高等数学基本方法: 一元函数微分学

Collection of Calculus Tips:
Unary function differential calculus

王浩铭

2017 年 · 秋

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等数学期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Calculus (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 导数与微分

1.1 导数与微分的概念

1.1.1 A. 利用导数定义求极限

有两种方法：(1) 导数定义法（直接法）；(2) 具体函数法（间接法），间接法只能在选填题中使用

1. 导数定义法（直接法）

   若题干中给出 $f(x_0), f'(x_0)$ 的值，则当 $\lim_{x\to x_0}\phi(x)=0$ 且在 x_0 某去心邻域内 $\phi(x)\neq 0$ 时有

   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0)}{\phi(x)}=f'(x_0),$$

   需要注意的是 $\phi(x)\neq 0$ 条件，函数极限存在必须要求在 x_0 某去心邻域内处处有定义，当在 x_0 任意去心邻域内都存在点 x 使 $\phi(x)=0$，则导数定义式无定义，此时极限必不存在，最常见的例子如 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot\sin\frac{1}{x})}{x\cdot\sin\frac{1}{x}}$ 不存在.

2. 具体函数法（间接法）

   在选填题中由 $f(x_0), f'(x_0)$ 的值确定一个具体函数（一般为线性函数，在满足题设条件下形式越简单越好），代入题中求解.

例 1.1. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则求极限 $I=\lim_{n\to\infty} n\cdot f\left(\frac{n}{n+2}\right)$.

导数定义法：

由于 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，因此 $f(1)=0, f'(1)=1$，则易知

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}\cdot\left(-\frac{2}{n+2}\right)\cdot n \\ &= -2f'(1) = -2. \end{aligned}$$

具体函数法：

由于 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，因此 $f(1)=0, f'(1)=1$，设 $f(x)=x-1$，代入有

$$I=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n-n-2}{n+2}=-2.$$

1.1.2 B. 利用导数定义求导数

常用与两种题:（1）分段函数以及某些特殊函数求分段点导数;（2）连乘函数

1. 分段函数以及某些特殊函数求分段点导数

   分段函数分别利用分段点左右函数式求左右导，从而计算导数；某些特殊函数是指形如 $f(x) = x^a \cdot \sin\frac{1}{x}$ 的函数，这类函数在 $x = 0$ 的导数只能用定义求解:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^a \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} \cdot \sin\frac{1}{x}.$$

   并且有以下结论：1）当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续；2）当 $x > 1$ 时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 可导；3）当 $x > 2$ 时，$f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

2. 连乘函数

   连乘函数在某点导数有三种求法：1）导数定义法；2）函数分解法；3）对数求导法

例 1.2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n)$，其中 n 为正整数，求 $f'(0)$.

导数定义法:

易知 $f(0) = 0$，因此

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot (e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n)}{x} \\ &= -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-(n-1)) = -1^{n-1}(n-1)!. \end{aligned}$$

函数分解法:

令 $g(x) = (e^x - 1), h(x) = (e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n)$，则 $g(0) = 0, g'(0) = 1, h(0) = -1^{n-1}(n-1)!$，因此 $f(x) = g(x)h(x)$，以及 $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$，易知 $f'(x)$ 在定义域内连续，故

$$f'(0) = g'(0)h(0) + h'(0)g(0) = -1^{n-1}(n-1)!.$$

1.1.3 C. 可导性的判断

可导性判断有以下几类题型:（1）极限定义式判断可导性;（2）$f(x) = \phi(x) \cdot |x - a|$ 型;（3）$f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的可导性

1. 极限定义式判断可导性. 对于这类题注意几点常见错误:

1. 方向限制

   方向限制是指，在式 $\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0)}{\phi(x)}$ 中，$\phi(x)$ 被限制只能从 0 的单侧趋于 0，此时只能得到 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的单侧导数，不能判定其是否可导;

2. 上下异阶

   上下异阶是指，在式 $\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0)}{\psi(x)}$ 中，$\phi(x)$ 是 $\psi(x)$ 的高阶无穷小，此时有

$$\frac{f(x_0 + \phi(x)) - f(x_0)}{\psi(x)} = \frac{f(x_0 + \phi(x)) - f(x_0)}{\phi(x)} \cdot \frac{\phi(x)}{\psi(x)},$$

   因此无论 $\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0)}{\phi(x)}$ 是否存在，$\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0)}{\psi(x)}$ 都将趋于 0，不能判定其是否可导;

3. 不含定点

   不含定点是指，形如 $\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0+\psi(x))}{\phi(x)-\psi(x)}$ 的式子，欲求 $f(x)$ 在 x_0 的导数，但式中却不包含 $f(x_0)$，不能判定其是否可导.

4. 变量为零

   变量为零是指，在式 $\frac{f(x_0+\phi(x))-f(x_0)}{\phi(x)}$ 中，对于 x_0 的任意去心邻域，始终存在去心邻域内的点 x' 使得 $\phi(x')=0$，则极限不存在，导数不可导；

注 1.1. 需要注意的是，当 $f'(x_0)$ 存在，我们可以推出 *1*、*2*、*3* 的成立，即 *1*、*2*、*3* 是 $f'(x_0)$ 存在的必要非充分条件.

例 1.3. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为：
(*A*) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在
(*B*) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在
(*C*) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在
(*D*) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

(*A*) 选项，$1-\cos h$ 只能从 0^+ 方向趋于 0；(*C*) 选项 $h-\sin h\sim o(h^2)$；(*D*) 选项不包含 $f(0)$，因此选 *B*.

例 1.4. 设 $f(x)$ 在 R 上二阶可导，$f(0)=0$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0.\end{cases}$$

若 $g(x)$ 在 R 上连续，证明 $g(x)$ 在 R 上有连续的一阶导数.

因为 $g(x)$ 在 R 上连续，所以

$$a=g(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

而

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

由洛必达法则可知：

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}.$$

当 $x\neq 0$ 时，有 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，欲证 $g'(x)$ 连续，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}g'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-xf'(0)+xf'(0)-f(x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{xf'(0)-f(x)}{x^2}\\&=f''(0)+\lim_{x\to 0}\frac{f'(0)-f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}.\end{aligned}$$

因此 $g'(x)$ 连续.

例 1.5 (重要)**.** 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=1$，则下列结论

1. $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$;
2. $f''(0)$ 存在，且 $f''(0)=2$;
3. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值;
4. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续.

中正确的为：

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=1$，所以 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $f(0)=0$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)-f(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{f(x)-f(0)}{x}}=1$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$;
2. 因为存在 $f(x)$ 使得在 $x=0$ 的任意邻域内不连续，所以该 $f(x)$ 在 $x=0$ 的二阶导数不存在；($f''(x_0)$ 存在 $\Rightarrow$ 在 x_0 某邻域内 $f'(x)$ 有定义 $\Rightarrow$ 在 x_0 某邻域内 $f(x)$ 连续)
3. 因为 $f(0)=0$，$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=1$，所以在 $x=0$ 某邻域内有 $\frac{x^2}{f(x)}=1+\alpha$，即 $f(x)=\frac{x^2}{1+\alpha}$，由保号性可知，$x=0$ 的某邻域内有 $f(x)>0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值;
4. 如
$$f(x)=\begin{cases}x^2+x^3, & x \text{ 为有理数}\\ x^2, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$
满足 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=1$，但在 $x=0$ 的任意邻域内不连续.

例 1.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$，证明对任意 $x\in(0,l)$，至少存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$，并求 $\lim_{x\to 0^+}\theta$.

令 $\phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，所以 $\phi(0)=0$，即 $\phi(x)=\phi(x)-\phi(0)=x[f(\xi)-f(-\xi)]=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$，因为 $x\neq 0$，所以

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$$

左侧取极限有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)$$

右侧取极限有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot 2\lim_{x\to 0^+}\theta=2f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta$$

所以 $f'(0)=2f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta$，因为 $f'(0)\neq 0$，所以 $\lim_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$.

注 1.2. 因为 $f'(0)$ 存在，所以 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0),\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}=f'(0)$.

2.$f(x)=\phi(x)\cdot|x-a|$ 型. 两个结论:

1. 设 $f(x)=\phi(x)\cdot|x-a|$，其中 $\phi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导且导数为 $0\Leftrightarrow \phi(a)=0$；

   证明. 充分性:

   因为

   $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)|x-a|}{x-a}=\begin{cases}\phi(a), & x\to a^{+}\\ -\phi(a), & x\to a^{-}\end{cases}$$

   又 $f'(a)$ 存在，因此 $\phi(a)=-\phi(a)=0$;

   必要性:

   因为 $\phi(a)=0$，所以

   $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)|x-a|}{x-a}=\begin{cases}\phi(a)=0, & x\to a^{+}\\ -\phi(a)=0, & x\to a^{-}\end{cases}$$

   因此 $f'(a)=0$. □

2. 设 $f(x)=\phi(x)\cdot|x-a|$，其中 $\phi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，则 $\phi(x)\sim(x-a)^n\Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导，$n+1$ 阶不可导.

例 1.7. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\cdot|x^3-x|$ 的不可导点为.

易知 $f(x)=(x^2-x-2)\cdot|x^3-x|=(x+1)\cdot(x-2)\cdot|x|\cdot|x+1|\cdot|x-1|$，因此 $x=0,1$ 为不可导点.

例 1.8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)\cdot(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的什么条件.

易知 $F(x)=f(x)+f(x)\cdot|\sin x|$，影响可导性的为 $f(x)\cdot|\sin x|$，因此为充要条件.

3.$f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的可导性.

1. $f(x)$ 可导 $\nRightarrow |f(x)|$ 可导；$|f(x)|$ 可导 $\nRightarrow f(x)$ 可导；

2. 若 $f(x)$ 连续，则

   - $f(x_0)\neq 0\Rightarrow |f(x)|$ 可导；
   - $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=0\Rightarrow |f(x)|$ 可导.

4. 分段复合函数在分段点的可导性.

1. 若 $f'(u_0), g'(x_0)$ 都存在，那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x_0 可导，其导数为：$(f[g(x_0)])' = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$；

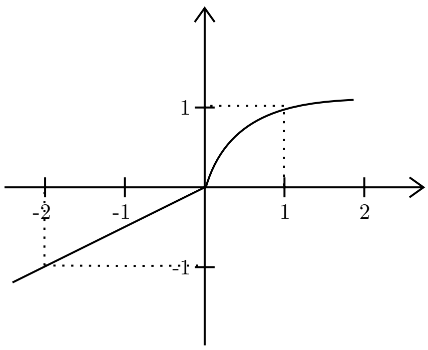
2. 若 $f'(u_0), g'(x_0)$ 至少一个不存在，那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x_0 不一定不可导，需要先求 $y = f(g(x))$ 的表达式，在进一步考察.

