \mathcal{V}$，因此 X 不存在，方程组无解；
5. 对于齐次方程组而言，若 $R(A) = r < n$ 时，说明 $\mathcal{V} = \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^n$，其中 $r < n$，此时线性变换 A 使 $\mathbb{R}^n$ 降维，有无数 $X \in \mathbb{R}^n$ 在变换后落在 O 上，方程组有无穷解（非零解）；
6. 对于齐次方程组而言，若方程的个数 m 小于未知量的个数 n，说明系数矩阵 A 的列向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的第 $m+1$ 到第 n 个分量均为 0，因此其张成空间 $\mathcal{V}$ 至多为 m 维，因为 $m < n$，因此方程组有无穷解（非零解）.

2 一个向量组内的关系

2.1 向量（组）

定义 2.1 (向量). 由 n 个数域 P 上的有次序的数 $a_1, a_2, ..., a_n$ 组成的数组称为一个数域 P 上的 n 维向量，数 a_i 称为向量的第 i 个分量. 记：

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

前者称为列向量，后者称为行向量.

定义 2.2 (向量组). 设

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

将此若干列（行）向量组成的集合

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$$

称为向量组.

定义 2.3 (向量的相等). 若 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ 与 $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ 的对应分量相同，即 $a_i = b_i$，则称向量 α 与 β 相等.

定义 2.4 (向量的加法)**.** 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ 与 $\beta=(b_1,b_2,...,b_n)$ 都是 n 维向量，则 n 维向量：

$$\gamma=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$$

称为向量 α 与 β 的和，记作 $\gamma=\alpha+\beta$.

定义 2.5 (向量的数乘)**.** 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ 是 n 维向量,k 为实数,则称向量 $(ka_1,ka_2,...,ka_n)$ 为数 k 与向量 α 的数乘，记为

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,...,ka_n).$$

由此可以定义向量的减法：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1,a_2-b_2,...,a_n-b_n).$$

向量的加法与数乘统称为向量的**线性运算**.

定义 2.6 (n 维向量空间)**.** 所有 n 维向量所组成的集合，同时考虑它们在其上定义的线性运算，称为 n 维向量空间，记为 $\mathbb{R}^n$.

2.2 线性组合

定义 2.7 (线性组合)**.** 对于 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$，若存在一组数 $k_1,k_2,...,k_m$ 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称向量组 β 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的线性组合. 或称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表示.

注 2.1. 关于线性组合我们有以下有用的结论：

1. n 维零向量 $\theta=(0,0,...,0)$ 是任意 n 维向量组的线性组合：

$$\theta=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m;$$

2. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 中的任意向量 α_i 是此 n 维向量组的线性组合：

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_m;$$

3. 任何一个 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ 可以由 n 为基本向量组

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \epsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \epsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

线性表示为

$$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n.$$

由线性组合的定义可知，对于 m 元方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

令

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

其中 $i = 1, 2, ..., m$，则该方程组求解的问题与向量 β 是否能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表示的问题**完全一致**.

定理 2.1. *设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 为 n 维向量，则 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的线性组合的充要条件为线性方程组*

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

有解.

注 2.2. *设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 为 n 维向量，则其对应的是 m 个未知量，n 个方程的方程组.*

2.3 线性相关

定义 2.8 (线性相关)**.** *设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是 n 维向量组，若存在不全为 0 的一组数 $k_1, k_2, ..., k_m$ 使得*

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \theta$$

成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关，否则称线性无关.

注 2.3. *由定义可以得到以下有用的结论：*

1. *一个向量 α 线性相关的充要条件为 $\alpha = \theta$；*

2. *两个向量 α, β 线性相关的充要条件为 α, β 成比例；*

3. *若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中部分向量线性相关，则此向量组线性相关.*

4. *推论：若一个向量组线性无关，则其任意一个部分向量组也线性无关.*

5. *推论：任意一个包含零向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ...\theta, ..., \alpha_m$ 一定线性相关：*

$$\theta = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + k\theta + \cdots + 0\alpha_m;$$

线性相关的定义中，式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \theta$$

是未知量 $k_1, k_2, ..., k_m$ 的 m 元齐次线性方程组的向量形式，因此 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关的充要条件为其对应的齐次线性方程组有非零解.

推论 2.1. 由齐次方程组有非零解的充要条件：推论1.1，推论1.2可得：

1. n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关的充要条件为：$R(A) < m$，其中 $A_{n\times m} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$，即 m 个向量张成低于 m 维空间；

   而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关的充要条件为：$R(A) = m$，即 m 个向量张成 m 维空间；

2. n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性相关的充要条件为 $|A| = 0$，其中 $A_{n\times n} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$；

3. n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$，若 $m > n$，则此向量组必然线性相关 ($R(A) \le \min\{m, n\} = n < m$)；事实上 $\mathbb{R}^n$ 中的任意 $n+1$（或更多）个向量组成的向量组必然线性相关；

4. 设 l 为列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}^l$ 与 s 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{R}^s$. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，则 $l+s$ 维接长向量组：

   $$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i},\ (i = 1, 2, ..., m)$$

   也线性无关.

   证明. 记 $A_{l\times m} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), B_{s\times m} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$，则

   $$C_{l+s\times m} = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) = \left(\frac{A_{l\times m}}{B_{s\times m}}\right),$$

   因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，所以 $R(A) = m$，由秩的定义知：

   $$m = R(A) \le R(C) \le \min\{m, n\} \le m,$$

   因此 $R(C) = m$，即接长向量组线性无关； □

5. 若向量组线性相关，则截短向量组也线性相关.

