线性代数基本概念与方法: 向量组与线性方程组

Collection of Linear Algebra Tips:

Vector Systems and Linear Equations

王浩铭

2018 年 · 春

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等代数 *I* 期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Linear Algebra (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误, 请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 线性相关与线性无关

1.1 线性相关

对于 n 维向量 α_i：

1. α_1 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = \theta$；
2. α_1, α_2 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 成比例；
3. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n| = 0$；
4. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) < m$.
5. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.
6. n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$，若 $m > n$，则此向量组必然线性相关 ($r(A) \leq \min\{m, n\} = n < m$)；事实上 $\mathbb{R}^n$ 中的任意 $n+1$（或更多）个向量组成的向量组必然线性相关；
7. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中部分向量线性相关，则此向量组线性相关.
   - 推论：若一个向量组线性无关，则其任意一个部分向量组也线性无关.
   - 推论：任意一个包含零向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ...\theta, ..., \alpha_m$ 一定线性相关：

   $$\theta = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + k\theta + \cdots + 0\alpha_m;$$

8. 设 l 为列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}^l$ 与 s 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{R}^s$. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，则 $l+s$ 维接长向量组：

   $$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i},\ (i = 1, 2, ..., m)$$

   也线性无关.

   - 推论：若向量组线性相关，则截短向量组也线性相关.

例 1.1. 若 $\alpha_1 = [1, 3, 4, -2]^T, \alpha_2 = [2, 1, 3, t]^T, \alpha_3 = [3, -1, 2, 0]^T$ 线性相关，求 t

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2(t+4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$，所以 $t = -1$.

例 1.2. 若 $\alpha_1=[1,2,3,1]^T,\alpha_2=[1,1,2,-1]^T,\alpha_3=[2,6,a,5]^T,\alpha_4=[3,4,7,-1]^T$ 线性相关，求 a

$$
\begin{aligned}
|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & a & 7 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & a-6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & a-6 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

所以对于任意 a，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

例 1.3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，$\alpha=a,1,1^T$，易知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，求 a.

因为 $A\alpha=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{bmatrix}$，所以 $\frac{a}{a}=\frac{2a+3}{1}=\frac{3a+4}{1}$，即 $a=-1$.

1.2 线性无关的判定

有三种常用方法:

1. 定义法

   非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta \tag{1}$$

   只有零解，由此形成两种思路:

   - 重组法

     即重组得到以 k_i 为变量的方程组，证明该方程组只有零解.

   - 同乘法

     第一步：若已知 $A\alpha_i=a_i\alpha_i+b_i\alpha_j$，则对式（1）左乘 A 或 A' 的变形，从而构造出 α_i 的新的和式:

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i\alpha_i+b_i\alpha_j)=\theta \tag{2}$$

     其中 A' 的选择原则是使 $A'\alpha_i$ 后的形式尽量简洁，或者出现零向量.

     第二步：利用式（1）与式（2）化简消去一些项得到

$$\sum_{i=1}^{m'}c_i\alpha_i=\theta \tag{3}$$

第三步：继续对式（3）左乘 A 或 A 的变形 A'，直至其中只有一个向量 $k_s\alpha_s=\theta$，因为 $\alpha_s\neq\theta$，从而 $k_s=0$，继而推出 $k_i=0$.

注意：第二、三步中，还可以利用题目给出的去其他性质进行化简. 必须强调 α_i 是非零向量.

2. 利用秩

- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$
- $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$
- 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$
- 若 $A_{m\times n},B_{n\times s}$ 有 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\leq n$

3. 反证法

例 1.4. 设 $A^{m-1}\alpha\neq\theta,A^m\alpha=\theta$，证明 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

对式

$$k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=\theta$$

左乘 A^{m-1}，则

$$k_1A^{m-1}\alpha+k_2A^m\alpha+k_3A^{m+1}\alpha+\cdots+k_mA^{2m-2}\alpha=k_1A^{m-1}=\theta$$

因为 $A^{m-1}\neq\theta$，所以 $k_1=0$，类似的 $k_i=0$，因此 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

例 1.5. 若 $A\alpha_1=\alpha_1\neq 0,A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关.

对式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$$

左乘 A，则

$$\begin{aligned}k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3&=k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)\\&=(k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta\end{aligned}$$

两式相减有

$$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=\theta$$

左乘 A，则

$$\begin{aligned}k_2A\alpha_1+k_3A\alpha_2&=k_2\alpha_1+k_3(\alpha_1+\alpha_2)\\&=(k_2+k_3)\alpha_1+k_3\alpha_2=\theta\end{aligned}$$

减上式有 $k_3\alpha_1=\theta$，因为 $\alpha_1\neq 0$，所以 $k_3=0$，从而 $k_2=k_1=0$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关.

例 1.6. 设 α_1,α_2 是 A 分数不同特征值 $-1,1$ 的特征向量，且 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关.

对式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$$

左乘 A，则

$$\begin{aligned}k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3&=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)\\&=-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta\end{aligned}$$

两式相减有

$$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=\theta$$

因为 α_1,α_2 是 A 分数不同特征值 $-1,1$ 的特征向量, 所以 α_1,α_2 无关且 α_1,α_2 非零, 即 $k_1=k_3=0$, 从而 $k_2=0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关.

例 1.7. 已知 *3* 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 β_1,β_2,β_3 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，设

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C$$

证明：β_1,β_2,β_3 线性无关 $\Leftrightarrow |C|\neq 0$.

记 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3],A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$
$\Leftarrow$
因为 $|C|\neq 0$，所以 $r(B)=r(A)=3$，所以 β_1,β_2,β_3 线性无关.
$\Rightarrow$
若 β_1,β_2,β_3 线性无关，则 $r(B)=3$，因此

$$3=r(B)=r(AC)\leq r(C)\leq 3$$

则 $r(C)=3$，从而 $|C|\neq 0$.

注 1.1. 即初等列变换不改变向量组的秩.