求 $y = f(g(x))$ 的表达式时应该：按照外层函数的定义域的分段去划分内层函数的值域，再与内层函数的定义域结合，从而得到符合的定义域分段，如：

$$y = f(u) = \begin{cases} -u, & u < -1 \\ u^2, & -1 \le u < 1 \\ u^3, & 1 \le u. \end{cases}$$

以及

$$u = g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$$



有外层函数定义域对内层函数值域的分段可将内层函数的定义域分为 $(-\infty, -2,], (-2, 1], (1, +\infty)$，结合内层函数的定义域分段可得复合函数的定义域分段为 $(-\infty, -2], (-2, 0], (0, 1], (1, +\infty)$，以及复合函数：

$$y = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & x \le -2 \\ \dfrac{x^2}{4}, & -2 < x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ x^{\frac{3}{2}}, & x > 1 \end{cases}$$

例 1.9. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2, & x\le 0\end{cases}$$

若 $y=f(g(x))$，则计算 $y'_x|_{x=0}, y'_x|_{x=1}$.

因为 $u=g(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $g'(1)=-\frac{1}{2}, g(1)=-1$，而 $y=f(u)$ 在 $u=-1$ 处可导，且 $f'(-1)=-4$，因此 $y'_x|_{x=1}=f'(-1)\cdot g'(1)=2$.

又因为 $g'(1)$ 不存在，因此 $y'_x|_{x=0}$ 的存在性需要求出复合函数的表达式来讨论，可知

$$f(g(x))=\begin{cases}x^4, & x\le 0\\ x^2, & x>0.\end{cases}$$

因此 $y'_{x+}|_{x=0}=y'_{x-}|_{x=0}=0\Rightarrow y'_x|_{x=0}=0$.

1.2 求高阶导数

1.2.1 A. 隐函数求二阶导数

隐函数的求导法则：

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

上面的 $F'_x(x,y), F'_y(x,y)$ 的含义是 $F'_1(x,y), F'_2(x,y)$，是对位置求导，不是对全局 x 求导. 利用复合函数求导方法可以求得隐函数的二阶导数，需要注意的是 F'_x, F'_y 的脚标是位置变量，不是全局变量：

$$\begin{aligned}y''&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}\\&=-\frac{[F_{11}+F_{12}y']F_2-[F_{21}+F_{22}y']F_1}{F_2^2(x,y)}\\&=-\frac{F_2^2F_{11}-F_1F_2F_{12}-F_1F_2F_{21}+F_1^2F_{22}}{F_2^3}\\&=-\frac{F''_{xx}F'^2_y-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}.\end{aligned}$$

1.2.2 B. 反函数求二阶导数

反函数求导法则：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(x)},$$

注意此时 $\frac{1}{f'(x)}$ 是关于 x 的函数，因此反函数的二阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{f'(x)}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\&=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}\\&=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.\end{aligned}$$

这一公式可以用于微分方程的二阶变量调换.

例 1.10. 求微分方程 $y''+(x+e^{2y})y'^3=0$ 的通解.

由 y'^3 考虑高阶对调，因为 $x'=\frac{1}{y'},x''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{y'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{y'}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{(y')^3}$，所以 $y''=-x''\cdot(y')^3$ 即

$$-x''\cdot(y')^3+(x+e^{2y})y'^3=0$$

因此

$$x''-x=e^{2y}$$

解此二阶常系数非齐次线性微分方程有 $x=C_1e^y+C_2e^{-y}+\frac{1}{3}e^{2y}$.

1.2.3 C. 参数方程求二阶导数

对于参数方程

$$\begin{cases} y=\phi(t) \\ x=\psi(t) \end{cases}$$

有

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}$$

若令 $y'_x=\rho(t)$，则由微分形式不变性可知，$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}x}\cdot x'_t$，因为 $\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}x}=y''_x$，因此我们有参数方程的高阶导数求法

$$y''_x=\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y'_x=\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\frac{y'_t}{x'_t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\frac{y'_t}{x'_t}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{\phi''(t)\psi'(t)-\psi''(t)\phi'(t)}{\psi^3(t)}.$$

注 1.3. $F_{xx}F_y^2-2F_xF_yF_{xy}+F_{yy}F_x^2$，$y'^3$，$\phi''(t)\psi'(t)-\psi''(t)\phi'(t)$ 分别是隐函数、反函数、参数方程二阶导数的部分特征，应该记住.

例 1.11. 设 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

法一：参数方程求导

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则参数方程为 $r=e^\theta$，因此 $x=e^\theta\cos\theta, y=e^\theta\sin\theta$，所以

$$
\begin{aligned}
y'_x &= \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{e^\theta\sin\theta+e^\theta\cos\theta}{e^\theta\cos\theta-e^\theta\sin\theta} = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \\
y''_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{y'_\theta}{x'_\theta}\cdot\frac{1}{x'_\theta} \\
&= \frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}\cdot\frac{1}{e^\theta\cos\theta-e^\theta\sin\theta} \\
&= \frac{2}{e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)^3} = \frac{2e^{2\theta}}{([e^\theta(\cos\theta-\sin\theta)]^3} \\
&= \frac{2r^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}
$$

法二：取对数求导

略.

1.2.4 D. 求高阶导数

1. 求某点处的高阶导数：泰勒展开，注意在 $(x-c)^n$ 匹配

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a(x-c)+b} &= \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\frac{a}{b}(x-c)+1} \\
&= \frac{1}{b}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{a}{b}(x-c)\right]^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

所以

$$f^{(n)}(c) = (-1)^n\frac{a^n}{b^{n+1}}n!$$

2. 求高阶导函数：归纳法，注意分式一般写成幂的形式

3. 常见高阶导数

   (a) $\sin(ax+b)^{(n)} = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

   (b) $\cos(ax+b)^{(n)} = a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

   (c) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = [(ax+b)^{-1}]^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$

   (d) $[\ln(ax+b)]^{(n)} = \left[\frac{a}{ax+b}\right]^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$

   (e) $[a^x]^{(n)} = a^x\cdot\ln^n a$

   (f) 莱布尼兹公式：$(uv)^{(n)} = C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^nuv^{(n)}$.

例 1.12. 设 $y=\ln(1-2x)$，则 $y^{(10)}$.

因为 $y'=-2\cdot(1-2x)^{-1}$，$y''=(-2)^2\cdot(-1)\cdot(1-2x)^{-2}$，由此归纳可知：$y^{(n)}=(-2)^n\cdot[-(n-1)!]\cdot(1-2x)^{-n}=-2^n\cdot[(n-1)!]\cdot(1-2x)^{-n}$.

例 1.13. 设 $f(x)=\frac{x^{10}}{1-x}$，求 $f^{(10)}(x)$.

易知：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x^{10}}{1-x}=\frac{x^{10}-1+1}{1-x}\\
&=\frac{x^{10}-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}=\frac{(x-1)\cdot(x^9+x^8+\cdots+x+1)}{1-x}+\frac{1}{1-x}\\
&=-(x^9+x^8+\cdots+x+1)+\frac{1}{1-x}\\
&=g(x)+h(x)
\end{aligned}$$

因为 $g^{(10)}=0$，所以 $f^{(10)}=h^{(10)}$，因为 $h=(1-x)^{-1},h'=-1\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-2},h''=[(-2)!]\cdot(-1)^2\cdot(1-x)^{-3}$，归纳有 $f^{(10)}=h^{(10)}=[(-10)!]\cdot(-1)^{10}\cdot(1-x)^{-11}=\frac{10!}{(1-x)^{11}}$.

例 1.14. 设 $z=\frac{2x}{x^2-y^2}$，则 $\left.\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}$
因为 $z=\frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n z}{\partial y^n}&=(-n)!(x+y)^{-(n+1)}+n!(x-y)^{-(n+1)}\\
&=(-1)^n n!\frac{1}{(x+y)^{n+1}}+n!\frac{1}{(x-y)^{n+1}}\\
&=n!\left[\frac{1}{(x-y)^n}+(-1)^n\frac{1}{(x+y)^n}\right]
\end{aligned}$$

所以 $\left.\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}=n![1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]$.

2 导数应用

2.1 单调性、极值与最值

定义 2.1 (驻点). 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个驻点.

定义 2.2 (极值). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内的任意一点 x，有 $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值（极小值）.

定理 2.1. 在两个极大值之间的开区间内存在着极小值.

定理 2.2. 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内仅有唯一极值点时，若在该点 $f(x)$ 取极大（小）值，则它也是在 $[a,b]$ 上的最大（小）值点.

定理 2.3 (极值存在的必要条件). 设函数在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

证明极值点有以下方法:

1. 第一、二、三充分条件;

- 第一充分条件: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导，则:
  (a) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
  (b) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;
  (c) 若 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 符号不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处不是极值.
- 第二充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，则
  (a) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值;
  (b) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

  极值存在的第一充分条件仅涉及 $f(x)$ 在 x_0 去心邻域内的导数性质，至于在 x_0 处是否可导并不要求（仅要求在 x_0 处连续）；而极值存在的第二充分条件要求 $f(x)$ 在 x_0 有一阶及二阶导数.
- 第三充分条件: 假定函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有顺次至 n 阶的导数，而且直至 $n-1$ 阶导数为止全都在这点等于零:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

  同时却有 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.
  (a) n 为偶数，若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x)>f(x_0)$，即 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值；若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x)<f(x_0)$，即 $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值;
  (b) n 为奇数，$f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

2. 利用局部保号性证明极值点

   若 $f(x_0)=A$，证明 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $f(x)<(>)A$ 即可. 对于某些不便求导的函数，可以对其某一部分进行求导，以化简过程.

例 2.1. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $I=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$，讨论 $f(x)$ 在点 x_0 的极值.

法一:

因为 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$，所以 $f'(x_0)=0$，因此

$$\begin{aligned}I&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{2h}\\&=\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\frac{f''(x_0)}{2}=a\neq 0.\end{aligned}$$

因此，若 $a>0$，则为极小值，若 $a<0$，则为极大值;

法二:

因为 $f'(x_0)=0$，$f(x)$ 二阶可导，所以

$$\begin{aligned}I&=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}=\frac{f''(x_0)}{2}=a\neq0.\end{aligned}$$

因此，若 $a>0$，则为极小值，若 $a<0$，则为极大值;

法三:

因为

$$I=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}=a\neq0.$$

若 $a>0$，由局部保号性可知，存在 $\delta>0$，任意 $0<h<\delta$ 有 $f(x_0+h)>f(x_0)$，x_0 为极小值点；同理若 $a<0$，x_0 为极大值点.

注 2.1. *1.* 极值点为函数局部性质，因此使用佩亚诺余项的泰勒公式;

2. 佩亚诺余项的泰勒公式与保号性本质上是一致的.

例 2.2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点;

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点.

因为 $\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1>0$，由局部保号性可知存在去心邻域 $\mathring{U}(0)$，使得任意 $x\in\mathring{U}(0)$ 有 $f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 单调增，因为 $f''(x)$ 连续，所以 $f'(x)$ 连续，又因为 $f'(x)=0$，因此对于任意 $x\in\mathring{U}(0)$，当 $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$，有极值的第一充分条件可知：$f(x_0)$ 为极小值.

注 2.2. 任意 $x\in\mathring{U}(0)$ 有 $f''(x)>0$，以及 $f''(x)$ 连续不能推出 $f''(0)>0$，因为由函数极限的不等式性可知

$$f''(x)>0\Rightarrow f''(0)=\lim_{x\to0}f''(x)\geq0,$$

由于等号的可能成立，不能使用极值的第二充分条件.

