微积分 I: 利用导数研究函数

Calculus I: Use derivatives to study functions

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 函数的动态研究

1.1 函数为常数的条件

在研究函数的动态时，首先出现的问题是，在哪些条件之下函数在所给的区间内保持为常数或单调地变动着.

定理 1.1 (函数为常数的充要条件)**.** *设函数 $f(x)$ 在所给区间 χ（闭区间或开区间，有限的或无穷的）内有定义且连续，并且在其内部有有限导数 $f'(x)$，则：$f(x)$ 在 χ 内是常数 $\Leftrightarrow$ 对于 χ 内的 $x, f'(x) = 0$.*

证明. 充分性：若 $f(x)$ 在 χ 内是常数，则 $f'(x) = 0$；

必要性：若对于 χ 内的 $x, f'(x) = 0$，选取 χ 内某点 x_0，并且选取任意的另一点 $x \in \chi$，从而考察区间 $[x, x_0]$ 或 $[x_0, x]$. 由有限增量公式知：

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0),$$

其中 c 在 x, x_0 之间，故 $c \in \chi$，因此有 $f'(c) = 0$，即对于 $\forall x \in \chi$ 有：

$$f(x) = f(x_0) = 常数.$$

□

推论 1.1. *若两函数 $f(x), g(x)$ 在区间 χ 内有定义而且连续，又在其内部有有限导数 $f'(x), g'(x)$，并且*

$$f'(x) = g'(x) \ (x \in \chi),$$

则在区间 χ 内，两函数仅相差一个常数：

$$f(x) = g(x) + C \ (C \text{ 为常数}).$$

证明. 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$，则 $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$，由函数为常数的充要条件 (定理1.1) 可知 $h(c) = C \Rightarrow f(x) = g(x) + C$. □

下面来举例说明两个定理的应用：

1. 对于可导函数 $f(x)$ 且 $f(x) \neq 0$，考察函数 $g(x) = \arctan f(x) + \arctan \frac{1}{f(x)}$ 为常数.
   对函数 $g(x)$ 求导有：

   $$g'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + \frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}{1 + \frac{1}{f^2(x)}} = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + \frac{-f'(x)}{1 + f^2(x)} = 0,$$

   因此 $g(x) = C$，特别地，$\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$.

2. 考察函数

$$\arctan x \text{ 及 } \frac{1}{2}\cdot\arctan\frac{2x}{1-x^2}.$$

容易验证两者导数在去除 $x=\pm1$ 以外的一切点都是相等的，因此有恒等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\arctan\frac{2x}{1-x^2}=\arctan x+C$$

在以下区间

$$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$$

中的每一个都是成立的，但是在各区间内，常数 C 是互不相同的，在第一个区间内 $C_1=\frac{\pi}{2}$；在第二个区间内 $C_2=0$；在第三个区间内 $C_3=-\frac{\pi}{2}$.

1.2　函数为单调的条件

定理 1.2 (函数广义单调的充要条件)**.** 设函数 $f(x)$ 在所给区间 χ（闭区间或开区间，有限的或无穷的）内有定义且连续，并且在其内部有有限导数 $f'(x)$，则 $f(x)$ 在区间 χ 内广义的单调增大（减小）$\Leftrightarrow$ 对于 χ 内的 $x, f'(x)\geq 0(\leq 0)$.

证明. 充分性：若 $f(x)$ 在 χ 内单调增大，则对于 χ 内任意点 x，并给以一增量 $\Delta x>0$，则有：

$$f(x+\Delta x)\geq f(x),\quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0,$$

由函数极限不等式性 (定理**??**) 可知：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta}=f'(x)\geq 0.$$

必要性：因为 χ 内的 $x, f'(x)\geq 0(\leq 0)$，故对于 χ 内任意点 x，并给以一增量 $\Delta x>0$ 的点 $x+\Delta x$ 由有限增量公式有：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\cdot\Delta x,$$

因为 $f'(c)\geq 0$，故 $f(x+\Delta x)\geq f(x)$，从而 $f(x)$ 在 χ 上广义的增大. □

定理 1.3 (函数狭义单调的充要条件)**.** 设函数 $f(x)$ 在所给区间 χ（闭区间或开区间，有限的或无穷的）内有定义且连续，并且在其内部有有限导数 $f'(x)$，则 $f(x)$ 在区间 χ 内狭义的单调增大（减小）$\Leftrightarrow$

1）对于 χ 内的 $x, f'(x)\geq 0(\leq 0)$.

2）$f'(x)$ 在 χ 内任意一部分区间内不恒等于 0.

证明. 充分性：若 $f(x)$ 在区间 χ 内狭义单调增大，则由函数广义单调充要条件知（定理1.2）1) 满足；若 $f'(x)$ 在 χ 内任意一部分区间内恒等于 0，则由函数为常数的充要条件 (定理1.1) 可知 $f(x)$ 在该区间内为常数，矛盾.

必要性：若函数 $f(x)$ 满足条件 1)，2). 对于 $\forall x, x'\in\chi$ $(x<x')$，由函数广义单调充要条件知（定理1.2）知：

$$f(x)\leq f(x'),$$

则对于 $\forall c \in (x, x')$ 有：

$$f(x) \leq f(c) \leq f(x').$$

下证明式中的等号不可成立. 因为若有 $f(x) = f(x')$ 则有：

$$f(x) = f(c) = f(x')$$

即 $f(x)$ 在 (x, x') 上为常数，由函数为常数的充要条件 (定理1.1) 可知 $f'(x)$ 在 (x, x') 上恒为零，矛盾，故 $f(x) < f(x')$. □

需要注意的一点是狭义单调的函数导数也可以在个别点等于 0. 其中个别点甚至可以是有限区间中的无穷多个，只要它们是离散的，下面通过两个例子来阐述.

1. 函数 $f(x) = x^3$ 就是一个例子，它是狭义单调增函数，但是 $f'(0) = 0$.

2. 考察函数

$$\begin{cases} f(x) = e^{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}},\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

显然，

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0,$$

于是函数在 $x = 0$ 处是连续的.$f(x) > 0$ 时有：

$$f'(x) = e^{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \geq 0,$$

即 $x = \frac{1}{2k\pi}$ 时 $f'(x) = 0$.

注意，

$$0 \leq f'(x) \leq 2e \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \to 0,$$

由此有 $f'(0) = 0$. 此例中可以看到 $f(x)$ 在有界区间内有无穷多个点使得 $f'(x) = 0$ 但是 $f(x)$ 确实是狭义的增函数.

上例中的函数究竟少见因此如下简易判别法则是实用的.

定理 1.4 (函数狭义单调充分判别法)**.** 若只要除去有限个 x 值，就到处都有 $f'(x) > 0 (< 0)$，则函数 $f(x)$ 为狭义增（减）函数.

例如：考察 $x > 0$ 时的函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 证明它是增函数. 只要证明它的对数：

$$g(x) = \ln f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$$

是增函数. 对其求导有：

$$g'(x) = [\ln(x+1) - \ln x] - \frac{1}{x+1}.$$

由有限增量公式有：

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},\ c \in (x, x+1),$$

故 $g'(x) = \frac{1}{c} - \frac{1}{x+1} > 0$，即 $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) > 0$，由函数狭义单调充分判别法可知，$f(x)$ 为狭义增函数.