例 1.8. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明 $3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关.

法一：定义重组法
设

$$k_1(3\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(4\alpha_3-5\alpha_1)=\theta$$

即

$$(3k_1-5k_3)\alpha_1+(2k_1+k_2)\alpha_2+(-k_2+4k_3)\alpha_3=\theta$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} 3k_1-5k_3=0 \\ 2k_1+k_2=0 \\ -k_2+4k_3=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}=22\neq 0$, 所以齐次方程组仅有零解, 即 $k_1=k_2=k_3=0$, 所以 $3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关.

法二：利用秩

设 $\beta_1=3\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=4\alpha_3-5\alpha_1$，则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

因为 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆, 所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, 所以 $3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$ 线性无关.

例 1.9. 设 *4* 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且与 *4* 维非零列向量 β_1,β_2 正交，证明

1. β_1,β_2 线性相关

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性无关.

1. 记 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)^T$，则

$$A(\beta_1,\beta_2)=\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}(\beta_1,\beta_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=O$$

所以 $r(A)+r(B)\leq 4$，即 $r(B)\leq 4-r(A)=1$，因此 β_1,β_2 线性相关.

2. 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k\beta_1=\theta$$

所以

$$k_1\beta_1^T\alpha_1+k_2\beta_1^T\alpha_2+k_3\beta_1^T\alpha_3+k\beta_1^T\beta_1=k\beta_1^T\beta_1=\beta_1^T\theta=\theta$$

因为 $\beta_1\neq\theta$，所以 $k=0$，因此 $k_1=k_2=k_3=k=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性无关.

例 1.10. A 是 n 阶正定矩阵，n 为非零列向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 满足 $\alpha_i^TA\alpha_j=0(i\neq j)$，证明 $\alpha_i,\cdots,\alpha_s$ 无关.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，则存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$，因此

$$k_1A\alpha_1+\cdots+k_sA\alpha_s=A\theta=\theta$$

左乘 α_i^T 有

$$k_1\alpha_i^TA\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_i^TA\alpha_s=\alpha_i^T\theta=k_i\alpha_i^TA\alpha_i=\theta$$

因为 A 正定，所以 $\alpha_i^TA\alpha_i>0$，所以 $k_i=0$，由 i 的任意性可知矛盾，因此 $\alpha_i,\cdots,\alpha_s$ 无关.

2 向量组间关系

2.1 线性表示

2.1.1 A. 已知坐标向量

若已知向量的坐标而要判断是否能线性表出的问题，通常转换为非齐次线性方程组是否有解的讨论，利用的工具是增广矩阵的阶梯型，对此有几种讨论，设 $a,b,c\neq 0$

1. $\left[\begin{array}{ccc|c} a & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b & \cdot & \cdot \\ & & x & 0 \end{array}\right]$ 若 $x=0$，则有无穷解；若 $x\neq 0$，则有唯一解；

   在这种情况下，非齐次方程组是否有界的问题（即向量组能否线性表出的问题）不在于增广矩阵阶梯型的最后一行，应该往上追溯讨论.

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} a & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b & \cdot & \cdot \\ & & 0 & y \end{array}\right]$ 若 $y=0$，则有无穷解；若 $y\neq 0$，则无解；

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} a & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b & \cdot & \cdot \\ & & c & y \end{array}\right]$ 有唯一解；

例 2.1. 设 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论 a,b 为何值时

1. β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

2. β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示

3. β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不唯一线性表示

因为

$$[A,\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{array}\right]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{array}\right]$$

1. 若 $a=0$，对任意 b 有

   $$[A,\beta]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{array}\right]$$

   所以方程组 $Ax=\beta$ 无解，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

2. 若 $a\neq 0$，则方程组有解，若 $a\neq b$，则 $r(A)=r(A,\beta)=3$，方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示

3. 若 $a=b\neq 0$，则 $r(A)=r(A,\beta)=2$，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不唯一线性表示

例 2.2. 确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T,\beta_2=(-2,a,4)^T,\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

法一：方程组增广矩阵法

因为

$$(A,B)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&-3(a-1)&-(a-1)^2\end{array}\right]$$

若 $a\neq -2$ 且 $a\neq 4$，则 $r(A|B)=r(A)=3$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 表示.

又因为

$$(B,A)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{array}\right]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&(1-a)(a+2)&0&3a+6&4a+2\end{array}\right]$$

但 $a=1$ 或 $a=-2$ 时 $r(B|A)>r(B)$ 向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示由题干可知 $a\neq -2$，则 $a=1$.

法二：利用秩的性质

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 表示；β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，所以

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\leq 3$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3,|A|=0$.

因为

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2=0$$

所以 $a=-2$ 或 $a=1$，易知 $a=-2$ 则

$$r(A)=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}=2$$
$$r(B)=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{bmatrix}=2$$

与 $r(A)<r(B)$ 矛盾，所以 $a=1$.

注 2.1. 对于 n 维含有参数 a 的实对称矩阵$A(a)$ 而言，若 $a=a'$ 是 $|A(a)|$ 的 k 重根，则说明 $\lambda=0$ 是 $A(a')$ 的 k 重特征值，即 $A(a')x=\theta$ 的基础解系的秩为 k 从而 $r(A(a'))=n-k$.

2.1.2 B. 抽象向量

1. 定义法

   - 证明 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示的，需要证明定义式

     $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m+k\beta=\theta$$

     中 $k\neq 0$，常利用反证法，即若 $k=0$ 则矛盾；
   - 证明 β 不可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示的，常利用反证法，即若 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示则矛盾；

2. 利用向量组秩的相关性质

   - 若 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$
   - 若 β 不可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)+1$
   - $r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1})\leq r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1})+1$

   通过上述性质，构造夹逼不等式关系，从而证明

3. 几何法（常用于选择题）

例 2.3. 证明：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表示，且表示式唯一.