定理 2.2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关的充要条件为，其中至少有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

证明. 必要性：若 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_m$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

假设 $k_i \neq 0$，则有

$$\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 + \frac{k_2}{k_i}\alpha_2 + \cdots + \frac{k_m}{k_i}\alpha_m = 0$$

因此

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_m}{k_i}\alpha_m,$$

即 α_i 为 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_m$.

充分性：设 α_i 为 $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_m$ 的线性组合，即存在常数 $k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_m$ 使得

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m.$$

因此

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m$$

显然 $k_1, \cdots, k_{i-1}, -1, k_{i+1}, \cdots, k_m$ 不全为零，因此线性相关. □

定理 2.3. *若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表示，且表示式唯一.*

证明. 因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关，因此存在一组不全为零的常数 $k_1, ..., k_m, k$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\beta = 0,$$

显然 $k \neq 0$，否则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 将线性相关，因此

$$\beta = \frac{k_1}{k}\alpha_1 + \frac{k_2}{k}\alpha_2 + \cdots + \frac{k_m}{k}\alpha_m.$$

下面证明唯一性，设存在两组不全为零的常数：$l_1, l_2, ..., l_m; k_1, k_2, ..., k_m$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

以及

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

因此

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m,$$

或者

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0,$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，因此 $k_i = l_i$，$i = 1, 2, ..., m$.

□

3 多个向量组间的关系

3.1 向量组的等价

定义 3.1 (向量组的等价)**.** *设有两个 n 维向量组*

$$(I)\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m,\ 及\ (II)\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_s,$$

若向量组 (I) 中的每一个向量都可以由向量组 (II) 线性表示，则称向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表示，若向量组 (I) 与向量组 (II) 可以相互线性表示，则称向量组 (I) 与 (II) 等价，记作 $(I) \approxeq (II)$.

定理 3.1. 向量组的等价满足以下性质：

1. 反身性：$(I) \approxeq (I)$；

2. 对称性：$(I) \approxeq (II) \Rightarrow (II) \approxeq (I)$；

3. 传递性：$(I) \approxeq (II), (II) \approxeq (III) \Rightarrow (I) \approxeq (III)$.

证明. 仅证明传递性，设 $(I) = (I)_{n\times m}, (II) = (II)_{n\times s}, (III) = (III)_{n\times t}$，因为 $(I) \approxeq (II)$ 因此存在常数 $k_{1i}, k_{2i}, ..., k_s$ 使得

$$\alpha_i = k_{1i}\beta_1 + k_{2i}\beta_2 + \cdots + k_{si}\beta_s,$$

因此

$$(I)_{n\times m} = (II)_{n\times s}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sm} \end{bmatrix}_{s\times m}$$

令由此矩阵为 $K = K_{s\times m}$，即 $(I) = (II)K$，称 K 为向量组 (I) 由向量组 (II) 的**线性表示系数矩阵**.

相应的，因为 $(II) \approxeq (III)$，则存在线性表示矩阵 M 使得 $(II)_{n\times s} = (III)_{n\times t}M_{t\times s}$，因此

$$(I)_{n\times m} = (II)_{n\times s}K_{m\times m} = (III)_{n\times t}M_{t\times s}K_{s\times m},$$

因此向量组 (I) 由向量组 (III) 的线性表示系数矩阵为 $M_{t\times s}K_{s\times m}$，易证向量组 (III) 也可以由 (I) 线性表示. □

注 3.1. 设线性系数表示矩阵 $K_{s\times m}$ 的列向量分别为 $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_m \in \mathbb{R}^s$.$K$ 右乘 (I)，即 K 的每一列都在对 (I) 的列向量做初等列变换生成一个 β，从而得到由 (I) 列向量组线性表示的向量组 (II).

定理 3.2. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ 线性表示，且 $m > s$，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关.

证明. 因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ 线性表示，因此存在线性表示矩阵 $K = K_{s\times m}$ 使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)_{s\times m} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)_{n\times s}K_{s\times m},$$

因此 $R(K) \le \min\{s, m\} \le s < m$，因此存在非零向量 $X = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$ 使得方程组

$$KX = \theta$$

成立，即

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)X = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)KX = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)\theta = \theta,$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关. □

注 3.2. 这是向量组线性表示中<u>最重要</u> 的证明技巧.

推论 3.1. 若向量组向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关,且可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示,则 $m\leq s$.

证明. 这是是定理3.2的逆否命题. □

推论 3.2. 若两个线性无关的向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\approxeq(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$ 则 $s=m$.

证明. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，且可以由 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，因此 $m\leq s$，同理 $m\geq s$，即 $m=s$. □

定理 3.3. 设向量 $A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ 的列向量线性无关，则向量:

$$\begin{aligned}
&k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2+\cdots+k_{1m}\alpha_m=\beta_1\\
&k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{2m}\alpha_m=\beta_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&k_{s1}\alpha_1+k_{s2}\alpha_2+\cdots+k_{sm}\alpha_m=\beta_s
\end{aligned}\tag{3}$$

，即 $AK=B$，则 B 的列向量 $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$ 线性无关的的充要条件为 $R(K)=s$，其中

$$K=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{s1}\\k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{s2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\k_{1m}&k_{2m}&\cdots&k_{sm}\end{bmatrix}.$$