1.3 不等式的证明

通过上述函数狭义单调充分判别法可以用来证明不等式.

1. 求证 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x > \frac{2}{\pi} \cdot x$.

   设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，则导数
   $$f'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$
   是负的 $(\sin x < x < \tan x)$，故 $f(x)$ 为减函数，$f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$，$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

2. $x > 0$ 时，有 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

   函数 $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ 在 $x > 0$ 时导数 $f'(x) = -\sin x + x > 0$；在 $x = 0$ 时导数 $f'(x) = -\sin 0 + 0 = 0$，则由函数狭义单调充分判别法可知，$f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时狭义单增，故
   $$f(x) > f(0) = 0, \ (x > 0)$$
   即
   $$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2, \ (x > 0).$$
   相似的证法还有
   $$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3;$$
   $$\tan x > x + \frac{1}{3}x^3.$$

3. 考察 $x \geq 0$ 时的函数 $f(x) = x^\alpha - \alpha x \ (0 < \alpha < 1)$

   对其求导有：
   $$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \begin{cases} > 0 \ (0 < x < 1) \\ < 0 \ (x > 1) \end{cases}$$
   易知 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上为增函数，在 $[1, +\infty)$ 上为减函数，故 $f(1) = \max_{x\in(0,+\infty)} f(x)$. 即当 $x > 0$ 时有：
   $$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha. \tag{1}$$
   由此可以导出一些重要的古典不等式.

4. 对于任意 $a, b, \alpha, \beta > 0$，$\alpha + \beta = 1$ 有
   $$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b. \tag{2}$$
   设 $x = \frac{a}{b}$，其中 a, b 为任意正数，并把 $1 - \alpha$ 记为 β，因此式1可化为：
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \leq 1 - \alpha$$
   $$\Rightarrow a^\alpha - \alpha \cdot a \cdot b^{\alpha-1} \leq b^\alpha \cdot \beta$$
   $$\Rightarrow a^\alpha - \alpha \cdot a \cdot b^{-\beta} \leq b^\alpha \cdot \beta$$
   $$\Rightarrow a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b^{\alpha+\beta}$$
   $$\Rightarrow a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

5. 式2 可以推广任意个幂相乘的情形，即对于 $a_1,\dots,a_n,q_1,\dots,q_n>0$; $q_1+\cdots+q_n=1$ 有:

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n}\le q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n. \tag{3}$$

先证明三个幂相乘的情况，对于 $a_1,\dots,a_3,q_1,\dots,q_3>0$; $q_1+\cdots+q_3=1$，我们有

$$\begin{aligned}a_1^{q_1}a_2^{q_2}a_3^{q_3}&=a_1^{q_1}\cdot\left(a_2^{\frac{q_2}{q_2+q_3}}a_3^{\frac{q_3}{q_2+q_3}}\right)^{q_2+q_3}\\&\le q_1a_1+(q_2+q_3)\cdot\left(a_2^{\frac{q_2}{q_2+q_3}}a_3^{\frac{q_3}{q_2+q_3}}\right)\\&\le q_1a_1+(q_2+q_3)\cdot\left(\frac{q_2}{q_2+q_3}a_2+\frac{q_3}{q_2+q_3}a_3\right)\\&=q_1a_1+q_2a_2+q_3a_3,\end{aligned}$$

接下来，假设对于 $a_1,\dots,a_n,q_1,\dots,q_n>0$; $q_1+\cdots+q_n=1$ 有:

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n}\le q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n.$$

则对于 $a_1,\dots,a_n,a_{n+1},q_1,\dots,q_n,q_{n+1}>0$; $q_1+\cdots+q_n+q_{n+1}=1$ 有:

$$\begin{aligned}a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n}a_{n+1}^{q_{n+1}}&=a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n}\cdot\left(a_n^{\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}}\right)^{q_n+q_{n+1}}\\&\le q_1a_1+q_2a_2+(q_n+q_{n+1})\cdot\left(a_n^{\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}}\right)\\&\le q_1a_1+q_2a_2+(q_n+q_{n+1})\cdot\left(\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}a_n+\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}a_{n+1}\right)\\&=q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n+q_{n+1}a_{n+1}.\end{aligned}$$

证毕.

6. 对于任意数 $p_i>0$，使得 $q_i=\frac{p_i}{\sum_j p_j}$，从而 $\sum_i q_i=1$. 这样式3的结果可以改写为:

$$(a_1^{q_1}a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n})^{\frac{1}{\sum_j p_j}}\le\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{\sum_j p_j}.$$

当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$ 时，上式变为:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

这一不等式说明正数的几何平均数不会大于其算术平均数.

7. 现在来证明**柯西-赫尔德 (A.L.Cauchy-O.Holder) 不等式**

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left\{\sum_{i=1}^n a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^n b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} \tag{4}$$
$$(a_i,b_i>0;k,k'>0,\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1).$$

对于式2引入 $k=\frac{1}{\alpha}>1$ 及 $k'=\frac{1}{\beta}>1$，把 a,b 换为 $a^k,b^{k'}$ 有：

$$\left\{a^k\right\}^{\alpha}\cdot\left\{b^{k'}\right\}^{\beta}\leq\alpha\cdot a^k+\beta\cdot b^{k'}$$
$$\left\{a^k\right\}^{\frac{1}{k}}\cdot\left\{b^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}\leq\frac{1}{k}\cdot a^k+\frac{1}{k'}\cdot b^{k'}$$

即：

$$\begin{gathered} a\cdot b\leq\frac{1}{k}\cdot a^k+\frac{1}{k'}\cdot b^{k'} \\ (a_i,b_i>0;k,k'>0,\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1). \end{gathered} \tag{5}$$

先假设：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^k=\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}=1, \tag{6}$$

故要证明的不等式取如下形式：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq 1.$$

在不等式5 中，依次设 $a=a_i,b=b_i(i=1,2,\ldots,n)$，并把所得不等式都加起来；再利用式6有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}a_ib_i&\leq\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}a_i^k+\frac{1}{k'}\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'} \\ &=\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1, \end{aligned}$$

即证得所求.

现在我们已知，当 $\sum_{i=1}^{n}a_i^k=\sum_{i=1}^{n}b_i^k=1$ 时有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}},$$

而当 $\sum_{i=1}^{n}a_i^k\neq 1,\sum_{i=1}^{n}b_i^k\neq 1$ 时的情况可以转化为上述的特殊情况，设法构造 c_i,d_i，使得 $\sum_{i=1}^{n}c_i^k=\sum_{i=1}^{n}d_i^k=1$：

$$c_i^k=\frac{a_i^k}{\sum_{j=1}^{n}a_j^k},\ d_i^k=\frac{b_i^k}{\sum_{j=1}^{n}b_j^k},$$

即

$$c_i=\frac{a_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j^k\right\}^{\frac{1}{k}}},\quad d_i=\frac{b_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n}b_j^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}}$$

易知 c_i,d_i 满足式6，因此有：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}c_id_i&=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{a_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j^k\right\}^{\frac{1}{k}}}\frac{b_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n}b_j^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}}\right\} \\ &=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j^k\right\}^{\frac{1}{k}}\left\{\sum_{j=1}^{n}b_j^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}}\leq 1. \end{aligned}$$

即：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

$$(a_i, b_i > 0; k, k' > 0, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1).$$

证毕.

