微积分 I: 连续

Calculus I: Continuous

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 函数的连续性与间断点

1.1 连续性的概念

定义 1.1 (连续)**.** 若函数 $f(x)$ 在 x_0 某一邻域内有定义，且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

定义 1.2 ($\epsilon - \delta$ 语言)**.** $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta), \text{s.t.} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

注意. x 的邻域，而不去心.

下面说明左连续与右连续的概念.

定义 1.3 (左连续)**.** 若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续.

定义 1.4 (右连续)**.** 若 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.

1.2 间断点的概念

定义 1.5 (间断点)**.** 若函数 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有定义，但在 x_0 处不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

定义 1.6 (第一类间断点)**.** 若 x_0 为函数 $f(x)$ 间断点，且 $\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称 x_0 为第一类间断点.

定义 1.7 (可去间断点)**.** 若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ ，则称 x_0 为可去间断点.

定义 1.8 (跳跃间断点)**.** 若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ，则称 x_0 为跳跃间断点.

定义 1.9 (第二类间断点)**.** 若 x_0 为函数 $f(x)$ 间断点，且 $\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少一个不存在，则称 x_0 为第二类间断点.

2 连续函数的运算

定理 2.1 (连续性的四则运算法则)**.** 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 连续.

证明. 由极限的四则运算法则（**??**）可知：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0). \\
&\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0). \\
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}. \qquad (g(x_0) \neq 0)
\end{aligned}
$$

□

定理 2.2 (反函数的连续性与单调性)**.** 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（减少）且连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加（减少）且连续.

定理 2.3 (复合连续函数极限运算法则)**.** 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u),u=g(x)$ 复合而成的函数，$f[g(x)]$ 在 x_0 某去心邻域内有定义，若 $\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$ ，则 $\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

证明. 由于 $\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 所以 $\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall u\in U(u_0,\eta),\text{s.t.}|f(u)-f(u_0)|<\epsilon;\forall\eta>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}|g(x)-u_0|<\eta$ （即 $g(x)\in U(u_0,\eta)$），即 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}|f(g(x))-f(u_0)|<\epsilon$ ，即 $\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(u_0)$. □

注 2.1. 复合函数 $f[g(x)]$ 满足 $\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]$ 的充分条件：

1. 外层函数 $f(x)$ 连续（复合连续函数极限运算法则，定理2.3）；
2. 内层函数单调趋于其极限（复合函数极限运算法则，定理**??**）

例 2.1. 求 $\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$

分析. 因为函数由 $\sqrt{x}$ 与 $\frac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成，而 $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$ ，$\sqrt{x}$ 在点 $x=\frac{1}{6}$ 处连续，故 $\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$. 相似的还有幂指函数运算法则.

推论 2.1 (复合连续函数的连续性)**.** 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u),u=g(x)$ 复合而成的函数，$f[g(x)]$ 在 x_0 邻域内有定义，若 $\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=u_0$ ，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处连续.

证明. 由复合连续函数极限运算法则（定理2.3）可知：$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f(u_0)=f[g(x_0)]$ ，故 $f[g(x)]$ 在 x_0 处连续. □

3 闭区间上的连续函数

3.1 数列性质补充

定义 3.1 (子数列)**.** 对于数列 $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ ，从中任意部分数列 $x_{n_1},x_{n_2},\dots,x_{n_k},\dots$ 称为数列的子列.

定义中 $\{n_k\}$ 是某一自然数的递增的数列：

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\dots$$

在这里依次去所有自然数为值得序号已不是 n ，而是 k ；而 n_k 已成为一个取自然数为值的整序变量.

定理 3.1. 无论 $\{n_k\}$ 的单调性如何，若有 $k\neq j\Rightarrow n_k\neq n_j$，则有 $\lim_{k\to\infty}n_k\to=\infty$.