证明 1. 易知

$$\begin{aligned}
l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s=&l_1(k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2+\cdots+k_{1m}\alpha_m)\\
&+l_2(k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{2m}\alpha_m)\\
&+\cdots+l_s(\alpha_1+k_{s2}\alpha_2+\cdots+k_{sm}\alpha_m)\\
=&(l_1k_{11}+l_2k_{21}+\cdots+l_sk_{s1})\alpha_1\\
&+(l_1k_{12}+l_2k_{22}+\cdots+l_sk_{s2})\alpha_2\\
&+\cdots+(l_1k_{1m}+l_2k_{2m}+\cdots+l_sk_{sm})\alpha_m.
\end{aligned}$$

因为向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}
l_1k_{11}+l_2k_{21}+\cdots+l_sk_{s1}=0\\
l_1k_{12}+l_2k_{22}+\cdots+l_sk_{s2}=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
l_1k_{1m}+l_2k_{2m}+\cdots+l_sk_{sm}=0
\end{cases}\tag{4}$$

即

$$\begin{bmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{s1}\\k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{s2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\k_{1m}&k_{2m}&\cdots&k_{sm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\cdots\\l_s\end{bmatrix}=0$$

若要向量 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 向量无关，即方程组4 只有零解，即 $R(K)=s$. □

证明 2. 参考定理?? 的证法,此定理还可如下证明,设 $B=B_{n\times m},A=A_{n\times t},K=K_{t\times m}$,则 $B=AK$ (注意 K 右乘 A，K 的每一列都在对 A 的列向量做初等列变换生成一个 β，从而得到由 A 列向量组线性表示的向量组 B)，若 $R(A)=t$，则 $R(B)=m$ 的充要条件为 $R(K)=m$.

充分性，因为 $R(A)=t$，因此 $AY=\theta$ 只有零解，又因为 $R(K)=t$，则 $KX=\theta$ 只有零解，因此 $BX=AKX=\theta$ 只有零解，因此 $R(B)=m$

必要性，若 $R(B)=m$，即 $BX=\theta$ 只有零解，即 $AKX=\theta$ 只有零解，因此 $KX=\theta$，又因为 $X=\theta$，因此 $R(K)=m$. □

注 3.3. 特殊的，若 $s=m$，则 $K=K_{m\times m}$，则当 A 的列向量线性无关时，$\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 线性无关的充要条件为 $|K|\neq 0$.

注 3.4 (向量组间的表示关系)**.** 设 $A=A_{n\times m},B=B_{n\times s},K=K_{s\times m}$，当

$$A=BK$$

时，称 A 为被表示矩阵，B 为表示矩阵，K 为系数矩阵，则有：

$$AX=\theta\Leftrightarrow BKX=\theta,$$

1. 当 B 的列向量线性无关时，即

$$AX=\theta\Leftrightarrow BKX=\theta\Leftrightarrow KX=\theta,$$

即线性方程组 $AX=\theta$ 与 $KX=\theta$同解，因此当 A 的列向量线性无关时，表示系数矩阵 K 的列向量线性无关；当 A 的列向量线性相关时，表示系数矩阵 K 的列向量线性相关，即：

当表示矩阵 B 列向量线性无关时，被表示矩阵 A 和系数矩阵 K 的列向量有相同的线性相关关系. 特殊的，当表示矩阵 B 为方阵时，有矩阵经初等行变换后有相同的线性相关关系.

(K 相当于对 B 的列向量进行初等列变换，B 相当于对 K 的行向量进行初等行变换)

2. 当 K 的列向量线性无关时，则

$$AX=BKX=\theta,$$

若 A 列向量线性相关，即存在非零向量 X_1 使得 $AX_1=\theta$，因为 K 列向量线性无关，因此 $Y=KX_1\neq\theta$，从而存在非零向量 Y 使得 $BY=\theta$，即 B 列向量线性相关；

若 A 列向量线性无关，即但且仅当 $X=\theta$ 时有 $AX=BKX=\theta$，此时

$$BKX=\theta\Leftrightarrow AX=\theta\Leftrightarrow X=\theta\Leftrightarrow KX\theta,$$

即 B 列向量线性无关，因此：

系数表示矩阵 K 列向量线性无关时，被表示矩阵 A 与表述矩阵 B 列向量的同时相关或不相关，并且两者 $R(A)=R(B)$ (因为初等行、列变换不改变矩阵的秩)，但是不能推出其是否有一致的线性相关关系，因为得不到 $AX=\theta$ 与 $BX=\theta$ 同解.

综上：当表示矩阵（系数矩阵）列向量无关时：被表示矩阵列向量无关 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵（表示矩阵）列向量无关（或 $R(A)=R(B)$），特别的，当表示矩阵列向量无关时，系数矩阵与被表示矩阵有相同的线性相关关系.

定理3.2与定理3.3描述的情形都是表示矩阵列向量无关的情形（前者只需将 $\beta_1,...,\beta_s$ 假设为线性无关即可，这种假设是可行的，因为当向量组 $\{\alpha\}$ 可以被向量组 $\{\beta\}$ 线性表示使，它必可以被 $\{\beta\}$ 的极大无关组线性表示）.

