微积分 II: 微分方程与差分方程

Calculus II: Differential equations and difference equations

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$

1.1 可分离变量的微分方程

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的形式，则称之为**可分离变量的微分方程**.

假设 $g(y), f(x)$ 连续，设 $y = \phi(x)$ 是微分方程的解，代入式1 有

$$g(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x,$$

对其两面积分有

$$\int g(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x,$$

引入 $y = \phi(x)$，则

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $G(y), F(x)$ 分别为 $g(y), f(x)$ 的原函数，则有

$$G(y) = F(x) + C.$$

由此可以确定出关于 x 的单值函数 $y = \phi(x)$，即式1 的解.

1.2 齐次方程

1.2.1 （一）齐次方程

若一阶微分方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式，则称此方程为**齐次方程**. 在齐次方程中引入未知量 $u = \frac{y}{x}$，即可将其转化为可分离变量的方程，即 $y = u \cdot x$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x + u,$$

代入有:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x + u = \phi(u),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\phi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分即可求解.

1.2.2 （二）可化为齐次方程的方程

方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$
当 $c=c_1=0$ 时是齐次的，否则不是齐次的，在这种情况做如下变换，令
$$x=X+h,\ y=Y+k,$$
则有
$$\mathrm{d}X=\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}Y=\mathrm{d}y,$$
因此有
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1},$$
解如下方程组:
$$\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$$
求得 h,k ，此时原方程便可化为齐次方程:
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y},$$
求得通解后，代入 $x-h=X,y-k=Y$ 即可.

需要注意的是若 $a_1b=ab_1$ 时，无法求解 h,k 此时令 $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda$，则有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}.$$
令 $ax+by=v$ 则有
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$
因此有
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+\frac{bv+cb}{\lambda v+c_1},$$
这样便可化为可分离变量方程. 上面所介绍的方法可以应用于更一般的形式:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

1. 若 $c=c_1=0$

   则令 $u=\frac{y}{x}$，此时有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，因此可化为可分离变量微分方程:
$$x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f\left(\frac{a+bu}{a_1+b_1u}\right);$$

2. 若 $c\neq 0,c_1\neq 0$，且 $ab_1\neq a_1b$

   则令 $x=X+h,y=Y+k,$ 解方程组，令 $u=\frac{Y}{X}$，可化为可分离变量微分方程:
$$X\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}+u=f\left(\frac{a+bu}{a_1+b_1u}\right);$$

3. 若 $c\neq 0, c_1\neq 0$，且 $ab_1=a_1b$

   则令 $ax+by=v$，$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda$，因此 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，由此得到可分离变量微分方程：

$$\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-\frac{a}{b}=f\left(\frac{v+c}{\lambda v+c_1}\right).$$

无论是令 $u=\frac{y}{x}$ 还是令 $v=ax+by$，都是**变量代换法**的应用，这是解微分方程最常用的方法.

例 1.1. 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}$.

解. 易知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y$$

令 $u=x+y$，则有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+1,$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u+1,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\mathrm{d}y$$

两侧积分有

$$\ln|u+1|=y+C,$$

因此

$$x+y+1=Ce^y,$$

或

$$x=Ce^y-y-1.$$

□

1.3 一阶线性微分方程

1.3.1 （一）线性方程

有如下形式的微分方程

$$y'+p(x)y=f(x),$$

称为**一阶线性微分方程**，若 $f(x)\equiv 0$，则称为是**齐次的**，否则称为是**非齐次的**.

1. 一阶齐次线性微分方程的解法. 易知，一阶齐次线性微分方程是可分离变量的，因

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)\cdot y=0$$

有

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$

两端积分有

$$\ln|y|=-\int p(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

或

$$y=C\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{2}$$

此即对应的齐次线性微分方程的通解.

