线性代数基本概念与方法: 行列式

Collection of Linear Algebra Tips: Determinant

王浩铭

2018 年 · 春

这篇笔记的参考资料为全国大学生数学竞赛习题, 历年考研真题, 历年西南财经大学高等代数 *I* 期末考试真题, 部分内容根据我的理解进行调整. 本笔记系应试技巧集锦, 其中多数定理均在 *Linear Algebra (CN)* 笔记中给出, 因此不再提供证明. 因为本人水平有限, 无法保证本文内容正确性, 这篇笔记仅供参考. 若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com, 谢谢! 您可以在我的主页中浏览更多笔记.

目录

Edition 4

1 行列式的计算

1.1 基本方法

1. 化简方法：多对一、一对多、正逐项、反逐项

2. 按行/列展开：
$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$
或
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

3. 拉普拉斯定理：
$$D = \sum_{i=1}^{t} N_i A_i,\ t = C_n^k.$$

4. 上下三角行列式
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n_1 1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

5. 分块三角矩阵
$$D = \begin{vmatrix} A_{mm} & C_{mn} \\ O & B_{nn} \end{vmatrix} = |A_{mm}| \cdot |B_{nn}|$$
$$D = \begin{vmatrix} C_{mn} & B_{nn} \\ A_{mm} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A_{mm}| \cdot |B_{nn}|.$$

6. 范德蒙行列式
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

7. 特征多项式对于 3 阶矩阵 A 有

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - s_2\lambda^2 + s_1\lambda - s_0$$

其中

- $s_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$;
- $s_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $s_0 = |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

特别地，若 $R(A) = 1$，则 $s_0 = s_1 = 0$，则

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - s_2\lambda^2 = \lambda^3 - \left(\sum a_{ii}\right)\lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda - \sum a_{ii}\right) = 0$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sum a_{ii}$.

1.2 溢出型行列式

对溢出项展开可以构造两个三角行列式;

例 1.1 (溢出行列式). 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解. 对最后一行展开有:

$$D = (-1)^{1+n}b \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} + (-1)^{2n}a \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$
$$= D = a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

□

1.3 爪型行列式

分为闭爪型与开爪型:

1. 闭爪型行列式

- 正逐项（将第 i 行/列的 k 倍加到 $i+1$ 行/列，$i=1,2,\cdots,n-1$）
- 多对一（将各列/行加到第 1 列/行）
- 对满元素行/列展开（得到两个三角行列式）.

2. 开爪型行列式

- 多对一（将各列/行加到第 1 列/行，即用对角线元素消去某一满元素行/列）
- 对满元素行/列展开（得到一个三角行列式与一个溢出行列式）.

开爪型行列式优先考虑多对一

3. 隐性爪型：即各列（行）只有对角线元素不同的行列式. 将第一行逐行减至各行.

例 1.2 (闭爪行列式). 证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}b_1b_2\cdots b_{i-1}a_ic_{i+1}\cdots c_n.$$

证明. 对第一行展开有 $D=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_iM_{1i}$，对于每个 i 有：

$$M_{1i}=\begin{vmatrix} G_i & O \\ 0 & H_i \end{vmatrix}=|G_i||H_i|.$$

其中

$$H_i=\begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{i-1} \end{vmatrix},\ G_i=\begin{vmatrix} c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i+1} & c_{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix},$$

所以 $M_{1i}=|G_i||H_i|=b_1b_2\cdots b_{i-1}c_{i+1}\cdots c_n$，因此

$$D=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_iM_{1i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}b_1b_2\cdots b_{i-1}a_ic_{i+1}\cdots c_n.$$

□

例 1.3. 计算 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$

法一：多对一

将各列加至第一列有

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(n+1)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n+1)}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(n+1)}{2}$$

例 1.4 (开爪行列式)**.** 证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix} = a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_1 \cdots c_{i-1} a_i b_i c_{i+1} \cdots c_n.$$

证明 *1.* 对第一行展开，a_0 的代数余子式 $A_{11} = c_1 c_2 \cdots c_n$，当 $i \geq 1$ 时，a_i 的代数余子式 $A_{1i+1} = (-1)^i M_{1i+1}$，其中

$$M_{1i+1} = \begin{vmatrix} G_i & O \\ * & H_i \end{vmatrix} = |G_i||H_i|.$$

其中

$$H_i = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{i-1} & 0 & 0 & 0 & c_{i-1} \\ b_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ G_i = \begin{vmatrix} c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix},$$