法一：定义法：

设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m+k\beta=\theta$$

其中 $k_1,k_2,...,k_m,k$ 不全为 0，则 $k\neq 0$，否则矛盾，因此

$$\begin{aligned}\beta&=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2+\cdots-\frac{k_m}{k}\alpha_m\\&\triangleq j_1\alpha_1+j_2\alpha_2+...+j_m\alpha_m\end{aligned}$$

设

$$\beta=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+...+h_m\alpha_m$$

则

$$(j_1-h_1)\alpha_1+(j_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(j_m-h_m)\alpha_m=\theta$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，所以 $j_i-h_i=0$，因此表示式唯一.

法二：秩法：

因为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 所以

$$m=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=m$$

即 $r(A|\beta)=r(A)=m$，所以表示式唯一.

例 2.4. 证明：

1. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\leq r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$
2. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，且 $m>s$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性相关.（即，若多数向量可以被少数向量线性表示，则多数向量相关）
3. 若向量组向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，且可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，则 $m\leq s$.
4. 若两个线性无关的向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\approxeq(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$ 则 $s=m$.

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，所以

$$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)=r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$$

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，且 $m>s$，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)=r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)\leq s<m$$

3. 2 的逆否命题

4. 两个线性无关的向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \approxeq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)$ 则

$$m = r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \leq r(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s) = s$$

且

$$s = r(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = m$$

因此 $s = m$.

例 2.5. 设 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 表示，但 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示，判断并证明：

1. α_m 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}, \beta$ 表示？

2. α_m 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示？

法一：定义法

1. 因为 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 表示，所以存在一组数 $k_1, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = \beta$$

且 $k_m \neq 0$，否则因为 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示可知矛盾，因此

$$\alpha_m = -\frac{1}{k_m}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + \beta)$$

因此 α_m 能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}, \beta$ 表示

2. 设 α_m 能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示，即存在一组数 $h_1, h_2, \cdots, h_{m-1}$ 使得

$$\alpha_m = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_{m-1}\alpha_{m-1}$$

所以

$$\begin{aligned}\beta &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m \\ &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m(h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_{m-1}\alpha_{m-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1}(k_i - k_m h_i)\alpha_i\end{aligned}$$

因为 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示，所以矛盾，因此 α_m 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示

法二：秩法（重要）：

因为 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 表示，但 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ 表示，所以

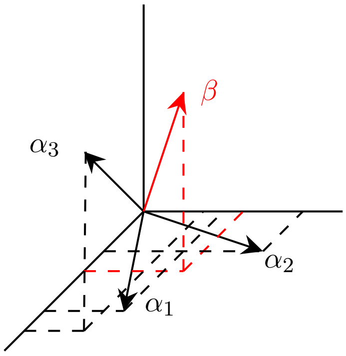
$$\begin{aligned}r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}, \beta) &\leq r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \\ &\leq r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}) + 1 = r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}, \beta)\end{aligned}$$

因为 $r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1},\beta)$，所以 α_m 能由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1},\beta$ 表示

因为 $r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1})+1=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$，所以 α_m 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1}$ 表示

法三：几何法（仅用于选择题）

考虑 $m=3$，因为 β 不可由 α_1,α_2 表示，因此 β 不在 α_1,α_2 张成的平面中；因为 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 表示，因此 β 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 张成的平面中，因此 α_3 可以由 α_1,α_2,β 表示，不可由 α_1,α_2 表示.



例 2.6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可以由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 表示，且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r$，证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 表示.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可以由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 表示，所以

$$r=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 表示.

2.2 极大无关组

1. 概念：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的子向量组 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$，若满足一下两个条件：

   (a) $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性无关

   (b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任何一个向量都可以被 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性表示

   则称 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大无关组, 极大无关组中向量组的个数称为向量组的秩.

2. 极大无关组的性质：

   (a) 任何一个向量组与其极大无关组等价；

   (b) 一个向量组的任意两个极大线性无关组（如果有的话）等价；

   (c) 一个向量组的任意两个极大线性无关组（如果有的话）中的向量个数相同；

3. 初等行变换不改变向量组的线性相关关系，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与 $(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 有相同线性相关关系指：

   (a) $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=r(\beta_1,\cdots,\beta_m)$

   (b) $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的部分组线性无关的充要条件是 $(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 的部分组线性无关

   (c) $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的某个向量可以由部分组线性表示的充要条件是 $(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 的对应向量可以由对应部分组线性表示

例 2.7. 设 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 和 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{js}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组，证明 $s=r$.

因为 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{js}$ 可以由 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 表示，若有 $s\le r$；同理 $s\ge r$，因此 $s=r$.

例 2.8. 设 A 为向量组 $\alpha_1=[1+a,1,1,1]^T,\alpha_2=[2,2+a,2,2]^T,\alpha_3=[3,3,3+a,3]^T,\alpha_4=[4,4,4,4+a]^T$，问 a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，求一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示.

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&0a\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=(a+10)a^3$$

因此当 $a=-10,a=0$ 时 A 的列向量线性相关，当 $a=0$ 时 $r(A)=1$，α_1 为其一个极大无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$；

当 $a=-10$ 时 $r(A)=3$ 对 A 进行初等行变换有

$$A=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}=B$$

所以 β_2,β_3,β_4 为 B 的一个极大无关组，且 $\beta_1=-(\beta_2+\beta_3+\beta_4)$，因此 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 A 的一个极大无关组，且 $\alpha_1=-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$.

例 2.9. 证明：若 $r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ 则 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示.

设 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的极大无关组，因此 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 的部分组，因为 $r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)=r$ 所以 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 的极大无关组，因此 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 表示

2.3 向量组和矩阵的秩

矩阵、向量组、方程组是三个相通的概念：

$$
\begin{aligned}
&Ax=\beta\\
&\Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\\
&=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}
\end{aligned}
$$

在证明矩阵的秩的时候有三种思路：利用矩阵秩的定义即子式行列式、利用方程组解集的关系、利用向量组的线性相关性

1. 矩阵秩的定义 $\to$ 行列式

   若矩阵 A 有一个 r 阶子式 D 不为 0，而所有高于 r 阶的子式均为 0，则称 D 为 A 的最高阶非零子式，称其阶数 r 为矩阵 A 的秩，记为 $r(A)$.

