微积分 I: 定积分 I

Calculus I: Definite integral I

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 定积分的定义与存在条件

1.1 定积分的概念

我们研究曲边梯形的面积，用任意方法分割其底边 $[a, b]$ 为若干部分，用

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

表示分点的横坐标，这样曲边梯形便被分割成若干小条，现在用底边与小条一致，高与小条左高一致的矩形取近似地替代小条.

则第 i 个矩形 $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$ 的底边显然等于 $x_{i+1} - x_i$，我们用 Δx_i 表示该数；至于高度，它等于 $y_i = f(x_i)$. 因此第 i 个矩形的面积为 $y_i \Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i$.

把所有矩形的面积加起来，我们便得到曲边梯形的近似值

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

当所有的长度 Δx_i 都趋于 0 时，面积 P 的准确值就是极限

$$P = \lim \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

接下来，我们将研究形如 $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ 的特殊和的极限.

定义 1.1 (特殊和的极限)**.** 设函数 $f(x)$ 给定在某区间 $[a, b]$ 上. 用任意方法在 a 与 b 之间插入分点，把这个区间分成若干部分. 并用 λ 表示 Δx_i $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$ 中最大的一个，

从部分区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任取一点 $x = \xi_i$

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \ (i = 0, 1, ..., n-1)$$

并且做出和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

若对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得只要 $\lambda < \delta$，则不等式

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

在 ξ_i 的任意选择下皆成立，则称和 σ 当 $\lambda \to 0$ 时有有限极限 I，记作

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

定义 1.2 (定积分)**.** 如果当 $\lambda \to 0$ 时，和 σ 的有限极限 I 存在，则这极限称之为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，记作

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $f(x)$ 称为在 $[a,b]$ 上的**可积函数**，数 a 与数 b 分别称为积分的**下限**与**上限**，上、下限为常数时，定积分为常数. 该定义为黎曼（B.Riemann）的定义，因此和 σ 也称为**黎曼和**.

下面我们来阐述一些条件，在这些条件下，黎曼和 σ 具有有限极限，即定积分存在.

首先需要指出的，*可积函数一定是有界的*. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是无界的，那么再把区间分成若干部分的任何划分方式下，这个函数都会在某个部分区间上无界，于是靠着在这个部分区间上点 ξ 的选取，可使 $f(\xi)$ 任意大，随之也就是可使黎曼和任意大（$\forall,\lambda,\epsilon>0,\exists\xi>0,\text{s.t.}f(\xi)>\frac{1}{\lambda\epsilon}$ 因此 $\sigma>\lambda\cdot f(\xi)>\lambda\cdot\frac{1}{\lambda\epsilon}=\frac{1}{\epsilon}\to\infty$）. 因此当函数 $f(x)$ 无界时，黎曼和 σ 不存在有限极限，即定积分不存在.

因此在后面的研究中，我们总是预先假定所考虑的函数 $f(x)$ 时有界的

$$m\le f(x)\le M\ (a\le x\le b).$$

1.2 达布和

作为研究的辅助工具，除黎曼和外，按照达布（Darboux）的方法，我们再引进一些类似黎曼和但更简单的和.

定义 1.3 (达布和)**.** *用 m_i,M_i 表示函数 $f(x)$ 在第 i 个区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的下确界与上确界，并做和*

$$s=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i,\ S=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i.$$

这些和分别称为达布下和与达布上和.

在特殊情形，若 $f(x)$ 连续，达布和就是对应于所取分划的积分和中当中的最大值与最小值，因为由魏尔斯特拉斯第二定理（**??**）可知函数 $f(x)$ 在每个区间中都能取到确界，因此若按这样的目的来选点 ξ，可以使得

$$f(\xi_i)=m_i\text{或}f(\xi_i)=M_i$$

在一般的情形，由下界与上界定义本身，有

$$m_i\le f(\xi)\le M_i.$$

以 Δx_i $(\Delta x_i>0)$ 乘之并求和得到

$$s\le\sigma\le S.$$

达布和有下列简单性质:

定理 1.1. *达布和 s,S 分别为黎曼和的下确界与上确界.*

证明. 因为 M_i 为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的上确界，因此有 $\forall\frac{\epsilon}{(b-a)}>0,\exists\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ 使得

$$M_i-\frac{\epsilon}{(b-a)}<f(\xi)\le M_i,$$

因此有

$$S-\epsilon<\sigma\le S.$$

下确界同理. □

注 1.1. 达布和与黎曼和都是未取极限的和式. 黎曼和由于 ξ_i 的任意性，因此是动态的概念.

