线性代数: 二次型

Linear algebra: The quadratic

王浩铭

2017 年 · 冬

这篇笔记的参考资料为刘丽、韩本三《高等代数》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 二次型的概念

1.1 二次型的概念

定义 1.1 (二次型). 一个系数在数域 P 中的 n 个变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) =& A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{13}x_1x_3 \cdots + A_{1n}x_1x_n \\ &+ A_{22}x_2^2 + A_{23}x_2x_3 + \cdots + A_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots + A_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型.

令

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} = \dfrac{A_{ij}}{2}, & i < j \\ a_{ij} = A_{ij}, & i = j \end{cases}$$

则有

$$A_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i \tag{1}$$

由此二次型可以改写为如下形式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) =& a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{2}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

以及 $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$，则式2 可以改写为如下矩阵形式

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX \tag{4}$$

由式1可知，A 是对称阵.

定义 1.2. 式4 称为二次型的矩阵形式，称 A 为二次型矩阵，称二次型矩阵的秩为二次型的秩.

1.2 线性替换

定义 1.3 (线性替换). 称

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \quad\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

为线性替换，记

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{22} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则线性替换可以改写为矩阵形式

$$X=CY,$$

其中 C 称为线性替换的系数矩阵.

定义 1.4. 若线性替换的系数矩阵 C 可逆, 则称线性替换 $X=CY$ 为可逆线性替换, 并称 $Y=C^{-1}X$ 为可逆线性替换的逆替换. 若 C 为正交矩阵，则称 $X=CY$ 为正交变换，由于正交矩阵可逆，因此正交变换为可逆线性替换.

1.3 矩阵的合同

下面讨论经可逆线性替换后的二次型与原二次型的关系，即可逆线性替换后二次型矩阵与原二次型矩阵的关系，对于二次型 $f=X^TAX$，与可逆线性替换 $X=CY$，有

$$f=X^TAX=(CY)^TACY=Y^TC^TACY,$$

因为

$$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC,$$

因此是 C^TAC 对称矩阵，即 C^TAC 是二次型 Y^TC^TACY 的矩阵，从而二次型 X^TAX 经可逆线性替换 $X=CY$ 后得到的二次型 Y^TBY 有关系

$$B=C^TAC.$$

定义 1.5 (合同)**.** 设 A,B 为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 C，使得

$$B=C^TAC$$

则称 A 与 B 合同，记作 $A\simeq B$.

定理 1.1. 合同矩阵有以下性质:

1. 反身性：$A\simeq A$;
2. 对称性：$A\simeq B\Rightarrow B\simeq A$;
3. 传递性：$A\simeq B, B\simeq C\Rightarrow A\simeq C$.

证明. 1. $\forall A, A=EAE=E^TAE$;

2. 因为 $A\simeq B$, 所以此存在可逆矩阵 C 使得 $B=C^TAC$, 则 $A=(C^T)^{-1}BC^{-1}=(C^{-1})^TBC^{-1}$;

3. 若 $A \simeq B, B \simeq C$，则存在可逆矩阵 C_1, C_2 使得 $B = C_1^T AC_1$，$C = C_2^T BC_2$, 则

$$C = C_2^T BC_2 = C = C_2^T C_1^T AC_1C_2 = (C_1C_2)^T AC_1C_2.$$

□

定理 1.2. 若 $A \simeq B$ 则 $R(A) = R(B)$.

证明. 因为 $A \simeq B$，即存在可逆矩阵 C 使得 $B = C^T AC$，因为矩阵可逆的充要条件为可以表示为一系列初等矩阵之积（定理**??**），因此存在一系列初等矩阵 $P_1, P_2, ..., P_s$ 使得

$$C = P_1P_2 \cdots P_s.$$

又因为初等变换不改变矩阵的秩（定理**??**）因此有

$$R(B) = R(C^T AC) = R(P_s^T \cdots P_2^T P_1^T AP_1P_2 \cdots P_s) = R(A).$$

□

由此，当线性替换 $X = CY$ 可逆时，替换前后的二次型秩相同.

2 标准型

2.1 标准型

定义 2.1 (标准型)**.** 经可逆线性替换后得到的只含平方项的二次型称为原二次型的标准型.

定理 2.1. 数域 P 上的任意一个 n 元二次型必可经过可逆线性替换化为标准型.

证明. 利用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时，二次型为

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2,$$

这已经是二次型了；假设当 $n = n - 1$ 时定理成立，则对于 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

分三种情形进行证明.