   有如下性质：

   - 零矩阵没有非零子式，因此规定零矩阵的秩为 0；
   - $0\le R(A)\le\min\{m,n\}$；
   - 因为 A 的一个 k 阶子式的转置也是 A 的转置的一个 k 阶子式，因此 $R(A)=R(A^T)$；
   - 由行列式按行（列）展开定理可知，如果矩阵 A 的全部 $r+1$ 阶子式均为 0，则其所有更高阶子式也均为 0. 因此若矩阵 A 有一个 r 阶子式 D 不为 0，而所有 $r+1$ 阶子式均为 0，则矩阵 A 的秩就是 r.
     - n 阶矩阵 A，$|A|=0\Leftrightarrow r(A)<n$

  - $\underline{\text{若 } A \text{ 中存在某一 } k \text{ 阶子式 } D_k \neq 0 \text{ 则 } r(A) \geq k}$

- 矩阵 A 与其伴随矩阵 A^* 有如下关系：

$$\begin{cases} R(A) = n \Rightarrow R(A^*) = n; \\ R(A) = n-1 \Rightarrow R(A^*) = 1; \\ R(A) = n-2 \Rightarrow R(A^*) = 0. \end{cases}$$

2. 矩阵 $\to$ 方程组解集的关系

   利用方程组证明矩阵的秩需要注意：

   - 若 x_1 是 $Ax = \theta$ 的解 $\Rightarrow x_1$ 是 $Bx = \theta$ 的解，则 $r(\ker(A)) \leq r(\ker(B)) \Rightarrow r(A) \geq r(B)$.
   - 若 x_1 是 $Ax = \theta$ 的解 $\Leftrightarrow x_1$ 是 $Bx = \theta$ 的解，则 A, B 有相同的线性相关关系.

3. 矩阵 $\to$ 向量组线性相关性

   利用向量组证明矩阵的秩需要注意：

   - 若 A 的列向量可以由 B 的列向量线性表示，则 $r(A) \leq r(B)$
   - 矩阵 B 右乘矩阵 A，相当于以 B 的每一列对 A 的列向量做线性变换，因此 AB 的列向量可以由 A 的列向量线性表示
   - 矩阵 A 左乘矩阵 B，相当于以 A 的每一行对 B 的行向量做线性变换，因此 AB 的行向量可以由 B 的行向量线性表示.
   - 截短向量组无关，则接长向量组无关

     证明. $n = r(A_{m\times n}) \leq r\begin{pmatrix} A_{m\times n} \\ B_{s\times n} \end{pmatrix} \leq n$，所以 $r\begin{pmatrix} A_{m\times n} \\ B_{s\times n} \end{pmatrix} = n$. □

   - 若向量组线性无关，则部分向量组也线性无关.
   - 记牢：$A, B, AB, A+B, A|B$ 的线性表示关系.

关于矩阵与向量组的秩有以下结论：

1. $A = A_{m\times n} \Rightarrow r(A) \leq \min\{m, n\}$

2. $A = \alpha\beta^T \Leftrightarrow r(A) = 1$.

   证明. $\Rightarrow$

   因为 $0 < r(A) = r(\alpha\beta^T) \leq \min\{r(\alpha), r(\beta^T)\} = 1$，所以 $r(A) = r(\alpha\beta^T) = 1$.

   $\Leftarrow$

   因为 $r(A) = 1$，所以 A 列向量的极大无关组向量个数为 1，记 γ_i 为极大无关组，即 $A = (k_1\gamma_i, k_2\gamma_i, \cdots, k_n\gamma_i) = \gamma_i(k_1, k_2, ..., k_n) = \alpha\beta^T$. □

3. $r(A) = r(A^T)$;

4. $r(A^TA)=r(A)$;

证明. 若 $AX_1=\theta$，则 $A^TAX_1=A^T\theta=\theta$，所以 $r(A)\geq r(A^TA)$；

若 $A^TAX_2=\theta$，则 $X_2^TA^TAX_2=\theta=(AX_2)^T(AX_2)=\theta\Rightarrow AX_2=\theta$，所以 $r(A^TA)\geq r(A)$，因此 $r(A^TA)=r(A)$. 更多的，A^TA 与 A 有相同的线性相关关系. □

5. 当 $k\neq 0$ 时，$r(kA)=r(A)$;

6. $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;

证明. 设 A 列向量的极大无关组为 A_1, B 列向量的极大无关组为 B_1, 则 $A+B$ 可以由 $(A_1|B_1)$ 线性表示，因此

$$r(A+B)\leq r(A_1|B_1)\leq r(A_1)+r(B_1)=r(A)+r(B).$$

□

7. $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$;

证明. AB 的列向量能被 A 的列向量线性表示，因此 $r(AB)\leq r(A)$；AB 的行向量能被 B 的行向量线性表示，因此 $r(AB)\leq r(B)$. □

8. 若 A 可逆（或满秩），则 $r(AB)=r(BA)=r(B)$

证明.

$$\begin{aligned} r(AB)\leq r(B)&=r(EB)=r(A^{-1}AB)\leq r(AB)\\ &=r(BE)=r(BAA^{-1})\leq r(BA)\end{aligned}$$

所以 $r(AB)=r(BA)=r(B)$ □

9. $\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A|B)\leq r(A)+r(B)$;

证明. 第二个不等号已证，现证第一个不等号：

因为 A 的列向量可以被 $A|B$ 的列向量线性表示，B 的列向量可以被 $A|B$ 的列向量线性表示，因此 $r(A)\leq r(A|B), r(B)\leq r(A|B)$，即

$$\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A|B).$$

□

10. 若 $A=A_{m\times n}, B=B_{n\times s}$，$AB=O$，则 $r(A)+r(B)\leq n$;

证明. 因为 $AB=O$，所以 B 的列向量组 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 是 $Ax=\theta$ 的解，因此 $r(B)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leq r(\ker(A))=n-r(A)$，所以 $r(A)+r(B)\leq n$. □

11. 若 $A^2 = kA \Rightarrow A(A-kE) = O$，则

$$n = r(kE) = r(A + kE - A) \le r(A) + r(kE - A) = r(A) + r(A - kE) \le n$$

从而 $r(A) + r(A - kE) = n$.