当 $k = k' = 2$ 时，我们便得到了柯西不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

8. 从柯西-赫尔德不等式还可以得到一个重要的不等式，即**闵可夫斯基 (H.Minkowski) 不等式**

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \qquad (a_i, b_i > 0, k > 1)$$

显然：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{k-1}$$

对右边两个和式分别应用柯西-赫尔德不等式，则德：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^k &\leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} \\
&+ \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} \\
&= \left\{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\right\} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}
\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ 所以 $k'(k-1) = k$ 代入上式，消去后面的因子，即得证.

1.4 极大值与极小值

定义 1.1 (驻点)**.** 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0) = 0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个驻点.

定义 1.2 (极值)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内的任意一点 x，有 $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值（极小值）.

对于极值点的定义有两个需要注意的地方：1）函数极值的概念是局部性的；2）函数极值的定义要求函数在极值点两侧皆有定义.

定理 1.5. 在两个极大值之间的开区间内存在着极小值.

证明. 若函数在点 x_0, x_1 取得极大值，则在区间 $[x_0, x_1]$ 上应用魏尔斯特拉斯第二定理 (定理??) 可知 $\exists c \in [x_0, x_1]$ 使得函数 c 点取得区间 $[x_0, x_1]$ 内的最小值，即 $\forall x \in [x_0, x_1], \text{s.t.} f(x) \geq f(c)$. 因为函数在点 x_0, x_1 取得极大值，故 $\exists \delta_1, \delta_2$ 使得 $\forall x \in (x_0, x_0+\delta_1), \text{s.t.} f(x) < f(x_0); \forall x \in (x_1-\delta_2, x_1), \text{s.t.} f(x) < f(x_1)$ 因此 $c \neq x_0, c \neq x_1$，即 $c \in (x_0, x_1)$，所以 $f(c)$ 也是极小值. 类似的两个极小值之间也一定能求出极大值. 当函数总共只有有限个极大值与极小值时，他们总是交叠出现的. □

定理 1.6. *闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内仅有唯一极值点时，若在该点 $f(x)$ 取极大（小）值，则它也是在 $[a, b]$ 上的最大（小）值点.*

证明. 设闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内仅有唯一极值点 x_0，在该点为极大值，但并非最大值. 若最大值点 x' 取在 (a, b) 内，则 x_0 不是唯一极值点，矛盾；若最大值点 x' 取在边界上（设在 a 点），则在区间 $[a, x_0]$ 上存在最小值（魏尔斯特拉斯第二定理），且不能取在边界 a 或 x_0，因此区间 (a, x_0) 内存在极小值点，矛盾. □

注 1.1. *这种证明方法（魏尔斯特拉斯第二定理 + 函数在两端点不能同时取到最大值与最小值）很常用，在达布定理（定理??）与罗尔定理（??）的证明中都有应用.*

定理 1.7 (极值存在的必要条件)**.** *设函数在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.*

由费马定理（定理??）易证. 极值存在的必要条件告诉我们可导函数的极值点必定是它的驻点，而其驻点未必是极值点.

定理 1.8 (极值存在的第一充分条件)**.** *设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导，则：*

1. *若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$；而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;*

2. *若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$；而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;*

3. *若 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f'(x)$ 符号不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处不是极值.*

证明.

1. 因为函数在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上连续，任选一点 $a \in (x_0 - \delta, x_0)$ ，对于 $f(a), f(x_0)$ 中间的值
$$y = \frac{f(a) + f(x_0)}{2},$$
由布尔查诺-柯西第二定理（定理??）知 $\exists c \in (a, x_0), \text{s.t.} f(c) = y$，因为 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，$x_0 - \delta < a < c < x_0$，故 $f(c) > f(a)$，即
$$\frac{f(a) + f(x_0)}{2} > f(a)$$
因此有 $f(x_0) > f(a)$；同理有任选一点 $b \in (x_0, x_0 + \delta)$，有 $f(x_0) > f(b)$，故 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

2. 证明与上类似.

3. 若 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，由 1) 中的方法易知：任选一点 $a \in (x_0 - \delta, x_0)$，有 $f(x_0) > f(a)$，任选一点 $b \in (x_0, x_0 + \delta)$，有 $f(x_0) < f(b)$，因此 $f(x_0)$ 不是极值；$x \in \mathring{U}(x_0, \delta), f'(x) < 0$ 同理.

□

注 1.2. 第一充分条件只要求 $f(x)$ 在 x_0 连续，在去心邻域内可导，并未要求在 x_0 处可导！

注 1.3. 费马定理的引理（引理**??**）通过 $f'(x_0)$ 描述 x_0 去心邻域内函数值与 $f(x_0)$ 的关系，它不能说明 $f(x)$ 在 x_0 去心邻域内的单调性；而极值存在的第一充分条件通过 x_0 去心邻域内 $f'(x)$ 描述 $f(x)$ 在 x_0 去心邻域内的单调性，它通过介值定理（定理**??**）推得 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的关系.

与之相似的，广义单调的充要条件（定理*1.2*）中充分性是利用函数极限的不等式性质，从 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的关系推得 $f'(x_0)$；必要性是利用有限增量定理从 x_0 去心邻域内 $f'(x)$ 与与 x_0 去心邻域内函数值与 $f(x_0)$ 的关系，因此而极值存在的第一充分条件也可以利用有限增量定理证明.

由极值存在的必要条件与第一充分条件可知，求 $f(x)$ 极值点的步骤如下：

1. 求出函数的导数 $f'(x)$;
2. 求出全部驻点与不可导点;
3. 考察 $f'(x)$ 在每个驻点或不可导点左右邻域的情况.

定理 1.9 (极值存在的第二充分条件)**.** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$，则

1. 当 $f''(x_0) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值;

2. 当 $f''(x_0) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

证明 *1.* 对于第一种情况，$f''(x_0) < 0$，即 $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$，有局部保号性知：$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta), \text{s.t.} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$，因为 $f'(x_0) = 0$，故

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0,$$

即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时有 $f'(x) > 0$；当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时有 $f'(x) < 0$. 由极值存在的第一充分条件（定理1.8）可知 $f(x_0)$ 为极大值. □

因为 $f(x)$ 在点 x_0 存在二阶导数，因此第二充分条件也可以用带有佩亚诺余项的泰勒公式以及局部保号性来证明：

证明 *2.* 在点 x_0 对函数 $f(x)$ 展开至二阶有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{(x - x_0)^2} + o(x - x_0)^2,$$

因为 $f'(x_0) = 0$ 因此有：

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2}$$

因为
$$\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}=0$$
所以对于 $\epsilon=\left|\frac{f''(x_0)}{2}\right|,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}|\frac{o(x-x_0)^3}{(x-x_0)^2}|<\left|\frac{f''(x_0)}{2}\right|$. 因为 $f''(x_0)<0$，所以 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有:
$$\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{o(x-x_0)^3}{(x-x_0)^2}<0$$
即：$f(x)<f(x_0)$，因此 $f(x_0)$ 为极大值，证毕. □

注 1.4. 因为
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{o(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2},$$
所以由极限与无穷小的关系（定理**??**）可知:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(x_0)}{2}>0,$$
有局部保号性可知，存在去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0\Rightarrow f(x_0)<f(x).$$

注 1.5. 极值存在的第一充分条件仅涉及 $f(x)$ 在 x_0 去心邻域内的导数性质，至于在 x_0 处是否可到并不要求（仅要求在 x_0 处连续）；而极值存在的第二充分条件要求 $f(x)$ 在 x_0 有一阶及二阶导数.

