高等数学基本概念与方法: 极限

Collection of Calculus Tips: Limit

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等数学期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Calculus (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 函数

1.1 单调性

1.1.1 A. 概念

定义 1.1. 设函数 $y=f(x)$ 在某区间 $\mathcal{D}$ 上有定义，若对于任意 $x_1,x_2\in\mathcal{D}$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 单调增（减），也可称函数 $y=f(x)$ 狭义单调增（减）；

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 $\mathcal{D}$ 上有定义，若对于任意 $x_1,x_2\in\mathcal{D}$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leq(\geq)f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 单调不减（不增），也可称函数 $y=f(x)$ 广义单调增（减）。

1.1.2 B. 判定

1. 利用定义.

2. 利用导数.

定理 1.1 (函数广义单调的充要条件)**.** 设函数 $f(x)$ 在所给区间 χ（闭区间或开区间，有限的或无穷的）内有定义且连续，并且在其内部有有限导数 $f'(x)$，则 $f(x)$ 在区间 χ 内广义的单调增大（减小）$\Leftrightarrow$ 对于 χ 内的 $x,f'(x)\geq 0(\leq 0)$.

定理 1.2 (函数狭义单调的充要条件)**.** *设函数 $f(x)$ 在所给区间 χ（闭区间或开区间，有限的或无穷的）内有定义且连续，并且在其内部有有限导数 $f'(x)$，则 $f(x)$ 在区间 χ 内狭义的单调增大（减小）$\Leftrightarrow$*
1）对于 χ 内的 $x, f'(x) \geq 0(\leq 0)$.
2）$f'(x)$ 在 χ 内任意一部分区间内不恒等于 0.

需要注意的一点是狭义单调的函数导数也可以在个别点等于 0. 其中个别点甚至可以是有限区间中的无穷多个，只要它们是离散的.

定理 1.3 (函数狭义单调充分判别法)**.** *若只要除去有限个 x 值，就到处都有 $f'(x) > 0(< 0)$，则函数 $f(x)$ 为狭义增（减）函数.*

1.1.3 C. 应用

1. 证明方程根的个数. 若要证明方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上有唯一根，其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续，只需证明 $f(a) \cdot f(b) < 0$，再利用介值定理得到根的存在性，然后证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的单调性即可证明根的唯一性.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则由连续函数的保号性可知只需证明 $\lim_{x\to a^+} f(x) \cdot \lim_{x\to b^-} f(x) < 0$ 就可以证明根的存在性。

2. 证明不等式.

1.2 奇偶性

1.2.1 A. 概念

定义 1.2. *设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $\forall x \in D$ 有 $-x \in D$，若 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.*

1.2.2 B. 判断

1. 利用定义.

2. 利用导数.

1. $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 为奇函数；
2. 若 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为偶函数.
3. 类似的，若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f''(x)$ 为奇函数；若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f''(x)$ 为偶函数；
4. 一般的，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f^{(2k)}(x)$ 为奇函数，$f^{(2k+1)}(x)$ 为偶函数；若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f^{(2k)}(x)$ 为偶函数，$f^{(2k+1)}(x)$ 为奇函数.

3. 利用积分. 若 $f(x)$ 连续，则

1. 若 $f(x)$ 为奇函数，则其任意原函数为偶函数，即 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；（任意 a 均成立）
2. 若 $f(x)$ 为偶函数，则其原函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 中只有一个是奇函数.
3. 因为偶函数的原函数不一定是奇函数，因此若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_b^x \int_a^u f(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 不一定是奇函数，但是 $\int_0^x \int_a^u f(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 是奇函数；
4. 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_b^x \int_a^u f(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 不一定是偶函数，但是 $\int_b^x \int_0^u f(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 是偶函数；

注 1.1. 需要注意的是，当 $a=0$ 时 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数，但是若 f 满足 $\int_0^{a'} f(t)\mathrm{d}t=0$，则 $\int_{a'}^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是奇函数，此时函数 $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与函数 $F_2(x)=\int_{a'}^x f(t)\mathrm{d}t$<u>是同一个函数</u>.

综上若 $f(x)$ 为偶函数，且 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数，不能推出 $a=0$.

4. 其他运算. 若 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则

1. $f\circ g(x), g\circ f(x), g\circ g(x)$ 为偶函数；$f\circ f(x)$ 为奇函数；
2. $f(x)\cdot f(x), g(x)\cdot g(x)$ 为偶函数；$f(x)\cdot g(x)$ 为奇函数.

1.2.3 C. 应用

1. 常见奇偶函数.

1. $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x$ 是奇函数；
2. $\ln\frac{1-x}{1+x}, \frac{e^x-1}{e^x+1}, \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \ln(-x+\sqrt{1+x^2}), f(x)-f(-x)$ 为奇函数；
3. $x^2, |x|, f(x)+f(-x)$ 为偶函数.
4. 若 $g(x)$ 为偶函数，对于任意函数 $f(x)$，$f(g(x))$ 为偶函数，如 $f(x^2)$ 等；
5. 若 $f(x), g(x)$ 为奇函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数.

2. 利用奇偶性的导数性质求导数. 需要说明，函数奇偶性的导数性质：若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$. 一般的，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f^{(2k+1)}(0)=0$；若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f^{(2k)}(0)=0$.

例 1.1. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，求 $f^{(3)}(0)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，$f^{(3)}(x)$ 为奇函数，因此 $f^{(3)}(0)=0$.

3. 求定积分. 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为可积函数或连续函数，则：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

1.3 周期性

1.3.1 A. 概念

定义 1.3. 若存在实数 $T>0$，对任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数. 使上式成立的最小 T 称为 f 的最小正周期，简称为周期.

1.3.2 B. 判断

1. 利用定义.

2. 利用导数. 若函数 $f(x)$ 以 T 为周期，且 $f(x)$ 可导，则 $f'(x)$ 以 T 为周期.

3. 利用积分. 若若函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 且 $f(x)$ 连续, 则当 f 满足以下三者任意之一时, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期.

1. f 在一个周期内定积分为 0，即 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$（充要条件）;
2. $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t$ 收敛（充分条件）;
3. $f(x)$ 为奇函数（充分条件）因为 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t=0$.

1.3.3 C. 应用

1. 常见周期变换

1. $\sin x,\cos x$ 以 2π 为周期；$\sin 2x$ 和 $|\sin x|$ 以 π 为周期；
2. $\sin^{2k} x$ 以 π 为周期，$\sin^{2k+1} x$ 以 2π 为周期；
3. $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}(a\neq 0)$ 为周期.

2. 定积分. 设 $f(x)$ 以 T 为周期，及对任意实数 x 有 $f(x+T)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上可积，则 $f(x)$ 在任何区间长度为 T 的区间上积分值相等，即

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_c^{c+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

1.4 有界性

1.4.1 A. 概念

定义 1.4. 若 $\exists M>0,\forall x\in D,\text{s.t.}|f(x)|<M$，则称 f 在 D 上有界.

1.4.2 B. 判断

1. 利用定义

2. 利用连续性. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界；一般的，若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a^+),f(b^-)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

更一般的，区间 (a,b) 可以改为 $(-\infty,b),(a,+\infty),(-\infty,+\infty)$ 结论均成立.

注 1.2. 这由连续函数保号性可证，如记 $f(a^+)=A,f(b^-)=B$，则 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_1,\delta_2>0,\forall x\in(a,a+\delta_1),\text{s.t.}|f(x)-A|<\epsilon$，$\forall x\in(b-\delta_2,b),\text{s.t.}|f(x)-B|<\epsilon$，则 $f(x)$ 在区间 $(a,a+\delta_1),(b-\delta_2,b)$ 内有界，又因为 $f(x)$ 在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上连续，因此在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上有界，综上，$f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

3. 导数有界性与函数有界性.

1. 在有界区间上：$f'(x)$ 有界 $\Rightarrow f(x)$ 有界；

   利用拉格朗日中值定理证明:

   $|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\leq|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|=|f'(\xi)|\cdot|x-x_0|+|f(x_0)|$

2. 在有界区间上：$f(x)$ 有界 $\nRightarrow f'(x)$ 有界；

   反例：$y=\sin\frac{1}{x}$.

3. 在无穷区间上：$f'(x)$ 有界 $\nRightarrow f(x)$ 有界；

   反例：$y=x,y'=1$.

4. 在无穷区间上：$f(x)$ 有界 $\nRightarrow f'(x)$ 有界；

   反例：$y=\sin\frac{1}{x},y=\sin(x^2)$.

4. 递推数列有界性. 对于递推数列：$x_{n+1}=f(x_n)$，一般首先证明其单调性，如 $x_{n+1}<(>)x_n$，则 $f(x_n)<(>)x_n$，然后解出 x_n 的下（上）界.