例 3.1 (常见题型)**.** 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是：

$(A)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

$(B)\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

$(C)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$;

$(D)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

解.

$$\begin{aligned} B &= (k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3, j_1\alpha_1+j_2\alpha_2+j_3\alpha_3, h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+h_3\alpha_3) \\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot\begin{bmatrix} k_1 & j_1 & h_1 \\ k_2 & j_2 & h_2 \\ k_3 & j_3 & h_3 \end{bmatrix} = A\cdot K \end{aligned}$$

已知 A 列向量线性无关，则当 K 列向量无关，即 $|K|\neq 0$ 时，B 列向量线性无关. □

注 3.5 (两个方程组的解与秩)**.** 若 X 是 $AX=\theta$ 的解 $\Rightarrow$ X 是 $BX=\theta$ 的解，即

$$X\in\ker A\Rightarrow X\in\ker B,$$

则 $\ker A\subset\ker B$，即 $R(\ker A)\le R(\ker B)$，因此

$$n-R(A)\le n-R(B)\Rightarrow R(A)\ge R(B).$$

因此：

- 若 X 是 $AX=\theta$ 的解 $\Rightarrow$ X 是 $BX=\theta$ 的解，则 $R(A)>R(B)$;
- 若 X 是 $AX=\theta$ 的解 $\Leftrightarrow$ X 是 $BX=\theta$ 的解，则 $R(A)=R(B)$;
- 若 X 是 $AX=\theta$ 的解 $\Leftrightarrow$ X 是 $BX=\theta$ 的解，即 $AX=\theta$ 与 $BX=\theta$ 同解，则 A 与 B 的列向量有相同的线性相关关系.

3.2 极大线性无关组

定义 3.2. 设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的部分向量组，且满足 1) $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 线性无关；2) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 中每一向量都可以由向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 线性表示，则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的一个极大无关组.

定理 3.4. 由定义可知，极大线性无关组有以下性质：

1. 任意一个向量组与其极大线性无关组等价;
2. 一个向量组的任意两个极大线性无关组（如果有的话）等价;
3. 一个向量组的任意两个极大线性无关组（如果有的话）中的向量个数相同;

证明. 第三条可以由推论3.2 证明. □

3.3 向量组的秩

定义 3.3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的极大无关组所含向量个数称为向量组的秩，记为 $R(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$.

定理 3.5. 由定义可知，向量组的秩有以下性质:

1. 由于零向量组成的向量组没有极大无关组，因此其秩为 0;
2. 含有任意非零向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 有
$$0 < R(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \le m$$
当 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关时等号成立;
3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关的充要条件为 $R(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = m$；线性相关的充要条件为 $R(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) < m$;
4. 向量组的秩唯一.

定理 3.6. 等价的向量组有相同的秩.

证明. 设向量组 (I) 的极大无关组为 $(I)^*$，向量组 (II) 的极大无关组为 $(II)^*$，且 $(I) \approxeq (II)$，因此
$$(I)^* \approxeq (I) \approxeq (II) \approxeq (II)^*$$
由等价的传递性可知 $(I)^* \approxeq (II)^*$，因为 $(I)^*, (II)^*$ 均线性无关，由推论??可知 $R(I) = R(II)$. □

推论 3.3. 若向量组 (I) 可以由 (II) 线性表示，则 $R(I) \le R(II)$.

证明. 设 (I) 的极大无关组为 $(I)^*$，因此 $(I)^*$ 可以被 (II) 线性表示，因为 $(I)^*$ 中的向量线性无关，由推论??可知，$R(I) \le R(II)$. □

3.4 向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义 3.4. 称 $m \times n$ 矩阵
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
的行向量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), (i = 1, 2, ..., m)$ 的秩为矩阵 A 的行秩;

列向量组 $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T, (j = 1, 2, ..., n)$ 的秩为矩阵 A 的列秩.

定理 3.7. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A 列秩等于行秩等于 A 的秩.

证明. 设 $R(A)=r$，则在 A 中存在 r 阶子式 D，使得 $D\neq 0$，因此 D 的列向量线性无关，由推论2.1第 4 条可知，D 中列向量在 A 中的列向量的接长向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 也线性无关.

现考虑 A 中任意不属于这些接长向量的向量 α_j，则向量组 $(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r},\alpha_j)$ 必线性相关，否则由推论2.1第 1 条可知 $R(A)>r$ 而矛盾，因此 A 中任意列向量均可有线性无关的部分向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_r}$ 线性表示，则此向量组也是 A 的列向量的极大无关组，从而其列秩为 r.

易知 A 的行秩等于 $R(A^T)=R(A)=r$，因此 A 列秩等于行秩等于 A 的秩. □

推论 3.4. 初等变换不改变矩阵行（列）向量的秩.

证明. 因为初等变换不改变矩阵的秩（定理??），因此不改变其行秩与列秩. □

定理 3.8. 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量之间的线性关系.

证明. 令

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m),$$

即

$$PA=B,$$

其中 P 为有限个初等矩阵的乘积，从而方程组 $AX=\theta$ 与 $BX=\theta$ 通解，即方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\theta,$$

与

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=\theta,$$

通解，从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 有相同的线性关系. □

A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性关系是指：

1. $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$ 的充分必要条件为 $R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=r$；
2. A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的部分组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性无关的充分必要条件为 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 中对应的部分组 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$ 线性无关；
3. A 的的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的某个向量 α_j 可由部分组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表示为：

$$\alpha_j=k_1\alpha_{j_1}+k_2\alpha_{j_2}+\cdots+k_r\alpha_{j_r}$$

的充分必要条件为 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 中对应的向量 β_j 可以由对应的部分组 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$ 线性表示为：

$$\beta_j=k_1\beta_{j_1}+k_2\beta_{j_2}+\cdots+k_r\beta_{j_r}.$$

定理?? 为我们提供了求向量组的秩、向量组的极大无关组以及将向量组中其余向量表示为表示为极大无关组的线性组合提供了有效方法.