例 2.3. 当 $x>0$ 时，证明 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

令 $\phi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2=(x-1)\cdot[(x+1)\ln x-(x-1)]$，应 $f(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$，即 $\phi(x)=(x-1)\cdot f(x)$，因为 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x},f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$，所以当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，即 $f(x)\uparrow$，因为 $f(1)=0$，即当 $x\in(0,1)$ 时 $x-1<0,f(x)<0,\phi(x)>0$；当 $x\in(1,\infty)$ 时 $x-1>0,f(x)>0,\phi(x)>0$，所以 $\phi(x)\geq0$，即 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

2.2 凸凹性、拐点、渐近线

2.2.1 A. 凸凹性

定义 2.3 (凹函数). 在区间 χ 上有定义而且连续的函数 $f(x)$ 若满足对 χ 中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 \leqslant x_2)$ 有不等式:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2),$$

，其中 $q_1, q_2 > 0; q_1 + q_2 = 1$，则称 $f(x)$ 为凹函数.

定义 2.4 (凸函数). 在区间 χ 上有定义而且连续的函数 $f(x)$ 若满足对 χ 中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 \leqslant x_2)$ 有不等式:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2),$$

，其中 $q_1, q_2 > 0; q_1 + q_2 = 1$，则称 $f(x)$ 为凸函数.

定理 2.4 (凹函数的一阶充要条件). 假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，并且在 χ 内有有限导数 $f'(x)$. 要使 $f(x)$ 在 χ 内是凹函数，充要条件是它的导数 $f'(x)$ 是常增的（按照广义理解）.

定理 2.5 (凹函数的二阶充要条件). 假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，并且在 χ 内有有限的二阶导数. 要使 $f(x)$ 在 χ 内是凹函数，充要条件是在 χ 内部有 $f''(x) \geq 0$.

定理 2.6. 假定函数 $f(x)$ 在区间 χ 内定义且连续，并且在 χ 内有有限导数 $f'(x)$. 要使 $f(x)$ 在 χ 内是凹函数，充要条件是，它的图像上的一切点落在它的任意切线上.

这一性质可知，若 $f(x)$ 为凹函数，则有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

2.2.2 B. 拐点

定义 2.5 (拐点). 若曲线上一点 $(x_0, f(x_0))$ 把使函数 $f(x)$ 为凸的那部分曲线，和使函数 $f(x)$ 为凹的那部分曲线分开的话，则称 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $f(x)$ 的拐点.

需要注意，拐点是曲线上的点，因此必须要把横纵坐标都写出来.

定理 2.7 (拐点必要条件). 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 二阶可导，且点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y = f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0) = 0$.

需要注意的是 $f''(x) = 0$ 这个条件对于求拐点而言同以 $f'(x) = 0$ 求 $f(x)$ 极值一样，是必要的，而非充分的. 而且此时我们并未要求 $f'(x)$ 有任何性质.

定理 2.8 (拐点的第一充分条件). 设 $y = f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内二阶可导，且 $f''(x_0) = 0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续），则

1. 若 $f''(x)$ 在 x_0 左右异号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $y = f(x)$ 的拐点；
2. 若 $f''(x)$ 在 x_0 左右同号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是函数 $y = f(x)$ 的拐点.

定理 2.9 (拐点的第二充分条件). 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，则

1. 若 $f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 是函数 $y=f(x)$ 的拐点；
2. 若 $f'''(x_0)=0$，则不能判断.

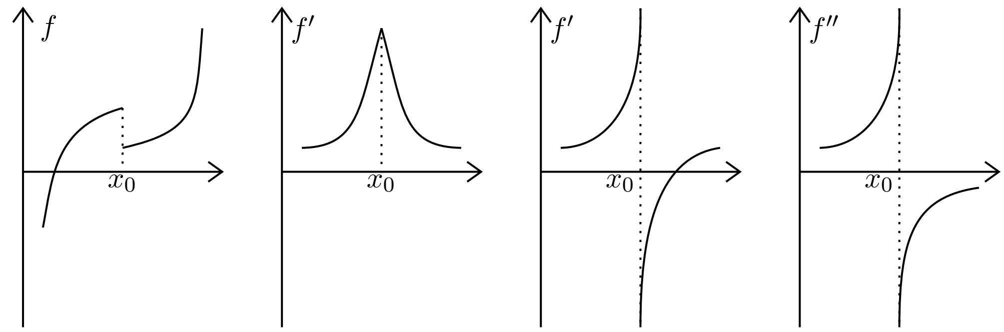
定理 2.10 (拐点的第三充分条件). 若 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，但是 $f^{(n)}(x_0)\neq 0\ (n\geq 3)$，则

1. 当 n 为奇数时，则点 $(x_0,f(x_0))$ 是函数 $y=f(x)$ 的拐点；
2. 当 n 为偶数时，则点 $(x_0,f(x_0))$ 不是函数 $y=f(x)$ 的拐点.

注 2.3 (拐点的图像判断). 注意，拐点是

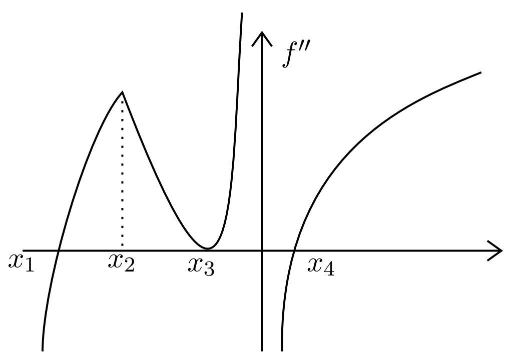
1. $f(x)$ 凸凹性的分界点；
2. $f'(x)$ 单调性的分界点；
3. $f''(x)$ 正负性的分界点.

因此无论 $f(x),f'(x),f''(x)$ 在点 x_0 性质如何，只要它在 x_0 邻域内是上述性质的分界点，那么它就是拐点，如



上图中 x_0 均为 $f(x)$ 的拐点.

例 2.4. 函数 $f(x)$ 在 R 上连续，其二阶导数如图，则拐点个数为:



易知共有 3 个拐点，分别为 $x_1, x=0, x_4$.

例 2.5. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$，且 $f'(0)=0$，则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点；

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点.

易知 $f''(0)=0$，则极值判断的第二充分条件失效，考察第三充分条件：对关系式求导有 $f'''(x)+2f'(x)f''(x)=\cos x$，因此 $f'''(0)=1\neq 0$，即 $(0,f(0))$ 是拐点.

2.2.3 C. 渐近线

求渐近线有以下方法：

- 垂直渐近线：$x=a$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$；

- 水平渐近线：$y=b$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$；

- 斜渐近线：$y=kx+b$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0$ 且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$；

- 斜渐近线还有一种求法，当函数 $f(x)$ 可以写为 $f(x)=ax+b+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)\to 0(x\to\infty)$ 时，$y=ax+b$ 正是它的斜渐近线.

  这种方法的证明思路一般为：（1）提取无穷大因子、（2）构造无穷小项、（3）泰勒展开，将函数化为多项式、（4）得到 $b+ax$ 项以及 $\alpha(x)$ 项.

  其中第（2）步，在自变量 x 趋于无穷大时在函数中构造出无穷小项是本法的关键.

注 2.4. 几点注意：

1. 水平渐近线和斜渐近线当一方无穷存在水平渐近线（斜渐近线）时，则这一无穷方向上必不存在斜渐近线（水平渐近线）；

2. 注意两方向上水平渐近线或斜渐近线的重合；

3. 比较函数分子分母无穷阶数可以粗略判断其水平渐近线与斜渐近线的情况；

   如果分子分布同阶或分子比分母低阶，则有水平渐近线；如果分子比分母高一阶，则有斜渐近线；其他情况没有渐近线。注意两侧渐近线的重合情况。

4. 实现判断函数的奇偶性和周期性通常可以简化解题步骤.

例 2.6. 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程.

法一:

因为

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{x}}.$$

其中 $x<\xi<x+1$，因此由夹逼定理可知 $b=\frac{3}{2}$. 因此 $y=x+\frac{3}{2}$.

法二:

提取无穷大因子，构造无穷小，展开构造多项式:

$$\begin{aligned}f(x)&=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{(\frac{1}{x}+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=x\cdot(\frac{1}{x}+1)^{\frac{3}{2}}=x\cdot(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}))\\&=x+\frac{3}{2}+\frac{3}{4x}+o(\frac{1}{x})=x+\frac{3}{2}+\alpha(x),\end{aligned}$$

其中 $\alpha(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$，因此 $y=x+\frac{3}{2}$.

注 2.5. 此题中，函数 y 的分子是 $\frac{3}{2}$ 阶无穷大，分母是 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大，因此必有正无穷方向斜渐近线，没有水平渐近线.

例 2.7. 求曲线 $y=x\cdot\arctan x$ 渐近线.

易知 $y=x\cdot\arctan x$ 是偶函数，因此只需求其一侧的渐近线即可；又由函数表达式可知，函数只能有斜渐渐线.

法一:

因为

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\arctan x}{x}=\frac{\pi}{2}$$

以及

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}[x\cdot\arctan x-\frac{\pi}{2}x]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot(\arctan x-\frac{\pi}{2})\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1,\end{aligned}$$

因此，斜渐近线为 $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$;

法二:

构造无穷小，展开为多项式:

因为

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\ (x>0)$$

所以

$$y=x\cdot\arctan x=x\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right]$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot x-x\cdot\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right]=\frac{\pi}{2}\cdot x-1+\alpha(x),$$

因此，斜渐近线为 $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$.

注 2.6 (重要等式)**.**

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\ (x>0)$$

2.3 方程根的存在性及个数

这类题型的讨论分两个步骤：

1. 存在性.

1. 零点定理

   即找到两个点 a,b，使 $f(a)\cdot f(b)<0$ 成立. 若给出函数（各阶）导数的性质，判断函数的正负性时，常用拉格朗日中值定理或带拉格朗日余项的泰勒公式构建两者之间的关系；

2. 罗尔定理

   若函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 或某辅助函数 $\phi(x)$ (在中值定理证明题中常用)，满足 $F(a)=F(b)$ 或 $\phi(a)=\phi(b)$，则 $f(x)$ 有根.

3. 费马定理

   若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且端点不分别为最大最小值，则存在 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有根.

4. 代入特殊点验证

   一般为 $0,\pm1,\pm2$.

注 2.7 (无穷限/端点不存在情况下根的存在性判定)**.** 上面的零点定理、罗尔定理、费马定理都是利用端点性质证明中值的存在性，若区间没有端点，则有三种求法：若 $f(x)$ 是定义在 $(a,b]$ 上的连续函数，且 $f(x)\to A(x\to a), f(b)=A$，（$A$ 有限）证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$:

1. 补充定义

$$g(x)=\begin{cases}A, & x=a\\ f(x), & x\neq a.\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g(a)=g(b)=A$.