1.4.3 C. 应用

1. 常见函数的界. $|\sin x|\leq 1,|\cos x|\leq 1,|\arcsin x|\leq\frac{\pi}{2},|\arctan x|\leq\frac{\pi}{2},|\arccos x|\leq\pi$.

2 极限

2.1 求极限的方法

极限计算的基本方法有主要有十类:

1. 基本极限	6. 中值定理
2. 等价代换	7. 洛必达
3. 有理运算	8. 夹逼准则
4. 化简手段	9. 单调有界
5. 泰勒公式	10. 积分定义

其中 1-4 是极限计算的基本方法；5-7 常用与函数极限；8-10 常用与数列极限. 下面分别阐述.

2.1.1 A. 基本极限

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le i\le m}\{a_i\}.$$

4.
$$\ln^b x\ll x^{\alpha}\ll a^x\ll x!\ll x^x.$$

5. 一个十分常用的极限：
$$\lim_{x\to 0}x\cdot\ln x=0.$$
由基本极限 5 可知：
$$\lim_{x\to 0}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}-\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

6.
$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1,\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}$$
$$\lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \infty, & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$
这两个极限常用于关于 x 的函数中；

2.1.2 B. 等价代换

替换原则：**乘除关系可以替换，加减关系需要验证低阶相消**.

等价无穷小替换原理有以下几种应用：

1. 基本替换关系.

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1;$$

以及
$$(1+x)^a-1\sim ax,\ a^x-1\sim x\ln a,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;$$

2. 推广替换关系. 判断无穷小

$$1-\cos^a bx$$

的等价无穷小，只需三步

1. 判断正负：正
2. 判断外层函数等价无穷小：$a\cdot f(x)$
3. 判断内层函数等价无穷小：$\frac{(bx)^2}{2}$，（这是无穷小的驱动引擎）

所以

$$1-\cos^a bx\sim\frac{ab^2}{2}x^2$$

即在判断复合函数等价无穷小时，只需保留各层函数的数乘（包括正负）关系与幂数关系，事实上这也是等价无穷小的本质.

注 2.1.

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2})&=\ln(1+x+\sqrt{1+x^2}-1)\\&\sim x+\sqrt{1+x^2}-1\sim x+\frac{1}{2}x^2\sim x.\end{aligned}$$

注 2.2. 若 $\alpha(x)\to0,\alpha(x)\cdot\beta(x)\to0$，则

$$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\beta(x).$$

3. 等价代换的在积分中应用.

定理 2.1. 若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

证明.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

□

注 2.3. 定理要求 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=1$ 即可，不一定 $f(x)\sim g(x)$，例如 $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=1$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{\int_0^x e\mathrm{d}t},$$

即

$$\int_0^x(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t\sim e\cdot x.$$

定理 2.2. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处 m 阶可导，且 $\lim f(x)\sim x^m$，则

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim x^{m+1}\\ f'(x)\sim x^{m-1}\end{cases}$$

一般的，若有 $\phi(x)\sim x^n$，则有

$$\lim_x\int_0^{\phi(x)}f(t)\mathrm{d}t\sim x^{(m+1)\times n}.$$

2.1.3 C. 有理运算

定理 2.3 (极限四则运算法则). 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a, \lim_{x\to x_0} g(x)=b$ ，则：

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=a\pm b$;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=ab$;
3. 若 $b\neq 0$，则：$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{a}{b}$.

推论 2.1. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a\neq 0$，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=a\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$.

2.1.4 D. 化简手段（核心）

主要有以下几种：乘项构造（有理化）、加减构造、同除因子、提取因子、配凑、其他运算技巧等.

1. 乘项构造. 主要如下应用：

$$f-g=\frac{(f-g)\cdot(f+g)}{f+g}=\frac{f^2-g^2}{f+g};$$

类似的，对于 $f+g$ 型极限，有

$$f+g=\frac{(f+g)\cdot(f-g)}{f-g}=\frac{f^2-g^2}{f-g}.$$

当 f 或 g 中有根式时，尤其如此；

乘项构造除此之外还有通过分子分母同乘一个因子构造出可以连续变化的式子，最常见的如

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}{f(x)}&=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}{(1-x)f(x)}\\&=\frac{1-x^n}{(1-x)f(x)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2nx}{f(x)}&=\frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2nx}{2\sin x\cdot f(x)}\\&=\cdots=\frac{\sin 4nx}{2^n\sin x\cdot f(x)}.\end{aligned}$$

2. 加减构造. 形如 $\frac{f(x)-g(x)\cdot h(x)}{x^k}$ 的无穷小，其中 $f(x)\to g(a)\to a\neq 0, h(x)\to 1$，此时可以如下变换：

$$\frac{f(x)-g(x)\cdot h(x)}{x^k}=\frac{f(x)-g(x)+g(x)-g(x)\cdot h(x)}{x^k}=\frac{f(x)-g(x)}{x^k}+g(x)\frac{1-h(x)}{x^k}.$$

3. 同除因子. 常见于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 对于这类不定式，上下同除最高阶无穷大从而转化为均为无穷小型的不定式.

4. 提取因子. 常见于 $\infty-\infty$ 型不定式. 对于这类不定式，提取最高阶无穷大，从而转化为无穷小型的不定式；

另外也常见于“指数-指数型”极限，如

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{e^{x^4}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}[1-e^{2-2\cos x-x^2}]}{e^{x^4}-1}=\lim_{x\to 0}-\frac{2-2\cos x-x^2}{x^4}=\frac{1}{12}.$$

上述四类方法是极限运算的一般方法，函数极限与数列极限的运算一般都有依靠这四类方法的辅助，而其极限求解的最直接方法是以下六种方法.

例 2.1. 求极限 $I=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

分子分母最高阶无穷大为 x，上下同除 $-x$ 有

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin}{x}}}=1.$$

如果这是选填题，易知 $\sqrt{4x^2+x-1}\sim 2|x|, x+1\sim -|x|, \sqrt{x^2+\sin x}\sim|x|$，则 $I=\frac{2|x|-|x|}{|x|}=1$.

例 2.2. 求极限 $I=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}-\sqrt[3]{x}$.

易知 $\sqrt[3]{x}$ 是最高阶无穷大，因此将其提取有

$$I=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot(\sqrt{1+\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{2x},$$

易知极限转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，分子分母最高阶为 x，同除除以 x 有

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2+x^{\frac{4}{3}}}{x^3}}=0.$$

例 2.3. 计算极限 $I=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\right]$.

(*1*) . 本题可以<u>乘项构造法</u>:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}+\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n\cdot(n+1)}+\sqrt{n\cdot(n-1)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}n}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(2) . 本题也可以采用提取公因式$\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}$ 法：

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot \left[\sqrt{1+\frac{n}{1+2+\cdots+n-1}}-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1+2+\cdots+(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

例 2.4. 计算极限 $I = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$.

本题利用加减构造法可解，易知

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\cdots+\frac{n+1-1}{(n+1)!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{(n+1)!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right] = 1.
\end{aligned}$$

例 2.5. 计算极限 $I = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.（勿使用洛必达法则）

(1) . 本题利用加减构造法可解，易知

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\cdot\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(\cos 2x-1)}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}+1+\frac{-\frac{1}{3}\cdot(\cos 3x-1)}{x^2} = \frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} = 3.
\end{aligned}$$

(2) . 本题利用乘项构造法也可解，上下乘以 $1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1-\cos^2 x\cdot\cos 2x\cdot\cos^{\frac{2}{3}} 3x}{(1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x})\cdot x^2} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x\cdot\cos 2x\cdot\cos^{\frac{2}{3}} 3x}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1-\cos 2x\cdot\cos^{\frac{2}{3}} 3x}{2x^2} = \frac{1}{2}+\frac{1-\cos^2 2x\cdot\cos^{\frac{4}{3}} 3x}{(1+\cos 2x\cdot\cos^{\frac{2}{3}} 3x)\cdot 2x^2} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sin^2 2x+\cos^2 2x-\cos^2 2x\cdot\cos^{\frac{4}{3}} 3x}{4x^2} = \frac{1}{2}+1+\frac{1-\cos^{\frac{4}{3}} 3x}{4x^2} \\
&= \frac{3}{2}+\frac{-\frac{4}{3}\cdot(\cos 3x-1)}{4x^2} = \frac{3}{2}+\frac{-\frac{4}{3}\cdot-\frac{9}{2}}{4x^2} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 3.
\end{aligned}$$

(3) . 本题也可利用泰勒公式（分离无穷小2.1.5）计算：

易知 $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o^2$;

而 $\sqrt{\cos 2x}-1\sim\frac{1}{2}\cdot(\cos 2x-1)=\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot 4x^2=-x^2$，因此 $\sqrt{\cos 2x}=1-x^2+o^2$；
而 $\sqrt[3]{\cos 3x}-1\sim\frac{1}{3}\cdot(\cos 3x-1)=\frac{1}{3}\cdot-\frac{1}{2}\cdot 9x^2=-\frac{3}{2}x^2$，因此 $\sqrt[3]{\cos 3x}=1-\frac{3}{2}x^2+o^2$，因此

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+o^2)\cdot(1-x^2+o^2)\cdot(1-\frac{3}{2}x^2+o^2)}{x^2}\\
&=\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2-x^2-\frac{3}{2}x^2+o^2)}{x^2}=\frac{3x^2}{x^2}=3.
\end{aligned}
$$

2.1.5 E. 泰勒公式

1. 基本泰勒公式.