定理 1.2. 如果把一些新的点加进既有的分点里，则达布下和 s 只可能因此增加；达布上和 S 只可能因此减少.

证明. 为了证明这个性质，只要讨论在既有分点中在加进一个分点 x' 的情况.

设这个点加在 x_k 与 x_{k+1} 之中，于是

$$x_k < x' < x_{k+1}$$

以 S' 表示新的上和，则 S' 与 S 仅在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 间不同，在这个区间中，S 对应的项为

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

而在 S' 中对应的项为

$$M'(x' - x_k) + M''(x_{k+1} - x')$$

其中 M', M'' 分别表示 $f(x)$ 在区间 $[x_k, x'], [x', x_{k+1}]$ 上的上确界，因为这些区间都包含于区间 $[x_k, x_{k+1}]$，因此有

$$M' \leq M_k,\ M'' \leq M_k,$$

因此有

$$M'(x' - x_k) + M''(x_{k+1} - x') \leq M_k(x' - x_k) + M_k(x_{k+1} - x') = M_k(x_{k+1} - x_k).$$

因此推得

$$S' \leq S.$$

□

定理 1.3. 任何一个达布下和都不超过任何一个达布上和，即使是对应于区间上另一划分的上和.

证明. 用任一方法分隔区间 $[a, b]$ 并做这个分隔的达布和

$$s_1 \text{ 与 } S_1,$$

先考虑区间 $[a, b]$ 的某一与第一个划分没有任何关系的划分方式. 对于的达布和为

$$s_2 \text{ 与 } S_2,$$

所要证的是 $s_1 \leq S_2$，为此我们把两种分点联合在一起，于是得到第三种划分，其达布和为

$$s_3 \text{ 与 } S_3.$$

因此有

$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2,$$

证毕. □

从上面的定理可知，任意划分的达布下和集合 $\{s\}$ 以任何一个达布上和 S 为上界，因此 $\{s\}$ 有有限上确界

$$I_* = \sup\{s\};$$

同理，任意划分的达布上和集合 $\{S\}$ 以任何一个达布下和 s 为下界，因此 $\{S\}$ 有有限下确界

$$I^* = \inf\{s\}.$$

因为上确界是最小上界，因此对于任意划分有

$$I_* \leq S,$$

因为下确界是最大下界，因此对于任意划分有

$$I^* \geq s.$$

另外，由上下确界的定义知对于 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists s^*, S^*$（即是两者不是同一划分下的）使得

$$I_* - \frac{\epsilon}{2} < s^* \leq S^* < I^* + \frac{\epsilon}{2},$$

即 $I_* \leq I^* + \epsilon$，由函数极限的不等式性（**??**）可知

$$I_* = \lim_{\epsilon \to 0} I_* \leq \lim_{\epsilon \to 0} I^* + \epsilon = I^*.$$

综上我们得到

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S.$$

其中 I_* 与 I^* 分别称之为**达布下积分**与**达布上积分**.

1.3 积分的存在条件

定理 1.4 (定积分存在的充分必要条件)**.** *定积分存在的充分必要条件为*

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0.$$

换句话说即是，$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta, \text{s.t.} S - s < \epsilon$ 成立.

证明. 必要性

假定定积分存在，即 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta$ 使得

$$|\sigma - I| < \frac{\epsilon}{2} \text{ 或 } I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma < I + \frac{\epsilon}{2}$$

成立.