将 H_i 对第 i 行展开有 $|H_i| = (-1)^{1+i} b_i c_1 c_2 \cdots c_{i-1}$，因此

$$M_{1i+1} = (-1)^{1+i} b_i c_1 c_2 \cdots c_{i-1} c_{i+1} \cdots c_n.$$

即

$$\begin{aligned} D &= a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i M_{1i+1} \\ &= a_0 \prod_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_1 \cdots c_{i-1} a_i b_i c_{i+1} \cdots c_n. \end{aligned}$$

证毕. □

证明 2. 易知:

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0-\frac{b_1a_1}{c_1}-\cdots-\frac{b_na_n}{c_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix}$$
$$=\left[a_0-\frac{b_1a_1}{c_1}-\cdots-\frac{b_na_n}{c_1}\right]\cdot c_1c_2\cdots c_n$$
$$=a_0\prod_{i=1}^n c_i-\sum_{i=1}^n c_1\cdots c_{i-1}a_ib_ic_{i+1}\cdots c_n.$$

□

例 1.5.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0a \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 10+a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=(a+10)a^3$$

1.4 三斜线行列式

1. 三角化法

   通过正反逐项的方法，消去主对角线上下某一斜线上的元素，从而化为三角阵.

2. 递归法

   对首行/列展开, 得到递推公式, 即 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 的关系式, 再利用数列技巧求解, 其中 D_{n-2} 往往需要两步展开，对于如下三斜线行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} c & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & c & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & c & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & c \end{vmatrix}$$

   对第一行第一列 c 展开得到 D_{n-1}，再对第二行第一列 a 展开，划去第二行，最后对第一行第二列 b（在第二次展开剩下的行列式中为第一行第一列）展开，得到 D_{n-2}，因此有

$$D_n=cD_{n-1}-abD_{n-2}.$$

爪型行列式由于主对角线上斜线或下斜线均为零，因此可以化为三角形行列式：

3. 数学归纳法

对首行/列展开，得到递推公式，即 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 的关系式，再运用第二数学归纳法.

注 1.1. 数学归纳法：

- 第一数学归纳法：一次递归
  验证 $n=1$ 时 f_n 成立，假设 $n=k$ 时 f_n 成立，证明 $n=k+1$ 时 f_n 成立.
- 第二数学归纳法：二次递归
  验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时 f_n 成立，假设 $n<k$ 时 f_n 成立，证明 $n=k$ 时 f_n 成立.

例 1.6 (三斜线行列式). 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}=\begin{cases}(n+1)a^n & (a=b)\\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & (a\neq b)\end{cases}$$

法一：展开递归法

按第一行展开有 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ 因此有 $D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$，因此 D_n-bD_{n-1} 是公比为 a 的等比数列，因为 $D_2-bD_1=a^2$，因此有

$$D_n=bD_{n-1}+a^n,$$

若 $b=a$，则 $D_n=aD_{n-1}+a^n$，因此

$$\frac{D_n}{a^n}=\frac{D_{n-1}}{a^{n-1}}+1,$$

即 $\frac{D^n}{a^n}$ 是公差为 *1* 的等差数列，有 $D_n=(a+1)a^n$.

若 $b\neq a$，则对称的有 $D_n=aD_{n-1}+b^n$，联立有

$$bD_{n-1}+a^n=aD_{n-1}+b^n,$$

即 $D_{n-1}=\frac{b^n-a^n}{b-a}$，因此

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

法二：数学归纳法

因为 $D_n=bD_{n-1}+a^n$，易验证 $n=1,n=2$ 时式 $D=\begin{cases}(n+1)a^n & (a=b)\\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & (a\neq b)\end{cases}$ 成立，设 $n=k-1$ 时上式成立，则当 $n=k$ 时：

- 若 $a=b$，则

$$\begin{aligned}D_k &= bD_{k-1}+a^k = aD_{k-1}+a^k \\ &= a\cdot ka^{k-1}+a^k=(k+1)a^k\end{aligned}$$

  成立.

- 若 $a\neq b$，则

$$\begin{aligned}D_k &= bD_{k-1}+a^k = b\frac{a^k-b^k}{a-b}+a^k \\ &= \frac{ba^k-b^{k+1}+a^{k+1}-ba^k}{a-b}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\end{aligned}$$

  成立.

例 1.7. 设 $A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵，证明 $|A|=(n+1)a^n$.

法一：数学归纳法

若 $n=1$，则 $|A|=2a=(1+1)a^1$，若 $n=2$，则 $|A|=4a^2-a^2=3a^2=(2+1)a^2$，设 $n<k$ 时，命题成立，则 $n=k$ 时有

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21} \\ &= 2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} - a^2\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} \\ & 2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}=2a(k-1+1)a^{k-1}-a^2(k-2+1)a^{k-2} \\ &= 2ka^k-(k-1)a^k=(k+1)a^k.\end{aligned}$$

证毕.