2. 介值定理 + 罗尔定理

若 $f(x)\equiv A$，则显然成立，若 $\exists c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=B\neq A$，不妨设 $B>A$，令 $\lambda=\frac{A+B}{2}$. 因为 $f(x)\to A(x\to a)$，所以对于 $\epsilon=\frac{A+B}{4}>0$ 存在 $\delta>0$，使得任意 $x\in(a,a+\delta)$ 有

$|f(x)-A|<\epsilon$，即当 $x\in(a,a+\delta)$ 时有 $f(x)<A+\frac{A+B}{4}=\frac{3A+B}{4}<\frac{A+B}{2}$，令 $x_0=x+\frac{\delta}{2}$，因为 $f(x)$ 连续，则有介值定理可知：存在 $\xi_1\in(x_0,c)$ 使得 $f(\xi_1)=\frac{A+B}{2}$，同理，存在 $\xi_2\in(c,x_1)$ 使得 $f(\xi_2)=\frac{A+B}{2}$，因为 $a<\xi_1<c<\xi_2<b$，因此 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，且 $f(\xi_1)=f(\xi_1)=\frac{A+B}{2}$.

3. 最值定理 + 费马引理

   若 $f(x)\equiv A$，则显然成立，若 $\exists c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=B\neq A$，不妨设 $B>A$，因为 $\lim_{x\to a^+}f(x)=A<B$，所以存在 $\delta>0$，任意 $x\in(a,a+\delta)$ 有 $f(x)<B$，令 $x_0=a+\frac{\delta}{2}$，因此 $f(x)$ 在 $[x_0,b]$ 上连续，在 (x_0,b) 内可导，由最值定理可知 $f(x)$ 在 $[x_0,b]$ 上存在最大值与最小值，因为 $f(x_0)<B,f(b)<B$，因此两端点不为最大值，即最大值点 ξ 取在 (x_0,b) 内，由费马引理可知 $f'(\xi)=0$.

后两种方法的关键都在于构造一个点 $f(c)=B\neq A$ 再进行分析.

例 2.8 (达布定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明：若 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$；

因为 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)<0$，则由保号性可知，存在 δ_1,δ_2 使得 $\forall x\in(a,a+\delta_1)$ 使得 $f(x)>f(a)$，$\forall x\in(b-\delta_2,b)$ 使得 $f(x)>f(b)$，因此 $f(a),f(b)$ 不是 $f(x)$ 的最大值，由最值定理可知 $f(x)$ 最大值在 (a,b) 内取得，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，由费马引理可知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 2.9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0,f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0,f''(\eta)=0$.

因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)>0$，则由保号性可知，存在 δ_1,δ_2 使得 $\forall x\in(a,a+\delta_1)$ 使得 $f(x)>f(a)=0$，$\forall x\in(b-\delta_2,b)$ 使得 $f(x)<f(b)=0$，由零点定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

因为 $f(a)=f(\xi)=f(b)$，所以存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $f''(\eta)=0$.

2. 根的个数.

1. 单调性

   若函数在区间内单调，则其至多有一个根，通过存在性的判断可知函数有唯一根；

2. 罗尔定理的推论

   设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上 n 阶可导，若在区间 $[a,b]$ 上，$f^{(n)}\neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上最多有 n 个根.

3. 反证法

与罗尔定理推论本质相同.

在方程根的存在性及个数的题型中，主要有两类题：（1）判断某无参函数根的个数；（2）给出某有参函数跟的个数，判断参数的范围. 对于第二类题，一般将参数分离出来，再进行计算.

例 2.10. 设 a_i 为任意常数，求证方程

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 0$$

在 $[0, \pi]$ 内必有实根.

令 $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$，则其原函数为 $F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \cdot \sin 2x + \cdots + \frac{a_n}{n} \sin nx$，因此 $F(0) = F(\pi) = 0$，所以存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

例 2.11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0) = f(1)$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right), (n \geq 2$为正整数$)$.

令 $\phi(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$，所以 $\phi(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right), \phi\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right), \phi\left(\frac{2}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right), ..., \phi\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1)$，所以

$$\phi(0) + \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \phi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \phi\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0$$

若存在 $x^* = \frac{k}{n}, (k = 0, 1, 2, ..., \frac{n-1}{n})$ 使得 $\phi(x^*) = 0$，则得证；若 $\phi\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0$，则必存在 $k_1, k_2, (k_1, k_2 = 0, 1, 2, ..., \frac{n-1}{n})$ 使得 $\phi\left(\frac{k_1}{n}\right) \phi\left(\frac{k_2}{n}\right) < 0$，由零点定理可知存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $\phi(\xi) = 0$.

例 2.12. 试证方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个根.

令 $f(x) = 2^x - x^2 - 1$，则 $f(0) = 0, f(1) = 0, f(2) = -1 < 0, f(5) = 6 > 0$，因此 $f(x) = 0$至少有三个根；

又有 $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, f''(x) = 2^x \ln 2 \ln 2 - 2, f'''(x) = 2^x \ln 2 \ln 2 \ln 2 > 0$，因此由罗尔定理的推论可知 $f(x)$至多有三个根，因此 $f(x) = 0$ 有且仅有三个根.

例 2.13. 设 $f(x)$ 可微，且当 $0 \leq x \leq 1$ 时，$0 < f(x) < 1$，$f'(x) \neq 1$，试证在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x 使 $f(x) = x$.

令 $g(x) = f(x) - x$，则 $g(0) = f(0) > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$，因为 $f(x)$ 可微，所以 $f(x)$ 连续，有零点定理可知 $g(x) = f(x) - x = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

唯一性有两种方法：

法一（反证法）：

设 $g(x) = 0$ 有两个根，即存在 $a, b \in (0,1)$ 使得 $g(a) = g(b) = 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = 1$ 矛盾.

法二（罗尔定理的推论）：

因为 $g'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$，由罗尔定理的推论可知，$g(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个根，因此在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x 使 $f(x) = x$.

例 2.14. 设 $f''(x) < 0, f(1) = 2, f'(1) = -3$，求证 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 有且仅有一个实根.

法一：多次拉格朗日中值定理

因为

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + f'(\xi) \cdot (2-1) = 2 + f'(\xi) - f'(1) + f'(1) \\ &= 2 - 3 + f''(\eta) \cdot (\xi - 1) = -1 + f''(\eta) \cdot (\xi - 1) < 0, \end{aligned}$$

其中 $1 < \eta < \xi < 2$，因此 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 至少有一个实根，因为 $f''(x) < 0, f'(1) = -3 < 0$，因此在 $(1, +\infty)$ 上有 $f'(x) < 0$, 因此 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 至多有一个实根, 综上, 有且只有一个实根.

法二：拉格朗日中值定理 + 单调性

因为 $f''(x) < 0$，所以 $f'(x) \downarrow$，因此

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + f'(\xi) \cdot (2-1) \leq f(1) + f'(1) \cdot (2-1) \\ &= 2 - 3 \cdot 1 = -1 < 0, \end{aligned}$$

即 $f(1) \cdot f(2) < 0$ 因此 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 至少有一个实根，又因为 $f'(1) = -3 < 0, f'(x) \downarrow$，因此在 $(1, \infty)$ 上 $f'(x) < 0$，因此 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 至多有一个实根，综上，有且只有一个实根.

法三：带拉格朗日余项的泰勒公式

因为

$$f(2) = f(1) + f'(1) + \frac{f''(\xi)}{2} = -1 + \frac{f''(\xi)}{2} < 0,$$

因此 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 至少有一个实根，因为 $f''(x) < 0, f'(1) = -3 < 0$，因此在 $(1, +\infty)$ 上有 $f'(x) < 0$，因此 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 至多有一个实根，综上，有且只有一个实根.

注 2.8. 带拉格朗日余项的泰勒公式是通过函数的各阶导数性质判断函数的值的性质的一般公式，它在函数不等式的证明中也有重要应用.

例 2.15. 试确定方程 $x = ae^x$ $(a > 0)$ 的实根个数.

令函数 $f(x) = xe^{-x} - a$，则 $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x)$，则当 $x < 1$ 时 $f'(x) > 0$，当 $x > 1$ 时 $f'(x) < 0$，且 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = -a < 0$，则 $f(1) = e^{-1} - a$，因此若 $a < e^{-1}$ 则有两个实根，若 $a = e^{-1}$ 则有一个实根，若 $a > e^{-1}$ 则无实根.

例 2.16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_i \in [a,b], t_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^n t_i = 1$，试证存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n).$$

设 $\phi(x)=f(x)-t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}t_if(x_i)=\sum_{i=1}^{n}t_i\cdot[f(x)-f(x_i)]$，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最值，即最大值点为 x_M，最小值点为 x_m，则

$$\phi(x_M)=\sum_{i=1}^{n}t_i\cdot[f(x_M)-f(x_i)]>0;$$
$$\phi(x_m)=\sum_{i=1}^{n}t_i\cdot[f(x_m)-f(x_i)]<0,$$

所以 $\phi(x_M)\cdot\phi(x_m)<0$，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\phi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$.

例 2.17. 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|$ 的驻点个数.

因为 $f'(x)=\frac{[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]'}{|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|}=\frac{g'(x)}{|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|}$，因为 $g(x)$ 有 n 个根，所以 $g'(x)$ 有 $n-1$ 个根 (且不等于 $k,k=1,2,...,n$)，因此 $f'(x)$ 有 $n-1$ 个驻点.

例 2.18. 已知 $f(x)$ 可导且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ 证明：$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

因为

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|x_n-x_{n_1}|\cdot|f'(\xi)|\\&\le\frac{1}{2}\cdot|x_n-x_{n-1}|\le\frac{1}{2^2}\cdot|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le\frac{1}{2^n}\cdot|x_1-x_0|\end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

法一：

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1$，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda$.

因为

$$a_n-1=a_n-f(0)=f(a_{n-1})-f(0)=a_{n-1}\cdot f'(\xi)<\frac{1}{2}\cdot a_{n-1}$$

两侧取极限，有

$$\lambda-1\le\frac{1}{2}\cdot\lambda$$

从而 $0\le\lambda\le2$.

注意：由于极限的不等式性，该做法仅能得到 $\lambda\in[0,2]$，不能得到 $\lambda\in(0,2)$.

法二：

因为 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda$. 即 $\lambda=f(\lambda)$.

下证明在 $(0,2)$ 内 $\phi(x)=x-f(x)=0$ 有根 $x=\lambda$. 因为 $\phi(0)=0-f(0)=-1<0$; $\phi(2)=2-f(2)=1-[f(2)-1]=1-[f(2)-f(0)]=1-[2\cdot f'(\xi)]>0$，有介值定理可知：存在 $\lambda\in(0,2)$ 使得 $\phi(\lambda)=0$.

2.4 证明函数不等式

常用四种方法：

1. 单调性与最值

   最常用的方法；

2. 凸凹性

   凸凹性记住两条性质：

   (a) 凹函数的定义：$f(ax+by) \leq af(x)+bf(y)$；

   (b) 凹函数切线在图像下方：$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \leq f(x)$.

3. 构建函数与导数的联系

   有三种构建方法：

   (a) 中值定理系：拉格朗日中值定理：$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)\cdot(x_1-x_2)$、柯西中值定理、泰勒公式等；

   <u>若给出二阶导数则有三种处理方法</u>：

   - 两次拉格朗日中值定理；
   - 一次拉格朗日中值定理 + 导函数单调性；
   - 泰勒公式.

   带佩亚诺余项的泰勒公式研究函数局部性质，一般在极值点问题中应用；带拉格朗日余项的泰勒公式研究函数整体性质，一般在不等式以及中值存在性问题中应用.