因为 s 与 S 分别为黎曼和 σ 的上确界与下确界，因此 $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0$ 有

$$S - \frac{\epsilon}{2} < \sigma \leq S$$

因此有

$$S-\frac{\epsilon}{2}<\sigma<I+\frac{\epsilon}{2}$$

即

$$S<I+\epsilon;$$

同理成立

$$s>I-\epsilon.$$

综上有

$$I-\epsilon<s\leq S<I+\epsilon$$

即

$$\lim_{\lambda\to 0}s=I,\ \lim_{\lambda\to 0}S=I,$$

因此

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0.$$

充分性

设满足 $\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$，因为 $s\leq I_*\leq I^*\leq S$，因此 $I_*=I^*$，令 I 表示它们的公共值，有

$$s\leq I\leq S.$$

若把 σ 认为借助于和 s 与 S 所对应的那个区间划分而做出的诸多黎曼和中的一个，则有

$$s\leq\sigma\leq S.$$

因为 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall\lambda<\delta,\text{s.t.}S-s<\epsilon$ 成立, 所以

$$|I-\sigma|<\epsilon$$

也成立，即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I.$$

即定积分存在. □

若用 ω_i 表示第 i 部分区间的振幅 M_i-m_i，则有

$$S-s=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i.$$

则定积分存在的条件可以改写为

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

1.4 可积函数的种类

定理 1.5. 黎曼可积的函数一定为有界函数.

证明. 上文中已经证明. □

定理 1.6. 在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 可积.

证明. 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 由康托定理 (**??**) 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 即 $\forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\delta]$ 有

$$\lim_{\delta\to 0} f(x_1) - f(x_2) = 0.$$

因为 $f(x)$ 连续，由魏尔斯特拉斯第二定理（**??**）可知：设对于某一区间划分，函数 $f(x)$ 能在第 i 个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内的点 ξ_{i1} 处取得下确界 m_i，在点 ξ_{i2} 处取得上确界 M_i. 则

$$\lim_{\lambda\to 0} f(\xi_{i2}) - f(\xi_{i1}) = M_1 - m_1 = 0.$$

即对于 $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\lambda < \delta$ 有

$$\omega_i = M_i - m_i < \epsilon.$$

所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \epsilon\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \epsilon(b-a)$$

因此有 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$，即函数 $f(x)$ 可积. □

定理 1.7. 如果在 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 只有有限多个间断点，则它是可积的.

证明. 设间断点是 $x', x'', ..., x^{(k)}$. 任取 $\epsilon > 0$，则用长度为 ϵ 的诸邻域

$$(x' - \frac{\epsilon}{2}, x' + \frac{\epsilon}{2}), (x'' - \frac{\epsilon}{2}, x'' + \frac{\epsilon}{2}), ..., (x^{(k)} - \frac{\epsilon}{2}, x^{(k)} + \frac{\epsilon}{2})$$

来完全包住这些间断点. 在其余的闭区间上，有康托定理可知 $f(x)$ 是一致连续的. 即对于 $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$，使得 $\forall|x_1 - x_2| < \delta, \text{s.t.}|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. 把这个结论用在每一个闭区间上，得到 δ_i 序列，令 $\delta = \min\{\epsilon, \delta_i\}$.

现在分隔区间 $[a,b]$ 使得 $\lambda < \delta$. 此时我们得到两类区间：

1. 整个包含在不包含间断点的闭区间中，此时在这些的每个划分区间中 $f(x)$ 一致连续，且振幅 $\omega_i < \epsilon$；
2. 整个在包含间断点的开区间中，或部分与这些开区间相交.

因为已假定 $f(x)$ 有界，因此 $f(x)$ 在任意划分区间内的振幅 ω_i 小于等于在整个区间 $[a,b]$ 上的振幅 Ω.