1.5 高阶导数的应用

我们已经看到，若 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\neq 0$ 时，极值点的判断，至于当 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)=0$ 时的情形我们还未加研究.

今假定函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有顺次至 n 阶的导数，而且直至 $n-1$ 阶导数为止全都在这点等于零:
$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$
同时却有 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 对函数 $f(x)$ 在点 x_0 处展开为带佩亚诺余项的泰勒公式:
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n.$$
因为 $\lim_{x\to x_0}o(x-x_0)^n=0$，因此 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),\text{s.t.}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$ 与 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 同号. 此时考察两种情况:

1. n 为偶数，此时有 $(x-x_0)^n>0$，若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x)>f(x_0)$，即 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值；若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x)<f(x_0)$，即 $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值；

2. n 为奇数，此时若 $x<x_0$，有 $(x-x_0)^n<0$；若 $x>x_0$，有 $(x-x_0)^n>0$. 设 $f^{(n)}(x_0)>0$，则当 $x<x_0$ 时 $f(x)<f(x_0)$；则当 $x>x_0$ 时 $f(x)>f(x_0)$，若 $f^{(n)}(x_0)<0$ 同理，因此 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

2 凸凹性

2.1 凸凹函数的定义

定义 2.1 (凸函数)**.** 在区间 χ 上有定义而且连续的函数 $f(x)$ 若满足对 χ 中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 \leqslant x_2)$ 有不等式:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2),$$

，其中 $q_1, q_2 > 0; q_1 + q_2 = 1$，则称 $f(x)$ 为凸函数.

定义 2.2 (凹函数)**.** 在区间 χ 上有定义而且连续的函数 $f(x)$ 若满足对 χ 中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 \leqslant x_2)$ 有不等式:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2),$$

，其中 $q_1, q_2 > 0; q_1 + q_2 = 1$，则称 $f(x)$ 为凹函数.

注 2.1. 考研数学中，对凸凹性的定义与上恰好相反.

2.2 关于凸函数的简单命题

1. 若函数 $f(x)$ 为凸函数，则 $-f(x)$ 为凹函数.

   证明. 因为 $f(x)$ 为凸函数，所以有:

$$\begin{aligned} f(q_1x_1 + q_2x_2) &\leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \\ \Rightarrow -f(q_1x_1 + q_2x_2) &\geq -q_1f(x_1) - q_2f(x_2) \end{aligned}$$

□

2. 凸函数与正数相乘，仍为凸函数.

   证明.

$$\begin{aligned} f(q_1x_1 + q_2x_2) &\leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \\ \Rightarrow c \cdot f(q_1x_1 + q_2x_2) &\leq c \cdot q_1f(x_1) + \cdot q_2f(x_2) \end{aligned}$$

□

3. 有限个凸函数之和仍为凸函数

   证明.

$$\begin{aligned} &f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \\ &g(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1g(x_1) + q_2g(x_2) \\ \Rightarrow &f(q_1x_1 + q_2x_2) + g(q_1x_1 + q_2x_2) \\ &\quad \leq q_1(f(x_1) + g(x_1)) + q_2(f(x_2) + g(x_2)) \end{aligned}$$

□

4. 若 $y=\phi(u)$ 是常增的凸函数，$u=f(x)$ 是凸函数，则复合函数 $y=\phi(f(x))$ 为凸函数.

证明. 因为 $f(x)$ 为凸函数，所以有：

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\leq q_1f(x_1)+q_2f(x_2),$$

因为 $\phi(x)$ 为增函数，所以有：

$$\phi(f(q_1x_1+q_2x_2))\leq \phi(q_1f(x_1)+q_2f(x_2)),$$

因为 $\phi(x)$ 为凸函数，所以有：

$$\phi(q_1f(x_1)+q_2f(x_2))\leq q_1\phi(f(x_1))+q_2\phi(f(x_2)),$$

综上：

$$\phi(f(q_1x_1+q_2x_2))\leq q_1\phi(f(x_1))+q_2\phi(f(x_2)).$$

□

类似的有：

$\phi(u)$	$u=f(x)$	$\phi(f(x))$
凸，常减	凹	凸
凹，常增	凹	凹
凹，常减	凸	凹

只要 $\phi(u)$ 常减，若 $f(x)$ 为凸，则 $\phi(f(x))$ 为凹；若 $f(x)$ 为凹，则 $\phi(f(x))$ 为凸.

5. 若 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是单值互反的函数（在相对应的区间内），那么下表中的性质同时成立：

$f(x)$	$g(y)$
凸，常增	凹，常增
凸，常减	凸，常减
凹，常减	凹，常减

下面证明第一行的性质：

证明. 令：

$$f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2,$$

故：

$$g(y_1)=x_1,\ g(y_2)=x_2,$$

因为 $f(x)$ 为凸函数，因此有：

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)=q_1y_1+q_2y_2,$$

因为 $f(x)$ 常增，由反函数的连续性与单调性定理（定理**??**）可知 $g(y)$ 常增，即：

$$g(f(q_1x_1+q_2x_2))\le g(q_1y_1+q_2y_2)$$

因此：

$$g(q_1y_1+q_2y_2)\ge q_1x_1+q_2x_2=q_1g(y_1)+q_2g(y_2).$$

□

6. 在区间 χ 内的凸函数 $f(x)$，若不是常数，则在区间 χ 内部无最大值.

证明. 利用反证法. 设函数在 χ 内部某点 x_0 处取得最大值，因为 $f(x)$ 不是常数，因此存在一个区间 $[x_1,x_2]$，使得 $x_1<x_0<x_2$，且至少在一个端点处的函数值小于 $f(x_0)$，设：

$$f(x_1)<f(x_0),\ f(x_2)\le f(x_2),$$

令 $x_0=q_1x_1+q_2x_2$，用 q_1 乘左式；用 q_2 乘右式，相加有：

$$q_1f(x_1)+q_2f(x_2)<f(x_0)=f(q_1x_1+q_2x_2),$$

这与 $f(x)$ 为凸函数矛盾. □

7. 如果区间 $[x_1,x_2]$ 包含在使函数 $f(x)$ 为凸的区间 χ 内，那么或总是成立：

$$f(q_1x_1+q_2x_2)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2);$$

或总是成立：

$$f(q_1x_1+q_2x_2)<q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

证明. 设 $f(x)$ 在 χ 上为凸函数，对于任意 $[a,b]\subset\chi$，我们考察线性函数：

$$l(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

易知 $l(x)$ 过点 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$，因为 $f(x),-l(x)$ 的凸性，差

$$\phi(x)=f(x)-l(x)$$

也是凸的. 易知 $\phi(x_1)=\phi(x_2)=0$，这时在区间 (x_1,x_2) 内，或是 $\phi(x)\equiv 0$，或是不是. 则对第一种情况下，在区间 $[x_1,x_2]$ 有 $f(x)\equiv l(x)$，因此式

$$f(q_1x_1+q_2x_2)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$

成立.