12. 分块矩阵 $r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$.

证明. 对分块矩阵进行初等变换，分别将 A, B 变换为对应的标准型，易知对 A 进行初等变换时不影响 B 内各元素的所在行和列，因此

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} E_A & O \\ O & E_B \end{bmatrix}$$

因此 $r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = R(A) + R(B)$ □

例 2.10. 求 n 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 的秩.

法一：初等变换

初等变换矩阵的秩不变，因为 A 是一个隐性爪型矩阵，所以

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & a-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{bmatrix}$$

因此，若 $a = -n + 1$，则 $r(A) = n - 1$；若 $a = 1$，则 $r(A) = 1$；若 $a \ne 1$ 且 $a \ne -n + 1$，则 $r(A) = n$.

法二：行列式

因为

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$
$$= [a + (n-1)] \cdot (a-1)^{n-1}$$

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq -n+1$，则 $|A|\neq 0$，所以 $r(A)=n$;

若 $a=1$，则 $A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$ 因此 $r(A)=1$;

若 $a=-n+1$，则 $n-1$ 阶子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-2)]\cdot(a-1)^{n-1}\neq 0$$

所以 $n-1\leq r(A)<n$，因此 $r(A)=n-1$.

例 2.11. 设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T,\alpha,\beta$ 是 *3* 为列向量，证明

1. $r(A)\leq 2$

2. 若 α,β 线性相关，则 $r(A)<2$.

1. $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\leq 1+1=2$

2. 若 α,β 线性相关，则 $\beta=k\alpha$，则 $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r((1+k)\alpha\alpha^T)=r(\alpha\alpha^T)=1<2$

例 2.12. 设 A,B 为 n 阶矩阵，则下列正确的有
$A.r(A|AB)=r(A)$
$B.r(A|BA)=r(A)$
$C.r(A|B)=\max\{r(A),r(B)\}$
$D.r(A|B)=r(A^T|B^T)$
因为 AB 的列向量可以由 A 的列向量线性表示，因此 $r(A|AB)=r(A)$，选 A

3 线性方程组

3.1 求通解

3.1.1 A. 具体方程组

1. 利用阶梯型求通解

   求 $Ax=\beta$ 的通解，首先对增广矩阵 $(A|\beta)$ 初等行变换为阶梯型，然后有两种方法求结构式通解:

   (a) 同解方程组

   分别令自由变量为 $k_1,k_2,\cdots,k_t(t=n-r(A))$ 从而直接求出结构式通解.

(b) 解的结构

- 求方程组的一个特解（可令自由变量均为 0）
- 求基础解系，每次给一个自由变量赋值为 1，其余自由变量赋值为 0，赋值 $n-r(A)$ 次，每次对导出组阶梯型从下往上分别求出每一个变量的值；

利用阶梯型求通解的过程中，有两种可以节省计算时间的技巧：

(a) 灵活选择基础解系

形如如下的增广矩阵阶梯型，若要化为最简阶梯型矩阵则计算量复杂，此时可以令 x_2 为自由变元，则导出组基础解系为 $\eta_1=(-2,1,3)^T$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(b) 利用秩的性质，消去增广/系数矩阵某一行

若已知系数矩阵秩为 2，则任选阶梯型中无关的两行进行行变换消元，而令剩余的行向量为 0 即可，即以下两系数矩阵对应的齐次方程组同解：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 利用解的结构与解的性质求通解

若给出解的具体形式，则可利用解的结构，解的（秩）性质去推断通解.

3. 求满足条件的所有解

若要求出 $Ax=\beta$ 的通解中满足条件 $ax_1+bx_2=c$ 的所有解，则通过结构式通解与条件求出 $k_1,k_2,\cdots,k_t(t=n-r(A))$ 的关系，代回结构式通解中.

4. 含有参数的方程组

对于含有参数的方程组，需要利用题干条件，判断解的情况（唯一解、无穷解、无解、非零解、零解等）与系数矩阵和增广矩阵秩的关系，从而消除参数影响，一般有两种方法：

(a) 阶梯型矩阵消参

(b) 行列式消参

要证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是 $Ax=\theta$ 的基础解析，需要：

1. 验证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是 $Ax=\theta$ 的解
2. 验证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 无关
3. 验证 $n-r(A)=t$

例 3.1. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&a&1\\1&7&8\end{bmatrix}$，若 $Ax=\theta$ 有非零解，则 $A^TAx=\theta$ 的通解为.

若 $A^TAx=\theta$，则 $x^TA^TAx=(Ax)^TAx=\theta$，所以 $Ax=\theta$；若 $Ax=\theta$，则 $A^TAx=A^T\theta=\theta$，因此 $Ax=\theta$ 与 $A^TAx=\theta$ 同解.

因为 $Ax=\theta$ 有非零解，所以 $r(A)<n=3$，对 A 进行初等行变换有：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&a&1\\1&7&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&a-4&-5\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&a+1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $a=-1$ 因此 $Ax=\theta$ 的基础解析为 $x=(-1,-1,1)^T$，则 $A^TAx=\theta$ 的通解为 $k(-1,-1,1)^T$.

例 3.2. 解方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4&=1\\2x_1-x_2+x_3+2x_4&=3\\x_1-x_3+x_4&=2\end{cases}$ 并求满足 $x_1=-x_2$ 的所有解.