把和

$$\sum_i \omega_i\Delta x_i$$

分成两个和分别分布在第一类区间和第二类区间上：

$$\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} \text{ 和 } \sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}.$$

对于第一个和，有

$$\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} \le \epsilon\sum_{i'}\Delta x_{i'} < \epsilon(b-a),$$

对于第二个和，我们指出，完整落入包含间断点的开区间的第二类划分区间的长度和小于 $k\epsilon$；部分落入包含间断点的开区间的第二类划分区间的个数小于 $2k$，因此长度总和小于 $2k\epsilon$. 因而

$$\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''} < \Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''} < \Omega\cdot 3k\epsilon.$$

因此有

$$\sum_{i}\omega_{i}\Delta x_{i} < \epsilon\cdot[(b-a)+3k\Omega]\to 0$$

即 $f(x)$ 可积. □

定理 1.8. 单调有界函数 $f(x)$ 永远是可积的.

证明. 设 $f(x)$ 为单调增函数，则其在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅为

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_i\omega_i\Delta x_i &= \sum_i[f(x_{i+1})-f(x_i)]\cdot\Delta x_i\\ &\le \lambda\sum_i f(x_{i+1})-f(x_i)\\ &= \lambda\cdot[f(b)-f(a)]\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 有界，因此 $\sum_i\omega_i\Delta x_i \le \lambda\cdot[f(b)-f(a)] \le \lambda\cdot\Omega\to 0$. 因此函数 $f(x)$ 可积. □

注 1.2. 函数的定积分存在与函数的不定积分（原函数）存在是不同的概念，前者非连续函数也可以成立，后者则必须要求为连续函数.（或某些有振荡间断点的函数）

1.5　可积函数的性质

定理 1.9. 若函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上可积的，则函数 $|f(x)|, kf(x)$（其中 k 为常数）在这区间上也是可积的.

证明. 因为对于区间 $[a,b]$ 上任意两点 x', x'' 有

$$||f(x'')|-|f(x')|| \le |f(x'')-f(x')| \le \omega_i,$$

因此 $|f(x)|$ 在这区间上的振幅 $\omega_i^* \le \omega_i$，由此

$$\sum_i\omega_i^*\Delta x_i \le \sum_i\omega_i\Delta x_i \to 0.$$

□

定理 1.10. 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则它们的和、差、积在区间上均可积.

证明. 由于可积函数均有界，因此设

$$|f(x)| \le K,\ |g(x)| \le L,$$

在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上任取两点 x',x'' 则，考虑差

$$\begin{aligned}|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')| &= |f(x'')g(x'')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x')g(x')| \\ &\le |f(x'')-f(x')|\cdot|g(x'')|+|g(x'')-g(x')|\cdot|f(x')|\end{aligned}$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅为 ω_i，$g(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅为 ω_i'，则

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')| \le |f(x'')-f(x')|\cdot|g(x'')|+|g(x'')-g(x')|\cdot|f(x')| \le \omega_i\cdot K+\omega_i'\cdot L.$$

设函数 $f(x)g(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅为 ω_i^*，则

$$\sum_i \omega_i^*\Delta x_i \le L\sum_i \omega_i\Delta x_i + K\sum_i \omega_i'\Delta x_i \to 0.$$

□

定理 1.11. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，那么它在该区间任意一部分区间 $[\alpha,\beta]$ 上也是可积的；反之若把 $[a,b]$ 分成若干（有限）部分区间，若 $f(x)$ 在每一部分区间可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

证明. 设 $\alpha=x_j,\beta=x_k$，由于振幅的定义，有 $\omega_i=M_i-m_i>0$，可知

$$\sum_{s=j}^{k}\omega_s\Delta x_s \le \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \to 0.$$

后半句显然. □

定理 1.12. 如果改变可积函数在有限个（$=k$）点上的值为其他有限值，则其可积性不改变.

证明. 所涉及的分割区间不会超过 k 个,设分别为 $[x_{n_1},x_{n_1+1}],...,[x_{n_k},x_{n_k+1}]$,记 $M=\max_{1\le i\le k}\{\omega_{n_i}\}$,则 k 个分割区间上有:

$$\sum_{i-1}^{k}\omega_{n_i}\Delta x_{n_i} \le k\lambda M \to 0.$$

□

注 1.3. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，不代表函数在区间 $[a,b]$ 上存在原函数.

