高等数学基本方法: 常微分方程

Collection of Calculus Tips: ODE

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等数学期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Calculus (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 基础知识

1.1 一阶微分方程

1.1.1 A. 基本解法

1. 可分离变量的方程

   形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的微分方程，分离变量有
   $$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x,$$
   两侧积分即可.

2. 齐次方程

   各项均为 1 次项的微分方程，如 $xy'+y=\sqrt{xy}$，令 $u=\frac{y}{x}$，则可化为
   $$u'x+2u=\sqrt{u},$$
   分离变量即可.

3. 线性方程

   形如 $y'+p(x)y=f(x)$ 的微分方程，有通解公式
   $$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot\left[C+\int f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right].$$

例 1.1 (齐次方程)**.** 解 $xy'+y=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

由于各项均为一次，除以 x，则 $y'+\frac{y}{x}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$，令 $u=\frac{y}{x}$，则 $u'x+2u=u^{\frac{2}{3}}$，分离变量即可.

例 1.2. 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{x}{y}=0$ 的通解

分离变量有 $x^2+y^2=C_1(C_1\geq 0)$，所以 $x^2+y^2=C^2$，其中 C 为任意常数.

例 1.3. 求微分方程 $y'=\frac{y^2-x}{2y(x+1)}$ 的通解.

因为 $2yy'=\frac{y^2-x}{x+1}=\frac{y^2}{x+1}-\frac{x}{x+1}$，令 $y^2=u$，则
$$u'-\frac{1}{x+1}u=-\frac{x}{x+1}$$
所以
$$\begin{aligned}y^2=u=e^{\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x}\cdot\left[C-\int\frac{x}{x+1}e^{-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]&=(x+1)\cdot\left[C-\int\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\right]\\&=(x+1)\cdot\left[C-\int\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\right]=(x+1)\cdot\left[C-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right]\\&=C(x+1)-(x+1)\ln|x+1|-1\end{aligned}$$

1.1.2 B. 两种技巧

若一阶微分方程不是上面三种中的任何一种，则考虑两种技巧：

1. x,y 对调

   将 x 视为 y 的函数；一般令微分方程中只有一项的变量为函数，有多项的变量为自变量.

   二阶变量对调：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{y'}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$

2. 变量代换

   凑微分换元或者通过换元将 $f(x,y)$ 中的变元分离出来.

3. 解题时需要注意将题目条件代入可化简运算

例 1.4 (变量对调)**.** 解 $y'=\frac{1}{xy+y^3}$.

因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{xy+y^3}$，所以 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=xy+y^3$，即 $x'-yx=y^3$，这是一阶线性微分方程，代入通解公式

$$x=e^{\int y\mathrm{d}y}\cdot\left[C+\int y^3e^{-\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]=Ce^{\frac{1}{2}y^2}-y^2-2.$$

例 1.5. 微分方程 $y'=\frac{y}{x+(y+1)^2}$ 的通解.

易知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x+(y+1)^2}{y}=\frac{x}{y}+\frac{(y+1)^2}{y}$，令 $\frac{x}{y}=u$，即 $x=yu,x'_y=u+yu'_y$，所以 $u+yu'_y=u+\frac{(y+1)^2}{y}$，即 $u'_y=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{(y+1)^2}{y^2}$，因此

$$u=\int\left(1+\frac{1}{y}\right)^2\mathrm{d}y=y-\frac{1}{y}+2\ln y+C$$

所以

$$x=y^2+Cy-1+2y\ln|y|.$$

例 1.6 (二阶变量对调)**.** 设函数 $y=y(x)$ 在 R 内有二阶导数，且 $y'\neq0,x=x(y)$ 为其反函数. 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$$

换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程.

易知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{y'}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$. 所以

$$-\frac{y''}{(y')^3}+(y+\sin x)\frac{1}{(y')^3}=0$$

即

$$y''-y=\sin x.$$

例 1.7. 求微分方程 $y''+(4x+e^{2y})y'^3=0$ 的通解.