第二种情况下，在区间 (x_1,x_2) 内，应有 $\phi(x) < 0$，若 $\phi(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 内能取到非负值，由于 $\phi(x)$ 连续，由魏尔斯特拉斯第二定理（定理??）知，$\phi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 内有最值，因为 $\phi(x_1)=\phi(x_2)=0$，所以 $\phi(x)$ 可以在 (x_1,x_2) 内取得最值，而这与命题 6 违背，因此式

$$f(q_1x_1+q_2x_2) < q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$

成立. □

注意. 如果对于包含在 χ 内部的任何区间 $[x_1,x_2], x_1<x_2$，关系式 $f(q_1x_1+q_2x_2) < q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$ 都成立，则称 $f(x)$ 是狭义凸函数.

2.3 函数凸性的条件

对于式

$$f(q_1x_1+q_2x_2) \le q_1f(x_1)+q_2f(x_2),\ (x_2>x_1)$$

定义 $x=q_1x_1+q_2x_2$，因此有：

$$q_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\ q_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

代入有：

$$f(x)\le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

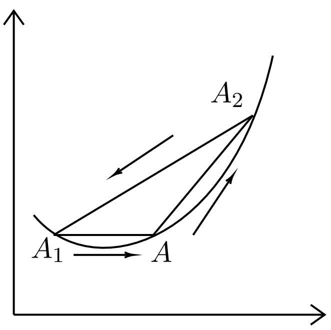
两边乘以 (x_2-x_1)，有：

$$(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\ge 0.$$

这个条件利用行列式写成：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \ge 0$$

由此我们得到一个直观的几何解释，该行列式表示三角形 $\triangle A_1AA_2$ 面积的两倍，它取正值的充要条件为三角形时正定的，即它的周界 A_1-A-A_2 依次逆时针划过.



定理 2.1 (凸函数的一阶充要条件)**.** 假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，并且在 χ 内有有限导数 $f'(x)$. 要使 $f(x)$ 在 χ 内是凸函数，充要条件是它的导数 $f'(x)$ 是常增的（按照广义理解）.

证明. 必要性:

假定 $f(x)$ 为凸的，对于任意 $x_1 < x < x_2$，有

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0$$

改写为:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \tag{7}$$

令 $x \to x_1$，有:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

令 $x \to x_2$，有:

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

因此有 $f'(x_2) \geq f'(x_1)$，因此 $f'(x)$ 是常增的（广义）.

充分性: 若 $f'(x)$ 是常增的, 我们可以证明式 (7), 由有限增量公式可知, $\exists \xi_1 \in (x_1, x), \text{s.t.} f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$; $\exists \xi_2 \in (x, x_2), \text{s.t.} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$，因为 $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$，且 $f'(x)$ 常增，因此有:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

□

定理 2.2 (凸函数的二阶充要条件)**.** *假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，并且在 χ 内有有限的二阶导数. 要使 $f(x)$ 在 χ 内是凸函数，充要条件是在 χ 内部有 $f''(x) \geq 0$.*

证明. 应用函数广义单调的充要条件（定理1.2）到函数 $f'(x)$ 即得证. □

定理 2.3. *假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，并且在 χ 内有有限导数 $f'(x)$. 要使 $f(x)$ 在 χ 内是凸函数，充要条件是，它的图像上的一切点落在它的任意切线上.*

证明. 必要性:

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. 需要证明对于 χ 中任意一点 x, x_0，有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

这等价于

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (x > x_0) \\ f'(x_0) &\geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (x < x_0), \end{aligned} \tag{8}$$

对于第一个不等式，令 $x = x_2, x_0 = x_1$，即

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

对于第一个不等式，令 $x = x_1, x_0 = x_2$，即

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

而这两个不等式我们已经在凸函数的一阶条件（2.1）中证明.

充分性：

已知式（8），因此有 $f'(x_2) \geq f'(x_1)$，即 $f'(x)$ 常增，因此 $f(x)$ 为凸函数. □

2.4 詹森不等式及其应用

依照凸函数的定义，我们有：

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2)$$
$$(q_1, q_2 > 0; q_1 + q_2 = 1)$$

可以证明，对于凸函数还成立更一般的不等式.

定理 2.4 (詹森不等式 (Jensen Inequality))**.** *假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，$f(x)$ 在 χ 内为凸函数，$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \chi$，则*

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots q_nx_n) \leq q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) + \cdots + q_n \cdot f(x_n)$$
$$(q_1, q_2, \ldots, q_n > 0; q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1).$$

证明. 利用数学归纳法. 由定义知当 $n = 2$ 时不等式成立，假设对于 $n = k$ 时不等式成立，对于 $n = k + 1$ 时有：

$$\begin{aligned}
&f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots q_{n-1}x_{n-1} + q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}) \\
&= f\left(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots q_{n-1}x_{n-1} + (q_n + q_{n+1}) \cdot \left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right)\right) \\
&\leq q_1f(x_1) + \cdots + q_{n-1}f(x_{n-1}) + (q_n + q_{n+1}) \cdot f\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right) \\
&\leq q_1f(x_1) + \cdots + q_{n-1}f(x_{n-1}) + (q_n + q_{n+1}) \cdot \left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}f(x_n) + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}f(x_{n+1})\right) \\
&= q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) + \cdots + q_n \cdot f(x_n) + q_{n+1} \cdot f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

□

注意. *证明方法同证明 $a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_n^{q_n} \leq q_1a_1 + q_2a_2 + \cdots + q_na_n$ 相似（式3）.*

常常不用总和为 1 的诸因子 q_i，而是引用一些任意正数 p_i，令

$$q_i = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n},$$

因此詹森不等式可化为：

$$f\left(\frac{\Sigma p_ix_i}{\Sigma p_i}\right) \leq \frac{\Sigma p_i \cdot f(x_i)}{\Sigma p_i}. \tag{9}$$

显然，在 f 是凹函数时，不等号应倒转过来.

选择不同的函数 f，可以由上式得出一些具体的重要不等式，举几个例子.

1. 设 $f(x)=x^k$，这里 $x>0,k>1$（凸函数）

   我们有
$$\left(\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}\right)^k \leq \frac{\Sigma p_i x_i^k}{\Sigma p_i}$$
   即
$$(\Sigma p_i x_i)^k \leq (\Sigma p_i)^{k-1} \cdot \Sigma p_i x_i^k.$$
   将这里的 p_i 换成 $b_i^{\frac{k}{k-1}}$，x_i 换成 $\frac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$，我们得到已知的柯西—赫尔德不等式（式4）:
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left\{\sum_{i=1}^n a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{k}{k-1}}\right\}^{\frac{k-1}{k}}$$

2. 设 $f(x)=\ln x$，这里 $x>0$（凹函数）.

   我们有
$$\frac{\Sigma p_i \cdot \ln x_i}{\Sigma p_i} \leq \ln \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i},$$
   两侧取指数有:
$$\left\{\prod x_i^{p_i}\right\}^{\frac{1}{\Sigma p_i}} \leq \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}.$$

3. 设 $f(x)=x\cdot\ln x$，这里 $x>0$（凸函数）.