2 定积分的性质

2.1 沿定向区间的积分

当说到从 a 到 b 的定积分时，我们总是认为 $a<b$，现在要去除这一限制. 为此我们建立定向区间的概念.

定义 2.1 (定向区间)**.** *满足不等式*

$$a \le x \le b \text{ 或 } a \ge x \ge b,$$

且顺序由 a 到 b 的 x 的集合称为定向区间，记为 $[a,b]$.

若 $a<b$ 则定向区间 $[a,b]$ 与 $[b,a]$ 在组成成分上完全一致，但在方向上有所不同.

定理 2.1. *若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的，则在区间 $[b,a]$ 上也是可积的，且有*

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 设 $b>a$，从 b 到 a 的方向插入分点：

$$x_0 = b > x_1 > x_2 > ... > x_i > x_{i+1} > ... > x_n = a$$

并对每一个部分区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上选出一个点 ξ_i 于是 $x_i \ge \xi_i \ge x_{i+1}$，做和：

$$\sigma' = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

此时 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$.

另外对于 $[a,b]$ 上，我们去相同的分点与 ξ_i，并去黎曼和 σ. 这样在两个定向区间上的黎曼和互为相反数. 即

$$\sigma' = -\sigma,$$

取极限有

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sigma' = -\lim_{\lambda\to 0}\sigma = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

作为定理的一个推理，我们有

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

在这里及以后，当讲到积分 $\int_a^b$ 时，我们始终认为 $a<b, b<a$ 都是可能的.

2.2 可以用等式表示的一些性质

定理 2.2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b],[a,c],[c,b]$ 中最大的一个上是可积的，则它在其他两个区间上也是可积的，不管点 a,b,c 的相互位置是怎样的，等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

恒成立.

证明. 首先令 $a < c < b$，并且函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，由定理1.11. 可知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c],[c,b]$ 上可积.

考虑把 $[a,b]$ 分成若干份，且 c 是这些分点中的一个，记为 x_k，做黎曼和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

取极限，因为函数在 $[a,b],[a,c],[c,b]$ 均可积，所以，上面三个和式的极限均存在:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=k+1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 a,b,c 其他位置时，可以化为这个等式，如设 $b < a < c$ 若 $f(x)$ 在 $[b,c]$ 可积，则

$$\begin{aligned}\int_b^c f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 2.3. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，则 $kf(x)$（k 为常数）在这区间上也可积，且

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.4. 若 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)\pm g(x)$ 在这区间上也可积，且

$$\int_a^b f(x)\pm g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 上面两定理中的 $kf(x), f(x)\pm g(x)$ 的可积性已经证毕. 至于等式，只需对黎曼和取极限即可，因为可积，所以极限存在，由极限的四则运算法则（定理??）即可证毕. □

2.3 可以用不等式表示的一些性质

定理 2.5. 若在区间 $[a,b]$ 上可积函数 $f(x)$ 是非负的，并且 $a<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

证明. 由于其黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

由数列极限不等式性推论（定理??）可知，其极限也是非负的. □

定理 2.6. 若在区间 $[a,b]$ 上可积函数 $f(x)$ 是正的，并且 $a<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

证明. 利用反证法.

若

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

由定积分存在的充分必要条件 (定理1.4) 可知在 $\lambda\to 0$ 时, 达布上和 S 也趋于 0, 即对于 $\forall\epsilon_1(b-a)>0,\exists\delta_1>0$, 若 $\lambda<\delta_1$ 有 $S<\epsilon_1(b-a)$, 即对于 $[a,b]$ 的诸多部分区间, 至少存在一个部分区间 $[a_1,b_1]$, 使 $f(x)$ 在该部分区间的上确界 $M<\epsilon_1$，即 $\forall x\in[a_1,b_1]$ 有

$$f(x)<\epsilon_1.$$

又因为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_1}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

而

$$\int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x \geq 0,\ \int_{b_1}^{b} f(x)\mathrm{d}x \geq 0,$$

所以

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

类似的，对于任意 $0<\epsilon_2<\epsilon_1$，在 $[a_1,b_1]$ 上可以分出部分区间 $[a_2,b_2]$ 使得 $\forall x\in[a_2,b_2]$ 有

$$f(x)<\epsilon_2,$$

如此下去.