   (b) 定积分（牛顿莱布尼兹公式）：$f(x_1)-f(x_2)=\int_{x_2}^{x_1} f'(x)\mathrm{d}x$；

   <u>若给出二阶导数则有一种处理方法</u>：

   - 累次积分交换积分次序 + 广义积分中值定理（例：2.38）

   (c) 分部积分法：$\int f(x)\mathrm{d}x = xf(x)-\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

   <u>若给出二阶导数则有一种处理方法</u>：

   - 利用两次分部积分法，注意定积分的分部积分技巧：若 $f(b)=0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = (x-a)f(x)|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x$.

4. 一些基本不等式

   详见??.

5. 二次函数判别式法

常减的题型有：（1）证明不等式；（2）比较两个数的大小，对于后者应该通过恒等变化将其化为某一函数上的两个点，从而再利用单调性证明大小.

例 2.19. 设 $x\in(0,1)$，证明 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

令 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$, 则 $f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$, $f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x}{1+x}=\frac{2}{1+x}\cdot(\ln(1+x)-x)<0$，所以 $f'(x)\downarrow$，因为 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)<0$ $(0<x<1)$，因此 $f(x)\downarrow$，因为 $f(0)=0$，所以 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

注 2.9. 这里应用了不等式 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，$x>0$.

例 2.20. 证明 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}$，$(0<a<b)$.

令 $f(x)=\ln\frac{x}{a}-\frac{2(x-a)}{x+a}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4a}{(x+a)^2}=\frac{(x+a)^2-4xa}{x(x+a)^2}=\frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2}>0$，因为 $f(a)=0$，因此 $f(x)>0$, $(x>a>0)$，所以 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}$，$(0<a<b)$.

例 2.21. 比较 e^π,π^e 的大小.

易知比较 e^π 与 π^e 的大小等价于比较 $\frac{\ln e}{e}$ 与 $\frac{\ln\pi}{\pi}$ 的大小，而 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 为 $(e,+\infty)$ 上的减函数，因此 $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$，即 $e^\pi>\pi^e$.

例 2.22 (重要)**.** 设 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)\geq x$

- 法一（泰勒公式）：
因为 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，所以 $f(0)=0,f'(0)=1$，因为 $f(x)$ 二阶可导，所以
$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}\cdot f''(\xi)\cdot x^2=x+\frac{1}{2}\cdot f''(\xi)\cdot x^2\geq 0.$$
- 法二（两次拉格朗日定理）：
因为 $f''(x)>0$，所以
$$\begin{aligned}f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x&=[f'(\xi)-f'(0)+f'(0)]\cdot x\\&=f''(\eta)\cdot\xi\cdot x+f'(0)\cdot x=x+f''(\eta)\cdot\xi\cdot x\geq x.\end{aligned}$$
- 法三（拉格朗日中值定理 + 导函数单调性）：
因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)\uparrow$，因此
$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x>f'(0)\cdot x=x.$$
- 法四（单调性与最值）：
令 $F(x)=f(x)-x$，因此 $F'(x)=f'(x)-1,F''(x)=f''(x)>0$，因为 $F'(0)=0$，所以当 $x>0$ 时 $F'(x)>0$，所以 $F(x)\uparrow$，因为 $F(0)=0$，所以当 $x>0$ 时 $F(x)>0$，即 $f(x)\geq x$.
- 法五（凸凹性）：
因为 $f''(x)$ 为凹函数，所以函数图像在切线下方，因此
$$f(x)\geq f'(0)\cdot x+f(0)=x.$$

注 2.10. 回顾泰勒公式的展开条件：

1. 任意函数 $f(x)$，假定它在某一点 x_0 存在直至 n 阶的各阶导数，则存在带佩亚诺余项的泰勒公式：

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \end{aligned} \tag{1}$$

2. 假定函数 $f(x)$ 在全区间 $[x_0, x_0+H]$ 内前 n 阶导数：

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \dots\ ,\ f^{(n)}(x)\ (x \in [x_0, x_0+H])$$

存在且连续，此外在开区间 (x_0, x_0+H) 内 $n+1$ 阶导数 $f^{(n+1)}(x)$ 存在且有限，则有带拉格朗日余项的泰勒公式：

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.

例 2.23. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ 上具有二阶连续偏导数，在 D 的边界上取零值，且在 D 上有 $|f_{xy}| \le M$，试证：

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \frac{M}{4}.$$

方法一：分部积分构造函数与导数关系

因为 f 在 D 的边界上取零值，所以 $f(x,0)=f(x,1)=f(0,y)=f(1,y)=0$，因此 $f'_x(x,0)=f'_x(x,1)=0$，则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y \cdot \left[xf(x,y)|_0^1 - \int_0^1 xf_x(x,y)\mathrm{d}x\right] \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 xf_x(x,y)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f_x(x,y)\mathrm{d}(y-1) \\ &= -\int_0^1 x\mathrm{d}x\cdot\left[(y-1)\cdot f_x(x,y)|_0^1 - \int_0^1(y-1)\cdot f_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right] \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x\cdot\left[\int_0^1(y-1)\cdot f_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right] \end{aligned}$$

所以

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le M\cdot\left|\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1(y-1)\mathrm{d}y\right| = \frac{M}{4}.$$

方法二：拉格朗日中值定理构造函数与导数的关系

因为 f 在 D 的边界上取零值，所以 $f(x,0)=f(x,1)=f(0,y)=f(1,y)=0$，因此 $f'_x(x,0)=f'_x(x,1)=0$，则

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\int_0^1[f(x,y)-f(0,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 x\cdot f_x(\xi,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\int_0^1 x\cdot[f_x(\xi,y)-f_x(\xi,0)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 x\cdot y\cdot f_{xy}(\xi,\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\le M\cdot\int_0^1\int_0^1 x\cdot y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{4}.\end{aligned}$$

例 2.24. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上具有连续导数，且 $f''(x)>0$，证明 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x \ge 0$.

因为 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}\sin x = \sin x f(x)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}f(x) = -\int_0^{2\pi}\sin x f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{d}\cos x = \cos x f'(x)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}f'(x) = [f'(2\pi)-f'(0)] - [\int_0^{2\pi}\cos x f''(x)\mathrm{d}] = [f'(2\pi)-f'(0)] - \cos\xi[\int_0^{2\pi} f''(x)\mathrm{d}] = (1-\cos\xi)\cdot[f'(2\pi)-f'(0)]$，因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)\uparrow$，所以 $(1-\cos\xi)\cdot[f'(2\pi)-f'(0)]>0$.

例 2.25. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

因为 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，所以 $f(0)=0, f'(0)=0$，因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，用泰勒公式链接二阶导数与函数的关系：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\theta)x^2=\frac{1}{2}f''(\theta)x^2$$

设 $f''(x)$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 上连续，则在 $[-\delta,\delta]$ 有界，即 $f''(x)\le M, x\in[-\delta,\delta]$，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，所以存在 N 任意 $n>N$ 有 $\frac{1}{n}\in[-\delta,\delta]$，即 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}f''(\theta)\frac{1}{n^2}\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$，由比较审敛法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 2.26. 证明柯西不等式：对于任意实数 $x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_n$ 有：

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

令 $z_i=x_i-t\cdot y_i$，则 $\sum_{i=1}^n z_i^2\ge0$，即

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n z_i^2 &= \sum_{i=1}^n(x_i-t\cdot y_i)^2=\sum_{i=1}^n(x_i^2+t^2y_i^2-2x_iy_it)\\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2+t^2\sum_{i=1}^n y_i^2-t\sum_{i=1}^n 2x_iy_i\ge0.\end{aligned}$$

因此 $\Delta_t = b^2 - 4ac = (2\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \le 0$，因此 $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$.

例 2.27. 若 $y^2 - 4xy + x^2 + 6 = 0, (y > 0)$，求 y 的最小值.

法一：整理有 $x^2 - 4yx + y^2 + 6 = 0$，因此 $\Delta_x = b^2 - 4ac = (4y)^2 - 4(y^2+6) \ge 0$，即 $y \ge \sqrt{2}$，因此 y 的最小值为 $\sqrt{2}$.

法二：两侧对 x 求导，有 $2yy' - 4y - 4xy' + 2x = 0$，所以 $y' = \frac{2y-x}{y-2x}$，令 $y' = 0$，则 $2y = x$，代入原式有 $y = \sqrt{2}$.

例 2.28. 设 $\delta > 0$，在 $(-\delta, \delta)$ 内有 $|f(x)| \le x^2, f''(x) > 0, I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\mathrm{d}x$，证明 $I > 0$.

法一：（泰勒公式）

因为 $|f(x)| \le x^2$, 所以 $f(0) = f'(0) = 0$, 所以 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 > 0$. 所以 $I > 0$.

法二：（导函数单调性）

因为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\mathrm{d}x + \int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\mathrm{d}x = \int_0^{\delta}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}(x-\delta) \\
&= [f(x)+f(-x)](x-\delta)|_0^{\delta} - \int_0^{\delta}(x-\delta)\mathrm{d}[f(x)+f(-x)] \\
&= -\int_0^{\delta}(x-\delta)[f'(x)-f'(-x)]\mathrm{d}x = \int_0^{\delta}(\delta-x)[f'(x)-f'(-x)]\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因为 $f''(x), f'(x) - f'(-x) > 0$，所以 $I > 0$.

2.5 中值定理的证明题

2.5.1 A. 证明存在一个点 ξ，使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

此类问题的一般方法是将所证结论改写为 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的形式，然后【1】构造辅助函数，【2】利用罗尔定理. 需要注意的是式 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 中必须有 $f'(\xi)$ 项，否则问题就是方程根的存在性问题了.

1. 求辅助函数. 对于单中值中值定理证明题，辅助函数的构建是解题的核心，常用两种方法：微分方程法，分析还原法：

1. 微分方程法

欲证 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$，则求微分方程 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的通解 $H(x, y) = C$；设辅助函数为

$$g(x) = H(x, f(x));$$

最常用的微分方程为：

- 一阶齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = 0$，其解为：

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

则辅助函数为 $g(x) = y \cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$；

- 一阶非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$，其解为：

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

则辅助函数为 $g(x) = \left[y - e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] \cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

微分方程法定辅助函数只能应用于一元微分方程的情况，即 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$，的情况，若题干出现二阶微分方程时，则不能应用此法。

2. 分析还原法

考虑单中值证明题的解题思想：即通过对辅助函数 $\phi(x)$ 应用罗尔定理（有时应用最值定理与费马引理），从而找到点 ξ 使得 $\phi'(\xi) = h(\xi) \cdot [F[\xi, f(\xi), f'(\xi)]] = 0$，又证明 $h(\xi) \neq 0$，从而 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$.

基于此，我们通过对 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)]$ 乘一个小辅助函数 $h(x)$，再积分，通过选择适当的 $h(x)$ 找到大辅助函数 $\phi(x)$，需要注意的是 $h(x) \neq 0$.

分析还原法常应用于有高阶导数的形式.

例 2.29. 找 $f(x)g''(x) - g(x)f''(x)$ 的辅助函数.