对增广矩阵进行初等行变换：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\2&-1&1&2&3\\1&0&-1&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&2\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

因为 $r(A)=2$，所以 $Ax=\theta$ 基础解系中有两个向量. 下面用两种方法求得基础解析

1. 同解方程组：

令 $x_3=k_1,x_4=k_2$，则 $x_2=1+3k_1,x_1=2+k_1-k_2$，所以方程组通解为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+k_1-k_2\\1+3k_1\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

2. 解的结构

令主元为 x_1,x_2，自由变元为 x_3,x_4，令 $x_3=x_4=0$，则 $x_1=2,x_2=1$，求得特解 $\alpha=[2,1,0,0]^T$

考虑导出组：令 $x_3=1,x_4=0$，则 $x_2=3,x_1=1$；令 $x_3=0,x_4=1$，则 $x_2=0,x_1=-1$，所

以基础解析为 $\eta_1=(1,3,1,0)^T,\eta_2=(-1,0,0,1)^T$ 所以结构式通解为

$$x=\alpha+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

下面求满足条件 $x_1=-x_2$ 的所有解，由结构式通解可知：$x_1=2+k_1-k_2,x_2=1+3k_1$，所以

$$2+k_1-k_2=-(1+3k_1)$$

因此 $k_2=4k_1+3$，所以满足条件的所有解为：

$$x=\alpha+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\end{bmatrix}+(4k_1+3)\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-3\\3\\1\\4\end{bmatrix}$$

例 3.3. 已知 $\xi_1=[-9,1,2,11]^T,\xi_2=[1,-5,13,0]^T,\xi_3=[-7,-9,24,11]^T$ 是方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+7x_2+a_3x_3+x_4=d_1\\3x_1+b_2x_2+2x_3+2x_4=d_2\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}$$

的解，则方程组的通解为.

已知 $\eta_1=\xi_1-\xi_2,\eta_2=\xi_1-\xi_3$，是齐次方程组 $Ax=\theta$ 两个线性无关的解，因此 $2=r(\eta_1,\eta_2)\le n-r(A)=4-r(A)$，所以 $r(A)\le 2$. 又因为 A 中的二阶子式满足 $\begin{vmatrix}2&2\\1&7\end{vmatrix}\ne 0$，所以 $r(A)\ge 2$，因此 $r(A)=2$，因此 $Ax=\theta$ 基础解系中有 $n-r(A)=4-2=2$ 个向量，则通解为 $\xi_1+k_1\eta_1+k_2\eta_2$..

例 3.4. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-2&2\\-3&1&3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

已知

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda+2&-2\\3&-1&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+3)$$

所以特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-3$.

当 $\lambda=1$ 时有 $r(E-A)=2$，所以

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&3&-2\\3&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

因此基础解系为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$. 其他特征向量解法类似.

例 3.5. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&3&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

易知特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-4\\0&\lambda-3&-5\\0&0&\lambda-6\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

则 $\lambda=1,3,6$.

若 $\lambda=1$，则

$$E-A=\begin{bmatrix}0&-2&-4\\0&-2&-5\\0&0&-5\end{bmatrix}$$

因为 $r(E-A)<3$，而 $\begin{vmatrix}-2&-5\\0&-5\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $r(E-A)\geq 2$，所以 $r(E-A)=2$，则

$$\begin{bmatrix}0&-2&-4\\0&-2&-5\\0&0&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&-5\\0&0&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

解得基础解系 $\alpha=(1,0,0)^T$. 其他特征向量类似.

3.1.2 B. 抽象方程组

有两种思路:

1. 利用解的结构与解的（秩）性质推导抽象方程组的通解.

2. 构造与所求方程组同解的方程组.

例 3.6. 4 元方程组 $Ax=\beta$ 中，系数矩阵的秩 $r(A)=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程的三个解，若 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2+\alpha_3=(2,3,4,5)^T$ 则方程组通解为.

易知方程组导出组基础解系中有一个向量，则由解的结构知 $\eta=\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1=(0,1,2,3)^T$ 为 $Ax=\theta$ 的基础解析，因此通解为 $\alpha_1+k\eta$.

例 3.7. 已知 4 阶方程 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求 $Ax=\beta$ 的通解.

法一：解的结构

易知 $3=r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 3$，所以 $r(A)=3$，即 $Ax=\theta$ 基础解系中只有一个向量，因为 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=2\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_2+\alpha_3=\theta$，所以基础解系为 $(1,-2,1,0)^T$.

又因为

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所以有特解 $(1,1,1,1)^T$，因此通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,-2,1,0)^T$

法二：构造通解方程组

设 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的通解，则

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

所以

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

代入 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 有

$$(2x_1+x_2-3)\alpha_2+(-x_1+x_3)\alpha_3+(x_4-1)\alpha_4=\theta$$

因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 无关，所以

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0\\ \qquad -x_1+x_3=0\\ \qquad\quad x_4-1=0\end{cases}$$

次方程组与 $Ax=\beta$ 通解，借此方程组通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,-2,1,0)^T$

例 3.8. 设 A 是 *4* 阶矩阵，若 $\alpha_1=[1,9,9,9]^T,\alpha_2=[2,0,0,0]^T,\alpha_3=[2,0,0,1]^T$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的三个解，证明 $A^*=O$

易知 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=\theta$ 线性无关的两个解，因此 $r(A)\le 4-2=2$，所以 $A^*=O$.

例 3.9. 设四阶矩阵 A 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，则 $A^*=\theta$ 的通解为

易知 $|A|=0$，因此 $A^*A=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=|A|E=O$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 $A^*x=\theta$ 的解向量. 因为 $A_{12}\neq 0$，所以 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 的截短向量无关，故 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 无关，因此 $3\ge r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<4$，因此 $r(A)=3=n-1$，则 $r(A^*)=1$，因此 $A^*x=\theta$ 基础解系的秩为 $n-r(A^*)=3$，因此通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$.

例 3.10. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶正交矩阵，若矩阵 $B=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)^T,\beta=(1,1,1)^T$，则 $Bx=\beta$ 的通解为.