定理 3.9. 设 $A = A_{m\times p}, B = B_{p\times n}$，则 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

证明. 将矩阵 A 按列分块为

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p]$$

因此

$$AB = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{i1}, \sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{in}\right]$$

即 AB 的列向量可以由 A 的列向量线性表示，由推论3.3 可知 $R(AB) \le R(A)$，相似的，对 B 按行分块有 $R(AB) \le R(B)$，因此 $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$. □

我们现在重新证明方程组有解的充要条件（定理1.2）：线性方程组 $AX = \beta$ 有解的充分必要条件为 $R(A) = R(\overline{A})$.

证明. 充分性，若 $R(A) = R(\overline{A}) = r$，设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 A 的极大无关组，则它也是 $\overline{A}$ 的极大无关组，由此 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，从而可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，方程组有解；

必要性，若方程组有解则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \approxeq (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta)$$

由推论**??**可知 $R(A) = R(\overline{A})$. □

注 3.6 (秩公式总结)**.** 对矩阵的秩公式做一个总结：

1. $R(A) = R(A^T)$;
2. $R(A^TA) = R(A)$;

   证明. 若 $AX_1 = \theta$，则 $A^TAX_1 = A^T\theta = \theta$，所以 $R(A) \ge R(A^TA)$；

   若 $A^TAX_2 = \theta$，则 $X_2^TA^TAX_2 = \theta = (AX_2)^T(AX_2) = \theta \Rightarrow AX_2 = \theta$，所以 $R(A^TA) \ge R(A)$，因此 $R(A^TA) = R(A)$. 更多的，A^TA 与 A 有相同的线性相关关系. □

3. 当 $k =\neq 0$ 时，$R(kA) = R(A)$;
4. $R(A+B) \le R(A) + R(B)$;

   设 A 列向量的极大无关组为 A_1，B 列向量的极大无关组为 B_1，则 $A+B$ 可以由 $(A_1|B_1)$ 线性表示，因此

   $$R(A+B) \le R(A_1|B_1) \le R(A_1) + R(B_1) = R(A) + R(B).$$

5. $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$;

6. $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A|B) \leq R(A) + R(B)$;

   第二个不等号已证，现证第一个不等号:

   因为 A 的列向量可以被 $A|B$ 的列向量线性表示，B 的列向量可以被 $A|B$ 的列向量线性表示，因此 $R(A) \leq R(A|B), R(B) \leq R(A|B)$，即

   $$\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A|B).$$

7. 若 A 可逆（或满秩），则 $R(AB) = R(BA) = R(B)$（向量组表示关系，注??）;

8. 若 $A = A_{m\times n}, B = B_{n\times s}$，$AB = O$，则 $R(A) + R(B) \leq n$;

9. 分块矩阵 $R\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = R(A) = R(B)$.

4 向量的内积与 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基

4.1 向量的内积、长度与夹角

4.1.1 （一）向量的内积

定义 4.1 (内积). 对给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，称实数

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

为向量 α 与 β 的内积，记为 (α, β).

由定义易证内积有以下性质:

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. $(\alpha + \gamma, \beta) = (\alpha, \beta) + (\gamma, \beta)$;
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0$，当且仅当 $\alpha = \theta$ 时 $(\alpha, \alpha) = \theta$.

其中 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$.

4.1.2 （二）长度与距离

定义 4.2 (长度). 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量，称非负实数 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 为向量 α 的长度或范数，记为 $\| \alpha \|$，即

$$\| \alpha \| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

定义 4.3 (单位向量与单位化). 称长度为 1，即 $\| \alpha \| = 1$ 的向量为单位向量，则对于任意非零向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，向量 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为单位向量，这样得到单位向量的方法称之为向量 α 的单位化.

向量的长度有以下性质

1. $\| \alpha \| \geq 0$，当且仅当 $\alpha = \theta$ 时有 $\| \alpha \| = 0$；

2. 对于任意向量 α 和任意实数 k，有 $\| k\alpha \| = |k| \| \alpha \|$.

   证明.
$$\| k\alpha \| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = \sqrt{k^2(\alpha, \alpha)} = |k| \| \alpha \| .$$
□

定义 4.4 (距离)**.** $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，称 $\| \alpha - \beta \|$ 称为 α 与 β 的距离，记为 d，即

$$d = \| \alpha - \beta \| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

4.1.3 （三）夹角与正交

定理 4.1 (柯西-布涅可夫斯基不等式)**.** 对于任意向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，恒有

$$|(\alpha, \beta)| \leq \| \alpha \| \cdot \| \beta \|$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时，等号成立.

证明. 1. 若 α 与 β 线性相关:

（1）若 α 或 β 至少一个为零向量时，显然有

$$0 = |(\alpha, \beta)| \leq \| \alpha \| \cdot \| \beta \| = 0;$$

（2）α 或 β 均为非零向量时，令 $\beta = k\alpha$，则

$$|(\alpha, \beta)| = |(\alpha, k\alpha)| = k|(\alpha, \alpha)| = k \cdot \| \alpha \| \cdot \| \alpha \| = \| \alpha \| \cdot \| \beta \| .$$

2. 若 α 与 β 线性无关:

   即对任意实数 t 有 $\beta - t\alpha \neq \theta$，即

$$0 < (\beta - t\alpha, \beta - t\alpha) = (\beta, \beta) - 2t(\alpha, \beta) + t^2(\alpha, \alpha)$$

   则
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\alpha, \beta)^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) < 0$$

   因此
$$|(\alpha, \beta)| = \sqrt{(\alpha, \beta)^2} < \sqrt{(\alpha, \alpha)} \cdot \sqrt{(\beta, \beta)} = \| \alpha \| \cdot \| \beta \| .$$
□

由柯西-布涅可夫斯基不等式可知，当 $\| \alpha \| \cdot \| \beta \| \neq 0$ 时：

$$\left| \frac{(\alpha, \beta)}{\| \alpha \| \cdot \| \beta \|} \right| \leq 1$$

由此定义向量的夹角.