证明. 利用反证法. 若 $\lim_{k\to\infty}n_k$ 有界，则 $\exists M>0,\text{s.t.}|n_k|\le M$ ，易知：$[1,M]$ 中共有 M 个自然数，当 $k>M$ 时，必 $\exists k',\text{s.t.}n_{k'}>M$ 或 $\exists k',j',\text{s.t.}n_{k'}=n_{j'}$ ，矛盾，因此 $\lim_{k\to\infty}n_k=\infty$. □

定理 3.2 (数列极限与子列极限的关系)**.** *若数列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ 有确定的极限（有限或无穷），则其任意子列必有相同极限.*

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ，则 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \text{s.t.} |x_n - a| < \epsilon$. 又因为 $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ ，因此对于 $\forall N > 0, \exists K > 0, \forall k > K, \text{s.t.} n_k > N$ ，即 $|x_{n_k} - a| < \epsilon$ ，即 $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

若 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ 同理. □

注意. *1. $n_k \to \infty$ 的性质与 $\{n_k\}$ 的单调性无关，因此无论 $\{n_k\}$ 以何规律趋于 ∞，该定理均成立.*

2. 证明方法在复合函数极限运算法则（定理??）、复合连续函数极限运算法则（定理2.3）和数列极限与函数极限的关系（定理3.3）都有运用.

若整序变量没有确定的极限（如震荡数列），其子列的极限的存在性得到讨论见布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理（引理3.2）.

引理 3.1 (区间套引理)**.** *设给定单调增大的整序变量 x_n 以及单调减小的整序变量 y_n ，且恒有 $x_n < y_n$ ，若 $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$ ，则二有序变量存在公共的有限极限: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c$.*

证明. 因为整序变量 y_n 单调减小，即对于任意 n ，恒有 $y_n \leq y_1$ ，又因为恒有 $x_n < y_n$ ，故有恒有 $x_n < y_1$ ，因为整序变量 x_n 单调增大，由于单调有界数列必收敛性质（定理??）可知 x_n 存在有限极限，使得 $c = \lim_{n\to\infty} x_n$ ；同理 y_n 存在有限极限，使得 $c' = \lim_{n\to\infty} y_n$

由于整序变量 x_n, y_n 都存在有限极限，由极限四则运算法则可知：

$$\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = c' - c = 0$$

即 $c' = c$ ，故二有序变量存在公共的有限极限： $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c$. □

引理 3.2 (布尔查诺-魏尔斯特拉斯（B.Bolzano-C.Weierstrass）引理)**.** *由任何有界数列内，恒能选出收敛于有限极限的部分数列.*

证明. 设一切数 x_n 都位于界限 a 与 b 之间，将区间 $[a, b]$ 分为两半，则必有一办包含着所给数列的无穷多个元素（否则在全区间 $[a, b]$ 内所包含着的元素将是有限个），设包含着无穷多个 x_n 的那一半是 $[a_1, b_1]$.

类似的，在区间 $[a_1, b_1]$ 内分出它的一半 $[a_2, b_2]$，使得在其中包含着所给数列的无穷多个元素. 继续这种步骤至无穷. 在第 k 次分出的区间 $[a_k, b_k]$ 中依然包含着所给数列的无穷多个元素.

这样构造的区间每一个都包含在前一个之内，以数列 $\{a_n\}$ 为例有：

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} & \text{在区间}[a_{n-1}, \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}]\text{中有无穷多元素} \\ \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} & \text{在区间}[\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}]\text{中有无穷多元素} \end{cases}$$

因为 $a_n \leq b_n$，所以有 $a_n \geq a_{n-1}$，同理 $b_n \leq b_{n-1}$ ；又因为区间 $[a_n, b_n]$ 长度等于 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 的一半，这样第 k 个区间长度为：

$$\iota_k = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

则有 $\lim_{n\to\infty}\iota_n=0$ ，由区间套引理（引理3.1）可知 a_k,b_k 趋于共同的有限极限 c.

现在收敛于有限极限的部分数列由下列方法归纳构造: 在所给数列 x_n 内,任取包含于区间 $[a_1,b_1]$ 内的一个（如第一个），记为 x_{n_1}. 在 x_{n_1} 后面的元素内任选包含于区间 $[a_2,b_2]$ 内的一个（如第一个），记为 x_{n_2}. 由于每个区间 $[a_k,b_k]$ 中包含着所给数列的无穷多个元素，因此这种产生数列的方法是可行的. 又因为: $a_k\le x_{n_k}\le b_k$ 且 $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=c$ 故 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$.