1. a_{ii}, $(i = 1, 2, ..., n)$ 至少有一个不为零，不妨设 $a_{11} \neq 0$，则集中含 x_1 的所有项，进行**配方**：

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) &= a_{11}x_1^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}x_ix_1 + + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}\left(x_1^2 + x_1 \cdot 2a_{11}^{-1}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\right)^2 - a_{11}^{-1}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j=-a_{11}^{-1}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

是一个含 $x_2, x_3, ..., x_n$ 的 $n-1$ 元二次型. 令

$$\begin{cases} y_1=x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}x_j \\ y_2=x_2 \\ \quad\cdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_1=y_1-\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}y_j \\ x_2=y_2 \\ \quad\cdots \\ x_n=y_n \end{cases}$$

即 $X=CY$ 其中 C 为主对角线为 1 的上三角矩阵，因此为可逆线性变换. 将其带入原二次型有

$$f=a_{11}y_1^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j,$$

由归纳法假设，对于 $n-1$ 元二次型 $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$ 有可逆线性变换

$$\begin{cases} y_2=c_{22}z_2+c_{23}z_3+\cdots+c_{2n}z_n \\ y_3=c_{32}z_2+c_{33}z_3+\cdots+c_{3n}z_n \\ \quad\cdots \\ y_n=c_{n2}z_2+c_{n3}z_3+\cdots+c_{nn}z_n \end{cases}$$

使其化为标准型

$$d_2z_2^2+d_3z_3^2+\cdots+d_nz_n^2$$

因此有可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=c_{22}z_2+c_{23}z_3+\cdots+c_{2n}z_n \\ \quad\cdots \\ y_n=c_{n2}z_2+c_{n3}z_3+\cdots+c_{nn}z_n \end{cases}$$

使原二次型化 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为标准型

$$f=a_{11}z_1^2+d_2z_2^2+d_3z_3^2+\cdots+d_nz_n^2.$$

2. 若 $a_{ii}=0$, $(i=1,2,...,n)$ 且至少有一 $a_{1j}\neq 0$ 不是一般性，设 $a_{12}\neq 0$，令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

易知这是可逆线性替换，且使

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + \cdots \\ &= 2a_{12}(y_1+y_2)(y_1-y_2) + \cdots \\ &= 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \cdots, \end{aligned}$$

上升最后一行正是 $y_1,y_2,...,y_n$ 的二次型，且 y_1^2 的系数不为零，则由第一种情况的证明可知定理成立；

3. 若 $a_{1j}=a_{j1}=0$, $(j=1,2,...,n)$ 则含 x_1 的各项均为 0，因此二次型 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 是一个含 $x_2,...,x_n$ 的 $n-1$ 元二次型，由假设知定理成立.

□

注 2.1. 上升证明中的配方法和引入 $x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2$ 的技巧正是后续将普通二次型化为标准型的重要方法.

综上，定理2.1可以叙述为：对于任意对称矩阵 A，存在可逆矩阵 C 使 C^TAC 为对角阵.

2.2 化二次型为标准型的方法

2.2.1 （一）正交变换法

由于二次型 X^TAX 中的矩阵 A 为实对称矩阵, 由于实对称矩阵与可对角矩阵正交相似（定理??）可知存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 λ_i 是 A 的 n 个特征值，而 Q 为 λ_i 对于的单位正交的特征向量排列而成的正交矩阵，因此 $Q^T=Q^{-1}$，即

$$Q^TAQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

综上，实对称矩阵与其特征值构成的对角阵相似，通过对实二次型做正交变换 $X = QY$ 可以得到

$$\begin{aligned} f &= X^TAX = Y^TQ^TAQY = Y^T\Lambda Y \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

定理 2.2. 任何一个实二次型 $f = X^TAX$ 都可以经过正交变换化为标准型，且标准型中的平方项正是 A 的全部特征值.

注 2.2. 实对称矩阵化为的标准型不唯一，由配方法得到标准型矩阵的对角线元素不一定是 A 的特征值.

综上总结出通过正交变换法将实二次型化为标准型的步骤

1. 计算二次型矩阵 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$；
2. 求出使 A 与对角阵正交相似的正交矩阵 Q（求正交矩阵 Q 的步骤见**??**）；
3. 令正交变换 $X = QY$，则二次型 f 在此变换下化为
$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

定理 2.3. 实二次型矩阵 A 通过正交变换法得到的标准型矩阵 B 有相同的迹，即 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

证明. 易知 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ = B$，即 $A \backsim B$，由相似矩阵的性质（定理**??**）可知，A, B 由相同的特征值，从而有相同的迹和行列式. □

定理 2.4. 实对称矩阵的秩等于非零特征值个数.

证明. 实二次型 $f = X^TAX$ 经过正交变换后得到的标准型 Y^TBY 中，系数非零的平方项个数，恰为 A 的非零特征值个数，因为 B 是对角阵，因此 $R(B)$ 恰为 A 的非零特征值个数，由于合同矩阵秩相同，因此 $R(A) = R(B)$. □

2.2.2 （二）配方法

当我们证明二次型必可化为标准型，即实对称矩阵必合同于对角阵（定理2.1）的时候，可以得到配方法的思想.