定义 4.5 (夹角)**.** 设 α, β 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量，则定义 α, β 间的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\| \alpha \| \cdot \| \beta \|}$$

其中 $0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$.

定义 4.6 (正交)**.** 设 α, β 为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，若 $(\alpha, \beta) = 0$ 则称 α 与 β 正交，记为 $\alpha \perp \beta$，零向量与任意向量正交.

定理 4.2. 设 α, β 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量，则 α 与 β 正交的充要条件为 $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$.

证明. 充分性，若 $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{(\alpha, \beta)}{\| \alpha \| \cdot \| \beta \|} = \cos \langle \alpha, \beta \rangle = 0,$$

因为 α, β 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量，因此 $(\alpha, \beta) = 0$，即 α 与 β 正交；

必要性，若 α 与 β 正交，则

$$\frac{(\alpha, \beta)}{\| \alpha \| \cdot \| \beta \|} = \cos \langle \alpha, \beta \rangle = 0,$$

因为 $0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$，所以 $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}$. □

4.2 正交向量组

定义 4.7 (正交向量组)**.** 称 $\mathbb{R}^n$ 中一组两两正交的非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为一个正交向量组.

定理 4.3. $\mathbb{R}^n$ 中的正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 必定线性无关.

证明. 设有一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \theta,$$

因为 $\alpha_i \neq \theta, \alpha_i \perp \alpha_j$，$(i \neq j)$，因此有

$$(\alpha_i, \alpha_i) > 0,\ (\alpha_i, \alpha_j) = 0$$

因此

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m, \alpha_i) = (\theta, \alpha_i) = 0,$$

即

$$k_1(\alpha_1, \alpha_i) + k_2(\alpha_2, \alpha_i) + \cdots + k_i(\alpha_1, \alpha_i) + \cdots + k_m(\alpha_m, \alpha_i) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0.$$

因为 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$，所以 $k_i = 0$，可知 $k_1, k_2, \cdots, k_m = 0$，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关. □

推论 4.1. $\mathbb{R}^n$ 中任意一个正交向量组的向量个数不超过 n 个.

证明. 由推论2.1 可知，$\mathbb{R}^n$ 中任意 m $(m > n)$ 个向量组必然线性相关，因此必然不两两正交. □

定义 4.8 (基). 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性无关的向量组，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

定义 4.9 (正交基与标准正交基). 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交向量组，则称设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基；当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 均为单位向量时，称这组正交基为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

定理 4.4. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基的充要条件为

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

证明. 由标准正交基的定义可证. □

注 4.1. $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基不是唯一的.

4.3 向量组正交化

定理 4.5. $\mathbb{R}^n$ 中任意一线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, $(2 \leq m \leq n)$ 可化为正交向量组.

证明. 利用数学归纳法，当 $m = 2$ 时，令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + k\beta_1$，令 $\beta_1 \perp \beta_2$，则

$$(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, \alpha_2 + k\beta_1) = (\beta_1, \alpha_2) + k(\beta_1, \beta_1) = 0,$$

解得

$$k = -\frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)},$$

即

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1.$$

显然 $\beta_2 \neq 0$（否则 α_2, α_1 线性相关，矛盾）且 β_1, β_2 与 α_1, α_2 可以互相线性表示，从而 β_1, β_2 是与 α_1, α_2 等价的正交向量组.

假设当 $m = i - 1$ 时结论成立，即有与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 等价的正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$，现证当 $m = i$ 时结论亦成立：

设 $\beta_i = \alpha_i + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_{i-1}\beta_{i-1}$，使得 β_i 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$ 均正交，则对任意 $j = 1, 2, \cdots i - 1$ 有：

$$(\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_{i-1}\beta_{i-1}, \beta_j) = (\alpha_i, \beta_j) + k_j(\beta_j, \beta_j) = 0$$

解得

$$k_j = -\frac{(\alpha_i, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}$$

从而

$$\beta_i = \alpha_i - \frac{(\alpha_i, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_i, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 + \cdots + -\frac{(\alpha_i, \beta_{i-1})}{(\beta_{i-1}, \beta_{i-1})}\beta_{i-1}.$$

于是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ 等价的正交向量组.

因此 $\mathbb{R}^n$ 中任意一线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, $(2 \leq m \leq n)$ 可化为正交向量组. □

注 4.2. 上定理证明中构造正交向量 β_i 的方法称为**格拉姆-施密特（*Gram-Schmidt*）正交化法**，构造的思想是对于线性无关向量组中的向量 α_i，通过 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$ 的修正构造出正交向量组的对应向量 β_i. 在利用正交的性质 $(\beta_i, \beta_i) > 0, (\beta_i, \beta_j) = 0$, $(i \neq j)$，求得修正系数，修正系数的公式为：

$$k_j = -\frac{(\alpha_i, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}, \ j = 1, 2, \cdots, i-1.$$

推论 4.2. $\mathbb{R}^n$ 中的任意一组基可以化为一组标准正交基.