对 $h(x) \cdot [f(x)g''(x) - g(x)f''(x)]$ 积分，有

$$\begin{aligned}
&\int h(x) \cdot [f(x)g''(x) - g(x)f''(x)]\mathrm{d}x \\
&\quad = \int h(x)f(x)g''(x)\mathrm{d}x - \int h(x)g(x)f''(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \int h(x)f(x)\mathrm{d}g'(x) - \int h(x)g(x)\mathrm{d}f'(x) \\
&\quad = g'(x)h(x)f(x) - \int g'(x)\mathrm{d}h(x)f(x) - [h(x)g(x)f'(x) - \int f'(x)\mathrm{d}h(x)g(x)] \\
&\quad = g'(x)h(x)f(x) - h(x)g(x)f'(x) - \int g'(x)\mathrm{d}h(x)f(x) + \int f'(x)\mathrm{d}h(x)g(x).
\end{aligned}$$

考察后两项：

$$\begin{aligned}
&-\int g'(x)\mathrm{d}h(x)f(x)+\int f'(x)\mathrm{d}h(x)g(x)\\
&\qquad=-\int g'(x)[h'(x)f(x)+h(x)f'(x)]\mathrm{d}x+\int f'(x)[h'(x)g(x)+h(x)g'(x)]\mathrm{d}x\\
&\qquad=-\int g'(x)h'(x)f(x)\mathrm{d}x+\int f'(x)h'(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&\qquad=\int [f'(x)h'(x)g(x)-g'(x)h'(x)f(x)]\mathrm{d}x\\
&\qquad=\int h'(x)[f'(x)g(x)-g'(x)f(x)]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

令 $h'(x)=0, h(x)=1$，则

$$\begin{aligned}
&\int h(x)\cdot[f(x)g''(x)-g(x)f''(x)]\mathrm{d}x\\
&\qquad=\int \cdot[f(x)g''(x)-g(x)f''(x)]\mathrm{d}x\\
&\qquad=g'(x)f(x)-g(x)f'(x)=\phi(x).
\end{aligned}$$

例 2.30 (重要！)**.** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=1$，证明：

(a) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；

(b) 至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

(a)

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以易知 $f(0)=f(1)=0, f'(0)=f'(1)=1$，所以存在 $\delta_1,\delta_2>0$，使得 $\forall x\in(0,\delta_1)$ 有 $f(x)>f(0)=0, \forall x\in(1-\delta_2,1)$ 有 $f(x)<f(1)=0$, 所以 $f(\delta_1)\cdot f(\delta_2)<0$，由零点定理可知存在 ξ 使得 $f(\xi)=0$.

(b)

设辅助函数为 $F(x)=\int[f''(x)-f(x)]\phi(x)\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int f''(x)\phi(x)\mathrm{d}x-\int f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\
&=\int \phi(x)\mathrm{d}f'(x)-\int f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\
&=\phi(x)f'(x)-\int f'(x)\phi'(x)\mathrm{d}x-\int f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\
&=\phi(x)f'(x)-\int \phi'(x)\mathrm{d}f(x)-\int f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\
&=\phi(x)f'(x)-\phi'(x)f(x)+\int \phi'(x)f(x)\mathrm{d}x-\int f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\
&=\phi(x)f'(x)-\phi'(x)f(x)+\int [\phi'(x)-\phi(x)]f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令 $\phi'(x)-\phi(x)=0$，则 $\phi(x)=e^x$，因此 $F(x)=e^xf'(x)-e^xf(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$，则 $F(0)=e^0[f'(0)-f(0)]=e^0=1, F(1)=e^1[f'(1)-f(1)]=e^1=e$，考察 $f'(x)-f(x)$.

令 $g(x)=f(x)e^{\int -\mathrm{d}x}=f(x)e^{-x}$，因为 $g(0)=0, g(1)=0$，所以存在 ξ 使得 $g'(\xi)=e^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0$，因为 $e^{-\xi}\neq 0$，所以 $f'(\xi)-f(\xi)=0$，所以 $F(\xi)=0$，由介值定理可知，存在 $\mu\in(\xi,1)$，使得 $F(\mu)=1$，应用罗尔定理，存在 $\eta\in(0,\mu)$ 使得 $F'(\eta)=e^\eta[f''(\eta)-f(\eta)]=0$，因为 $e^\eta\neq 0$，所以 $f''(\eta)-f(\eta)=0$.

3. 含有两种函数的式子

对于含有两种函数的式子（即 $F(\xi,f(\xi),g(\xi),f'(\xi),g'(\xi))=0$）应灵活配凑辅助函数.

如 $f(x)g''(x)-g(x)f''(x)$，若要使某函数的导数中有 $f(x)g''(x)$ 项，则函数中必有 $f(x)g'(x)$，同理也必有 $-f'(x)g(x)$，因此令辅助函数为 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$；

如 $\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，原式等于 $A=g'(\xi)[f(a)-f(\xi)]-f'(\xi)[g(\xi)-g(b)]=0$（这一步需要证明分母不为 0），若要使某函数的导数中有 $g'(\xi)[f(a)-f(\xi)]$ 项，则原函数中必有 $g(x)[f(a)-f(x)]$，同理也必有 $-f(x)[g(x)-g(b)]$ 项，令 $h(x)=g(x)[f(a)-f(x)]-f(x)[g(x)-g(b)]$，则 $h'(x)=g'(x)[f(a)-f(x)]-f'(x)g(x)-f'(x)[g(x)-g(b)]-g'(x)f(x)=A-[f(x)g(x)]'$，因此令辅助函数为 $H(x)=g(x)[f(a)-f(x)]-f(x)[g(x)-g(b)]+f(x)g(x)$.

通过配凑，我们可以证明柯西中值定理与拉格朗日中值定理：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

因为 $g'(x)\neq 0$，所以 $g(a)\neq g(b)$（根的个数问题，反证法或罗尔定理推论）。因此原式等价于 $A=g'(\xi)[f(b)-f(a)]-f'(\xi)[g(b)-g(a)]$，若要使某函数的导数中有 $g'(\xi)[f(b)-f(a)]$ 项，则原函数中必有 $g(x)[f(b)-f(a)]$，同理也必有 $-f(x)[g(b)-g(a)]$ 项，令 $h(x)=g(x)[f(b)-f(a)]-f(x)[g(b)-g(a)]$，则 $h'(x)=A$，因为 $h(b)=h(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$，所以存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$.

4. 辅助函数常用结论

- 欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$，则令 $F(x)=x^nf(x)$;
- 欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$，则令 $F(x)=x^{-n}f(x)=\frac{f(x)}{x^n}$;
- 欲证 $f'(\xi)+bf(\xi)=0$，则令 $F(x)=e^{bx}f(x)$;
- 欲证 $af'(\xi)+bf(\xi)=0$，则令 $F(x)=e^{\frac{b}{a}x}f(x)$;
- 欲证 $af'(\xi)+bf(\xi)=c$，则令 $F(x)=e^{\frac{b}{a}x}[f(x)-\frac{c}{a}]$;
- 欲证 $f'(\xi)+g(x)f(\xi)=0$，则令 $F(x)=e^{\int g(x)\mathrm{d}x}f(x)$;
- $f'(x)=[f(x)-a]'$，$f'(x)-1=[f(x)-x]'$.

2. 利用罗尔定理. 对【1】中构造的辅助函数 $g(x)$ 利用罗尔定理，就是要证明在区间 $[a,b]$ 上存在两点 c,d 使得 $g(c)=g(d)$，本质上是证明方程根的存在性，即证明存在 η 使得方程 $g(a)=g(\eta)$ 成立，往往利用罗尔定理或零点定理证明.

若应用罗尔定理的区间是无界区间，或者端点为无定义点的区间，则可以采用三种方法：（1）补充定义法；（2）介值定理 + 罗尔定理；（3）最值定理 + 费马引理.

例 2.31. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=\frac{1}{2},f(2)=2$. 求证 $\exists\xi\in(1,2)$ 使 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

法一：微分方程法

因为 $\xi\in(1,2)$，所以 $\xi\neq 0$，因为 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{2f(x)}{x}$ 所以 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，因此 $\ln f(x)=2\ln x+C$，即 $f(x)=Cx^2$，因此设辅助函数为 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，因为 $g(1)=\frac{1}{2},g(2)=\frac{1}{2}$，因此存在 $\xi\in(1,2)$ 使 $g'(\xi)=\frac{\xi^2f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}=0$，因为 $\xi\neq 0$，所以 $\exists\xi\in(1,2)$ 使 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

法二：还原法

因为 $\xi\in(1,2)$，所以 $\xi\neq 0$，即 $\xi f'(x)-2f(\xi)=0$，因此设辅助函数为 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$.

注 2.11. 需要注意，验证分母不为零十分重要!!

例 2.32. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$，证明对于任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

因为 $[f'(\xi)-1]-\lambda[f(\xi)-\xi]=[f(\xi)-\xi]'-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$，令 $g(x)=f(x)-x$，因此只需证明寸 ξ 使得 $g'(\xi)-\lambda g(\xi)=0$，令辅助函数为 $h(x)=e^{-\lambda x}g(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$.

下面证明存在 ξ 使辅助函数满足罗尔定理的条件. 此时需要证明存在一点 η, 使得 $h(\eta)=h(0)=0$ 或 $h(\eta)=h(1)=-e^{-\lambda}$, 显然前者方便. 设存在一点 $\eta\in(0,1)$, 使得 $h(\eta)=0$, 即 $0=e^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]$, 即存在 η 使得 $f(\eta)=\eta$,

这是方程根的存在性问题，一是证明端点异号从而利用零点定理；二是证明原函数端点相等，从而利用罗尔定理, 本题中原函数性质不明, 因此使用前者. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=f(0)-0=0,F(1)=f(1)-1=-1<0,F(1/2)=1-1/2=1/2>0$，因此 $\exists\eta\in(1/2,1)$ 使得 $f(\eta)=\eta$，即 $h(\eta)=0=h(0)$，因此存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $h'(\xi)=0$，证毕.

注 2.12. 罗尔定理的关键在于任意选择 ξ，假设它使辅助函数 $h(x)$ 满足罗尔定理的条件（端点值相等），再由得到的性质证明 ξ 的存在性（根的存在性）.

例 2.33. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f''(\xi)+f'(\xi)=1$.

因为 $f(x)$ 有二阶导数，所以连续，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，且 $f'(x)$ 为可导的偶函数. 因为 $f''(\xi)+f'(\xi)-1=[f'(\xi)-1]'+[f'(\xi)-1]=0$，所以令 $g(x)=f'(x)-1$，即证明存在 ξ 使得 $g'(\xi)+g(\xi)=0$，因此构造辅助函数 $h(x)=e^xg(x)=e^x[f'(x)-1]$.

下面证明存在 η_1,η_2 使得 $h(\eta_1)=h(\eta_2)$，即使辅助函数满足罗尔定理的条件. 因为 $f'(x)-1$ 为偶函数，则若存在 $0<\eta_1<1$ 使得 $f'(\eta_1)=1$，则 $\eta_2=-\eta_1$ 使得 $h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$. 因此只需证明，存在 $0<\eta_1<1$ 使得 $f'(\eta_1)-1=0$

这是方程根的存在性问题，一是证明端点异号从而利用零点定理，本题中 $f'(x)$ 的性质不足，因此不能使用该法；二是证明原函数端点相等，从而利用罗尔定理，令函数 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(1)=1-1=0, F(0)=f(0)-0=0$，因此存在 $\eta_1\in(0,1)$ 使得 $F'(\eta_1)=f'(\eta_1)-1=0$，从而 $h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)$ 使得 $h'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)+f'(\xi)=1$.