   我们有
$$\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \cdot \ln \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \leq \frac{\Sigma p_i x_i \ln x_i}{\Sigma p_i},$$
   即
$$\Sigma p_i x_i \cdot \ln \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \leq \Sigma p_i x_i \ln x_i,$$
   两边取指数，有
$$\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \leq \left\{\prod x_i^{p_i x_i}\right\}^{\frac{1}{\Sigma p_i x_i}}$$
   令 $p_i=\frac{1}{x_i}$，则有
$$\frac{1}{\sum \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod x_i}.$$
   由此我们得到，一列正数的调和中项不超过他们的几何中项.

2.5 拐点

在绘制函数图形时，曲线 $y=f(x)$ 的拐点是值得注意的.

定义 2.3 (拐点)**.** 若曲线上一点 $(x_0,f(x_0))$ 把使函数 $f(x)$ 为凸的那部分曲线，和使函数 $f(x)$ 为凹的那部分曲线分开的话，则称 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $f(x)$ 的拐点.

定理 2.5 (拐点必要条件)**.** 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 二阶可导，且点 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

证明. 如果假定在所考察区域内函数 $f(x)$ 有有限导数，那么依照凸函数一阶条件（定理2.1）可知，$f'(x)$ 在 x_0 左侧某邻域内常增（减）；在 x_0 右侧某邻域内常减（增），因此函数 $f'(x)$ 在 x_0 处有极大（小）值. 若再假定存在有限二阶导数（即使只在 $x = x_0$ 一点），那么必定有 $f''(x) = 0$. □

需要注意的是 $f''(x) = 0$ 这个条件对于求拐点而言同以 $f'(x) = 0$ 求 $f(x)$ 极值一样，是必要的，而非充分的. 而且此时我们并未要求 $f'(x)$ 有任何性质.

定理 2.6 (拐点的第一充分条件). *设 $y = f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内二阶可导，且 $f''(x_0) = 0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续），则*

1. *若 $f''(x)$ 在 x_0 左右异号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $y = f(x)$ 的拐点；*
2. *若 $f''(x)$ 在 x_0 左右同号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是函数 $y = f(x)$ 的拐点.*

证明. 由凸函数的二阶条件（定理2.2）可证. □

此时 x_0 两侧一部分是狭义凸曲线，另一部分是狭义凹曲线.

定理 2.7 (拐点的第二充分条件). *设 $y = f(x)$ 在 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0) = 0$，则*

1. *若 $f'''(x_0) \neq 0$，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $y = f(x)$ 的拐点；*
2. *若 $f'''(x_0) = 0$，则不能判断.*

证明. 因为 $y = f(x)$ 在 x_0 处三阶可导，设 $f'''(x_0) > 0$，则存在 $\delta_1 > 0$，使得 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ 有 $0 = f''(x_0) < f''(x)$，以及 $\delta_2 > 0$，使得 $\forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$ 有 $0 = f''(x_0) > f''(x)$，由拐点的第一充分条件可证. □

如同求函数极值的第二充分条件（定理1.9）我们可以得出如下规则：

定理 2.8 (拐点的第三充分条件). *若 $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，但是 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $(n \geq 3)$，则*

1. *当 n 为奇数时，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $y = f(x)$ 的拐点；*
2. *当 n 为偶数时，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是函数 $y = f(x)$ 的拐点.*

证明. 略. □

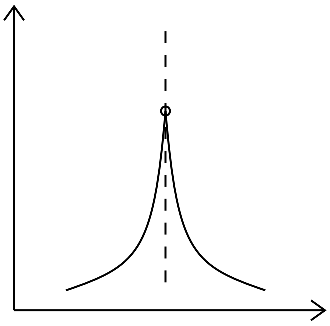
注 2.2. 由此可以导出一个有关的几何性质，这与函数在 x_0 的切线有关（如果切线存在的话）：曲线在这点由切线的一侧进入另一侧，就是说曲线与切线相交.

由于 x_0 点切线方程为 $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，对函数 $f(x)$ 在点 x_0 展开，并做差：

$$f(x) - l(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n,$$

可见若在点 x_0 的第一个不为零的（高于二阶的）导数是奇数阶导数，那么当点 x 在 x_0 左右邻域时 $f(x) - l(x)$ 异号，即曲线在点 x_0 处从切线的一侧进入另一侧；若第一个不为零的导数是偶数阶导数，那么当点 x 在 x_0 左右邻域时 $f(x) - l(x)$ 同号，即曲线在点 x_0 左右某邻域始终在切线的一侧.

这个性质常常被简单地取做拐点的定义，但是这个定义和前面给出的不是等价的. 首先曲线在拐点处可能没有切线，或者虽然曲线与切线相交，但是该点却不是曲线凸部与凹部的分界点，如下.



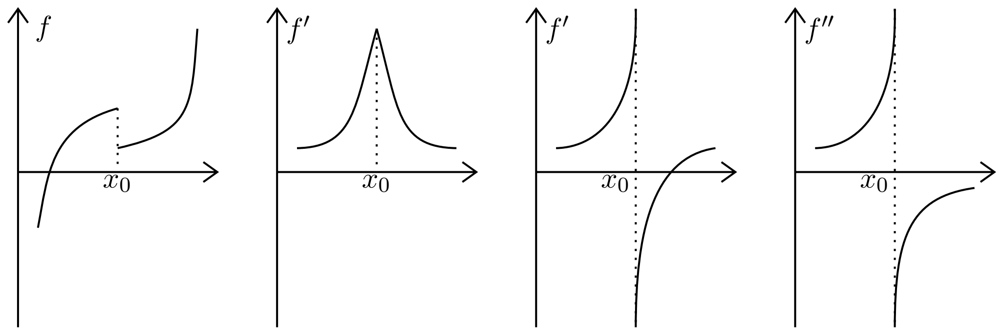
注 2.3 (拐点的图像判断)**.** 注意，拐点是

1. $f(x)$ 凸凹性的分界点；

2. $f'(x)$ 单调性的分界点；

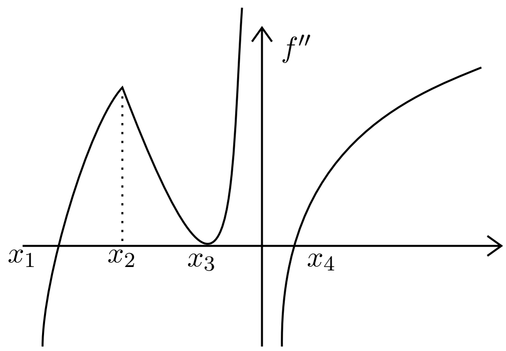
3. $f''(x)$ 正负性的分界点.

因此无论 $f(x), f'(x), f''(x)$ 在点 x_0 性质如何，只要它在 x_0 邻域内是上述性质的分界点，那么它就是拐点，如



上图中 x_0 均为 $f(x)$ 的拐点.

例 2.1. 函数 $f(x)$ 在 R 上连续，其二阶导数如图，则拐点个数为：



易知共有 3 个拐点，分别为 $x_1, x = 0, x_4$.