证明. 利用格拉姆-施密特（Gram-Schmidt）正交化法得到与基向量组等价的正交向量组，则对正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 中的每个向量单位化：

$$\eta_j = \frac{\beta_j}{\| \beta_j \|}, \ j = 1, 2, \cdots, n$$

即可化得与基向量组等价的标准正交基. □

注 4.3. $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ 等价说明两向量组张成的线性空间一致，从而正交化具有意义.

4.4 正交矩阵

定义 4.10 (正交矩阵)**.** 设 Q 为 n 阶实矩阵，若 $Q^TQ = E$，则称 Q 为正交矩阵.

定理 4.6. 正交矩阵有以下性质：

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 P, Q 为 n 阶正交矩阵，则 PQ 也为 n 阶正交矩阵；
3. 实矩阵 Q 为正交矩阵的充要条件为 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
4. 实矩阵 Q 为 n 阶正交矩阵的充要条件为 Q 的行（列）向量组为单位正交向量组（即 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基）.

证明. 2

$$(PQ)^T PQ = Q^T P^T PQ = Q^T EQ = Q^T Q = E.$$

4 将 Q 按列分块，即 $Q = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，以及

$$Q^T = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}$$

因此

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{bmatrix} = E.$$

因此

$$\alpha_j^T\alpha_j = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

由定理**??** 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

□

5 线性方程组解的结构

5.1 齐次线性方程组解的性质

定理 5.1. *对于其次线性方程组*

$$AX = \theta,$$

1. *若 η_1, η_2 是解，则 $\eta_1 + \eta_2$ 也是解；*

2. *若 η_1 是解，则对于任意常数 k，$k\eta_1$ 也是解.*

证明. 1. 因为 η_1, η_2 是解，所以有

$$A\eta_1 = \theta,\ A\eta_2 = \theta,$$

因此

$$A(\eta_1 + \eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = \theta + \theta = \theta,$$

因此 $\eta_1 + \eta_2$ 也是解；

2. 若 η_1 是解，则对于任意常数 k 有：

$$A(k\eta_1) = kA\eta_1 = k\theta = \theta,$$

因此 $k\eta_1$ 也是解.

□

推论 5.1. *若 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是齐次线性方程组的 s 个解，则其线性组合*

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s = \sum_{i=1}^{s} k_i\eta_i$$

也是解，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为任意常数.

该性质表明:

1. 当齐次线性方程组有非零解时，一定有无穷多个解;

2. 将无穷多个解表示为有限个解的线性组合是可能的，且这有限个解应该是齐次线性方程组全体解向量构成的极大无关组.

注 5.1. 这里列举一种题型，已知 $X_1, X_2, ..., X_s \in \mathbb{R}^n$ 均是 $AX = \theta$ 的解，其中 $A = A_{m\times n}$，欲求 A. 令 $H_{n\times s} = (X_1, X_2, ..., X_s)$，即 $AH = (\theta, \theta, ..., \theta) = O_{m\times s}$，则

$$H^T A^T = O^T_{m\times s} = O_{s\times m},$$

因此只需求得 H^T 的基础解析，它是 A^T 的列向量，即 A 的行向量.

5.2 齐次线性方程组解的结构

定义 5.1 (基础解系)**.** 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是齐次线性方程组 $AX = \theta$ 的一组解向量，若满足：(*1*) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关；(*2*) 齐次线性方程组 $AX = \theta$ 的任意一个解向量都可以由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性表示，则称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是齐次线性方程组 $AX = \theta$ 的一个基础解系.

显然齐次线性方程组 $AX = \theta$ 的基础解系是其全体解向量的一个极大线性无关组，若要表示其全体解向量，只需表示出其基础解系即可.

定理 5.2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，若 $R(A) < n$，则方程组 $AX = \theta$ 存在一个由 $n - r$ 个解向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 构成的基础解析，其线性组合

$$\tilde{\eta} = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

表示 $AX = \theta$ 的全部解，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

证明. 首先证明 $AX = \theta$ 有 $n - r$ 个线性无关的解向量.

由高斯消元法，不失一般性，对矩阵 A 进行初等行变换得到其最简阶梯型矩阵 B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由定理**??** 可知 $AX = \theta$ 有通解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1,n}x_n = 0 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{r,n}x_n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

令方程组5 中的 $n-r$ 个自由未知量 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)^T$ 分别取 $n-r$ 组值:

$$(1, 0, \cdots, 0)^T,\ (0, 1, \cdots, 0)^T,\ \cdots,\ (0, 0, \cdots, 1)^T,$$

代入方程组可得方程组 $AX=\theta$ 的 $n-r$ 个解:

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \eta_2 = \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \eta_{n-r} = \begin{bmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

显然，截短向量组

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

线性无关，由推论2.1可知向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

下面证明方程组 $AX=\theta$ 的任一解向量都可以由向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表示.