1. 自然指数
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}++\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$
2. 正弦函数
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,$$
3. 等比公式
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$
4. 余弦函数
$$
\begin{aligned}
\cos x=\sin' x=x'-\frac{(x^3)'}{3!}+\frac{(x^5)'}{5!}+\cdots\\
=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots.
\end{aligned}
$$
注 2.4. 偶函数的奇数阶系数均为 0，相应的，奇函数的偶数阶系数均为 0.

5. 等比公式
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1--x}&=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots\\
&=1-x+x^2-x^3+\cdots.
\end{aligned}
$$
6. 对数函数
$$
\begin{aligned}
\ln(1+x)&=\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int x\mathrm{d}x+\int x^2\mathrm{d}x-\int x^3\mathrm{d}x+\cdots\\
&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.
\end{aligned}
$$
7.
$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots.$$

注 2.5 (二项式定理)**.**

$$(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n.$$

其中 $C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!m!}$.

2. 高阶系数定值法. 需要探讨三类常见函数，即 $\tan x, \arctan x, \arcsin x$ 的展开至 3 阶的泰勒公式，下面介绍一种方法：

定理 2.4. 若 $f(x) = kx^j + ax^b + o(x^b)$，其中 $b > j$，若 k, j 已知，欲求 a, b 可采用如下方法：令

$$I = \frac{ax^b}{f(x) - kx^j},$$

令 $\lim_{x\to 0} I = 1$，即可确定 a, b 的值.

易知：$\arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan \sim x$，则：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{ax^b}{\arcsin x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{abx^{b-1}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{abx^{b-1}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{abx^{b-1}}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2abx^{b-1}}{x^2} = 1,\end{aligned}$$

即 $b = 3$，而 $6a = 1$，所以 $a = \frac{1}{6}$，因此

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

类似的我们有：

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);\\ \arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);\\ \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3);\\ \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

注 2.6. 上述极限也可以利用**中值定理计算**，注意到：

$$\arcsin x - x = \arcsin x - \arcsin(\sin x) = (x - \sin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \to \frac{1}{6}x^3,$$

所以

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{ax^b}{\arcsin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{6ax^b}{x^3} = 1,$$

即 $b = 3, a = \frac{1}{6}$.

3. 分离无穷小. 若 $\lim f(x) = a \neq 0$，则可以将其写为 $f(x) = a + \alpha$，其中 α 为无穷小，将 $f(x)$ 的极限中分离出无穷小量，再利用等价阶计算。

这一方法对于**多个函数之积的极限**常用，如 $\lim g(x) = b \neq 0, \lim h(x) = c \neq 0$，则 $f(x)g(x)h(x) = abc + \gamma$，其中 γ 为无穷小，若能确定 γ 的阶为 m，则此时对于形如

$$\frac{k_1 \cdot [abc - f(x)g(x)h(c)]}{k_2 \cdot x^m}$$

的极限便可计算。

另外这种方法在**判断可导性**也十分有效，如 $f(x)=a+\alpha\ (x\to 0)$，其中 $\alpha=x^k$，当 $k<1$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导，常见例子如 $(1+\sqrt{x})^2=1+2\sqrt{x}\ (x\to 0)$，因此 $(1+\sqrt{x})^2$ 在 $x=0$ 处不可导.

特殊的,若 $\alpha=|x|^k$,则当 $k\le 1$ 时 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导,常见例子如 $\cos\sqrt{|x|}=1-\frac{1}{2}\cdot|x|\ (x\to 0)$，因此 $(1+\sqrt{x})^2$ 在 $x=0$ 处不可导.

4. 低阶相消问题. 低阶相消问题主要是在处理形如:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}$$

的极限时常发生的问题，众所周知等价无求小替换不能应用于和式，其本质正是可能发生低阶相消.

定理 2.5 (低阶相消原理)**.** 在处理和式时，必须将两函数展开至最小低阶不相消阶数.

5. 展开阶数问题. 乘式展开阶数问题主要是在处理形如:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-\phi(x)}{h(x)}$$

的极限时常发生的问题，其中

$$\begin{aligned}
f(x)&=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_Nx^N+o(x^N),\\
g(x)&=b_mx^m+b_{m+1}x^{m+1}+\cdots+b_Mx^M+o(x^M),\\
\phi(x)&=c_lx^l+c_{l+1}x^{l+1}+\cdots+c_Lx^L+o(x^L).
\end{aligned}$$

已知函数 $f(x)g(x)$ 必须将其展开至与 $\phi(x)$ 最小低阶不相消阶数，设其为 k，那么问题就变为，余将 $f(x)g(x)$ 展开至不低于 k 阶，则 $f(x),g(x)$ 各展开至几阶.

定理 2.6 (乘式展开阶数原理)**.** 若 $nm<k$，则应该将 $g(x)$ 展开至不低于 $k-n+1$ 阶，且应该将 $f(x)$ 展开至不低于 $k-m+1$ 阶.

低阶相消原理与乘式展开阶数原理常用与计算复合函数的级数展开式.

例 2.6. 求极限 $I\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-\tan\tan x}{\sin x-\tan x}$.

易知分母为 3 阶无穷小，因此分子也应该为 3 阶，使所有未展开的项为高于 3 阶的无穷小即可，利用泰勒公式:

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{6}\cdot\sin^3x+o^3-\tan x-\frac{1}{3}\cdot\tan^3x+o^3}{-\frac{1}{2}x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x-\frac{1}{6}\cdot(x-\frac{1}{6}\cdot x^3+o^3)^3+o^3-\frac{1}{3}\cdot(x+\frac{1}{3}\cdot x^3+o^3)^3+o^3}{-\frac{1}{2}x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^3+o^3}{-\frac{1}{2}x^3}=2.
\end{aligned}$$

例 2.7. 计算极限 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{e^{x^4}-1}$.

易知 $I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-(e^{2-2\cos x}-1)}{e^{x^4}-1}$，将 $e^{x^2}-1$ 与 $e^{2-2\cos x}-1$ 分别展开，其中

$$e^{x^2}-1=\underbrace{x^2+\frac{1}{2}x^4}_{(A)}+o^4,$$

$$e^{2-2\cos x}-1=\underbrace{(2-2\cos x)}_{(B)}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(2-2\cos x)^2+\cdots}_{(C)},$$

其中 $(A),(B)$ 在 *2* 阶相消，保留的最低阶为 *4* 阶，而 (C) 中也存在 *4* 阶项，若忽略 (C) 的存在，则本题会做错.

注 2.7. 因为 $(e^x)'|_{x=0}=1$，故本题最好的方法是<u>拉格朗日中值定理</u>；当然也可以对式 $e^{x^2}-e^{2-2\cos x}$<u>做提取公因式变换</u>，从而得到 $-e^{x^2}\cdot(e^{2-2\cos x-x^2}-1)$.

2.1.6 F. 中值定理

常利用三种中值定理：拉格朗日中值定理、积分中值定理、推广的积分中值定理：

定理 2.7 (拉格朗日中值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，则 $\exists c\in(a,b),\text{s.t.}f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 2.8 (积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上式连续（$a\leqslant b$），则 $\exists\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$$

成立.

定理 2.9 (推广积分中值定理)**.** 设 *1*) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；*2*) $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变符号：$g(x)\le 0$ 或 $g(x)\ge 0$. 则 $\exists\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对于拉格朗日中值定理有几点需要以下规则：

1. **一般而言，对于含有 $\lim_{x\to a}f(x)-f(a)$ 的极限，只有在 $f'(a)\neq 0$ 时才能用拉格朗日中值定理求极限**

   因为当 $f'(a)=0$ 时，我们无法确定它的阶数，从而无法进行等价阶运算.

2. **拉格朗日中值定理可以在无穷区间上应用**；

3. **拉格朗日中值定理常用于<u>复合函数</u>求极限，因为对复合函数展开往往十分复杂**；

4. **注意含 $f-g$ 型的极限可以转化为 $f-f(\phi)$，从而应用拉格朗日中值定理（注2.6）**

注 2.8. 上述规则 *1* 有两点例外：

- 形如 $I = \lim_{x\to a} f(g(x)) - f(h(x))$.