法二：三角化法

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-\frac{a}{2}r_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = (n+1)a^n$$

2 行列式的性质

2.1 根的个数与系数问题

1. 根的个数

   含参行列式根的个数问题就是问题行列式是关于参数的几次多项式，本质上还是求行列式.

2. 系数问题

例 2.1. 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则 $f(x)=0$ 的根的个数为.

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2,c_3,c_4+(-1)\cdot c_1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{拉普拉斯定理}} 5x^2-5x.$$

所以有两个根.

2.2 矩阵分解与展开计算行列式

1. 矩阵分解法

   在 $|A_{n\times n}|$ 的每一列都可以表示为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基的线性组合的时候常采用这种方法：

2. 拆开省略法

   当行列式每一行的元素不能明显的找到基时，常采用这种方法，应用时需要注意：

   (a) 往往需要先对行列式进行化简，再将其拆开；

   (b) 关键在于省略为零的行列式，保留非零的行列式.

例 2.2. 证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

证明. 可以看出，上式左侧行列式的每一列都可以被右侧行列式列向量线性表示，如左侧第一列等于右侧第一列的 a 倍加上右侧第二列的 b 倍，等等. 因此有：

$$\begin{bmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

□

例 2.3. 已知 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关列向量，若 $A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3, A\alpha_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，则 $|A^*|$ 为

因为

$$\begin{aligned} A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= (\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3) \\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M \end{aligned}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，所以 $|A|=|M|=2$，因此 $|A^*|=|A|^2=4$.

例 2.4. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

证明. 易知

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix}$$

当第一列选择 $(1,1,1,1)^T$ 时，第二三四列只能选择 $(0,-x,0,0)^T,(0,0,y,0)^T,(0,0,0,-y)^T$，否则行列式为零，由此该行列式拆分的非零行列式只有五个，即

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} \\ &\quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix} \\ &= xy^2 - xy^2 + x^2y - x^2y + x^2y^2 = x^2y^2. \end{aligned}$$

□

2.3 代数余子式之和

2.4 $|A+B|$ 型

1. 注意矩阵的分解与拆开

2. 注意利用 E 与非奇异矩阵做恒等变形，如令 A 为非奇异矩阵，则

$$\begin{aligned} B &= BE = BAA^{-1} = BA^{-1}A \\ &= EB = AA^{-1}B = A^{-1}AB. \end{aligned}$$

例 2.5. $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 均为 4 为列向量, $|A| = |\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3| = 5, |B| = |\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3| = -1$, 求 $|A+B|$.

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha+\beta, 2\gamma_1, 2\gamma_2, 2\gamma_3| = 8|\alpha+\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3| \\ &= 8(|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3| + |\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|) = 8(5-1) = 32 \end{aligned}$$

例 2.6. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为 4 为列向量，若

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma| = a,\ |\beta+\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = b$$

求 4 阶行列式 $|2\beta,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1|$.

因为 $a = |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma| = (-1)^3|\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$，所以 $|\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = -a$.
又因为 $b = |\beta+\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = |\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| + |\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$，所以 $|\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = a+b$
所以

$$\begin{aligned}|2\beta,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1| &= 2|\beta,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1| = (-1)^2\cdot 2|\beta,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3| \\ &= (-1)^3\cdot 2|\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = -2(a+b)\end{aligned}$$

例 2.7. 设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，求 $|A+B^{-1}|$

$$\begin{aligned}|A+B^{-1}| &= |EA+B^{-1}E| = |B^{-1}BA+B^{-1}A^{-1}A| \\ &= |B^{-1}|\cdot|B+A^{-1}|\cdot|A| = \frac{1}{2}\cdot|2|\cdot|3| = 3.\end{aligned}$$

2.5 应用相似的性质

1. $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
2. $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
3. 若 $A\sim B$，则 $\lambda_A = \lambda_B$，则 $|A| = |B|$
4. 若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$，则 $\lambda_{f(A)} = \lambda_{f(B)} = f(\lambda_A)$.

   其中 f 为多项式.

例 2.8. 已知 $A\sim B$，其中 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $|A+E|$

易知 $A+E\sim B+E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以 $|A+E| = |B+E| = -6$.

例 2.9. 易知 A 为 3 阶矩阵，E 为 3 阶单位阵，若 $A, A-2E, 3A+2E$ 均不可逆，则求 $|A+E|$.

易知 $|A| = |A-2E| = |3A+2E| = 0$，则 $\lambda_A = 0,2,-\frac{2}{3}$，则 $\lambda_{A+E} = \lambda_A + 1 = 1,3,\frac{1}{3}$，所以 $|A+E| = \prod \lambda_{A+E} = 1$.