因为 $r(B)=3$,所以 $Bx=\theta$ 的基础解系有 $4-r(B)=1$ 个向量,易知 $B\alpha_4=(\alpha_1^T\alpha_4,\alpha_2^T\alpha_4,\alpha_3^T\alpha_4)^T=(0,0,0)^T$，所以基础解系为 α_4.

又因为

$$B(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=B\alpha_1+B\alpha_2+B\alpha_3=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1\\ \alpha_2^T\alpha_1\\ \alpha_3^T\alpha_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_2\\ \alpha_2^T\alpha_2\\ \alpha_3^T\alpha_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_3\\ \alpha_2^T\alpha_3\\ \alpha_3^T\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

所以通解为 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$.

3.1.3 C. 通过矩阵运算求得方程组

例 3.11. 已知 $\alpha=(1,2,1)^T,\beta=(1,\frac{1}{2},0)^T,\gamma=(0,0,8)^T$，$A=\alpha\beta^T,B=\beta^T\alpha$，求解方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$.

易知 $B=\beta^T\alpha=1+1+0=2,A=\alpha\beta^T$，则 $A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta=2A$，所以 $A^4=8A$，代入原方程有

$$2B^2A^2x-A^4x-B^4x=8(A-2E)x=\gamma$$

即

$$\begin{cases}-1x_1-\dfrac{1}{2}x_2=0\\ 2x_1-1x_2=0\\ x_1+\dfrac{1}{2}x_2-2x_3=1\end{cases}$$

从而求得通解 $(\frac{1}{2},1,0)^T+k(1,2,1)^T$.

3.2 有解判定、解的结构、性质

1. 若 $r(A)=n\Leftrightarrow Ax=\theta$ 只有零解
   - 若 $r(A)=r(A|\beta)=n\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有唯一解
   - 若 $r(A)=r(A|\beta)<n\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有无穷解
2. $Ax=\beta$ 无解 $\Rightarrow r(A)<m$，若 A 为方阵，则 $|A|=0$
3. $Ax=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow r(A|\beta)=r(A)+1$
4. $Ax=\beta$ 有唯一解/有无穷多 $\Rightarrow Ax=\theta$ 只有零解/有非零解
5. $Ax=\theta$ 解的情况与 $Ax=\beta$ 解的情况：记忆不同行数、列数的情况下（非）齐次方程组解的情况与增广矩阵阶梯型图像的关系.

- 若 $m<n$

$$Ax=\theta\text{有非零解}\nrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}, Ax=\beta\text{有无穷多解}\rightarrow Ax=\theta\text{有非零解}$$

- 若 $m=n$

$$Ax=\theta\text{只有零解}\rightarrow Ax=\beta\text{有唯一解}, Ax=\beta\text{有唯一解},\rightarrow Ax=\theta\text{只有零解}$$
$$Ax=\theta\text{有非零解}\nrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}, Ax=\beta\text{有无穷多解}\rightarrow Ax=\theta\text{有非零解}$$

- 若 $m>n$

$$Ax=\theta\text{只有零解}\nrightarrow Ax=\beta\text{有唯一解}, Ax=\beta\text{有唯一解},\rightarrow Ax=\theta\text{只有零解}$$
$$Ax=\theta\text{有非零解}\nrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}, Ax=\beta\text{有无穷多解}\rightarrow Ax=\theta\text{有非零解}$$

例 3.12. 线性方程组 $Ax=b$ 经初等行变换其增广矩阵化为

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ & a-3 & 2 & 6 & a-1 \\ & & a-2 & a & -2 \\ & & & -3 & a+1 \end{array}\right]$$

若方程组无解，则求 a.

因为 $Ax=b$ 无解，所以 $|A|=0$，易知 $a=3$ 或 $a=2$，分别代入计算 $r(A), r(A|b)$ 易知 $a=3$.

例 3.13. 下列命题中正确的是
$A.Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$
$B.Ax=\theta$ 只有零解 $\Rightarrow Ax=b$ 有唯一解
$C.Ax=\theta$ 有非零解 $\Rightarrow Ax=b$ 有无穷多解
$D.Ax=b$ 有两个不同的解 $\Rightarrow Ax=\theta$ 有无穷多解.

$A.Ax=b$ 有唯一解 $|A|$ 可能不存在（如当 $m>n$ 时），D 正确.

例 3.14. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分条件为
$A.A$ 的行向量无关
$B.A$ 的行向量相关
$C.A$ 的列向量无关
$D.A$ 的列向量相关

A 行向量无关 $\Rightarrow r(A)=m\geq r(A|b)\geq r(A)=m$，所以 $Ax=b$ 有解.

例 3.15. 线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵为 4×5 矩阵，且 A 的行向量组线性无关，则错误命题为
A. 齐次方程组 $A^Tx=\theta$ 只有零解
B. 齐次方程组 $A^TAx=\theta$ 必有非零解
C. 任意 b，方程组 $Ax=b$ 必有无穷多解
D. 任意 b，方程组 $A^Tx=b$ 必有唯一解.

因为 A 的行向量组线性无关，所以 $r(A)=4$，所以 $r(A^T)=r(A)=4=n_{A^T}$，所以 $A^Tx=\theta$ 只有零解；

因为 $r(A^TA)=r(A)=4<n_{A^TA}=5$，所以 $A^TAx=\theta$ 有非零解；

因为 $5=n_A\geq r(A)=4\geq r(A|b)\geq r(A)=4$，所以 $Ax=b$ 有界且有无穷解

因为 $r(A^T)=4$ 无法推出 $r(A^T|b)=r(A^T)$，所以 D 错误.