注意 (布尔查诺方法). *在证明这引理时，用了逐次等分所考察区间的方法，成为布尔查诺方法.*

□

定理 3.3 (连续函数与数列极限). *若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\lim_{n\to\infty}x_n=c$ ，其中 $c\in[a,b]$ ，则 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$.*

证明. 因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,即 $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$,即 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U(c,\delta),\text{s.t.}|f(x)-f(c)|<\epsilon$. 又因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=c$ ，故对于 $\delta>0,\exists N>0,\forall n>N,\text{s.t.}|x_n-c|<\delta$ ，即 $x_n\in U(c,\delta)$.

即: $\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,\text{s.t.}|f(x_n)-f(c)|<\epsilon$ ，即 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$.

□

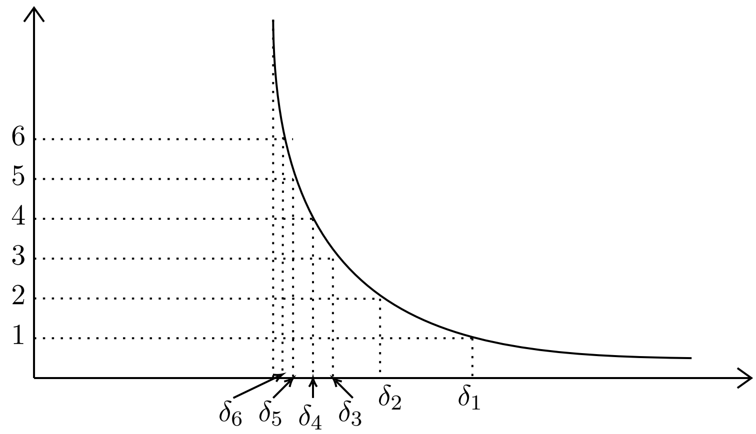
3.2 有界性与最值存在

定理 3.4 (魏尔斯特拉斯第一定理). *若函数 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 内定义且连续的，则它必是有界的，即必存在着有限常数 m 及 M ，使得当 $x\in[a,b]$ 时:*

$$m\le f(x)\le M$$

证明. 利用反证法,设 $x_0\in[a,b]$ 使得 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 则:$\forall n>0,\exists\delta_n>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_n),\text{s.t.}|f(x)|>n$. 即: $\forall n\in\mathbb{N}$，令 $x_n=\frac{\delta_n}{2}$，则 $|f(x_n)|\ge n$ ，因此 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$ ，由数列极限与子列极限的关系（3.2）可知对于 $f(x_n)$ 的任意子列 $f(x_{n_k})$ 有 $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$.

又因为 $\forall n,x_n\in[a,b]$ ，由布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理（引理3.2）可知: $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ ，使得 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$ ，由于函数 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 内定义且连续的，由连续函数与数列极限的性质（定理3.3）: $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)$ ，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义且连续，故 $f(c)\ne\infty$ ，故矛盾. □



定理 3.5 (魏尔斯特拉斯第二定理). 若函数 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 内定义且连续的，则当 $x\in[a,b]$ 时：$f(x)$ 能取到最大值与最小值.

证明. 利用反证法，若函数 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 内定义且连续的，由魏尔斯特拉斯第一定理可知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有上界，由引理**??**可知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有上确界，令 $M=\sup\{f(x)\}$.

设 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 内取不到上确界 M ，即 $f(x)<M$. 构造函数 $\phi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ ，因为 $f(x)<M$，故 $M-f(x)>0$，$\phi(x)$ 连续，由魏尔斯特拉斯第一定理可知函数 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，设为 k ，即对 $\forall x\in[a,b]$ 有：

$$\frac{1}{M-f(x)}\leq k\Rightarrow f(x)\leq M-\frac{1}{k}$$

由上确界的性质（$\forall\epsilon>0,\exists x\in D_f,\text{s.t.}\sup\{f(x)\}-\epsilon<f(x)\leq\sup\{f(x)\}$，注意**??**）可知矛盾，即 $f(x)$ 能取到最大值，最小值同理. □

注意. 辅助函数 $\phi(x)$ 的构造思想：由确界的性质知：对于 $\forall\epsilon$ 有，$M-\epsilon<f(x)\leq M$ ，即 $|f(x)-M|<\epsilon$. 若存在 $c\in D_f,\text{s.t.}|f(c)-M|=0$，则 $f(c)$ 为函数 $f(x)$ 在 D_f 上的最大值，与之对应的时函数 $\phi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ 在点 c 无定义，由无穷小的倒数为无穷大的关系（**??**）可知 $\lim_{x\to c}\phi(x)=\infty$.