取正数数序列 $\epsilon_k\to 0$，则一定可以取出一个套着一个，在长度上递减到零的一串区间 $[a_k,b_k]$，使得若 $x\in[a_k,b_k]$ 则

$$0<f(x)<\epsilon_k,$$

由区间套引理（??）可知，对于区间序列 $[a_k,b_k]$ 存在点 $c\in[a_k,b_k]$ $(k=1,2,...)$，使得

$$0<f(c)<\epsilon_k,$$

而 $\epsilon_k\to 0$，故矛盾. □

定理 2.7. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，且恒有 $f(x) \leq (<) g(x)$，则 $a < b$ 时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq (<) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 把定理2.5与定理2.6应用到函数 $f(x) - g(x)$ 上即可. □

注 2.1. 由定理*2.6*可知，虽然定积分也是极限的一种，但是黎曼和的极限不等式性比一般数列有更强的结论，即

$$\sigma > 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sigma > 0.$$

定理 2.8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，并且 $a < b$，则有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

成立.

证明. 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

应用定理2.7有

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

定理 2.9 (积分估值定理)**.** 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，其中 $a < b$，并且在这个区间上不等式

$$m \leq f(x) \leq M$$

成立，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

证明. 在区间 $[a, b]$ 上应用定理2.7 于函数 $m, f(x), M$，则

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x,$$

则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

□

定理 2.10 (积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上式可积的（$a \leqslant b$），并且 $m \leq f(x) \leq M$，则 $\exists \mu \in [m, M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

成立.

证明. 若 $a<b$ 则由估值定理可知

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$$

即

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M$$

令 $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即有

$$\mu(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $a>b$，则有 $m\le f(x)\le M$ 使得

$$\mu(a-b)=\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\mu(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

当被积函数为连续函数时，由魏尔斯特拉斯第二定理（**??**）可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能够取到最大值与最小值，若令最大值为 M，最小值为 m，则对于 $\mu\in[m,M]$ 由布尔查诺柯西第二定理（定理**??**）可知 $\exists c\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a).$$

定理 2.11 (推广积分中值定理)**.** *设 1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的；2) $m\le f(x)\le M$；3) $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变符号：$g(x)\le 0$ 或 $g(x)\ge 0$. 则存在 $\mu\in[m,M]$ 使得*

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 设 $g(x)\ge 0$，$a<b$ 则

$$m\cdot g(x)\le f(x)\cdot g(x)\le M\cdot g(x),$$

从而

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $g(x)\ge 0$，由定理2.5 可知

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ge 0,$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，则易知

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

此时对于 $\forall\mu\in(m,M)$，有所证成立.

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$，则易知

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq M.$$

令

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

证毕. □

$a < b$ 以及 $g(x) \leq 0$ 的情况类似.

如果 $f(x)$ 连续，则公式可改写为

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(c)g(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $c \in (a, b)$.

对于两个积分中值定理，需要做如下强调：对于形如 $I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) \cdot f(x)\mathrm{d}x$ 的定积分，要注意其中值 ξ 为 n 的数列，即 $I = \lim_{n\to\infty} g(\xi_n) \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，此时 ξ 不是常数.

2.4 变限函数与原函数存在性

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ $(a \lesseqgtr b)$ 可积，则由定理1.11 可知，它在区间 $[a, x]$ 上可积，其中 $x \in [a, b]$. 用变量 x 替换 b 后可得表达式

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

显然他是 x 的函数，这个函数有如下性质.