  由于 $I = f'(\xi)\cdot(g(x)-h(x))$，且 $h(x) < \xi < g(x)$，从而可能确定 $f'(\xi)$ 的阶.

- 当 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)}$，且 $x-a \sim g(x)$ 时，若 $f'(a)=0$，则可直接推出 $I=0$.

例 2.8. 求极限 $I = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

易知

$$I = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

其中 $x < \xi < x + \sqrt{x+\sqrt{x}}$，则 $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} < \frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$，因此

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} < I < \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$$

因此 $I = \frac{1}{2}$.

例 2.9. 计算极限 $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\arctan\frac{2}{n} - \arctan\frac{2}{n+1}\right)$.

解. 由拉格朗日中值定理可知：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\arctan\frac{2}{n} - \arctan\frac{2}{n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\xi}\right)^2}. \end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{\xi} < \frac{2}{n}$，因此 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\xi} = 0$. 因此

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2. \end{aligned}$$

□

注 2.9. $\tan x, \arctan x, \sin x, \arcsin x, \sqrt{1+x}$ 等都是典型的 $f'(0) \neq 0$ 的函数，涉及它们的 $f-g$ 型极限可以考虑中值定理的解法。

例 2.10. 计算极限：$I = \lim_{n\to\infty} \arctan(n+1) - \arctan(n)$.

解.

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(n+1) - \arctan(n) = \lim_{\xi\to\infty} (n+1-n) \cdot \frac{1}{1+\xi} = 0.$$

□

例 2.11. 计算极限：$I=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{(1-\cos x)\cdot\sin^2 x}$.

解.

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{[\cos(\sin x)-\cos x]\cdot[\cos(\sin x)+\cos x]}{x^4\cdot(\cos(\sin x)+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\cos^2(\sin x)-\cos^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin^2 x-\sin^2(\sin x)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{[\sin(\sin x)+\sin x]\cdot[\sin(\sin x)-\sin x]}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^4}\cdot[(x-\sin x)\cdot\cos\xi] = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\frac{1}{6}x^3}{x^4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

□

例 2.12. 求极限：$I=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}$.

解：

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(e^{2x}-x^2)-\ln e^{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x+e^x-e^x)\cdot f'(\xi_1)}{(e^{2x}-x^2-e^{2x})\cdot f'(\xi_2)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot f'(\xi_1)}{-x^2\cdot f'(\xi_2)} = -1
\end{aligned}
$$

2.1.7 G. 洛必达法则

对于极限 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 使用 **洛必达法则有四点注意事项**：

1. 未定式形式.

- 即只有当分子分母均趋于 0 或 ∞ 时才能使用洛必达法则，以下几种情况不能使用洛必达法则；
- 当 $f\to k\neq 0$ 与 $g\to l\neq 0$ 至少一者成立时，其中 $-\infty<k,l<\infty$；
- 当 $f\to 0$ 而 $g\to\infty$；
- 当 $g\to 0$ 而 $f\to\infty$.

2.$f(x),g(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内可导.

- 柯西中值定理证明洛必达法则，要求分子分母在 x_0 的某一邻域内连续，在 x_0 的某一去心邻域内可导；
- $f(x),g(x)$ 仅在 x_0 处可导则不能用洛必达法则；
- 当在 x_0 处有连续导数或在 x_0 处有二阶导数时，则在在 x_0 的某一去心邻域内可导，此时可以用洛必达法则；

3.$g(x)$ 在 x_0 的去心邻域内导数不为零.

- 因为洛必达法则由柯西中值定理证明，ξ 可能取在 x_0 去心邻域内任意一点，因此 $g(x)$ 在该去心邻域内导数不能为零；
- 分母是震荡收敛于零的极限（如 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sin\frac{1}{x}}$）不能用洛必达法则，因为由罗尔定理，在 x_0 的去心邻域内或者 $\forall x>X$ 的区间内 $g'(x)$ 有无穷多个零点.

4.$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在.

- 洛必达法则是通过存在的导数比极限来求函数比极限的，即若导数比存在有限极限，则函数比极限等于之；
- 若导数比不存在有限极限，不能判断函数比的极限情况.

5. 洛必达阶数.

- 因为在某点处 n 阶可导的函数在该点邻域内 $n-1$ 阶导数连续，满足洛必达法则条件 2.
- 若分子 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则最多可以运用 $n-1$ 阶洛必达法则，之后应用导数定义；
- 若分子 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶连续可导，则最多可以运用 n 阶洛必达法则.

注 2.10. *1.* 若 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 去心邻域内 $f'(x)$ 存在，可用洛必达；

2. 若 $f''(x)$ 在 x_0 处存在，则在 x_0 去心邻域内 $f'(x)$ 存在，可用洛必达；

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导代表 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 邻域内有定义，但无法说明在该点邻域内连续.

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可二阶导代表 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，且 x_0 邻域内连续，以及 $f(x)$ 在 x_0 邻域连续.

注 2.11 (洛必达法则的应用)**.** 在计算函数极限时，泰勒公式与中值定理往往更有效，这样洛必达法则的应用范围就不宽范了，常用与含变限积分与 $x\to\infty$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限：

1. 变限积分极限

涉及变限积分的极限计算常用洛必达法则，但是对于形如

$$\frac{g(x)\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{h(x)}$$

的变限积分应利用等价无穷小将被积函数换为简单的幂函数形式再做其他运算，直接使用洛必达法则将十分繁琐.

2. $x\to\infty$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限

对于这类极限，当乘项、同除、提项、换元等化简方法均不好用时，可以考虑洛必达.

例 2.13. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0, f''(0)>0, u=u(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距，则 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{u(x)}$.

易知 $0-f(x)=f'(x)\cdot(u(x)-x)$，所以 $u(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{f'(x)}$，所以 $\frac{x}{u(x)}=\frac{xf'(x)}{f'(x)x-f(x)}$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{f'(x)x-f(x)}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)}=1+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{xf''(x)}\xlongequal{\text{定义}}2.$

2.1.8 H. 单调有界

定理 2.10 (单调有界数列必收敛)**.** 对于一单调递增的数列 $\{x_n\}$，若有上界 $A, \text{s.t.} x_n\le A$ ，则 $\{x_n\}$ 收敛；对于一单调递减的数列 $\{x_n\}$，若有下界 $a, \text{s.t.} x_n\ge a$ ，则 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. 由于 $\{x\}$ 有上界，则必有上确界 M ，由上确界的两个特质，可知：$x_n\le M$ ，且 $\forall\epsilon>0, \exists N, \text{s.t.} x_N>M-\epsilon$ ，则对于 $\forall n>N$ ，由 $x_n>x_N$ ，即：

$$M-\epsilon<x_N<x_n\le M$$

，即 $\forall n>N, \text{s.t.} |x_n-M|<\epsilon$ ，即 $\lim_{n\to\infty}x_n=M$. □

单调有界准则确定极限常应用于递推数列如 $x_{n+1}=f(x_n)$ 中，其中单调性的证明是最重要的.

1. 单调性判断方法. 有三种方法判断：

1. 判断临项之差

   若 $x_{n+1}-x_n\ge(\le)0$，则 $\{x_n\}\uparrow(\{x_n\}\downarrow)$.

2. 判断临项之比

   若 $\{x_n\}$ 不变号，则当 $x_n>0$ 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1$ 时，$\{x_n\}\uparrow$；当 $x_n<0$ 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1$ 时，$\{x_n\}\downarrow$.

3. 判断 $f(x)$ 单调性

   若 $f(x)$ 单调增，且 $x_2\ge x_1$，则 $\{x_n\}\uparrow$；$x_2\le x_1$，则 $\{x_n\}\downarrow$；

   若 $f(x)$ 单调减，则 $\{x_n\}$ 不单调.

   证明. 设 $f(x)\uparrow, x_1\le x_2$，设 $x_{n-1}\le x_n$，则 $x_{n+1}=f(x_n)\ge f(x_{n-1})=x_n$，由数学归纳法知 $\{x_n\}\uparrow$；

   设 $f(x)\uparrow, x_1\ge x_2$，设 $x_{n-1}\ge x_n$，则 $x_{n+1}=f(x_n)\le f(x_{n-1})=x_n$，由数学归纳法知 $\{x_n\}\downarrow$；

   设 $f(x)\downarrow, x_1\le x_2$，则 $x_3=f(x_2)\ge f(x_1)=x_2$，设 $x_{n-1}\le x_n$，则 $x_{n+1}=f(x_n)\le f(x_{n-1})=x_n$，同理可证，若 $x_{n-1}\ge x_n$，则 $x_n\le x_{n+1}$，由数学归纳法知 $f(x)$ 不单调. □

注 2.12. 只要知道 $f'(x)>0$，无论 x_1,x_2 是什么情况，就可以得知 $\{x_n\}$ 是单调的,此时需证明 $\{x_n\}$ 有上界和下界.