设 $\eta = (a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, ..., a_n)^T$ 是方程组 $AX=\theta$ 的任意一组解向量，由齐次线性方程组的性质可知

$$\tilde{\eta} = a_{r+1}\eta_1 + a_{r+2}\eta_2 + \cdots + a_n\eta_{n-r}$$

也是方程组 $AX=\theta$ 的解向量，则

$$\eta - \tilde{\eta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ a_{r+1} \\ a_{r+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - a_{r+1}\begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - a_{r+2}\begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \cdots - a_n\begin{bmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

将其带入方程组5 得 $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 0$，因此 $\eta = \tilde{\eta}$，即

$$\eta = \tilde{\eta} = a_{r+1}\eta_1 + a_{r+2}\eta_2 + \cdots + a_n\eta_{n-r}.$$

综上齐次线性方程组 $AX=\theta$ 的任意一个解都已可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表示. □

注 5.2. 已知 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 A 的**零空间**（nullspace）又称**核**（kernel），是一组由下列公式定义的 n 维向量：

$$\ker A=\{X\in\mathbb{R}^n: AX=\theta\}.$$

易知，A 的基础解系正是 $\ker(A)$ 的一组基，而 A 的基础解系中向量的个数 $n-r$ 为 $\ker A$ 的秩，即 $R(\ker A)=n-r$，或 $R(\ker A)+R(A)\equiv n$.

注 5.3. 定理**??** 的证明过程给出了求解齐次线性方程组基础解析的具体方法. 当然由于自由未知量的选取与赋值的不同，齐次线性方程组基础解系不是唯一的，但是它们一定是等价的，因为它们张成了 A 的核.

定义 5.2 (结构式通解)**.** 通常将形如

$$\tilde{\eta}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

称为齐次线性方程组 $AX=\theta$ 的结构式通解. 其中 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 为齐次线性方程组的基础解系，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

综上，若任意向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 满足下列三个条件：

1. 是齐次线性方程组 $AX=\theta$ 的一组向量解；
2. $s=n-R(A)$；
3. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关.

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为齐次线性方程组 $AX=\theta$ 的一个基础解系.

定理 5.3. 设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵，且 $AB=O_{m\times p}$，则

$$R(A)+R(B)\leq n.$$

证明. 当 $B=O$ 时显然，现假设 $B\neq O$，将 B 按列分块，即 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$，且至少一个列向量是非零向量，则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_p)=O=(\theta,\theta,\cdots,\theta)$$

因此 $\beta_j(j=1,2,...,p)$ 是 $AX=\theta$ 的解向量，则 $\beta_j(j=1,2,...,p)$ 可以被齐次方程组的基础解系线性表示，由推论**??**有：

$$R(B)\leq R(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})=n-R(A),$$

因此 $R(A)+R(B)\leq n$. □

注 5.4. 显然 $B\subset\ker A$，因此 $RB\leq R(\ker A)=n-RA$.

5.3 非齐次线性方程组解的性质

定义 5.3 (导出组). 称非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 对应的齐次线性方程组 $AX=\theta$，为导出组.

定理 5.4. 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 与其导出组 $AX=\theta$ 的解有如下性质：

1. 若 γ_1,γ_2 是 $AX=\beta$ 的任意两个解向量，则 $\gamma_1-\gamma_2$ 为其导出组的解；
2. 若 γ_1 是 $AX=\beta$ 的解向量，η 为其导出组的解向量，则 $\gamma+\eta$ 为 $AX=\beta$ 的解向量.

证明. 1. 因为 γ_1,γ_2 是 $AX=\beta$ 的两个解向量，所以

$$A(\gamma_1-\gamma_2)=A\gamma_1-A\gamma_2=\beta-\beta=\theta.$$

因此 $\gamma_1-\gamma_2$ 为其导出组的解；

2. 因为 γ_1 是 $AX=\beta$ 的解向量，η 为其导出组的解向量，所以

$$A(\gamma_1+\eta)=A\gamma_1+A\eta=\beta+\theta=\beta.$$

因此 $\gamma+\eta$ 为 $AX=\beta$ 的解向量.

□

定理 5.5. 若 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 是方程组 $AX=\beta$ 的任意 s 个解向量，

$$X=k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_s\gamma_s=\sum_{i=1}^{s}k_i\gamma_i,$$

则

1. $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，X 为 $AX=\theta$ 的解；
2. $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时，X 为 $AX=\beta$ 的解；
3. $k_1+k_2+\cdots+k_s\neq 0$ 时，$\frac{1}{k_1+k_2+\cdots+k_s}X$ 为 $AX=\beta$ 的解.

证明.

$$\begin{aligned}AX&=A(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_s\gamma_s)=k_1A\gamma_1+k_2A\gamma_2+\cdots+k_sA\gamma_s\\&=k_1\beta+k_2\beta+\cdots+k_s\beta\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\beta.\end{aligned}$$

□

5.4 非齐次线性方程组解的结构

定理 5.6. 若 γ_0 是 $AX=\beta$ 的一个解，$\tilde{\eta}$ 为 $AX=\theta$ 的结构式通解，则 $AX=\beta$ 的一般解可以表示为

$$X=\gamma_0+\tilde{\eta}.$$

证明. 由非齐次线性方程组解的性质可知 $X=\gamma_0+\tilde{\eta}$ 为 $AX=\beta$ 的解，下证明 $AX=\beta$ 的任意一个解都可以写成 $X=\gamma_0+\tilde{\eta}$ 的形式. 设 γ 为 $AX=\beta$ 的任意一个解，则 $\gamma-\gamma_0$ 为其导出组的解，因此可以被导出组基础解系线性表示，即

$$\gamma-\gamma_0=\tilde{\eta},$$

即

$$\gamma=\gamma_0+\tilde{\eta}.$$

证毕. □

定义 5.4. *称 γ_0 为 $AX=\beta$ 的特解，称 $X=\gamma_0+\tilde{\eta}$ 为 $AX=\beta$ 的通解.*

易知对于非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 只有一个解的充要条件为导出组 $AX=\theta$ 只有零解；有无穷解的充要条件为导出组 $AX=\theta$ 有非零解.