因为 $x'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{y'};x''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{y'}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-y''}{(y')^3}$，所以 $y'=\frac{1}{x'},y''=-x''(y')^3=-\frac{x''}{(x')^3}$，代入有

$$-\frac{x''}{(x')^3}+(4x+e^{2y})\frac{1}{(x')^3}=0$$

所以

$$x''-4x=e^{2y}$$

因此 $x=C_1e^{2y}+C_2e^{-2y}+\frac{y}{4}e^{2y}$.

例 1.8. 方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为

令 $\frac{x}{y}=u$，所以 $x=uy$，因为式中仅有一项 x，考虑令 x 为 y 的函数，则 $x'=yu'+u$，因此 $(1+e^{-u})yx'+(y-x)=(1+e^{-u})y(yu'+u)+(y-uy)=(1+e^{-u})(yu'+u)+(1-u)=0$ 所以 $y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\frac{e^u+u}{e^u+1}$，因此

$$-\int\frac{1+e^u}{u+e^u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

即 $-\ln|u+e^u|=\ln C|y|$，因此 $ye^{\frac{x}{y}}+x=C'$.

例 1.9. 利用 $u=e^x$，求微分方程 $y''-(2e^x+1)y'+e^{2x}y=e^{3x}$ 的通解.

因为 $u=e^x$，所以 $x=\ln u$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}u$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}u\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}u+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right]u=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}u^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}u$$

代入有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}u^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}u-(2u+1)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}u\right]+u^2y=u^3$$

即

$$y''_u-2y'_u+y=u$$

其特征方程为 $(r-1)^2=0$，特征根为 $r_1=r_2=1$，则齐次方程通解 $Y=(C_1+uC_2)e^u$，特解 $y^*=Au+B,y^{*'}=A,y^{*''}=0$，所以 $0-2A+Au+B=u$，所以 $A=1,B=2$，则方程通解为

$$Y^*=(C_1+uC_2)e^u+u+2=(C_1+e^xC_2)e^{e^x}+e^x+2.$$

1.2　高阶线性微分方程

1.2.1　A. 解的结构

定理 1.1. 若函数 y_1, y_2 是二阶线性齐次微分方程

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) = 0$$

的两个解，则对于任意常数 C_1, C_2 有

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

也是该微分方程的解.

定义 1.1 (线性相关与线性无关)**.** 设 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 是定义在 I 上的 n 个函数，若存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n \equiv 0$$

则称这 n 个函数在 I 上线性相关；否则称线性无关.

由此定义可知，对于两个函数而言，若在某区间上它们的比值为常数，则线性相关，否则线性无关.

定理 1.2. 若 y_1, y_2 是二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的特解，则对于任意常数 C_1, C_2 有

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

是该微分方程的通解.

定理 1.3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

的一个特解，Y 为其对应的二阶齐次线性微分方程的通解，则

$$y = Y + y^*$$

为该二阶非齐次线性微分方程的通解.

定理 1.4 (叠加原理)**.** 设该二阶非齐次线性微分方程的右端 $f(x)$ 为两个函数之和，即

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f_1(x) + f_2(x),$$

而 y_1, y_2 为方程

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f_1(x)$$

与

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f_2(x)$$

的特解，则 $y = y_1 + y_2$ 为原方程的特解.

例 1.10. 设 y_1,y_2,y_3 是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，$f(x)\neq 0$ 则该方程通解为

$A.C_1y_1+C_2y_2+y_3$

$B.C_1y_1+(1-2C_1)y_2+C_1y_3$

$C.(C_1-C_2)y_1+C_2y_2+y_3$

$D.C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3(C_1+C_2+C_3=1)$.

$Y^*=y_3+C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3(C_1+C_2+C_3=1)$.