2. 有界性判断方法.　在证明 $\{x_n\}$ 单调性后，可以判断其有界性. 有两种判断方法：

1. 利用归纳法证明：

   因为单调有界数列收敛于相应的上/下确界，设 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\{x_n\}\uparrow$，$\{x_n\}$ 收敛于其上确界 M，即

   $$x_{n+1}=f(x_n)\to f(M)=M\ (n\to\infty),$$

   从而求得 M. 然后利用数学归纳法证明对 $\forall n$ 有 $x_n\le M$ 即可.

2. 利用单调性证明：

   通过判断 x_n 的单调性，构造 $\frac{x_{n+1}}{x_n}, x_{n+1}-x_n$ 等项，通过放缩证明有界. 利用该法可以将二阶递推化为一阶递推（例：2.34），从一阶递推得到上下界.

例 2.14. 设 $x_1=\sqrt{6}, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，计算极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

法一：
易知 $f(x)=\sqrt{6+x}$，因此 $f(x)$ 单调，又因为 $x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}>\sqrt{6}=x_1$，因此 $\{x_n\}\uparrow$.
设 $\{x_n\}$ 收敛于上确界 M，即

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\to\sqrt{6+M}=M\ (n\to\infty)\Rightarrow M=3,$$

下面证明 $x_n<3$，易知 $x_1=\sqrt{6}\le 3$，设 $x_{n-1}\le 3$，则 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}\le\sqrt{6+3}=3$. 由数学归纳法可知，对于 $\forall n$ 有 $x_n<3$，因此 x_n 有上界 3. 进而 $\lim_{n\to\infty}x_n=3$.

法二：
因为 $\{x_n\}\uparrow, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，所以 $x_{n+1}^2=6+x_n, x_{n+1}\ge\sqrt{6}$，即

$$x_{n+1}=\frac{6}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\le\frac{6}{x_{n+1}}+1\le\frac{6}{\sqrt{6}}+1=\sqrt{6}+1.$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界 $\sqrt{6}+1$.

注 2.13. 计算递推数列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的极限问题，常常需要应用数学归纳法.

2.1.9　I. 夹逼准则

定理 2.11 (数列夹逼准则)**.** 若 $\exists N>0,\forall n>N,\text{s.t.}z_n\le x_n\le y_n$ ，且 $\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a$ ，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$.

定理 2.12 (函数夹逼准则)**.** 若 $\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}h(x)\le f(x)\le g(x)$ ，且 $\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=a$ ，则 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$.

注 2.14 (常用不等式)**.** 夹逼准则常用与 n 项和的数列极限，下面总结一些**常用不等式**：

1.

$$\sin x < x < \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2});$$

2.

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x \in (0, +\infty);$$

3. 令 $x = \frac{1}{x}$ 则有：

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty);$$

4. 上面三个不等式均有泰勒级数可以考察，相似的还有：

$$e^x \geq 1 + x, \quad (x \geq 0)$$

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot x, \quad (x \geq 0, \alpha \geq 1)$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha \cdot x, \quad (x \geq 0, \alpha \leq 1)$$

5. 重要极限不等式：

$$1 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e, 0 < x < \infty$$

且 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0, \infty)$ 上单调增.

6. 绝对值不等式

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|;$$

7. 均值不等式：

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

特殊的，$a + \frac{1}{a} \geq 2$；多个变量的：

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

8. 根式不等式：

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

令 $a = a - b, (a > b)$ 即有：

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}.$$

9. 柯西积分不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

例 2.15. 求极限 $I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.

利用夹逼准则则需要上述不等式 *3*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} &< \ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{1}{n+1}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n+n-1}) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{2n}{2n-1}\right) = \ln\frac{2n}{n} = \ln 2.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} &> \ln(1+\frac{1}{n+1}) + \ln(1+\frac{1}{n+2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{2n}) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdots\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\frac{2n+1}{n+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \ln\frac{2n+1}{n+1} < I < \lim_{n\to\infty} \ln 2$$

即 $I = \ln 2$.（本题常用积分定义解决）

2.1.10 J. 积分定义

积分定义与夹逼准则均可以判断 n 项和的数列极限，应该选择哪一种方法可按下列经验：对于放缩项而言（一般为分母）若变化部分是主体部分的同量级则考虑积分定义，若变化部分是主体部分的次量级则考虑夹逼准则.

这一经验有效的原因在于，对于通项为

$$\frac{h(i,n)}{f(n)\pm g(i,n)}$$

的数列而言，若对分母进行放缩，则与 i 无关的部分即 $f(n)$ 称为主体部分，$g(i,n)$ 称为变化部分，若 $g(i,n) << f(n)$ $(i\to n, n\to\infty)$，则

$$\lim_{\substack{i\to n\\ n\to\infty}} \frac{h(i,n)}{f(n)\pm g(i,n)} = \lim_{\substack{i\to n\\ n\to\infty}} \frac{h(i,n)}{f(n)\pm g(k,n)}$$

其中 $k = 1,2,...,n$，即放缩不改变通项极限的值，从而可以使和式夹逼到同一点，否则将无法实现夹逼的效果.

例 2.16. 计算极限 $\lim_{n\to}\left(\frac{e}{e^n+1^2} + \frac{e^2}{e^n+2^2} + \frac{e^3}{e^n+3^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n+n^2}\right)$.

放缩分母，因为变化部分 i^n 是主体部分 e^n 的次级量，则采用夹逼的方法

$$\frac{e}{e^n+1^2} + \frac{e^2}{e^n+2^2} + \frac{e^3}{e^n+3^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n+n^2} \le \frac{e}{e^n+1} + \frac{e^2}{e^n+1} + \frac{e^3}{e^n+1} + \cdots + \frac{e^n}{e^n+1}.$$

而

$$\frac{e}{e^n+1} + \frac{e^2}{e^n+1} + \frac{e^3}{e^n+1} + \cdots + \frac{e^n}{e^n+1} = \frac{1}{e^n+1}\cdot\frac{e\cdot(1-e^n)}{1-e} \to \frac{e}{e-1}\ (n\to\infty).$$

又有

$$\frac{e}{e^n+1^2} + \frac{e^2}{e^n+2^2} + \frac{e^3}{e^n+3^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n+n^2} \ge \frac{e}{e^n+n^2} + \frac{e^2}{e^n+n^2} + \frac{e^3}{e^n+3^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n+n^2}.$$

而

$$\frac{e}{e^n+n^2}+\frac{e^2}{e^n+n^2}+\frac{e^3}{e^n+3^2}+\cdots+\frac{e^n}{e^n+n^2}=\frac{1}{e^n+n^2}\cdot\frac{e\cdot(1-e^n)}{1-e}\to\frac{e}{e-1}.\ (n\to\infty).$$

因此 $I=\frac{e}{e-1}$.

2.2 求极限

2.2.1 A. 含有 $f-g$ 项的极限

有如下几种处理方式:

1. 拉格朗日中值定理. 通过构造辅助函数，有

$$f(x)-g(x)=f(x)-f(\phi(x))=[x-\phi(x)]\cdot f'(\xi),$$

在 $x\to x_0$ 时，$\phi(x)\to x_0$，且 $f'(\xi)\neq 0$ 时可用；详见 2.1.6节.

需要注意的是，对于某些 $f'(\xi)=0$ 的式子也可以通过变换化为可以应用拉各朗日中值定理的形式，如 $\cos\sin x-\cos x$.

2. 泰勒公式. 有两点需要注意:

1）对于 $f(x)-kx^b$ 型极限，常对 $f(x)$ 泰勒展开，实际应用中 $f(x)$ 常为复合函数，即 $f(g(x))$，此时一定要注意

$$f(g(x))=f(g(0))+\underbrace{f'(g(0))\cdot g(x)}_{\text{低阶项}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot f''(g(0))\cdot g(x)^2+\cdots}_{\text{高阶项}}$$

中高阶项中的低阶 x 与低阶项中的低阶 x 发生低阶相消问题。

2）若 $\lim f(x)=a\neq 0$，则可以将其写为 $f(x)=a+\alpha$，其中 α 为无穷小，将 $f(x)$ 的极限中分离出无穷小量，再利用等价阶计算。

这一方法对于多个函数之积的极限常用，如 $\lim g(x)=b\neq 0,\lim h(x)=c\neq 0$，则 $f(x)g(x)h(x)=abc+\gamma$，其中 γ 为无穷小，若能确定 γ 的阶为 m，则此时对于形如

$$\frac{k_1\cdot[abc-f(x)g(x)h(c)]}{k_2\cdot x^m}$$

的极限便可计算。

3. 化简变换. 常见的变换有: 1. 提取公因式; 2. 乘项构造; 3. 加减构造; 4. 函数运算等等. 详见2.1.4节

2.2.2 B. 函数极限

主要分四类:（1）$\frac{0}{0}$ 型；（2）$\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty$ 型；（3）$0\cdot\infty$；（4）幂指型，即 $1^\infty,\infty^0,0^0$ 型. 对于函数极限主要应用的方法除了基本方法（A-D）以及泰勒公式、中值定理、洛必达法则.