2.6 矩阵构造

1. 通过对矩阵进行初等行列变化构造出需要的矩阵；
2. 对矩阵进行初等行（列）变换相当于左（右）乘相应的初等矩阵；
3. 分块矩阵与矩阵类似

例 2.10. 易知 A, B 均为 n 阶矩阵，证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$.

因为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+(-1)\cdot c_1} \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{\text{拉普拉斯定理}} |A+B| \cdot |A-B|,$$

所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & E \\ O & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & -E \\ O & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix}$$
$$= |A+B| \cdot |A-B|.$$

2.7 关于 $|A| = 0$

1. 方程组法：$Ax = \theta$ 有非零解，注意：
   - $Bx = \theta$ 的解是 $ABx = \theta$ 的解，若 $Bx = \theta$ 有非零解，则 $ABx = \theta$ 有非零解
   - $B_{m\times n}$，若 $m < n$，则 $Bx = \theta$ 必有非零解.
2. 反证法：设 $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆，证明矛盾
3. 秩法：$r(A) < n$
4. 特征值法：A 有 0 特征值

注 2.1. $AB = O$ 是一个常用已知条件，对此有两种思路

1. $r(A) + r(B) \leq n$
2. B 的列向量是 A 的解（若 $B \neq O$，则 $|A| = 0$）

例 2.11. 设 A 是 n 阶非零矩阵，满足 $A^2 = A$，且 $A \neq E$，证明行列式 $|A| = 0$.

法一：方程组法

因为 $A^2=A$ 所以 $A^2-A=A(A-E)=O$，因为 $A\neq E$，所以 $A-E\neq O$，即 $|A|=0$.

法二：反证法：

设 $|A|\neq 0$，则 A 可逆，所以 $A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$，即 $A=E$ 矛盾，所以 $|A|=0$.

法三：秩法：

因为 $A(A-E)=O$，所以 $r(A)+r(A-E)\leq n$，因为 $A-E\neq O$，即 $r(A-E)\geq 1$，所以 $r(A)<n$，因此 $|A|=0$.

法四：特征值法：

因为 $A-E\neq O$，所以 A 存在特征值 $\lambda_{A,i}\neq 1$，因为 $A=A^2$，则对应特征值有 $\lambda_{A,i}=\lambda_{A,i}^2$，因为 $\lambda_{A,i}\neq 1$，所以 $\lambda_{A,i}=0$，即 $|A|=0$.

例 2.12. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，证明当 $m>n$ 必有行列式 $|AB|=0$.

法一：秩法

因为 $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}\leq r(A)\leq n<m$，所以 $|AB|=0$.

法二：方程组法

因为 $Bx=\theta$ 的解是 $ABx=\theta$ 的解，而 $m>n$，因此 $Bx=\theta$ 有非零解，所以 $ABx=\theta$ 有非零解，故 $|AB|=0$.

2.8 代数余子式求和

1. 利用性质：a_{ij} 的余子式与 a_{ij} 的值无关，对原行列式进行替换，特殊的

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}A_{ij}=\begin{cases} D, & s=i \\ 0, & s\neq i, \end{cases}$$

2. 利用伴随矩阵 A^* 的定义，需计算 A^{-1} 与 $|A|$

例 2.13. 设 A 为 *3* 阶矩阵，A 每行元素之和为 *2*，$|A|=3$，求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}$.

对第一列展开有：

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \\
&= (2-a_{12}-a_{13})A_{11}+(2-a_{22}-a_{23})A_{21}+(2-a_{32}-a_{33})A_{31} \\
&= 2(A_{11}+A_{21}+A_{31})-[(a_{21}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})+(a_{31}A_{11}+a_{32}A_{21}+a_{33}A_{31})] \\
&= 2(A_{11}+A_{21}+A_{31})=3
\end{aligned}$$

所以 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{3}{2}$.

例 2.14. 已知 $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 则 $|A|$ 所有代数余子式之和为.

易知 $|A|=(-1)^5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{4!}$，因为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

从而

$$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{4!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $\sum A_{ij}=\frac{1}{4!}\cdot(1+2+3+4)=-\frac{5}{12}$.

例 2.15. 设矩阵 A 满足 $A^*=A^T$，且 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a$ 为正数，求 a.

因为 $A^*=A^T$，所以 $a_{ij}=A_{ij}$，以及 $|A|^2=|A|$，所以 $|A|=1$ 或 $|A|=0$ ，若 $|A|=0$，因为 $a>0$ 所以 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$. 若 $r(A)=1$，则 $r(A^*)=0$，因为 $A^*=A^T\neq O$，故矛盾. 若 $r(A)=2$，则 $r(A^*)=1=r(A^T)=r(A)=2$ 矛盾，综上 $|A|\neq 0$.

因此

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= 3a^2=1 \end{aligned}$$

所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.