2. 一阶非齐次线性微分方程的解法. 对于非齐次线性微分方程，可以利用常数变易法来求解，令式2中的 C 为关于 x 的变量 $u(x)$，则有

$$y=u(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{3}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-u(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

代入非齐次线性方程中有

$$u'(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-u(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x)u(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=f(x),$$

从而

$$u'(x)=f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分有

$$u(x)=\int f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

代入式3 有

$$y=\left(\int f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

或

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

此即非齐次线性微分方程的通解. 需要注意的是，一阶非齐次线性方程的通解等于对应的一阶齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

注 1.1. 计算时，先算 $\int p(x)\mathrm{d}x$，再算 $\int f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$，最后得到解.

1.3.2 （二）伯努利方程 *

形如

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n \ (n \neq 0, 1)$$

的方程称为**伯努利方程**，当 $x = 0, 1$ 时，它是线性微分方程. 伯努利方程虽然是非线性的，但是可以利用**变量代换法**将其转换为线性方程.

对于伯努利方程有

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x).$$

可见上式左端第一项与 $\frac{\mathrm{d}y^{-n+1}}{\mathrm{d}x}$ 之差一个常数 $(-n+1)$，令 $u = y^{-n+1}$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (1-n)p(x)u = (1-n)f(x).$$

这就转换为一阶线性微分方程了.

2 可降阶的高阶微分方程 *

2.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

对于微分方程

$$y^{(n)} = f(x)$$

只需令 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数，则上式就是新未知函数的一阶微分方程，两侧积分便有

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1.$$

以及

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2.$$

如此下去积分 n 次后便可得到原方程的通解，注意此通解中有 n 个任意常数.

2.2 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程

此类微分方程解法同上一类，令 $z = y'$ 为辅助函数，则此类方程即可转化为：

$$z' = f(x, z),$$

这样原方程便化为一阶微分方程，若能求得其通解 $z = \phi(x, C_1)$，则原方程通解为：

$$y = \int z(d)x + C_2 = \int \phi(x, C_1)(d)x + C_2.$$

注意其中有两个自由常数.

2.3 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程

令 $y' = z$ 则有

$$y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot z.$$

因此有

$$z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = f(y, z)$$

这样便化为一阶微分方程.

例 2.1. 求微分方程

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

的通解.

解. 令 $z = y'$，因此有

$$y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y},$$

代入有

$$y \cdot z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = z^2$$

即

$$y \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = z$$

由此有 $z = C_1 y$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y,$$

故

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

□

3 高阶线性微分方程

3.1 二阶线性微分方程

形如

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

的微分方程称为**二阶线性微分方程**，若 $f(x) \equiv 0$，则称之为**齐次的**，否则称为**非齐次的**. 一般的，形如

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = f(x)$$

的微分方程称为 n **阶线性微分方程**.

3.2 线性微分方程解的结构

定理 3.1. 若函数 y_1, y_2 是二阶线性齐次微分方程

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) = 0$$

的两个解，则对于任意常数 C_1, C_2 有

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

也是该微分方程的解.

证明. 显然. □

定义 3.1 (线性相关与线性无关)**.** 设 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 是定义在 I 上的 n 个函数，若存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n \equiv 0$$

则称这 n 个函数在 I 上线性相关；否则称线性无关.

由此定义可知，对于两个函数而言，若在某区间上它们的比值为常数，则线性相关，否则线性无关.

定理 3.2. 若 y_1, y_2 是二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的特解，则对于任意常数 C_1, C_2 有

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

是该微分方程的通解.

定理 3.3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

的一个特解，Y 为其对应的二阶齐次线性微分方程的通解，则

$$y = Y + y^*$$

为该二阶非齐次线性微分方程的通解.

证明. 显然 y 是该二阶非齐次线性微分方程的解，又因为 $y = Y + y'$ 中有两个任意常数，因此 y 为该二阶非齐次线性微分方程的通解. □

定理 3.4 (叠加原理)**.** 设该二阶非齐次线性微分方程的右端 $f(x)$ 为两个函数之和，即

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f_1(x) + f_2(x),$$

而 y_1, y_2 为方程

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f_1(x)$$

与

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f_2(x)$$

的特解，则 $y = y_1 + y_2$ 为原方程的特解.