1. $\frac{0}{0}$ 型.

2. $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ 型. 对于这两类极限主要有以下思路：

1. 同除或提取最高阶项，构造无穷小；
2. 倒代换，构造无穷小；
3. 其他化简方法（有理化、通分等）；
4. 洛必达法则；
5. 中值定理.

注 2.15. 含有无穷大的的不定式均可以考虑提取无穷大构造无穷小，但需要注意的是，当同除某项时可能吧函数的某项特殊点也除掉了，此时需要分别讨论.

例 2.17. 求极限 $I = \lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n})$.

易知
$$I = \lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n} - n\pi) = \lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2})$$
因为 sin^2x 为连续函数，所以
$$I = \lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2})) = \sin^2(\pi \cdot \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2}))$$
方法一：有理化
$$I = \sin^2(\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2}}) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} = 1.$$
方法二：提取高阶项
$$I = \sin^2(\pi \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1)) = \sin^2(\pi \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{3}{2n}) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} = 1.$$
方法三：中值定理
$$\sin^2(\pi \cdot \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2}))\sin^2(\pi \cdot \lim_{x\to\infty}(3x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}})$$
其中 $x^2 < \xi < x^2 + 3x$，即 $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} < \frac{x}{\sqrt{\xi}} < \frac{x}{\sqrt{x^2}}$，因此 $\frac{x}{\sqrt{\xi}} \to 1$，即
$$\sin^2(\pi \cdot \lim_{x\to\infty}(3x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}})) = \sin^2(\frac{3\pi}{2}) = 1.$$
因此 $I = \sin^2(\pi \cdot \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2})) = 1$.

注 2.16. 本题有三个注意点：

1. $\sin(f(x)) = \sin(f(x) + k\pi)$；

2. $\sin^2(x)$ 连续，满足复合函数极限运算法则；

3. n 不能求导，需转化为 x，并验证极限存在，从而说明 n 的极限存在.

3. $0\cdot\infty$ 型. 有两种思路：

1. 对 0 项进行等价无穷小化简；

2. 提取无穷大因子；

3. 当无法等价替换时，将 $0\cdot\infty$ 化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限.

例 2.18. 求极限 $I=\lim_{x\to1}\ln x\ln|x-1|$.

易知

$$I=\lim_{x\to1}\ln(1+x-1)\ln|x-1|=\lim_{x\to1}(x-1)\ln|x-1|=\lim_{x\to0}x\cdot\ln|x|=0.$$

例 2.19. 求极限 $I=\lim n\to\infty\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

则

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}.\end{aligned}$$

所以

$$\ln I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln2-1.$$

即 $I=\frac{4}{e}$.

4. 幂指型. 幂指型极限只有一种解法：取对数，即 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，但需要注意以下两个结论：

1. 若 $f\to1,g\to\infty$，则

$$f^g=e^{g\cdot\ln f}\sim e^{g\cdot(f-1)};$$

2. 若 $f\to0,f\cdot g\to0$，则

$$(1+f)^g-1\sim f\cdot g.$$

5. 取整型. 取整函数 $f=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，记住以下两条性质：

1. $x-1<[x]\le x$，当 x 为整数时等号成立；

2. $\lim_{x\to0^+}[x]=0,\lim_{x\to0^-}[x]=-1$.

例 2.20. 计算极限：$I=\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

因为

$$I=\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]\le\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x}=1,$$
$$I=\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]>\lim_{x\to 0}x\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)=1,$$

所以 $I=1$.

例 2.21. 设 $\lim_{x\to 0}\left\{a[x]+\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right\}=b$，求 a,b.

因为 $\lim_{x\to 0^+}\left\{a[x]+\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$，令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^{t})}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+e^{t}}{1+e^{2t}}\cdot\frac{2e^{2t}}{e^{t}}\\&=\lim_{t\to+\infty}2\frac{e^{2t}+e^{t}}{e^{2t}+1}=2.\end{aligned}$$

所以 $b=2$，因为 $\lim_{x\to 0^-}\left\{a[x]+\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right\}=-a+\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=-a=2$，所以 $a=-2$.

2.2.3　C. 数列极限

数列极限有四种题型：（1）可转化为函数型；（2）n 项求和型；（3）n 项乘积型；（4）递推型 $x_{n+1}=f(x_n)$.

1. 可转化为函数型.　当设计到洛必达法则时，数列极限需要首先化为函数极限，注意化简是 $n\to\infty$ 要变为 $x\to+\infty$.

例 2.22. 求极限 $I=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\arctan n-\frac{\pi}{2}\right]$.

易知

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan n-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+x^2}\cdot x^2=-1.\end{aligned}$$

2. n 项求和型.　n 项求和型有三种思路：

1. 夹逼准则；

   数列放缩：

   (a) 放大、缩小或省略某项；

   (b) 利用不等式放缩；

(c) 利用定积分放缩：

对于单调减少的非负连续函数 $f(x)$，若 $a_n=f(n)$，则（详见：内容**??**）

$$\int_1^N f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^N a_n \le a_1+\int_1^N f(x)\mathrm{d}x$$

以及

$$\sum_{n=1}^N a_n - a_1 \le \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^N a_n$$

2. 积分定义；

积分定义与夹逼准则均可以判断 n 项和的数列极限，应该选择哪一种方法可按下列经验：对于放缩项而言（一般为分母）若变化部分是主体部分的同量级则考虑积分定义，若变化部分是主体部分的次量级则考虑夹逼准则.

需要注意的是当除了放缩项以外还有变化项时，一般需要结合夹逼准则与积分定义来解题.

3. 级数求和.

注 2.17. n 项求和型极限有一推论，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le i\le m}\{a_i\}.$$

特殊的

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c+a_2^n+\cdots+a_m^n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underbrace{1^n+1^n+\cdots+1^n}_{c}+a_2^n+\cdots+a_m^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}.\end{aligned}$$

例 2.23. 求极限 $I=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$.

放缩分母，易知 $\frac{1}{i}$ 是 n 的次级项，因此采用放缩方法，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]\\ &\le \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\\ &\le \frac{1}{n}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{n}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]\to\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi};$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right] &= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]\\ &\to\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

因此 $I=\frac{2}{\pi}$.

例 2.24. 求极限 $I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

法一：定积分放缩

因为
$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=\exp\frac{1}{n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
所以
$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln(\ln n)\right]=\exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\int_1^n\ln x\mathrm{d}x\right)\right]&\le\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\\&\le\exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln\left(1+\int_1^n\ln x\mathrm{d}x\right)\right]=\exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln(1+\ln n)\right]\end{aligned}$$
因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\ln x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\ln x)\cdot x}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x\cdot x}=0$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln(1+\ln n)\right]=1,\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{1}{n}\cdot\ln(\ln n)\right]=1$$
因此 $I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$.

法二：放缩

因为
$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\frac{n}{n}}\le\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{n}$$
所以 $I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$.

注 2.18. 对于形如 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n a_k}$ 的极限，优先考虑技巧：
$$\sqrt[n]{na_m}\le\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n a_n}\le\sqrt[n]{na_M}$$
其中 a_m,a_M 分别为 $\{a_k\}$ 的最小值与最大值.

例 2.25. 计算极限 $I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},(x\ge0)$.

易知
$$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$
当 $0\le x<1$ 时，$1=\max\{i,x,\frac{x^2}{2}\}$；当 $1\le x<2$ 时，$x=\max\{i,x,\frac{x^2}{2}\}$；当 $2\le x$ 时，$\frac{x^2}{2}=\max\{i,x,\frac{x^2}{2}\}$，因此
$$I(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ x, & 1\le x<2\\ \frac{x^2}{2}, & 2\le x\end{cases}$$

例 2.26. 证明极限：$I=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在.

单调性：

令 $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$, 所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 因为 $\frac{1}{1+n}\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$，所以 $a_{n+1}-a_n\le 0$，即 $\{a_n\}\downarrow$.

有界性（法一）：

因为 $\frac{1}{1+n}\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$，所以

$$
\begin{aligned}
a_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\
&\ge\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\
&=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln n\\
&=\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0.
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
a_n&=1+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)}-\ln n\\
&\ge 1+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)-\ln n\\
&=1+\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\ln n\\
&=1+\ln(n)-\ln(n)=1.
\end{aligned}
$$

因为 a_n 单调有界，所以必收敛.

有界性（法二）：

因为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\le 1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n-\ln n=1$；且 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ge\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln n-\ln n=0$，所以 a_n 单调有界，所以必收敛.