配方法步骤如下：

1. 集中带有平方项的某个变量的所有项进行配方；
2. 再集中含有平方项的另一变量的各项进行配方，如此进行下去，直至配成完全平方为止；
3. 若 f 中没有平方项，则先做可逆线性替换
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - Y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad \cdots \end{cases}$$
即可化出平方项.

注 2.3. 需要注意的是:

1. 配方法得到的标准型与正交变换法得到的标准型不一定相同;
2. 配方法得到的标准型的系数不一定是二次型矩阵的特征值.

2.3 规范型

在此只考虑实二次型的规范型.

由于任意实二次型都可以经过可逆线性替换化为标准型，不妨设秩为 r 的实二次型的标准型为

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_1 y_r^2,$$

其中 $d_i > 0$，因为正数可以开方，因此做可逆线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{d_2}} z_2 \\ \cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \cdots \\ y_n = z_n. \end{cases}$$

则有

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2. \tag{5}$$

这是一个系数为 $-1, 0, 1$ 构成的标准型，且由二次型的秩 r 以及标准型中正平方项的个数 p 所唯一确定.

定义 2.2 (标准型)**.** 称式5 为实二次型的标准型.

定理 2.5 (惯性定理)**.** 任意实二次型都可以通过可逆线性替换化为规范型，且规范型唯一.

证明. 存在性已经证明，唯一性略. □

注 2.4. 实二次型的标准型不唯一，但规范型唯一.

定义 2.3. 在实二次型的规范型中，正平方项个数 p 称为正惯性指数，负平方项个数 $r-p$ 称为负惯性指数，两者之差 $p-(r-p) = 2p-r$ 称为实二次型的符号差.

注 2.5. 二次型的正负惯性指数等于二次型矩阵的正负特征值个数.

综上，惯性定理可以描述为:

定理 2.6 (惯性定理的矩阵含义)**.** 任意一个实对称矩阵 A 与矩阵

$$\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{bmatrix}$$

合同，其中 p 为实对称矩阵 A 的正特征值个数，r 为 A 的秩.

定理 2.7 (合同的充要条件)**.** 两个 n 阶实对称矩阵 A, B 合同的充要条件为两者的正负特征值个数相同.

证明. 由惯性定理的矩阵含义（定理2.6）以及合同的传递性可证. □

注 2.6. 两个 n 阶实对称矩阵 A, B 相似的充要条件为两者的特征值相同. 因此实对称矩阵 A, B 相似必合同.

3 正定二次型

3.1 正定二次型

定义 3.1 (正定二次型)**.** 设 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为一个实二次型，若对任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, ..., c_n$ 有

$$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0,$$

则称 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是正定二次型，称正定二次型矩阵为正定矩阵.

将上定义中的 $>$ 改为 $<, \geq, \leq$ 则对应的实二次型分别称为“负定二次型、半正定二次型、半负定二次型”，对应的矩阵分别称为“负定矩阵、半正定矩阵、半负定矩阵”.

若存在一组不全为零的常数 $c_1, c_2, ..., c_n$ 使得 $f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，又存在一组不全为零的常数 $d_1, d_2, ..., d_n$ 使得 $f(d_1, d_2, ..., d_n) < 0$，则称 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为不定二次型，其矩阵为不定矩阵.

定理 3.1. 若正定二次型 $f = X^TAX$ 经过可逆线性变换 $X = CY$ 化为实二次型 $f = Y^TBY$，则 Y^TBY 必为正定二次型.

证明. 因为 $X = CY$ 为可逆线性替换，而 X 的各分量为不全为零，因此 Y 的各分量为不全为零. 则有

$$X^TAX = (CY)^TACY = Y^TC^TACY = Y^T(C^TAC)Y = Y^TBY.$$

因为 f 正定，因此对于任意非零向量 X 有 $X^TAX > 0$ 则 $Y^TBY > 0$，因此 $f = Y^TBY$ 正定. □

因为 Y^TBY 可以经过可逆线性替换变回到 X^TAX，因此可逆线性替换不改变二次型的正定性.

注 3.1. 因为 $X = CY$ 为可逆线性替换，即 C 可逆，因此方程 $CY = X$ 对于每个 X 仅有一个解 Y，同理方程 $C^{-1}X = Y$ 对于每个 Y 仅有一个解 X，这意味着在 $\mathbb{R}^n$ 中 X 与 Y 一一对应.

因此对于任意 $Y \in \mathbb{R}^n$ 存在唯一的 $X \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$Y^TBY = X^TAX > 0,$$

从而得到正定二次型可逆现性替换不改变正定性.