证明. 显然. □

3.3 常数变易法 *

若已知二阶齐次线性微分方程通解为

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

则可用常数变易法求二阶非齐次线性微分方程的通解，令

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2,$$

其中 v_1, v_2 为未知函数，现欲确定这两个函数以使 y 满足二阶非齐次线性微分方程. 对 y 求导有

$$y' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'$$

为不使 y'' 中出现 v_1'' 以及 v_2''，令

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \tag{4}$$

则有

$$y'' = y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2,$$

将 y, y', y'' 代入二阶非齐次线性微分方程有

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2 + p(x) \cdot (v_1 y_1' + v_2 y_2') + q(x) \cdot (v_1 y_1 + v_2 y_2) = f(x),$$

整理有

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + (y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1) \cdot v_1 + (y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2) \cdot v_2 = f(x),$$

因为 y_1 y_2 为齐次线性微分方程的解，所以有

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' = f(x)$$

联立方程组

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' = f(x) \end{cases}$$

可知在行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

时，可解得

$$v_1' = -\frac{y_2 \cdot f(x)}{W},\ v_2' = -\frac{y_1 \cdot f(x)}{W}.$$

对两端积分有

$$v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W} \mathrm{d}x + C_1,$$
$$v_2 = -\int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W} \mathrm{d}x + C_2.$$

二阶非齐次线性微分方程的通解为

$$y=-y_1\int\frac{y_2\cdot f(x)}{W}\mathrm{d}x-y_2\int\frac{y_1\cdot f(x)}{W}\mathrm{d}x+C_1y_1+C_2y_2.$$

对于二阶齐次方程

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0,$$

若只知其一个不恒为零的解 $y_1(x)$，则可以求出的其通解. 欲求通解，则需要找到与 y_1 线性无关的特解 y_2，即

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)}=u(x),$$

其中 $u(x)$ 不为常数，即令 $y_2=u\cdot y_1$，因此有

$$y_2'=u'y_1+uy_1'$$

以及

$$y_2''=u''y_1+u'y_1'+u'y_1'+uy_1''$$

代入二阶齐次方程有

$$u''y_1+u'y_1'+u'y_1'+uy_1''+p(x)\cdot(u'y_1+uy_1')+q(x)\cdot uy_1=0$$

因此有

$$u''y_1+2u'y_1'+p(x)u'y_1+u(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)$$

$$u''y_1+2u'y_1'+p(x)u'y_1+u(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)=u''y_1+u'(2y_1'+p(x)y_1)=0,$$

令 $z=u'$，由此方程便化为一阶齐次微分方程：

$$z'y_1+z\cdot(2y_1'+p(x)y_1)=0.$$

在利用一阶齐次微分方程的解法求得 z 即可. 利用这种方法，也可以使二阶非齐次线性微分方程化为一阶非齐次线性微分方程.

3.4 常系数齐次微分方程

二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0$$

若 $p(x),q(x)$ 为常数，即

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$$

则称其为**二阶常系数齐次线性微分方程**. 与求其通解，考虑函数 $y=e^{rx}$，其中 r 为常数，则该函数与其各阶导数只相差常数，因此通过寻找适当的 r 来找到方程的解. 因为

$$y'=r\cdot e^{rx},\ y''=r^2\cdot e^{rx},$$

因此有

$$r^2 \cdot e^{rx} + pr \cdot e^{rx} + q \cdot e^{rx} = e^{rx} \cdot (r^2 + pr + q) = 0.$$

因为 $e^{rx} \neq 0$，因此有

$$(r^2 + pr + q) = 0.$$

这一方程被称为微分方程的**特征方程**.