本题还可以使用拉格朗日中值定理证明 η_1 的存在性，即 $f(1)-f(0)=f'(\eta_1)\cdot(1-0)=1$.

注 2.13. 由上两例可以总结这类题型的一般方法：

1. 由 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$ 构造辅助函数 $g(x)$（还原法或微分方程法）；
2. 假设存在点 η 使辅助函数满足罗尔定理条件（端点相等）；
3. 利用罗尔定理或零点定理证明 η 的存在性（根的存在性问题）；
4. 利用罗尔定理证明使 $g'(\xi)=0$ 的 ξ 的存在性；
5. 得到使 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$ 的 ξ（一般要讨论分母非零，根的个数问题，单调性、罗尔定理推论、反证法）.

例 2.34 (两个函数的题型)**.** 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

因为 $g''(x)\neq 0$，所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多有两个根，因为 $g(a)=g(b)=0$，所以 $g(x)$ 在 (a,b) 内无根。（也可以用反证法）因此在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 等价于 $A=f(\xi)\cdot g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$，令辅助函数为 $h(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，所以 $h'(x)=A$，因为 $h(a)=h(b)=0$，所以存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=f(\xi)\cdot g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$，即 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

例 2.35 (端点反常的题型)**.** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，因此欲证 $xF'(x)-F(x)=0$，构造辅助函数 $g(x)=\frac{F(x)}{x}$，因为 $f(x)$ 连续，所以 $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta)x}{x}=\lim_{\eta\to 0}f(\eta)=f(0)=0$. 因为 $g(1)=\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1}=0$，因此有两种方法得到满足 $g'(\xi)=0$ 的点：

方法一：补充定义

令

$$\phi(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq 0\\ 0, & x=0, \end{cases}$$

易知 $\phi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，又有 $\phi(0)=\phi(1)=0$，所以存在 $\xi\in(0,1),\mathrm{s.t.}\phi'(\xi)=g'(\xi)=\frac{\xi F'(\xi)-F(\xi)}{\xi^2}=0$，因为 $\xi\neq 0$，所以 $\xi F'(\xi)-F(\xi)=\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x-\xi f(\xi)=0$.

方法二：$\epsilon-\delta$ 极限定义：详见“无穷限/端点不存在情况下根的存在性的判定”（注2.7）.

3. 利用费马引理. 回顾方程根的存在性问题，主要有三种证法：零点定理、罗尔定理、费马引理，第一者是证明函数零点，后两者证明导数零点，对于单中值证明题，一般需要构造辅助函数，证明辅助函数有导数为零的点，因此主要应用后两者来证明.

在后两者中罗尔定理的题目最常见，此类题的特征是函数有具体的数值关系，而费马引理的特征是函数有不等式数值关系.

例 2.36. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)| \leq 1$，又有 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，证明在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

对 $h(x)\cdot[f''(x)+f(x)]$ 积分有

$$\begin{aligned}\int h(x)\cdot[f''(x)+f(x)]\mathrm{d}x &= \int h(x)\cdot f''(x)\mathrm{d}x+\int h(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int h(x)\mathrm{d}f'(x)+\int h(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\\ &= h(x)\cdot f'(x)-\int f'(x)\cdot\mathrm{d}h(x)+\int h(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $h(x)=f'(x)$，则

$$\begin{aligned}\int h(x)\cdot[f''(x)+f(x)]\mathrm{d}x &= [f'(x)]^2-\int f'(x)\cdot\mathrm{d}f'(x)+\int f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x\\ &= [f'(x)]^2-\frac{[f'(x)]^2}{2}+\int f(x)\mathrm{d}f(x)\\ &= \frac{[f'(x)]^2}{2}+\frac{[f(x)]^2}{2}=\frac{\phi(x)}{2}.\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{f(0)-f(-2)}{2}\right|=|f'(\mu_1)|\leq\frac{|f(0)|+|f(-2)|}{2}\leq 1$$

$$\left|\frac{f(2)-f(0)}{2}\right|=|f'(\mu_2)|\leq\frac{|f(2)|+|f(0)|}{2}\leq 1$$

其中 $\mu_1\in(-2,0), \mu_2\in(0,2)$，所以 $\phi(\mu_1)=[f'(\mu_1)]^2+[f(\mu_1)]^2\leq 2$，同理 $\phi(\mu_2)=[f'(\mu_2)]^2+[f(\mu_2)]^2\leq 2$，又因为 $\phi(0)=4$，而 $\phi(x)$ 在 $[\mu_1,\mu_2]$ 上连续，在 (μ_1,μ_2) 内可导，因此最大值在点 $\xi\in(\mu_1,\mu_2)$ 取得，且 $\phi'(\xi)=0$.

若 $h(\xi)=0$，则 $\phi(\xi)=[f'(\xi)]^2+[f(\xi)]^2=[f(\xi)]^2\leq 1\leq\phi(0)$，这与 ξ 为最大值点矛盾，因此 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

注 2.14. 事实上，本题题干条件 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$ 已经暗示了辅助函数的形式，做题中应该灵活运用.

例 2.37. 设 $f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续一阶偏导数，且 $|f(x,y)|\le 1$，求证在单位元内至少有一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right]^2<16.$$

构造辅助函数

$$g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$$

则 $g(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，因此存在最小值，因为 $g(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上有 $g(x,y)=f(x,y)+2\ge 1$；在点 $(0,0)$ 有 $g(0,0)=f(0,0)\le 1$，所以 $g(x,y)$ 圆域 $x^2+y^2<1$ 内存在最值点 (x_0,y_0)，且

$$g'_x(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)+4x=0$$
$$g'_y(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)+4y=0$$

因此

$$[f'_x(x_0,y_0)]^2+[f'_y(x_0,y_0)]^2=16x^2+16y^2=16\cdot(x^2+y^2)<16.$$

4. 利用介值定理

例 2.38. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续一阶导数，且 $f(0)=0$，试证至少存在一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

法一：最值定理 + 介值定理

因为 $f(0)=0, f(x)$ 有连续导函数，则在 $[0,1]$ 上 $f'(x)$ 取得最大值 M 与最小值 m，因为 $f(x)=f(x)-f(0)=f(\eta)x$，所以 $m\le f'(\eta)\le M$，因此 $mx\le f'(\eta)x\le Mx$，因此 $m=2m\int_0^1 x\mathrm{d}x\le 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le 2M\int_0^1 x\mathrm{d}x=M$，即 $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\in[m,M]$，由介值定理可知，存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

法二：罗尔定理

构造辅助函数 $\phi(x)=f(x)-2x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\phi(0)=0, \int_0^1\phi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，所以存在 $x\in(0,1)$ 使得 $\phi(c)=0$，所以存在 $\xi\in(0,c)$ 使得 $\phi'(xi)=f'(\xi)-2\xi\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

法三：泰勒公式

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2}F''(\xi)x^2=\frac{1}{2}F''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f'(\xi)x^2$，令 $x=1$ 则 $F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f'(\xi)$，因此 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

法四：牛顿莱布尼兹公式 + 积分中值定理

因为 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，所以 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，交换积分次序有 $I=\int_0^1\mathrm{d}t\int_t^1 f'(t)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)f'(t)\mathrm{d}t=f'(\xi)\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot f'(\xi)$，所以 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

例 2.39. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，$(a,b]$ 内存在一点 c 使得 $f'(c)=0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

2.5.2 B. 证明存在两个中值点 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $F[\xi,\eta,f(\xi),f(\eta),f'(\xi),f'(\eta)]=0$

1. 不要求 $\xi\neq\eta$. 解题思想如下：

1. 应该在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日或柯西中值定理）；
2. 一般对只含有抽象函数的变量（如 ξ）求拉格朗日中值定理；
3. 对含有具体函数的变量（如 η）求柯西中值定理；
4. 以抽象函数的差（如 $f(b)-f(a)$）为桥梁，结合两中值定理的结果，得到所证.

例 2.40. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，且 a,b 同号，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

因为
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$
以及
$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},$$
所以
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\cdot(b^2-a^2)$$
所以
$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

例 2.41. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

只需证明 $e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=e^\xi$，因为 $e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=[e^\eta f(\eta)]'$ 所以令 $g(x)=e^x f(x)$，则
$$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)],$$
又因为
$$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi,$$
所以
$$e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=e^\xi.$$

2. 要求 $\xi \neq \eta$. 解题思想为

1. 应该将 $[a,b]$ 分成两个子区间 $[a,c],[c,b]$;
2. 在两个子区间上分别使用拉格朗日中值定理;
3. 以题设条件为桥梁，结合中值定理的结果，从而将问题转化为 c 的存在性问题（即根的存在性问题）.

例 2.42. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在两个不同的点 $\xi, \eta \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

将 $[0,1]$ 分成两个子区间 $[0,c],[c,1]$，分别使用拉格朗日中值定理:

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi)=\frac{f(c)}{c},$$

以及

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta)=\frac{1-f(c)}{1-c},$$

因此只需证明存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{1-f(c)}{1-c}=1,$$

即存在 $c \in (0,1)$ 使得 $-f^2(c)+f(c)-c\cdot(1-c)=0$, 所以 $f(c)=c$ 或 $f(c)=1-c$, 令 $g(x)=f(x)+x-1$, 因此 $g(0)=-1<0, g(1)=1>0$，因此存在 $c \in (0,1)$ 使得 $f(c)=1-c$.

例 2.43. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证对任意正数 a, b，存在互不相同的点 $\xi, \eta \in (0,1)$，使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

将 $[0,1]$ 分成两个子区间 $[0,c],[c,1]$，分别使用拉格朗日中值定理:

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi)=\frac{f(c)}{c},$$

以及

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta)=\frac{1-f(c)}{1-c},$$

因此只需证明存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a\cdot\frac{c}{f(c)}+b\cdot\frac{1-c}{1-f(c)}=a+b.$$

，令 $\delta = \frac{a}{a+b}$ 存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$\frac{\delta c}{f} + \frac{(1-\delta)\cdot(1-c)}{1-f} = 1,$$

即 $f^2 - (\delta + c) + \delta c = (f-c)\cdot(f-\delta) = 0$，因此 $f(c) = \frac{a}{a+b}$ 或 $f(c) = c$，因为 $0 < \frac{a}{a+b} < 1$，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$，因此存在 $c \in (0,1)$ 使得 $f(c) = \frac{a}{a+b}$.

注 2.15. 最后一步证明

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{f(c)} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-c}{1-f(c)} = 1$$

中 c 的存在性一般由两种视角：

1. $f(c) = c$，因此

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{f(c)} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-c}{1-f(c)} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1,$$

2. $f(c) = \frac{a}{a+b}$，因此

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{f(c)} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-c}{1-f(c)} = c + (1-c) = 1.$$

一般后者是解题的关键.

3. 参数化. 使一个中值点参数化，从而转化为单中值问题:

例 2.44. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi, \eta \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = g'(\xi)\cdot[f(\eta) - f(\xi)]$.