3.3 两个方程组公共解、同解的问题

若求 $Ax=\beta,Bx=\gamma$ 公共解，有三种方法

1. 联立两个方程组
2. 分别求两个方程组的通解，令其相等，再寻找参数对应的关系，消去多余自由变量
3. 求出一个方程组的通解，代入另一个方程组中，寻找参数对应的关系，消去多余的自由变量

若 $Ax=\beta,Bx=\gamma$ 同解，则

1. $n-r(A)=n-r(B)\Rightarrow r(A)=r(B)$
2. 将 $Ax=\beta$ 的通解代入 $Bx=\gamma$ 求出 $Bx=\gamma$ 的通解
3. 若所求的 $Bx=\gamma$ 的通解也是 $Ax=\beta$ 的通解，则该解正是 $Ax=\beta,Bx=\gamma$ 同解.

例 3.16. 设有两个 4 元齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases},\ (II)\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

求 $(I),(II)$ 公共解.

法一：联立方程组

联立 $(I),(II)$ 有齐次方程组系数矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $r(A)=3$，$Ax=\theta$ 基础解系有 $n-r(A)=1$ 个向量，令 $x_4=t$ 为自由变量，则 $x_3=2t,x_2=t,x_1=-t$，所以 $Ax=\theta$ 解向量为 $(-t,t,2t,t)^T=t(-1,1,2,1)^T$

法二：分别求通解，令其相等

易求 (I) 的基础解系为 $\eta_1=(0,0,1,0)^T,\eta_2=(-1,1,0,1)^T$;$(II)$ 的基础解系为 $\xi_1=(0,1,1,0)^T,\xi_2=(-1,-1,0,1)^T$，从而 (I) 的通解为 $x_1\eta_1+x_2\eta_2$，(II) 通解为 $x_3\xi_1+x_4\xi_2$，从而

$$x_1\eta_1+x_2\eta_2=x_3\xi_1+x_4\xi_2\Rightarrow x_1\eta_1+x_2\eta_2-x_3\xi_1-x_4\xi_2=\theta$$

即

$$(\eta_1,\eta_2,-\xi_1,-\xi_2)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\0&1&1&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

因为

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\0&1&1&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_4=t$ 为自由变元，则 $x_3=-2t,x_2=-t,x_1=-2t$，因此公共解为 $x_1\eta_1+x_2\eta_2=-2t\eta_1-t\eta_2=-2t(0,0,1,0)^T-t(-1,1,0,1)^T=-t(1,-1,-2,-1)^T=t(-1,1,2,1)^T$.

法三：求出一个通解，代入另一方程

将 (I) 的通解 $x_1\eta_1+x_2\eta_2=(-x_2,x_2,x_1,x_2)^T$ 代入 (II) 中有

$$(II)\begin{cases}-x_2-x_2+x_1=0\\x_2-x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_2+x_1=0\\2x_2-x_1=0\end{cases}$$

所以 $x_1=2x_2$ 因此公共解为 $2x_2\eta_1+x_2\eta_2=-x_2(-1,1,2,1)^T$

例 3.17. 设线性方程组

$$(I)\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$$

与方程 $(II)x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值以及公共解.

法一：联立方程组

增广矩阵进行初等行变换有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right]$$

因此若 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$，则 $r(A)<r(\overline{A})$，方程无解，则 $(I),(II)$ 无公共解.

若 $a=1$，则

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

所以方程组通解为 $k(1,0,-1)^T$，则 $(I),(II)$ 公共解为 $k(1,0,-1)^T$.

若 $a=2$，则方程组有唯一解 $(0,1,-1)^T$，则 $(I),(II)$ 公共解为 $(0,1,-1)^T$.

法二：行列式消参，分类讨论

系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&3&a^2-1\end{vmatrix}=(a-1)(a-2)$$

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$，则方程组 (I) 只有零解，因为 $a-1\neq 0$，所以 $(I),(II)$ 无公共解.

然后分别讨论 $a=1,a=2$ 的情况.

例 3.18. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，且 $r(A)+r(B)<n$，证明方程组 $Ax=\theta,Bx=\theta$ 有非零公共解.

联立 $Ax=\theta,Bx=\theta$ 有 $\left[\frac{A}{B}\right]x=\theta$，因为

$$r\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=r(A^T|B^T)\leq r(A^T)+r(B^T)=r(A)+r(B)<n$$

所以 $\left[\frac{A}{B}\right]x=\theta$ 有非零解，即方程组 $Ax=\theta,Bx=\theta$ 有非零公共解.

例 3.19. 已知齐次方程组

$$(I)\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases},\ (II)\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

因为 $(I),(II)$ 通解，所以 $r(I)=r(II)<3$，则

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=2-a=0$$

所以 $a=2$. 已知 $r(A)=2$，则 (I) 的通解为 $k(-1,-1,1)^T=(-k,-k,k)^T$，代入 (II) 有

$$(II)\begin{cases}-k-bk+ck=0\\-2k-b^2k+(c+1)k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1+b-c)k=0\\(-2-b^2+c+1)k=0\end{cases}$$

从而 $b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$.

若 $b=1,c=2$，则方程组 (II) 的通解为 $k(-1,-1,1)^T$，与 (I) 同解；若 $b=0,c=1$，则方程组 (II) 的通解为 $k_1(-1,0,1)^T+k_2(0,1,0)^T$ 则 (II) 与 (I) 不同解.

3.4 方程组的应用

核心方法是设所求矩阵为 $\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，代入表达式中，构造方程组.

在求通解的过程中，利用同解方程组更为便捷.

例 3.20. 求与矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵 B

设 $B=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}x_1+2x_3&x_2+2x_4\\x_1-x_3&x_2-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2&2x_1-x_2\\x_3+x_4&2x_3-x_4\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{cases}x_2-2x_3=0\\2x_1-2x_2-2x_4=0\\x_1-2x_3-x_4=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$$

所以

$$\begin{bmatrix}0&1&-2&0\\2&-2&0&-2\\1&0&-2&-1\\0&1&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=t,x_4=u$，则 $x_2=2t,x_1=2t+u$，所以 $B=\begin{bmatrix}2t+u&2t\\t&u\end{bmatrix}$