定理 3.2 (二次型正定的充要条件 1)**.** 设 $f = X^TAX$ 为 n 元实二次型，A 为实二次矩阵，则下面五个条件等价：

1. f 为正定二次型；
2. f 的正惯性指数为 n；
3. A 的特征值全为正；
4. A 与单位阵 E 合同；
5. 存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $A = C^TC$.

证明. 用循环法证明.

$1 \Rightarrow 2$：设可逆线性变换 $X = CY$ 将二次型化为规范型

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

由与可逆线性变换不改变正定性（定理3.1），因此 $f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ 也是正定的，现取 $y_i = 1, y_j = 0$ 则可知 $d_i > 0$，即 f 的正惯性指数为 n；

$2 \Rightarrow 3$：因为 f 的正惯性指数为 n，所以 f 有 n 个正特征值，即 A 的特征值全为正；

$3 \Rightarrow 4$：设 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ 均为正，A 为实对称矩阵，设 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ 则存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Rightarrow A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T.$$

令 $H = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n})$，则 $\Lambda = HH = HH^T$，因此

$$A = QHH^TQ^T = QH(QH)^T = QHE(QH)^T.$$

令 $QH = P$，则 $P^{-1}A(P^T)^{-1} = P^{-1}A(P^{-1})^T = E$，即 $A \simeq E$.

$4 \Rightarrow 5$：易知 $C = P = QH$.

$5 \Rightarrow 1$：若 $A = C^TC$，其中 C 可逆，则对于任意非零向量 X 有 $CX \neq \theta$，因此 $f = X^TAX = X^TC^TCX = (CX)^TCX > 0$，因此 f 正定. □

定理 3.3 (正定的必要条件)**.** 若实对称矩阵为正定矩阵，则行列式大于零.

证明. 因为实对称矩阵 A 正定，则存在可逆矩阵 C，使得 $A = C^TC$，即 $|A| = |C|^2 > 0$.

由于 A 正定，则其特征值大于零，从而 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$ 也可以证明. □

注 3.2. 此定理仅是正定的必要条件，若行列式大于零不能推出矩阵正定.

定义 3.2 (顺序主子式)**.** 设 n 阶实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

称 A 的子式

$$P_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 $k(k=1,2,...,n)$ 阶顺序主子式.

显然, n 阶方阵 A 的顺序主子式一共有 n 个.

定理 3.4 (二次型正定的充要条件 2)**.** 实二次型 $f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 为正定二次型的充要条件为 A 的各阶顺序主子式大于零.

注 3.3. 在判断矩阵正定性时常用三种方法: *1*) 顺序主子式法; *2*) 特征值法; *3*) 配方法. 对于配方法可以立即判定二次型正惯性指数是否大于等于 *1*, 对于一些简单的二次型十分好用.

特征值法对于判断一些二次型矩阵多项式的正定性时, 比顺序主子式法更好用, 其核心在于 $f(A)$ 的特征值等于 $f(\lambda)$, 而 $\forall f(\lambda)>0 \Leftrightarrow f(A)$ 正定.

例 3.1. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $A+kE$ 是正定矩阵, 求 k 的范围.

解. 因为 $|\lambda E-A|=0$, 求出 A 的特征值分别为 $0,-1,3$, 则 $A+kE$ 的特征值为 $k,k-1,k+3$, 因为当且仅当 $A+kE$ 的特征值均为正时 $A+kE$ 正定, 则 $k>1$. □

3.2 正定矩阵的性质

定理 3.5. *1.* 若 A 为正定矩阵, 则 A^{-1},A^*,A^k (k 为正整数) 都是正定矩阵;

2. 若 A,B 为 n 阶正定矩阵, 则 $A+B$ 为 n 阶正定矩阵;

3. 若 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶正定矩阵, 则 $a_{ii}>0$;

4. 若 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶负定矩阵, 则 $a_{ii}<0$.

证明. 1. 因为 A 为正定矩阵, 所以 A 的特征值 λ_i 均为正, 则 A^{-1},A^*,A^k 的特征值 $\frac{1}{\lambda_i},\frac{|A|}{\lambda_i},\lambda_i^k$ 均为正, 因此 A^{-1},A^*,A^k 都是正定矩阵;

2. 因为 A,B 为 n 阶正定矩阵, 即 A,B 为 n 阶实对称矩阵, 所以

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$$

即 $A+B$ 也是实对称矩阵, 则对于任意非零向量 X 有

$$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$$

从而 $A+B$ 为正定矩阵;

3. 设 $\varepsilon_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$，因为 A 正定，所以

$$\varepsilon_i A \varepsilon_i^T = a_{ii} > 0$$

即 A 对角线元素均大于 0，同理可证若 A 负定，则 A 对角线元素均小于 0.

□

注 3.4. 第三条定理说明，若 X^TAX 为正定二次型，则其对角线元素需均大于零.