反之若不存在 $c\in D_f,\text{s.t.}|f(c)-M|=0$ ，即 $0<|f(x)-M|<\epsilon$. ，则 $f(x)$ 在 D_f 上的无最大值，与之对应的时函数 $\phi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ 有定义，此时再由魏尔斯特拉斯第一定理可证 $\phi(x)$ 有界.

3.3 零点定理与介值定理

定理 3.6 (布尔查诺-柯西第一定理（零点定理）). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$ ，则 $\exists c\in(a,b),\text{s.t.}f(c)=0$.

证明. 利用布尔查诺方法. 不妨设 $f(a)<0,f(b)>0$ ，考察区间 $[a,b]$ 中点 $\frac{a+b}{2}$：

若 $f(\frac{a+b}{2})=0$ 则定理得证；若 $f(\frac{a+b}{2})\neq0$，则按照如下方法构造区间套：易知区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 及 $[\frac{a+b}{2},b]$ 必有一个使得函数 $f(x)$ 在端点异号，取该区间，并记为 $[a_1,b_1]$ ，如此一直进行.

若 $f(\frac{a+b}{2})>0$，则函数 $f(x)$ 在端点 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 异号，则有：$a=a_1,\frac{a+b}{2}=b_1$，即 $f(a_1)<0,f(b_1)>0$ ，若 $f(\frac{a+b}{2})<0$，则函数 $f(x)$ 在端点 $[\frac{a+b}{2},b]$ 异号，则有：$\frac{a+b}{2}=a_1,b=b_1$，即 $f(a_1)<0,f(b_1)>0$ ，由归纳法可知：$\forall n\in\mathbb{N},\text{s.t.}f(a_n)<0,f(b_n)>0$.

因为 $\forall n\in\mathbb{N},[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ ，即 $a_{n+1}\in[a_n,b_n]\Rightarrow a_{n+1}\geq a_n$ ，同理 $b_{n+1}\leq b_n$ ，即整序变量 a_n 单调增大，b_n 单调减小.

对于第 k 个区间 $[a_k,b_k]$ 有：$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$，即 $\lim_{n\to\infty}b_n-a_n=0$ ，区间套引理（引理3.1）可知 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，由连续函数与数列极限的关系（定理3.3）与数列极限不等式性（性质**??**）可知：

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)\leq0,\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(c)\geq0$$

因此 $f(c)=0$. □

定理 3.7 (布尔查诺-柯西第二定理（介值定理）)**.** 若函数 $f(x)$ 在某一区间 χ 上连续（闭的或不闭的，有限的或无穷的）. 若 $\exists a,b\in\chi$（$a<b$）,s.t.$f(a)=A,f(b)=B$，则对于 A,B 间的任意数 C, $\exists c\in(a,b)$,s.t.$f(c)=C$.

证明. 不妨设 $A<B$，则对于 $\forall C\in(A,B)$，构造函数：$\phi(x)=f(x)-C$，则 $\phi(a)=f(a)-C=A-C<0,\phi(b)=f(b)-C=B-C>0$，由零点定理知：$\exists c\in(a,b)$,s.t.$\phi(c)=0\Rightarrow f(c)=C$. □

定理 3.8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f(0)=f(1)$，则对任意正整数 $n(n\geq 2)$，必存在 $\xi\in[0,1]$,s.t.$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

证明. 令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right),x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，则有

$$F\left(\frac{i}{n}\right)=f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i+1}{n}\right)$$

其中 $i=0,1,...,n-1$. 因此

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+F\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0,$$

设 $\forall x\in[0,1-\frac{1}{n}]$s.t.$F(x)\neq 0$，因为 $F(x)$ 连续，所以 $F(x)$ 恒正或恒负，与上式矛盾，因此必存在 $\frac{k}{n},\frac{j}{n}$，使 $F\left(\frac{k}{n}\right),F\left(\frac{j}{n}\right)$ 异号，由零点定理可知，存在 $\xi\in\left(\frac{k}{n},\frac{j}{n}\right)$,s.t.$F(\xi)=0$. □

3.4 一致连续性

定义 3.2 (一致连续性)**.** 设 $f(x)$ 在区间 χ 上有定义，对于 $\forall x_1\in\chi,\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_2\in U(x_1,\delta)$,s.t.$|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$.