1.2.2 B. 二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

其特征方程为 $r^2+pr+q=0$，r_1,r_2 为其两根，若

1. $r_1\neq r_2$，为两不同实根，则
$$Y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x};$$
2. $r_1=r_2=r$，为两相同实根，则
$$Y=(C_1+C_2x)e^{rx};$$
3. $r_1=a+bi,r_2=a-bi$，为两虚根，则
$$Y=e^{ax}\cdot[C_1\sin bx+C_2\cos bx].$$

注 1.1. n 阶常系数齐次线性方程解法与二阶常系数齐次线性方程类似.

例 1.11. 三阶常系数齐次线性微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为

易知其特征方程为 $r^3-2r^2+r-2=(r-2)(r^2+1)=0$，则 $r_1=2,r_2=i,r_3=-i$，因此其通解为 $Y^*=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

例 1.12. 具有特解 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程为

易知其特征根为 $r_1=r_2=-1,r_3=1$，所以特征方程为 $(r+1)^2(r-1)=r^3+r^2-r-1=0$，所以方程为 $y'''+y''-y'-y=0$.

例 1.13. 以 $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$ 为通解的三阶线性齐次方程为.

易知 $r_1=1,r_2=i,r_3=-i$，所以特征方程为 $(r-1)(r^2+1)=r^3-r^2+r-1=0$，所以微分方程为 $y^3-y^2+y-1=0$.

1.2.3 C. 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

若 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$，其特解为

$$y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$$

其中

1. 当 λ 不是特征方程的根时，$k = 0$；
2. 当 λ 是特征方程的单根时，$k = 1$；
3. 当 λ 是特征方程的重根时，$k = 2$.

注 1.2. 上述内容对于高阶线性方程也成立，此时若 λ 是特征方程的 s 重根，则 $k = s$.

若 $f(x) = e^{ax} \cdot [P_l(x)\cos bx + P_n \sin bx]$，其特解为

$$y^* = x^k e^{ax} \cdot [R_m^{(1)} \cos bx + R_m^{(2)} \sin bx],$$

其中 $m = \max\{l, n\}$，且

1. 当 $a + bi$ 不是特征方程的根时，$k = 0$；
2. 当 $a + bi$ 是特征方程的单根时，$k = 1$.

例 1.14. 方程 $y''' - y'' = 3x^2$ 的特解形式为

特征方程为 $r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0$，因为 $3x^2 = 3x^2e^{0x}$，而 $\lambda = 0$ 为特征方程的二重根，则

$$y = x^k e^{\lambda x} R_2(x) = x^2 \cdot [ax^2 + bx + c].$$

例 1.15. 设 $y'' + ay' + by = (cx + d)e^{2x}$ 有特解 $y = 2e^x + (x^2 - 1)e^{2x}$，求 a, b, c, d.

因为特解 $y = 2e^x + (x^2-1)e^{2x} = 2e^x - e^{2x} + x^2e^{2x}$，所以齐次方程特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$，特征方程为 $(r-1)(r-2) = r^2 - 3r + 2 = 0$，所以 $a = -3, b = 2$，齐次方程为

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

因为 $\lambda = 2$ 为方程特征根，将 $y = x^2e^{2x}$ 代入方程有

$$y'' - 3y' + 2y = (2x + 2)e^{2x}$$

所以 $c = d = 2$.

1.3 差分方程

1.3.1 A. 一阶常系数齐次线性差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = 0$$

的通解为 $Y(t) = C \cdot (-a)^t$.

1.3.2 B. 一阶常系数非齐次线性差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f(t)$$

通解为 $y = Y(t) + y_t^*$，其中

1. 若 $f(t) = P_m(t)$.

1. 若 $a \neq -1$，则 $y^* = R_m(t)$；
2. 若 $a = -1$，则 $y^* = tR_m(t)$.

2. 若 $f(t) = d^t \cdot P_m(t)$.

1. 若 $a + d \neq 0$，则 $y^* = d^t \cdot R_m(t)$；
2. 若 $a + d = 0$，则 $y^* = td^t \cdot R_m(t)$.