例 2.27. 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$，求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)$.

趋势周期函数一般采用区间再现（正反代换)，即令 $u=-x+n\pi$，则

$$
\begin{aligned}
a_n&=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{n\pi}(n\pi-u)|\sin u|\mathrm{d}u=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\mathrm{d}u-\int_0^{n\pi}u|\sin u|\mathrm{d}u\\
&=2n^2\pi-a_n
\end{aligned}
$$

所以 $a_n=n^2\pi$. 所以 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}\right)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

考虑级数

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1+1)x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\
&= x^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right)'' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' \\
&= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x\right)'' + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right)' \\
&= x^2 \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'' + x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' \\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{2^n} = 6$，因此 $\pi\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\pi$.

3. n 项乘积型. 有三种方法：

1. 夹逼准则；

2. 取对数化为 n 项求和型；

3. 添项化简.

例 2.28. 设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

易知 $x_n = \exp\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$，因为 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$，所以 $\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2}$.

因为 $\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}} = \frac{k}{n^2+k} \ge \frac{k}{n^2+k}$，所以

$$\frac{k}{n^2+n} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2},$$

而 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{(1+n)n}{2} = \frac{1}{2}$，以及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\frac{1}{2}}$.

注 2.19. 注意 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = \frac{1}{2}$ 是十分常用的技巧.

例 2.29. 当 $x \neq 0$ 时，求 $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2^n}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \\ &= \frac{\sin x}{x}.\end{aligned}$$

4. 递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 型. 有三种方法：

1. 单调有界准则.

   有三种方法证明单调性：1）临项差；2）临项比；3）递推函数单调性；有界性则先假设极限存在在利用归纳法证明（详见2.1.8节）。

2. 先假设存在，再证明存在.

   先假设 $\{x_n\} \to a$，即 $f(a) = a$ 求出 a，再证明存在 $0 < b < 1$，使得

   $$|x_n - a| \leq b \cdot |x_{n-1} - a|$$

   成立，从而有

   $$0 \leq |x_n - a| \leq b \cdot |x_{n-1} - a| \leq \cdots \leq b^{n-1} \cdot |x_1 - a| \to 0.$$

   需要注意的是构建 $|x_n - a|$ 与 $|x_{n-1} - a|$ 的关系时，常利用 $f(a) = a$ 的性质，即

   $$|x_n - a| = |f(x_{n-1}) - f(a)|.$$

3. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 收敛.

   因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1}) = -x_0 + \lim_{n\to\infty} x_n$，所以有 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 收敛.

   通过递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 可知：$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|$，若存在 $0 < b < 1$，使得

   $$|x_n - x_{n-1}| \leq b \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

   成立，则有

   $$0 \leq |x_n - x_{n-1}| \leq b \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq b^{n-1} \cdot |x_1 - x_0|,$$

   即正项级数 $\leq |x_n - x_{n-1}| \leq b^{n-1} \cdot |x_1 - x_0|$，由比较审敛法可知 $|x_n - x_{n-1}|$ 收敛.

   需要注意的是**法 2 法 3 中的 b 不能是当 $n \to \infty$ 时，趋于 1^- 的变量. 如例??**

注 2.20. $x_{n+1} = f(x_n)$，若 x_n 收敛于点 x^*，则 $x^* = f(x^*)$，此时 x^* 是函数 $\phi(x) = x - f(x)$ 的根，若要对 x^* 进行定位，则问题是特定区间内根的存在性问题，可用零点定理解决（例??）.

例 2.30. 设 $x_1=\sqrt{a}, x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，计算极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

法一：

易知 $f(x)=\sqrt{a+x}$，因此 $f(x)$ 单调，又因为 $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=x_1$，因此 $\{x_n\}\uparrow$.

设 $\{x_n\}$ 收敛于上确界 M，即

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\to\sqrt{a+M}=M\ (n\to\infty)\Rightarrow M=\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}},$$

下面证明 $x_n<\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$，易知 $x_1=\sqrt{a}\le\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$，设 $x_{n-1}\le\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$，则

$$\begin{aligned}
x_n=\sqrt{s+x_{n-1}}&\le\sqrt{a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}}\\
&=\sqrt{\left(\sqrt{a+\frac{1}{4}}\right)^2+\frac{1}{4}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

由数学归纳法可知，对于 $\forall n$ 有 $x_n<\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$，因此 x_n 有上界 $\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$. 进而 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$.

法二：

因为 $\{x_n\}\uparrow, x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，所以 $x_{n+1}^2=a+x_n, x_{n+1}\ge\sqrt{a}$，即

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\le\frac{a}{x_{n+1}}+1\le\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1.$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界 $\sqrt{a}+1$.

注 2.21. 本题不能用导数的方法求解，因为 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\le\frac{1}{2\sqrt{a}}$，因为不知道 a 的大小，因此无法证明 $f'(x)\le h<1$.

例 2.31. 设 $f(x)$ 可微，且 $0<f'(x)\le\frac{1}{2+x^2}$，数列 $x_0=A$，$x_n=f(x_{n-1}), n=1,2,\cdots$. 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且是方程 $f(x)=x$ 的唯一实根.

方法一（单调有界准则）：

因为 $f'(x)>0$，所以 $\{x_n\}$ 单调，又因为

$$\begin{aligned}
|x_n|=|x_n-x_1+x_1|&\le|x_n-x_1|+|x_1|=|f(x_{n-1})-f(x_0)|+|x_1|\\
&=\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)\mathrm{d}x\right|+|x_1|\le\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}\frac{1}{2+x^2}\mathrm{d}x\right|+|x_1|\\
&=|x_1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\bigg|_{x_0}^{x_{n-1}}
\end{aligned}$$

由数列极限的不等式性可知

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |x_n| \le |x_1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}\bigg|_{x_0}^{x_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot |\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_0}{\sqrt{2}}| \le M$$

即 $\{x_n\}$ 单调有界，因此 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在. 令 $\phi(x) = f(x) - x$，因此 $\phi'(x) = 1 - f'(x) \ge 0$，因此方程 $f(x) = x$ 有唯一实根.

方法二（先假设存在，再证明）：

设 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 a，即 $f(a) = a$，因此

$$|x_n - a| = |f(x_{n-1}) - f(a)| = f'(\xi) \cdot |x_{n-1} - a| \le \frac{1}{2} \cdot |x_{n-1} - a|,$$

因此

$$0 \le |x_n - a| \le \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |x_1 - a| \to 0,\ n \to \infty,$$

即 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

方法三（数列收敛）：

因为

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| = f'(\xi) \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \le \frac{1}{2} \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}|,$$

因此

$$0 \le |x_n - x_{n-1}| \le \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |x_1 - x_0|,$$

由比较审敛法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n - x_{n-1}$ 绝对收敛，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n - x_{n-1} = \lim_{n\to\infty} x_n - x_0$，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

注 2.22 (重点!！). 构建函数与导数之间的关系有三种方法：

1. 中值定理系：拉格朗日中值定理：$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2)$、柯西中值定理、泰勒公式等；
2. 定积分：$f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f'(x)\mathrm{d}x$；
3. 分部积分法：$\int f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\mathrm{d}x$.

注 2.23. 上面三种做法中均涉及了 $x_n - x_i = f(x_{n-1}) - f(x_{i-1})$，其中

1. 单调有界准则中证明有界性中，$i = 1$；
2. 先假设后证明中，$i = \infty$；
3. 级数收敛中，$i = n - 1$.

第一者不能持续提推下去，因此不能用中值定理联系函数与导数的关系，只能用定积分来联系.

例 2.32. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\ln(x_n+1)$，证明：

1. $\{x_n\}$ 收敛并求其极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$；

2. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$ 以及 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$.

1. 易知 $f(x)=\ln(1+x)$ 单调增，而 $x_2=\ln(1+x_1)\le x_1$，所以 $\{x_n\}\downarrow$.

   又因为 $x_2=\ln(x_1+1)\ge\frac{x_1}{1+x_1}>0$，由数学归纳法可知：$x_n>0$，即 $\{x_n\}$ 有下界，因此 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

2. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n}\cdot\ln\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln(1+x_n)-x_n}{x_n^2}\right\},\end{aligned}$$

   因为 $\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}$，所以 $\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln(1+x_n)-x_n}{x_n^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}$.

注 2.24. 在求第一问中，若用法 *2* 或法 *3* 则有：

法 *2*：因为 $a=\ln(1+a)\Rightarrow a=0$，所以 $|x_{n+1}-0|=|\ln(1+x_n)-\ln(1+0)|=|x_n\cdot\frac{1}{1+\xi_n}|=|x_n|\cdot\left|\frac{1}{1+\xi_n}\right|$，其中 $0<\xi_n<x_n$，且 $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}=1$，此时不能得到 $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i}=0$，故不能证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，法 *3* 也一样.