或者定义为：设 $f(x)$ 在区间 χ 上有定义，$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，使得 $\forall x_1,x_2\in\chi$，若 $|x_1-x_2|<\delta$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$.

注意. 一致连续性是指函数 $\mathrm{d}x$ 只与 $\mathrm{d}y$ 有关，而与 x 无关. 换句话说，若把 $f(x)$ 视为一根管子，则对于 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，使得一个直径为 ϵ，长为 δ 的套管可以完全水平穿过 $f(x)$.

或者说，对于定义域内任意一点，当自变量任取一个增量时，函数值的增量是有上限的. 如函数 $y=\frac{1}{x}$，令 $x=\epsilon$，对其取一个增量 $\Delta x=-\frac{\epsilon}{2}$，则函数值的增量 $\Delta y=\frac{2}{\epsilon}-\frac{1}{\epsilon}=\frac{1}{\epsilon}$，易知当 $\epsilon\to 0$ 时，Δy 是没有上限的，因此 $y=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上不是一致连续的.

定理 3.9 (康托定理)**.** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则其在这区间内一致连续.

证明. 利用反证法. 即：$\exists\epsilon>0,\forall\delta>0$，使得 $\exists x_1,x_2\in\chi$，若 $|x_1-x_2|<\delta$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\epsilon$. 因此取正数序列 δ_n，使得 $\delta_n\to 0$，则对于 $\forall\delta_n,\exists x_1^{(n)},x_2^{(n)}\in[a,b]$，虽然 $|x_1^{(n)}-x_2^{(n)}|<\delta_n$，但是 $|f(x_1^{(n)})-f(x_2^{(n)})|\geq\epsilon$.

由布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理（引理3.2）可知有界序列 $\{x_1^{(n)}\}$ 存在收敛子列 $\{x_1^{(n_k)}\}$，使得 $x_1^{(n_k)}\to x^*$.

以整序变量 $\{n_k\}$ 为标准，从有界序列 $\{x_2^{(n)}\}$ 中构造，子列 $\{x_2^{(n_k)}\}$，由布尔查诺-魏尔斯特拉斯引理知：子列 $\{x_2^{(n_k)}\}$ 存在收敛子子列 $\{x_2^{(n_{k_j})}\}$，使得 $x_2^{(n_{k_j})}\to x'$.

以整序变量 $\{n_{k_j}\}$ 为标准, 从子列 $\{x_1^{(n_k)}\}$ 中构造子子列 $\{x_1^{(n_{k_j})}\}$ ，由数列极限与子列极限的关系（定理3.2）可知：$x_1^{(n_{k_j})} \to x^*$. 综上:

$$\lim_{j\to\infty} x_1^{(n_{k_j})} \to x^*,\ \lim_{j\to\infty} x_2^{(n_{k_j})} \to x'$$

定义数列 $y^{(n)} = |x_1^{(n)} - x_2^{(n)}|$，则 $y^{(n_{k_j})} = |x_1^{(n_{k_j})} - x_2^{(n_{k_j})}|$. 因为 $|x_1^{(n)} - x_2^{(n)}| < \delta_n \to 0$ ，又因为数列的子子列仍为数列的子列，由数列极限与子列极限的关系（定理3.2）可知：$|x_1^{(n_{k_j})} - x_2^{(n_{k_j})}| \to 0.$

所以 $\{x_1^{(n_{k_j})}\},\{x_2^{(n_{k_j})}\}$ 均收敛与同一点，记为 x^* ，由连续函数与数列极限的关系（定理3.3）可知:

$$f(x_1^{(n_{k_j})}) \to f(x^*), f(x_2^{(n_{k_j})}) \to f(x^*)$$

即 $f(x_1^{(n_{k_j})}) - f(x_1^{(n_{k_j})}) \to 0$. 因为，数列 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}$ 不满足一致连续性，但是它们的子列 $x_1^{(n_{k_j})}, x_2^{(n_{k_j})}$ 却满足，从而矛盾.

□