要证 $f'(\xi) = g'(\xi)\cdot[f(\eta) - f(\xi)]$ 即 $f'(\xi) + g'(\xi)\cdot[f(\xi) - f(\eta)] = 0$，即 $[f'(\xi) - f'(\eta)] + g'(\xi)\cdot[f(\xi) - f(\eta)] = 0$，所以构造辅助函数：$\phi(x) = e^{g(x)}\cdot[f(x) - f(\eta)]$，则 $\phi(\eta) = 0$，只需证明存在一点 ξ 使得 $\phi(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = f(\eta)$ 即可.

因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$，分离区间有

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

由积分中值定理可知

$$\frac{2}{3}\cdot f(\mu_1) = \frac{2}{3}\cdot f(\mu_2),$$

其中 $\mu_1 \in (0, \frac{2}{3}), \mu_2 \in (\frac{2}{3}, 1)$，令 $\mu_1 = \xi, \mu_2 = \eta$，则 $\phi(\xi) = \phi(\eta) = 0$，则由罗尔定理可证 $f'(\xi) + g'(\xi)\cdot[f(\xi) - f(\eta)] = 0$.

4. 辅助原函数法（证明 $F(x)$ 有三个根）． 由罗尔定理可知 $f(x)$ 有两个根.

例 2.45. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = 0$，证明至少存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = 0$，即 $F(b) = F(a)$，因为

$$\begin{aligned}
\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}F(x) = xF(x)|_a^b - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \\
&= bF(b) - aF(a) - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \\
&= (b-a)F(a) - (b-a)F(\xi) \\
&= (b-a)[F(a) - F(\xi)] = 0
\end{aligned}$$

所以 $F(a) = F(b) = F(\eta)$，所以至少存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

2.5.3 C. 证明存在一个中值点 $\xi \in (a,b)$，使 $F[\xi, f^{(n)}(\xi)] \geq 0, (n \geq 2)$

用带拉格朗日余项的泰勒公式，并在提供函数值和导数值信息多的点展开，尤其是导数值. 一般有两种展开形式：

1. 单点展开

   一般在区间内部某点展开，题干中会给出这一点相应的导数值（可能间接给出如通过费马定理、中值定理等条件），单点展开后将端点值分别代入；

2. 两点展开

   一般在区间两端点分别展开，并将区间内某点代入，构造题干条件，由此证明该点的存在性，这是方程根的问题.

例 2.46. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0) = f(1) = 0, \min_{0\leq x\leq 1} f(x) = -1$，证明 $\max_{0\leq x\leq 1} f''(x) \geq 8$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $\min_{0\leq x\leq 1} f(x) = -1$，设最小值点为 c，则 $f(c) = -1, f'(c) = 0$，在该点展开有

$$f(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-c)^2 = -1 + \frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-c)^2.$$

分别代入 $x=0$ 与 $x=1$，则

$$f(0) = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot c^2$$

以及

$$f(1) = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2} \cdot (1-c)^2$$

因此

$$\begin{aligned} f''(\xi_1) &= \frac{2}{c^2}, & \xi_1 \in (0,c), \\ f''(\xi_2) &= \frac{2}{(1-c)^2}, & \xi_2 \in (c,1), \end{aligned}$$

若 $c \le \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1) > 8$，若 $c \ge \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_2) > 8$，即 $\max_{0\le x\le 1} f''(x) \ge 8$.

例 2.47. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$. 求证存在 $\xi \in (a,b)$，使 $|f''(\xi)| \ge 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

在端点展开有

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(x-a)^2,$$
$$f(x) = f(b) + f'(b)\cdot(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(x-b)^2,$$

设存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(c-a)^2,$$
$$f(c) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(c-b)^2,$$

因此

$$f(b)-f(a) = -\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(c-b)^2 + \frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(c-a)^2$$

即

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \le \frac{|f''(\xi_2)|}{2}\cdot\frac{(c-b)^2}{(b-a)^2} + \frac{|f''(\xi_1)|}{2}\cdot\frac{(c-a)^2}{(b-a)^2}$$

令 $|f''(\xi)| = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}, s=\frac{(b-c)}{(b-a)}$，则 $0<s<1$，因此

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \le |f''(\xi)|\cdot[s^2+(1-s)^2]$$

令 $s=\frac{1}{2}$，则

$$4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \le |f''(\xi)|$$

注 2.16. c 点一般为 (a,b) 中点.

例 2.48. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，$|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$，证明：$|f'(x)|\le 2$.

在 $[0,2]$ 内某点 c 展开有：

$$f(0) = f(c) + f'(c)\cdot(c-0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(c-0)^2$$
$$f(2) = f(c) + f'(c)\cdot(c-2) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(c-2)^2$$

两式相减有：

$$f(0)-f(2)=2f'(c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(c-0)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(c-2)^2$$

所以

$$\begin{aligned}
f'(c)&=\frac{f(0)-f(2)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(c-2)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot(c-0)^2\right]\\
&\le\frac{|f(0)|+|f(2)|}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(c-2)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot c^2\right]\\
&\le 1+\frac{1}{4}\cdot[(c-2)^2+c^2]\\
&=1+\frac{1}{2}\cdot[(c-1)^2+1]\le 2.
\end{aligned}$$

注 2.17. 由题干可知，欲证 $f'(x),x\in[0,2]$ 的性质，若用两点展开，则无法得到该式.

例 2.49. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0,M=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$，

1. 证明 $\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}M(b-a)^2$；

2. 证明 $\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\le\frac{1}{2}M(b-a)$.

1. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最小值 m 与最大值 M，若 $m=M=0$，则 $f(x)\equiv 0$，此时成立，若 $m\ne M$，设 $|m|<|M|$ 且 $f(c)=M$，此时 $\max_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(c)|,f'(c)=0$，则

$$\begin{aligned}
f(a)&=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2\\
f(b)&=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
0&=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2\\
0&=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b}|f(x)|&=|f(c)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(a-c)^2\le\frac{1}{2}M(a-c)^2\\
\max_{a\le x\le b}|f(x)|&=|f(c)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(b-c)^2\le\frac{1}{2}M(b-c)^2
\end{aligned}$$

若 $c\le\frac{a+b}{2}$，则由上式有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}M(a-c)^2\le\frac{1}{8}M(b-a)^2$$

若 $c>\frac{a+b}{2}$，则由下式有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}M(b-c)^2\le\frac{1}{8}M(b-a)^2$$

综上 $\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}M(b-a)^2$.

对于 $\forall x \in (a,b)$ 有

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2$$
$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2$$

所以

$$f'(x)(a-c) = -f(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2$$
$$f'(x)(b-c) = -f(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2$$

所以

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|-\frac{f(x)}{a-c} + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)\right| \le \left|\frac{f(x)}{a-c}\right| + \frac{1}{2}M\left|a-c\right| \\
&\le \frac{1}{8}M(b-a)^2\frac{1}{|a-c|} + \frac{1}{2}M\left|a-c\right| \\
|f'(x)| &= \left|-\frac{f(x)}{b-c} + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(b-c)\right| \le \left|\frac{f(x)}{b-c}\right| + \frac{1}{2}M\left|b-c\right| \\
&\le \frac{1}{8}M(b-a)^2\frac{1}{|b-c|} + \frac{1}{2}M\left|b-c\right|
\end{aligned}$$

若 $c \le \frac{a+b}{2}$，则由上式有

$$|f'(x)| \le \frac{1}{8}M(b-a)^2\frac{1}{|a-c|} + \frac{1}{2}M\left|a-c\right| \le \frac{1}{4}M\left|b-a\right| + \frac{1}{4}M\left|b-a\right| = \frac{1}{2}M\left|b-a\right|$$

若 $c > \frac{a+b}{2}$，则由下式有

$$|f'(x)| \le \frac{1}{8}M(b-a)^2\frac{1}{|a-c|} + \frac{1}{2}M\left|a-c\right| \le \frac{1}{4}M\left|b-a\right| + \frac{1}{4}M\left|b-a\right| = \frac{1}{2}M\left|b-a\right|,$$

由 x 的任意性可知 $\max_{a\le x\le b}|f'(x)| \le \frac{1}{2}M(b-a)$.

3 导数在经济学中的应用

3.1 经济学中的常见函数

1. 需求函数：$x = \phi(p)$，其中 x 为某件产品的需求量，p 为价格；
2. 价格函数：$p = \phi^{-1}(x)$，价格函数是需求函数的反函数；
3. 供给函数：$x = \psi(p)$，其中 x 为某件产品的供给量，p 为价格；
4. 成本函数：$C = C(x) = C_1 + C_2(x)$，其中 C_1 为固定成本，C_2 为变动成本；
5. 平均成本：$AC = \frac{C}{x} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2(x)}{x}$.
6. 收益函数：$R(x) = p \cdot x$，其中 x 为某件产品的销售量，p 为价格；
7. 利润函数：$L(x) = R(x) - C(x)$ 其中 x 为某件产品的销售量.

3.2 边际分析与弹性分析

设 $f(x)$ 可导，则经济学中称 $f'(x)$ 为边际函数.$f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的**边际值**. 经济学中常见的边际分析如下：

1. 边际成本：设成本函数为 $C = C(x)$（x 为产量），则边际成本函数为 $MC = C'(x)$；
2. 边际收益：设收益函数为 $R = R(x)$（x 为产量），则边际收益函数为 $MR = R'(x)$；
3. 边际利润：设利润函数为 $L = L(x)$（x 为销量），则边际利润函数为 $ML = L'(x)$.

设 $f(x)$ 可导，则称 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$ 为函数 $f(x)$ 由 x 变到 $x + \Delta x$ 时的**相对弹性**，称

$$\eta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = f'(x)\frac{x}{y} = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

为函数 $f(x)$ 的弹性函数. 它在经济学中表示函数 $f(x)$ 在 x 处的相对变化率.

经济学中常见的弹性分析如下：

1. 需求弹性分析：设需求函数为 $Q = \phi(p)$，则需求的价格弹性为 $\eta_D = \phi'(p)\frac{p}{\phi(p)}$. 由于 $\phi(p)$ 单调减少，因此 $\phi'(p) < 0$，即 $\eta_D < 0$.

   经济学中对需求价格弹性的解释是：当价格为 p 时，若提价（降价）1%，则需求将减少（增加）$|\eta_D|\%$.

   有些试题中规定需求价格弹性为正，此时需求价格弹性公式为

   $$\eta_D = -\phi'(p)\frac{p}{\phi(p)}.$$

2. 供给弹性分析：设供给函数为 $Q = \psi(p)$，则需求的价格弹性为 $\eta_S = \psi'(p)\frac{p}{\psi(p)}$. 由于 $\psi(p)$ 单调增加，因此 $\psi'(p) > 0$，即 $\eta_S > 0$.

   经济学中对供给价格弹性的解释是：当价格为 p 时，若提价（降价）1%，则供给将增加（减少）$\eta_S\%$.

注 3.1. 边际分析对量；弹性分析对价.

例 3.1. *一栋商品房售价 5000 万元，分期付款 10 年付清，每年付款额相同（连续均匀现金流），贴现率为 4% 按连续复利，则每年应付款为*（$e^{-4} \approx 0.6703$）

易知

$$5000 = C \cdot \int_0^{10} e^{-4\% t} \mathrm{d}t = \frac{C}{4\%} \cdot \left[1 - e^{-4}\right]$$

所以 $C = 606.61$