3. 若 $f(t) = C_1 \cos bt + C_1 \sin bt$.

1. 若 $(a + \cos b)^2 + \sin^2 b \neq 0$，则 $y = A \cos bt + B \sin bt$
2. 若 $(a + \cos b)^2 + \sin^2 b = 0$，则 $y = t(A \cos bt + B \sin bt)$

例 1.16. *设贷款 25000 万元，年利率为 1%，12 年内等额本息还款，求每年还款数额.*

设每年还款额为 P，y_t 为第 t 年还款后欠银行的钱，则 $y_0 = 25000, y_{12} = 0$，且

$$y_{t+1} = y_t + y_t \cdot 1\% - P$$

则

$$y_{t+1} - 1.01y_t = -P$$

因此 $y_t = C \cdot 1.01^t + a \cdot P$，将 $y^* = a \cdot P$ 代入得 $a = 100$，所以

$$y_t = C \cdot 1.01^t + 100 \cdot P$$

代入 $y_0 = 25000, y_{12} = 0$ 得 $C = -197122, P = 2221.22$

2 经典题型

2.1 由解判断方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程的解中有 $xe^{rx} \Rightarrow$ 该二阶常系数齐次线性微分方程为 $y''-r^2y=0$，其中 $r>0$；

2. 二阶常系数非齐次线性微分方程的解中，e^{kx} 且 $k\neq\lambda$ 的项是二阶常系数齐次线性微分方程的解，即 k 是特征方程的根；

3. n 阶非齐次线性微分方程的特解找方程的一般思想：

   由解的结构，通过特解找出通解（= 齐次通解 + 非齐次特解），再求 n 阶导数，消除所有的任意常数 C_i；

4. 特殊的，二阶常系数非齐次线性微分方程的特解找方程的一般思想：

   由解的结构，找到对应齐次方程的通解，从而找到特征根与特征方程，从而求出齐次方程，代入非齐次特解，找到非齐次方程.

例 2.1. 若 $e^{2x}+(x+1)e^x$ 是方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的解，求 a,b,c 及该方程的通解.

因为 $y=e^{2x}+(x+1)e^x=e^{2x}+xe^x+e^x$，可知 e^{2x} 齐次方程的特解，因此 xe^x 是非齐次方程的特解，否则齐次方程有重根 *1*. 从而 e^x 为齐次方程的另一特解，因此特征方程为 $(r-2)(r-1)=0$，即齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$.

因为 xe^x 是非齐次方程的特解，将其带入，可知 $c=-1$.

例 2.2. 已知 $y_1=3,y_2=3+x^2,y^3=3+e^x$ 为某二阶线性齐次方程的三个特解，求该方程.

已知齐次方程的两个特解为 $Y_1=y_3-y_1=e^x,Y_2=y_2-y_1=x^2$，所以齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2x^2$，则非齐次方程通解为

$$y=Y+y_1=C_1e^x+C_2x^2+3,$$

求导有

$$y'=C_1e^x+2C_2x,$$

再求导

$$y''=C_1e^x+2C_2$$

联立三个方程，消去 C_1,C_2，则

$$(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=6(1-x).$$

例 2.3. 若 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x-e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 为某二阶线性常系数非齐次方程的特解，求此方程.

已知齐次方程的两个特解为 $Y_1=y_3-y_1=e^{-x}, Y_2=y_1-y_2-Y_1=e^{2x}$，所以齐次方程的特征方程为 $(r+1)(r-2)=0$，即齐次方程为

$$y''-y'-2y=0,$$

因为 $y_3-Y_1-Y_2=xe^x$ 为非齐次方程的特解，将其带入求得非齐次方程为

$$y''-y'-2y=e^x(1-2x).$$

例 2.4. 以 $y=e^{Cx+x^2}$ 为通解的一阶微分方程为.