若 $\Delta = p^2 - 4q > 0$，即特征方程有两不同实根 r_1, r_2，则函数 $y_1 = e^{r_1 x}$，$y_2 = e^{r_2 x}$ 均为微分方程的解，且线性无关，因此微分方程的通解即为

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}.$$

若 $\Delta = p^2 - 4q = 0$，即特征方程有重根 $r_1 = r_2$，这时只得到微分方程的一个解 $y_1 = e^{r_1 x}$，考虑其另一个与 y_1 线性无关的特解 y_2，即

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x)$$

其中 $u(x)$ 不为常数，因此 $y_2 = y_1 u$. 因此

$$y_2' = y_1' u + y_1 u'$$

以及

$$y'' = y_1'' u + y_1' u' + y_1' u' + y_1 u'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'',$$

代入有

$$\begin{aligned} & y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' + p \cdot (y_1' u + y_1 u') + q \cdot y_1 u \\ &= 2y_1' u' + y_1 u'' + p \cdot y_1 u' + u \cdot (y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1) \\ &= 2y_1' u' + y_1 u'' + p \cdot y_1 u' = 0 \end{aligned}$$

因此有

$$r_1^2 e^{r_1 x} u'' + (2r_1 + p_1) e^{r_1 x} u' = r_1^2 e^{r_1 x} u'' = 0,$$

因此

$$u'' = 0.$$

设 $u = x$，则有

$$y_2 = x \cdot e^{r_1 x},$$

因此微分方程通解为

$$y = e^{r_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x).$$

若 $\Delta = p^2 - 4q < 0$，即特征方程有一对共轭复根 $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$. 这时 $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$ 是微分方程的两个解，为了得到实值函数形式的解，利用**欧拉公式** $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. 因此

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i \sin\beta x),$$

以及

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

由于**叠加原理**，可知实值函数

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

也为微分方程的解，且它们线性无关. 由此微分方程的通解为：

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos\beta x + C_2 \cdot \sin\beta x).$$

3.5 常系数非齐次微分方程

对于二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f$$

我们易知其对于的齐次微分方程的通解，因此只需寻找它的一个特解，便可以求得其通解. 这里只讨论 $f(x)$ 的两种常见形式.

3.5.1 （一）$f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

已知多项式与指数函数的乘积的各阶导数仍为多项式与指数函数的乘积，因此我们推测 $y^* = R(x)e^{\lambda x}$ 为非齐次方程的一个特解，将 $y^*, y^{*''}, y^{*''}$ 代入非齐次方程，约去 $e^{\lambda x}$，有

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x),$$

分三种情况讨论：

1. 若 λ 不是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根

   即 $\lambda^2+p\lambda+q \neq 0$，则由于 $P_m(x)$ 是一个 m 次多项式，因此令另一个 m 次多项式 $R_m(x) = R(x)$，求得待定系数即可，因此非齐次微分的一个特解为：

   $$y^* = R_m(x)e^{\lambda x}.$$

2. 若 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的单根

   则 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，但 $2\lambda + p \neq 0$，所以令另一个 m 次多项式 $R_m(x) = R'(x)$，即令 $R(x) = xR_m(x)$ 即可，因此非齐次微分的一个特解为：

   $$y^* = xR_m(x)e^{\lambda x}.$$

3. 若 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的重根

   则 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，但 $2\lambda + p = 0$，所以令另一个 m 次多项式 $R_m(x) = R''(x)$，即令 $R(x) = x^2R_m(x)$ 即可，因此非齐次微分的一个特解为：

   $$y^* = x^2R_m(x)e^{\lambda x}.$$

3.5.2 （二）$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$ 型

应用欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

因此有

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

即

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x] \\ &= e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cdot\frac{1}{2}(e^{\omega xi} + e^{-\omega xi}) + Q_n(x)\cdot\frac{1}{2i}(e^{\omega xi} - e^{-\omega xi})\right] \\ &= P(x)\cdot e^{\lambda+\omega i}x + \overline{P}(x)\cdot e^{\lambda-\omega i}x, \end{aligned}$$

其中

$$P(x) = \frac{P_l(x)}{2} + \frac{Q_n(x)}{2i} = \frac{P_l(x)}{2} - \frac{Q_n(x)}{2}i,\ \overline{P}(x) = \frac{P_l(x)}{2} - \frac{Q_n(x)}{2i} = \frac{P_l(x)}{2} + \frac{Q_n(x)}{2}i$$

是互为共轭的 m 次多项式，$m = \max\{l, n\}$.