定理 2.12. *若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.*

证明. 对任意 $x \in [a, b]$ 取一个增量 Δx $(\Delta x \lesseqgtr 0)$，使得 $x + \Delta x \in [a, b]$，则

$$\begin{aligned}\Phi(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界，即 $f(x)$ 在区间 $[x, x + \Delta x]$ 上有有限的上下确界 M, m，由积分中值定理（定理2.10）可知存在 $\mu \in [m, M]$ 使得

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \mu \cdot \Delta x$$

因此
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\mu\cdot\Delta x=0,$$
即 $\Phi(x)$ 连续. □

注 2.2. 可积函数的种类我们在节1.4已经阐述，因此只要 $f(x)$ 可积，即 $f(x)$ 有界且有有限个间断点（无论是一类还是振荡），都有 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间内任意点（即使是在间断点）连续.

定理 2.13 (原函数存在性定理)**.** 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则 $\Phi(x)$ 在点 x 处可导，且
$$\Phi'(x)=f(x).$$

证明. 因为
$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\mu\cdot\Delta x$$
所以
$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\mu.$$
因为 $f(x)$ 在点 x 连续，所以对于 $\forall\frac{\epsilon}{2}>0,\exists\delta>0,\forall t\in[x,x+\delta],\mathrm{s.t.}|f(t)-f(x)|<\epsilon$, 即
$$f(x)-\frac{\epsilon}{2}<f(t)<f(x)+\frac{\epsilon}{2}.$$
设 M,m 是区间 $[x,x+\Delta x]$ 的上下确界，则 $\forall\frac{\epsilon}{2}>0,\exists t\in[x,x+\Delta x]$ 有（注意此处是存在 t，这个 t 仅做中介，链接 $\epsilon-\delta$ 不等式与确界不等式）
$$M-\frac{\epsilon}{2}<f(t)\le M;$$
$$m\le f(t)<m+\frac{\epsilon}{2}.$$
即
$$f(x)-\frac{\epsilon}{2}<f(t)<m+\frac{\epsilon}{2};$$
$$M-\frac{\epsilon}{2}<f(t)<f(x)+\frac{\epsilon}{2}.$$
即
$$f(x)-\epsilon<m,\ M<f(x)+\epsilon,$$
因此有
$$f(x)-\epsilon<m\le\mu\le M<f(x)+\epsilon,$$
即
$$|f(x)-\mu|<\epsilon.$$
即
$$\lim_{\Delta x\to 0}\mu=f(x),$$
因此
$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\mu=f(x).$$
□

注 2.3. 本证明用到的技巧：联立确界不等式 在证明 $s \le I_* \le I^* \le S$ 以及证明定积分存在的充要条件（定理*1.4*）中也有应用。

至此我们得到重要结论，如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则由定理1.6可知，$f(x)$ 在区级 $[a,b]$ 上可积. 并且对 $[a,b]$ 上的任意一点 x，积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 对 x 的导数等于被积函数在这点 x 的值 $f(x)$. 换句话说：对于在区间 $[a,b]$ 上的连续函数，一定存在原函数，且函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是一个例子.

注 2.4. 若 $f(x)$ 在区间 χ 上有可去间断点 x_0，且在 $\chi\backslash\{x_0\}$ 上连续，则可以通过修改定义的方法构造出连续函数 $g(x)$，因为改变有限个点不改变定积分的值，因此 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，此时 $F(x)$ 仍是可导的，但是在 x_0 的导数等于 $g(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，即：$F(x)$ 在 x_0 可导，但是 $F(x)$ 在区间 χ 上不是 $f(x)$ 的原函数，或者说 $f(x)$ 在区间 χ 上没有原函数.

综上，我们有以下结论：

1. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则原函数存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 原函数，即 $F'(x)=f(x)$；
2. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有可去间断点 x_0，则原函数不存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不是 $f(x)$ 原函数，但 $F(x)$ 可导，且 $F'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$；
3. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有跳跃间断点 x_0，则原函数不存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不是 $f(x)$ 原函数，且 $F(x)$ 不可导；
4. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有无穷间断点 x_0，则原函数不存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不存在（$f(x)$ 不可积）；
5. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有振荡间断点 x_0，则原函数可能存在，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可能是 $f(x)$ 原函数.