2.6 函数作图

利用函数 $y=f(x)$ 的一、二阶导数讨论其单调性与极值点、其图形的凸凹性与拐点，再求出渐进性与几个关键点就可以把函数 $y=f(x)$ 的图形较准确的画出来，具体步骤是;

1. 求 $y=f(x)$ 的定义域间断点和零点；
2. 考察函数的特性，如奇偶性、周期性等；
3. 求一阶导数 $f'(x)$，并求出 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点，已确定 $f(x)$ 的单调区间、极值点和极值；
4. 求二阶导数 $f''(x)$，并求出 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，已确定 $f(x)$ 的凸凹性与拐点；
5. 求出渐近线，求 $f(x)$ 渐近线的方法为:
   - 垂直渐近线：$x=a$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$；
   - 水平渐近线：$y=b$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$;
   - 斜渐近线：$y=kx+b$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0$ 且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$;
   - 斜渐近线还有一种求法，当函数 $f(x)$ 可以写为 $f(x)=ax+b+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)\to 0(x\to\infty)$ 时，$y=ax+b$ 正是它的斜渐近线.

     这种方法的证明思路一般为：（1）提取无穷大因子、（2）构造无穷小项、（3）泰勒展开，将函数化为多项式、（4）得到 $b+ax$ 项以及 $\alpha(x)$ 项.

注 2.4. *三点注意：*

1. *水平渐近线和斜渐近线当一方无穷存在水平渐近线（斜渐近线）时，则这一无穷方向上必不存在斜渐近线（水平渐近线）;*
2. *注意两方向上水平渐近线或斜渐近线的重合；*
3. *实现判断函数的奇偶性和周期性通常可以简化解题步骤.*

3 不定式定值法

3.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式

本节部分内容应归功于洛必达（G.F.de I'Hospitale）与伯努利（Joh. Bernoulli），在定理内所说的法则通常称之为**洛必达法则**.

我们先研究基本情形：$\frac{0}{0}$ 型不定式，即研究在同一极限过程 $x\to a$ 下，两个趋向于零的函数 $f(x),g(x)$ 的比式的极限问题.

定理 3.1. 设：*1*）函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有定义，*2*）$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$，*3*）存在有限导数 $f'(a), g'(a)$，且 $g'(a) \neq 0$，则：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

证明. 有限导数 $f'(a), g'(a)$ 保证了函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在点 a 处的连续性，根据 2）有：$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. 因为 $g'(a) \neq 0$，由费马定理的引理（引理**??**）可知，在 x 充分接近于 a 时有 $g(a) \neq 0$，只有限于讨论这些 x 值时，比式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是有意义的.

现在比式可以改写为：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}},$$

因为 $f'(a), \frac{1}{g'(a)}$ 存在，有极限四则运算法则可知：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

□

当 $f'(a) = g'(a) = 0$ 时，可以应用上述定理的推广，需要考察高阶导数.

定理 3.2. 设：*1*）函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有定义，*2*）$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$，*3*）在区间 $[a,b]$ 内存在直至 $(n-1)$ 阶为止的各阶导数 $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x); g'(x), g''(x), \ldots, g^{(n-1)}(x)$，*4*）在 $x = a$ 时它们全部等于 0，*5*）存在有限导数 $f^{(n)}(a)$ 和 $g^{(n)}(a)$，且 $g^{(n)}(a) \neq 0$. 则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

证明. 在区间 $[a,x](a < x \leq b)$ 对函数 $f(x), g(x)$ 应用佩亚诺余项的泰勒公式，得：

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{n!}(x-a)^n$$
$$g(x) = \frac{g^{(n)}(a) + \beta}{n!}(x-a)^n.$$

在 $x \to a$ 时，式中 $\alpha, \beta \to 0$，因为 $g^{(n)}(a) \neq 0$，所以在充分接近 x 时有 $g(x) \neq 0$，当限于在这些 x 值的范围内，比式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是有意义的.

此时有：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{n!}(x-a)^n}{\frac{g^{(n)}(a)+\beta}{n!}(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{g^{(n)}(a) + \beta},$$

两侧取极限有：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{g^{(n)}(a) + \beta} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

□

注 3.1. 上式联想到利用极限与无穷小的关系（定理 **??**）证明极限四则运算法则中的除法（**??**）.

虽然在多数情况下对于 $\frac{0}{0}$ 型的不定式的定值法，用已经证明的定理已经够了，但在实用上，下面的定理通常更方便.

定理 3.3 (洛必达法则 (L'Hospital's rule)). 设：*1)* 函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $(a, b]$ 内有定义，*2)* $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$，*3)* 在区间 $(a, b]$ 内存在有限导数 $f'(x), g'(x)$，且 $g'(x) \neq 0$，*4)* 存在（有限或无穷）极限

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

则：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

证明. 补充函数 $f(x), g(x)$ 定义，令 $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0; g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. 这是函数在整个闭区间 $[a, b]$ 内连续了；因此函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 可导，且在 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$，由柯西中值定理（**??**）可知：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

式中 $a < c < x < b$，因为 $g'(x) \neq 0$，所以 $g(x) \neq 0$. 当 $x \to a$ 时，亦有 $c \to a$，因此：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g(c)} = K.$$

□

注意. 式中 $c = c(x) \in (a, x)$，因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{U}(a, \delta), \text{s.t.} c(x) \neq a$，由复合函数极限运算法则（定理**??**）可知：

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c(x))}{g(c(x))} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g(c)}.$$

这样，所证明的定理就把函数之比的极限化为导数之比的极限，假若后者存在的话.

例 3.1. 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

把导数之比逐步化简：

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x};$$

因此有：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

上例定理3.1是不能应用的，因为在 $x = 0$ 时分子分母的导数两者都等于 0. 至于定理3.2是可以应用，但是需求处所给二函数的三个逐次导数.

需要注意，虽然在此处导数之比仍为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，但是满足定理3.3的条件，这个不定式可以由初等变换而定其值. 在其他的场合，可能需要重复地应用此定理. 有必要着重指出，在这时可用各种方法把所得的式子化简，如约去公因式，利用已知极限等.

例 3.2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} &= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\\ &= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\\ &= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = -e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)(2+6x)} = \frac{-e}{2}.\end{aligned}$$

很容易把定理3.3推广到变元趋向于无穷时的情景，而对于定理3.1与定理3.2是做不到的.

定理 3.4. 设：*1)* 函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[c, +\infty)$ 内有定义，*2)* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$，*3)* 在区间 $[c, +\infty)$ 内存在有限导数 $f'(x), g'(x)$，且 $g'(x) \neq 0$，*4)* 存在（有限或无穷）极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

证明. 令 $x = \frac{1}{t}$ 因此当 $x \to +\infty$ 时有 $t \to 0^+$. 由 2）知：

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \ \lim_{x\to 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

由 4）有：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K.$$

应用定理3.3到新变量 t 有：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K.$$

因此有：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

□

注 3.2. 需要注意的是，定理中条件 *3)* 限定了：在 $x \to a$ 或 $+\infty$ 时分母 $g(x)$ 只能单调的收敛于零，而不能震荡的收敛于零，否则由魏尔斯特拉斯第二定理与费马引理则可推出违反了条件 *3)*．因此对于例如 $\lim_{x\to+\infty}\frac{o(1/x)}{\sin x/x}$ 的不定式就不能用本节的全部定理.