因为 $lny=Cx+x^2$，所以 $\frac{\ln y-x^2}{x}=C$，对 x 求导消去 C 有：$\frac{\left(\frac{1}{y}y'-2x\right)x-\ln y-x^2}{x^2}=0$，即 $\left(\frac{1}{y}y'-2x\right)x-\ln y-x^2=0$ 因此

$$xy'-y\ln y=x^2y.$$

2.2 函数方程

1. 注意从题干中抽象出定解条件，解出任意常数 C 的值；
2. 形如 $f'(x)=f(-x)$ 的式子需要再求一次导，通过换元消去一阶导数.

例 2.5. 设 $f(x)$ 在 R 上有定义，$f'(0)=2$，对任意的 x,y 有 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$，求 $f(x)$.

因为 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，即

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^xf(\Delta x)+e^{\Delta x}f(x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\&=e^xf'(0)+f(x)=2e^x+f(x).\end{aligned}$$

解得 $f(x)=2xe^x$.

例 2.6. 设 y 在 $[x_0,\infty)$ 上有一阶连续导数，且 $\lim_{x\to\infty}[y'(x)+y(x)]=k$，求 $\lim_{x\to\infty}y(x)$.

令 $y'(x)+y(x)=f(x)$，所以 $\lim_{x\to\infty}f(x)=k$，且

$$y(x)=e^{-\int \mathrm{d}x}\cdot\left[C+\int_{x_0}^{x}f(x)e^{\int \mathrm{d}x}\right]=e^{-x}\cdot\left[C+\int_{x_0}^{x}f(x)e^x\mathrm{d}x\right]=\frac{C+\int_{x_0}^{x}f(x)e^x\mathrm{d}x}{e^x}$$

若 $\lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x)e^x\mathrm{d}x=\infty$，则由洛必达法则：

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x}=k,$$

若 $\lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x)e^x\mathrm{d}x\neq\infty$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x)e^x=0$，所以 $k=0$，即

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{C+\int_{x_0}^{x} f(x)e^x\mathrm{d}x}{e^x}=0=k$$

综上 $\lim_{x\to\infty} y(x)=k$.

例 2.7. 设函数 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2\mathrm{d}t$，试求 $f(x)$.

法一：

两端求导有：$f'(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2\mathrm{d}t+e^xf^2(x)=f(x)+e^xf^2(x)$，所以 $\frac{f'(x)-f(x)}{f^2(x)}=e^x$，因为

$$\left(\frac{e^x}{f(x)}\right)'=\frac{e^xf(x)-f'(x)e^x}{f^2(x)}=-e^x\frac{f'(x)-f(x)}{f^2(x)}=-e^{2x}$$

两侧积分有

$$\frac{e^x}{f(x)}=-\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}2x=-\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

所以

$$f(x)=\frac{e^x}{-\frac{1}{2}e^{2x}+C}$$

因为 $f(0)=1$，所以 $C=\frac{3}{2}$，所以 $f(x)=\frac{2}{3e^{-x}-e^x}$.

法二：

因为 $f'(x)=f(x)+e^xf^2(x)$，所以 $-\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{f(x)}+e^x$，令 $u=\frac{1}{f}$，有 $u'+u=-e^x$，这是一个一阶常系数线性方程.

例 2.8. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(x)=\int_0^x f(1-t)\mathrm{d}t+1$，求 $f(x)$.

易知

$$f'(x)=f(1-x)$$

$$f''(x)=-f'(1-x)$$

令 $x=1-z$，则 $f'(1-z)=f(z)$，即 $f(x)=f'(1-x)$ 联立上式有

$$f''(x)+f(x)=0$$

解得

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(0)=1,f'(1)=f(0)=1$，所以 $C_1=1,C_2=\frac{1+\sin 1}{\cos 1}$，所以

$$f(x)=\cos x+\frac{1+\sin 1}{\cos 1}\cdot\sin x.$$

例 2.9. 设 $f(x)$ 可导，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

令 $t-x=u$，则 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0(u+x)f(u)\mathrm{d}u$，所以

$$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^0 uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u$$

两侧求导有

$$1=f(x)-xf(-x)+\int_{-x}^0 f(u)+xf(-x)=f(x)+\int_{-x}^0 f(u),$$

两侧求导有

$$0=f'(x)+f(-x),$$

两侧求导有

$$0=f''(x)-f'(-x)$$

因为 $0=f'(-x)+f(x)$，所以

$$0=f''(x)+f(x)$$

解之有 $f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$.