应用上一目的结果，对于 $f(x)$ 中的第一项 $P(x)\cdot e^{\lambda+\omega i}x$，可求出一个 m 次多项式 $R_m(x)$，使得 $y_1^* = x^k R_m e^{(\lambda+\omega i)x}$ 是方程：

$$y'' + py' + qy = P(x)\cdot e^{\lambda+\omega i}x$$

的特解，其中 k 按 $\lambda+\omega i$ 不是特征方程的根或为其单根依次取 $0, 1$，注意：由于是复数解，因此不可能为特征方程的重根.

又由于 $\overline{P}\cdot e^{\lambda-\omega i}x$ 与 $P(x)\cdot e^{\lambda+\omega i}x$ 共轭，故与 y_1^* 共轭的函数 $y_2^* = x^k\overline{R_m}e^{\lambda-\omega i}$ 必然是方程

$$y'' + py' + qy = \overline{P(x)}\cdot e^{\lambda-\omega i}x$$

的特解，其中 $\overline{R_m}$ 为与 R_m 共轭的 m 次多项式，因此

$$y = x^k R_m e^{\lambda+\omega i} + x^k\overline{R_m}e^{\lambda-\omega i}$$

即为原非齐次微分方程的特解，且可以写为

$$y = x^k e^{\lambda x}[R_m(\cos\omega x + i\sin\omega x) + \overline{R_m}(\cos\omega x - i\sin\omega x)],$$

因此括号内的两项是互为共轭的，因此相加后无虚部，因此可写为实值函数的形式：

$$y = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}\cos\omega x + R_m^{(2)}\sin\omega x].$$

其中 $R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 是 m 次多项式，$m = \max\{l, n\}.k$ 按 $\lambda+\omega i$ 或 $\lambda-\omega i$ 不是特征方程的根或为其单根依次取 $0, 1$.

4 差分方程

4.1 差分的概念与性质

设函数 $y = f(x)$ 中自变量 t 取所有非负整数，记其函数值为 y_t，则气其值可以构成一个数列 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$，差 $y_{t+1} - y_t$ 称之为函数 y_t 的**差分**，记为 Δy_t，即

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t.$$

易知 y_t 的**二阶差分**为

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t \\ &= y_{t+2} - y_{t+1} - y_{t+1} + y_t \\ &= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t. \end{aligned}$$

易知差分具有以下性质：

1. $\Delta(ay_t + bz_t) = a\Delta y_t + b\Delta z_t$；
2. $\Delta(y_t \cdot z_t) = z_t\Delta y_t + y_{t+1}\Delta x_t = z_{t+1}\Delta y_t + y_t\Delta z_t$.

4.2 一阶常系数线性差分方程

一阶常系数差分方程一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = f(t),$$

对应的一阶常系数齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = 0.$$

且其通解为：

$$y_t = C \cdot (-a)^t.$$

而非齐次差分方程的通解为对于齐次差分方程的通解假设非齐次差分方程的一个特解．下面给出几种 $f(t)$ 形式下，非齐次差分方程的特解 y^*；

1. $f(t) = P_m(t)$

   若 $a + 1 \neq 0$，则 $y_t^* = Q_m(t)$；

   若 $a + 1 = 0$，则 $y_t^* = tQ_m(t)$.

2. $f(t) = Mb^t$，其中 $M \neq 0, b \neq 1$

   若 $a + b \neq 0$，则 $y_t^* = Ab^t$；

   若 $a + b = 0$，则 $y_t^* = Atb^t$.

3. $f(t) = M\cos\omega t + N\sin\omega t$，其中 $0 < \omega < \pi$ 或 $\pi < \omega < 2\pi$

   则 $y_t^* = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.