有时在求上述类型的不定式时，形式上可以不用上述的定理，而利用函数依泰勒公式的展开式. 今设 $x \to 0$（永远可以使问题变成这种情形）若使用展开时候在分子及分母内能顺利地选出逐项：

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \ g(x) = bx^m + o(x^m),$$

则分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限立刻就看得很清楚：若 $n > m$ 则极限为 0；若 $n = m$ 则极限为 $\frac{a}{b}$；若 $n < m$ 则极限为 ∞.

例 3.3. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$$

把分子分母中的 $e^x, e^{-x}, \ln(e-x)-1$ 展开得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\dots)-(1-x+\dots)}{\left(\frac{x}{e}+\dots\right)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\dots}{\left(1-\frac{1}{e}\right)x+\dots}=\frac{2e}{e-1}.$$

3.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

定理 3.5. 设：*1*) 函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $(a,b]$ 内有定义，*2*) $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \lim_{x\to a} g(x)=+\infty$，*3*) 在区间 $(a,b]$ 内存在有限导数 $f'(x), g'(x)$，且 $g'(x)\neq 0$，*4*) 存在（有限或无穷）极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

则：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

证明. 首先考察 K 有限的情形.

因为导数 $g'(x)$ 并不等于零，由达布定理（定理**??**）可知 $g'(x)$ 不变号. 例如设 $g'(x)<0$，即函数 $g(x)$ 随着 x 的渐减而单调增大，并且在 $x\to a$ 时趋向于 $+\infty$. 故可以当做恒有 $g(x)>0$.

给定任意数 $\epsilon>0$，根据 4）可知 $\exists\eta>0, \forall x\in \mathring{U}(a,\eta)$ 时有：

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

为了简便，令 $x_0=a+\eta$，因此有 $a<x<x_0<b$，应用柯西公式与区间 $[x,x_0]$ 有：

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

其中 $x<c<x_0$，因此 $c\in\mathring{U}(a,\eta)$. 因此有

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)}-K\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

先考察 $\frac{f(x)}{g(x)}-K$，我们想在其中构造出上面的表达式，从而与 ϵ 建立联系. 因为

$$\frac{f(x)}{g(x)}-K=\frac{f(x)-g(x)\cdot K}{g(x)}$$

而

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)}-K=\frac{f(x_0)-g(x_0)\cdot K-(f(x)-g(x)\cdot K)}{g(x_0)-g(x)}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}-K&=\frac{f(x)-g(x)\cdot K}{g(x)}\\&=-\frac{f(x_0)-g(x_0)\cdot K-(f(x)-g(x)\cdot K)-(f(x_0)-g(x_0)\cdot K)}{g(x_0)-g(x)}\cdot\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)}\\&=\left[\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)}-K-\frac{f(x_0)-g(x_0)\cdot K}{g(x_0)-g(x)}\right]\cdot\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\\&=\left[\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)}-K\right]\cdot\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_0)-g(x_0\cdot K)}{g(x)}\end{aligned}$$

即

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right| \leq \left|\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)}-K\right|+\left|\frac{f(x_0)-g(x_0\cdot K)}{g(x)}\right|$$

应为 $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$，所以 $\lim_{x\to a}\frac{f(x_0)-g(x_0\cdot K)}{g(x)}=0$，即 $\exists\delta>0,\forall x\in \mathring{U}(a,\delta)$ 使得

$$\left|\frac{f(x_0)-g(x_0\cdot K)}{g(x)}\right|<\frac{\epsilon}{2},$$

所以令 $\lambda=\min\{\eta,\delta\}$，$\forall x\in\mathring{U}(a,\lambda)$ 使得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\epsilon.$$

即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

接下来考察 $K=+\infty$ 的情形.

因为 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，因此至少在 a 的附近有 $f'(x)\neq 0$，因此有

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$

由此有:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

因为 2)，有局部保号性可知，在 a 附近，有 $f(x),g(x)>0$ ，因此:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

□

注意. *有几点需要注意:*

1. *我们通过柯西公式建立了* $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ *与* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *的关系，当比较不想在导数上进行时，柯西公式往往有巨大力量，在证明拉格朗日余项的泰勒公式（式**??**）时，也通过柯西公式的方法建立关系；*

2. *与证明洛必达法则（定理3.3）不同，本定理的证明过程中的柯西公式不能用于* $[a,x]$ *因为无论如何在点* a *处来定义函数* $f(x)$ *与* $g(x)$ *都不能使之在* $x=a$ *处连续；*

3. *在我们的论证中，实际上并未利用* $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ *这一假定，而只需保证* $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$*；*

4. *易知该定理很容易便可推广至变元在无穷极限使得情形.*

对定理3.3、定理3.4、定理3.5做一个总结：在这些定理内，都是先假定导数之比的极限存在，然后来求函数之比的极限. 但是这些定理是不能倒过来用的，即当导数之比的极限不存在时（不是无穷的不存在），函数之比的极限仍可能存在，或者说函数之比的极限存在不能说明导数之比的极限存在，即洛必达法则是一种后验逻辑，当我们利用洛必达法则解题时，若导数之比极限存在则说明正确，若不存在则只能利用其它方法求极限.

例 3.4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

而其导数之比的极限:

$$\lim_{x\to+\infty}1+\cos x$$

是不存在的.

3.3 其他类型不定式

3.3.1 （一）$0\cdot\infty$ 型不定式

若有 $0\cdot\infty$ 型的不定式，则可以把它变成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，然后应用洛必达法则.

设

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

则有

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

其中在 $a\to a$ 时，第二是为 $\frac{0}{0}$ 型不定式；第三式为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

例 3.5.

$$\lim_{x\to0^+}x^\mu\cdot\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\mu}{-\mu}=0.$$

3.3.2 （二）$\infty-\infty$ 型不定式

$\infty-\infty$ 型的不定式，亦可以把它变成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，然后应用洛必达法则.

设

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a}g(x)=+\infty,$$

则有

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

或者

$$f(x)-g(x)=\frac{(f(x)-g(x))\cdot(f(x)+g(x))}{f(x)+g(x)}=\frac{f^2(x)-g^2(x)}{f(x)+g(x)}.$$

而这正是对于 $f-g$ 式十分常见的一种化简方法.

而且为了达到该目的事实上往往还可以更简单些.

例 3.6.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\cdot\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cdot\cos^2x}{x^2\cdot\sin^2x};$$

而

$$\frac{\sin^2x-x^2\cdot\cos^2x}{x^2\cdot\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cdot\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x^2\cdot\sin x}$$

因第一式的极限可以有初等方法求得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cdot\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x = 2,$$

对第二式引用洛必达法则有:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{x^2\cdot\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

3.3.3 （三）$1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型不定式

对于 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型不定式，可以预先对这些表达式取对数.

对 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 取对数有 $\ln y = g(x)\cdot\ln f(x)$，此时 $\ln y$ 的极限就是已经研究过的 $0\cdot\infty$ 型不定式，使用上述方式计算 $\ln y$ 的极限，便可得出 y 的极限.

注意. 对于 1^∞ 型不定式还有一种快捷方法:

$$\lim y = \lim[f(x)]^{g(x)} = \lim\left\{[1+f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{[f(x)-1]\cdot g(x)} = e^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$