例 2.10. 设 $y(x)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0,y(0)=1$ 过 $y=y(x)$ 上任意一点做切线以及 x 轴垂线，两条直线与 x 轴所围成面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，且 $2S_1-S_2=1$，求 $y(x)$.

易知 $S_2=\int_0^x y(x)\mathrm{d}x$，切线方程为 $Y-y=y'(x)\cdot(X-x)$，令 $Y=0$，则 $X=-\frac{y}{y'}+x$，所以 $S_1=\frac{y^2}{2y'}$，综上

$$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(x)\mathrm{d}x=1$$

求导有

$$\frac{2y(y')^2-y''y^2}{(y')^2}=y$$

因为 $y'\neq 0,y\neq 0$，所以化为

$$(y')^2=y''\cdot y$$

即

$$\frac{y'}{y}=\frac{y''}{y'}$$

即

$$(\mathrm{d}\ln y)'=(\mathrm{d}\ln y')'$$

因此

$$\ln y'=\ln y+C_1$$

所以 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y$，即

$$y=C_2e^{C_1x}$$

因为 $y(0)=1, \frac{y^2(0)}{y'(0)}-\int_0^0 y(x)\mathrm{d}x=1$，所以 $y'(0)=1$，代入有 $C_1=C_2=1$，即

$$y=e^x.$$

例 2.11. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续二阶导数，$f(1)=0, f'(1)=1$，且 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $z_{xx}+z_{yy}=0$，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

法一：将 $z(u)$ 展开求导

$z_x=2xf(x^2+y^2)+(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)2x$, $z_{xx}=2f(x^2+y^2)+4x^2f'(x^2+y^2)+(6x^2+2y^2)f'(x^2+y^2)+(2x^3+2y^2x)f''(x^2+y^2)2x=2f+(10x^2+2y^2)f'+(4x^4+4x^2y^2)f''=0$，令 $u=x^2+y^2$，所以 $z_{xx}+z_{yy}=4f(u)+12uf'(u)+4u^2f''(u)=0$，所以

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0$$

考虑到 $z(u)=uf(u)$，所以 $z'=f(u)+uf'(u), z''=2f'(u)+uf''(u)$，因此 $uz''=2uf'(u)+u^2f''(u)$，代入有

$$z'+uz''=0$$

且 $z(1)=0, z'(1)=1$，解的 $z=\ln u$，因此 $f(u)=\frac{\ln u}{u}$，可知当 $u=e$ 是取最大值，$f(e)=e^{-1}$.

法二：将 $z(u)$ 不展开求导

$z_x=2xz'(u), z_{xx}=2z'(u)+4x^2z''(u)$，所以 $z_{yy}=2z'(u)+4y^2z''(u)$，即 $z_{xx}+z_{yy}=4z'(u)+4(x^2+y^2)z''(u)=4uz''(u)=0$，因此

$$z'+uz''=0.$$

2.3 微分方程与反常积分

例 2.12. 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$，

1. 证明：$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
2. 若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$.

易知特征方程为 $r^2-2r+k=0$，因此 $\Delta=b^2-4ac>0$，因此特征方程有两个负特征根，因此通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x},$$

其中 $r_1, r_2<0$，因此 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

因为

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=0$$

以及

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}r_1C_1e^{r_1x}+r_2C_2e^{r_2x}=0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}[y''+2y']\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}[y'+2y]_0^{\infty}=\frac{3}{k}.$$