例 2.33. 设 $x_1=a\ge0,y_1=b\ge0,x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$，证明 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$.

法一：

易知 $y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}-\sqrt{x_ny_n}=\frac{1}{2}(x_n+y_n-2\sqrt{x_ny_n})=\frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2\ge0$，所以 $y_n\ge x_n,(n=2,3,...)$.

所以

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\ge\sqrt{x_n^2}=x_n,\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

因此 $\{x_n\}\uparrow,\{y_n\}\downarrow,(n=2,3,...)$. 又因为

$$x_2\le x_n\le y_n\le y_2,$$

所以 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有界，因此 $\{x_n\},\{y_n\}$ 收敛，记 $\lim_{n\to\infty}x_n=A,\lim_{n\to\infty}y_n=B$，则对 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ 两侧取极限有

$$A=\sqrt{AB},B=\frac{A+B}{2}$$

所以 $A=B$.

法二：

因为

$$\begin{aligned} y_{n+1}-x_{n+1} &= \frac{x_n+y_n}{2}-\sqrt{x_ny_n}=\frac{1}{2}(x_n+y_n-2\sqrt{x_ny_n}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2 \\ &\le \frac{1}{2}(\sqrt{y_n-x_n})^2=\frac{1}{2}(y_n-x_n) \\ &\le \frac{1}{2^2}(y_{n-1}-x_{n-1})\le\cdots\le\frac{1}{2^n}(y_1-x_1) \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} y_n-x_n$，由区间套引理可知 $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n$

注 2.25. $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 令 $a=a-b$ 即有：$\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a-b},(a>b)$.

5. 二阶递推 $x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1})$

1. 利用性质放缩转为一阶递推

   利用数列的单调性、正负性或其他性质，对二阶数列 $x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1})$ 的二阶项 x_{n-1} 放大、缩小或省略，从而从而得到一阶递推关系.

2. 数列构造转为一阶递推

   对于形如 $a_{n+1}=M\cdot a_n+N\cdot a_{n-1}$ 的二阶递推数列，将其转化为 $(a_{n+1}-pa_n)=q\cdot(a_n-pa_{n-1})$，令 $y_n=a_n-pa_{n-1}$，则转化为一阶递推数列

$$y_{n+1}=q\cdot y_n.$$

例 2.34. 设 $a_1=a_2=1$ 及 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，试证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 在 $|x|<\frac{1}{2}$ 处必收敛，并求其和函数.

因为 $a_1=a_2=1$，所以 a_n 递增，所以

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}<a_n+a_n=2a_n<2^2a_{n-1}<\cdots<2^{n-1}a_2=2^{n-1}$$

因此 $a_n<2^{n-2}$，因此 $|a_nx^{n-1}|<2^{n-2}|x^{n-1}|=\frac{1}{2}|(2x)^{n-1}|$.

所以当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，由比较审敛法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 绝对收敛.

因为

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1} \\ &= 1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+1}x^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+a_{n-1})x^n \\ &= 1+x+x[S(x)-a_1]+x^2S(x)=1+(x+x^2)S(x) \end{aligned}$$

所以 $S(x)=\frac{1}{1-x-x^2},|x|<\frac{1}{2}$.

例 2.35. 设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1}),S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数. (*1*) 求 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径；(*2*) 求 $S(x)$.

(*1*) 因为 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+a_0)=\frac{1}{2}$，易知 $a_n\geq 0$，所以

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\geq\frac{n}{n+1}a_n\\
&\geq\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}a_{n-1}\geq\cdots\geq\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}a_2\\
&=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

所以 $a_n\geq\frac{1}{n},(n=2,3,...)$，因此 $|a_nx^n|=|a^n|\cdot|x^n|\geq\frac{1}{n}|x^n|$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 收敛半径为 $R_1=1$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径小于等于 $R_1=1$；

因为 $0\leq a_0=1\leq 1,0\leq a_1=0\leq 1,a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，有归纳法可知 $0\leq a_n\leq 1$，因此 $|a_nx^n|\leq|x^n|$，因为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 的收敛半径为 $R_2=1$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径大于等于 $R_2=1$；综上 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$.

(*2*)

$$\begin{aligned}
S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0x^0+a_1x^1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\\
&=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})x^{n+1}\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}a_nx^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_nx^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
S(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n+1}x^{n+1}\\
&=1+x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-\int\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x+\int\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n\mathrm{d}x\\
&=1+x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-1\right]-\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-1\right]\mathrm{d}x+\int x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x\\
&=1+x\cdot[S(x)-1]-\int[S(x)-1]\mathrm{d}x+\int x\cdot S(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

所以 $S'(x)=S(x)-1+xS'(x)-S(x)+1+xS(x)$，因此 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$.

例 2.36. 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\frac{1}{2}(3x_{n+1}-x_n)$，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

因为 $x_{n+2}=\frac{1}{2}(3x_{n+1}-x_n)$，所以 $x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$，令 $y_n=x_{n+1}-x_n$，所以 $y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n, y_1=x_2-x_1=1$，所以 $y_n=\frac{1}{2^{n-2}}$，即 $x_n=1+2(1-\frac{1}{2^{n-2}})\to 3$.

2.3 确定极限中的参数

定理 2.13. 若 $\lim f(x)=\infty, \lim g(x)=\infty$，且

$$\lim f(x)-g(x)=d<\infty,$$

则必有 $f(x)\sim g(x)$.

证明.

$$\lim f(x)-g(x)=d<\infty \Rightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)}-1=\lim\frac{d}{g(x)}=0\Rightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

□

例 2.37. 若 $n>4, b\neq 0$，且 $I=\lim_{x\to+\infty}(x^n+7x^4+1)^m-x=b$，求 n,m,b.

易知 $m\cdot n=1$，则

$$(x^n+7x^4+1)^m-x=(x^n+7x^4+1)^m-x^{nm}=x\cdot\left[\left(1+7\frac{x^4}{x^n}+\frac{1}{x^n}\right)^m-1\right],$$

因此

$$I=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{7m}{x^{n-4}}+\frac{m}{x^n}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{7m}{x^{n-4}}=b,$$

所以 $n=5, m=\frac{1}{5}, b=\frac{7}{5}$.

例 2.38. 确定常数 a,b,c 的值，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0).$$

1. 易知当 $x\to 0$ 时，分子趋于零，因为 $c\neq 0$，所以分母必趋于零. 因为 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$ 所以 $b=0$;

2. 因为当 $x\to 0$ 时 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}\sim t^2$，所以 $\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\sim\int_0^x t^2\mathrm{d}t$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x t^2\mathrm{d}t},$$

3. 因为 $\int_0^x t^2\mathrm{d}t\sim\frac{1}{3}x^3$，所以 $a=1$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{3}x^3}=\frac{1}{2}.$$

2.4 无穷小量阶的比较

主要应用三种方法：

1. 等价代换

   常利用以下结论：$f(x) \sim x^n, \phi(x) \sim x^m \Rightarrow \int_a^{\phi(x)} f(x)\mathrm{d}x \sim x^{n+1\cdot m}$.

2. 求导定阶（洛必达）

   若 $f(x)$ 可导，且 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$，则若 $f'(x) \sim x^k \Rightarrow f(x) \sim x^{k+1}$.

3. 泰勒公式

   注意两点：1）低阶相消；2）奇函数没有偶次项，偶函数没有奇次项.

例 2.39. 已知当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} - 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是 x 的 n 阶无穷小，则 n 等于

$A.1$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.4$

易知 $f(x)$ 为奇函数（$1.2.3$），因此 $f(x)$ 无偶次项，$B.D$ 排除. 而

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) = \frac{2x}{1-x} + o^1;$$

$$\begin{aligned} 2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= 2\ln(1+x+\sqrt{1+x^2}-1) \\ &= 2\cdot(x+\sqrt{1+x^2}-1) + o^1 = 2\cdot(x+\frac{1}{2}x^2) + o^1, \end{aligned}$$

易知 $\ln\frac{1+x}{1-x}, -2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在一阶低阶相消，因此 $f(x)$ 为高于一阶无穷小，则选 C.

例 2.40. 设 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ 的解，且满足 $y(0) = y'(0) = 0$，则当 $x \to 0$ 时，与 $y(x)$ 等价的无穷小为

$A.\sin x^2$　　$B.\sin x$　　$C.2\ln(1+x^2)$　　$D.\ln\sqrt{1+x^2}$.

易知 $y''(0) + 2y'(0) + y(0) = e^0 = 1$，所以 $y''(0) = 1 \Rightarrow y'(x) \sim x \Rightarrow y \sim \frac{1}{2}x^2$，选 D.

注 2.26. 微分方程与极限结合的题不要求解方程，直接代入数据更简单.