微积分 I: 不定积分

Calculus I: Indefinite integral

王浩铭

2017 年 · 夏

这篇笔记的参考资料为同济大学《高等数学》与菲赫金戈尔茨《微积分学教程》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 不定积分与其计算

1.1 不定积分的概念

定义 1.1 (原函数)**.** 如果在整个区间上，$f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导数，或 $f(x)\mathrm{d}x$ 是 $F(x)$ 的微分，则在所给定区间上，称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数或 $f(x)$ 的积分.

定理 1.1. 如果在某个区间 χ（有限的或无穷的，闭的或非闭的）上，函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么，$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数. 反过来说，在区间 χ 上 $f(x)$ 的每一个原函数可表示成这种形式.

证明. 这里证明限于 χ 是有界闭区间的情况.

$F(x)$ 与 $F(x)+C$ 同是 $f(x)$ 的原函数, 这个情形时十分明显的, 因为 $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$.

现设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任意一个原函数，于是在区间 $[a,b]$ 上有

$$\Phi'(x) = f(x)$$

即 $\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的导数，由推论**??**可知 $\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 相差一个常数，即

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

这正是所要证明的. □

有此定理可知，若要知道给定函数的所有原函数，只需要求出一个原函数即可，因为它们彼此之间只差一个常数.

定义 1.2 (不定积分)**.** 表达式 $F(x)+C$ 是导数为 $f(x)$ 或微分为 $f(x)\mathrm{d}x$ 的一般形式，其中 C 为任意常数，称此表达式为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

注意. 这个记号已经暗含有任意常数，因此再求函数的不定积分时，不可丢掉 C. 称 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，函数 $f(x)$ 为被积函数.

从不定积分的定义中直接推出如下性质:

1. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$,

   即是，记号 d 与 $\int$，当前者在后者前面时，可互相消去.

2. 因为 $F(x)$ 是函数 $F'(x)$ 的一个原函数，我们有

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

   这个式子可以写成

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

   可见，记号 d 与 $\int$，当前者再后者后面时，也可互相消去，但需在 $F(x)$ 后面加上 C.

1.2 基本积分法则

1. 若 a 是常数 $(a \neq 0)$，则
$$\int a \cdot f(x)\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\mathrm{d}x.$$
对右端表达式取微分有
$$\mathrm{d}[a \cdot \int f(x)\mathrm{d}x] = a \cdot \mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = a \cdot f(x)\mathrm{d}x,$$
所以右端表达式是左端表达式被积表达式的原函数，这正是所要证明的. 因此常数因子可以拿到积分号外面来.

2. $\int[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$
对右端表达式取微分有
$$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x] = \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}\int g(x)\mathrm{d}x = [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x;$$
所以右端表达式是左端表达式被积表达式的原函数，这正是所要证明的. 因此微分式的和（或差）的不定积分，等于每个微分式各自不定积分的和或差.

注意. 关于这两个公式，我们要注意下面这一点. 这两个公式中的每个不定积分都包含一个任意常数项. 这类等式应理解为等式左右两端差的是一个常数. 也可以从字面上来理解这些等式，但这时所有出现于其中的积分之中，有一个积分不再是任意原函数：这个积分中的积分常数，在其他几个积分常数选定之后，就被确定了.

例如，对于第一个公式：确定左端积分常数为 C_1，那么右端常数就被确定了，在这里也只能为 C_1；对于第二个公式：确定左端积分常数为 C_2，右端第一个式子的积分常数为 C_3，那么右端第二个式子的积分常数就被确定了，在这里只能为 $C_2 - C_3$. 这个不是任意原函数的积分，可以是每个公式中的任何一个不定积分.

3. 若
$$\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C,$$
则
$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C'.$$
易知
$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{d}F(ax+b) = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b),$$
即 $\frac{1}{a}F(ax+b)$ 是函数 $f(ax+b)$ 的一个原函数，所求得证.

注 1.1. 从上面三个例子可以看到，欲证明两个不定积分相等，一种常用的方法是对其中任意一个取微分，使其结果等于另一个不定积分的被积表达式，这样就说明该被积表达式中的被积函数的原函数为另一项不定积分，从而证毕. 这种方法可以证明第一类与第二类换元积分法.

1.3　换元积分法

定理 1.2 (第一类换元积分法（凑微分法）). 设 $g(t)$ 有原函数 $G(t)+C$，$t=\omega(x)$ 可导，则

$$\begin{aligned}\int g(\omega(x))\omega'(x)\mathrm{d}x &= \int g(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=\omega(x)}\\ &= G(t)|_{t=\omega(x)}+C=G(\omega(x))+C.\end{aligned}$$

证明. 对右端不定积分取微分有

$$\mathrm{d}\int g(t)\mathrm{d}t=g(t)\mathrm{d}t=g(\omega(x))\omega'(x)\mathrm{d}x.$$

即 $G(\omega(x))+C$ 是 $G'(\omega(x))\omega'(x)$ 的原函数，所求得证. □

注意. 第一类换元积分法的应用场景通常是这样的，在题目中给出式 $\int g(\omega(x))\omega'(x)\mathrm{d}x$，由此我们有原积分 $I=\int g(\omega(x))\mathrm{d}\omega(x)=\int g(t)\mathrm{d}t=G(t)+C=G(\omega(x))+C$.

其中，积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 要比 $\int g(\omega(x))\omega'(x)\mathrm{d}x$ 易求得.

现在可以看出不定积分性质 3 实质上就是化成线性替换 $t=ax+b$:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)=\frac{1}{a}\int f(t)\mathrm{d}t.$$

有时运用替换法的方式与上述方式不同，即是，在被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 中直接以新变量 t 的函数 $x=\phi(t)$ 代替 x.

这里举几道例题

1. $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{a}\\ &= \frac{1}{a}\cdot\arctan\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

2. $\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-a)(x+a)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a}\int\frac{1}{(x-a)}-\frac{1}{(x+a)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\cdot(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.\end{aligned}$$

3. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x\\ &= \int\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\frac{x}{a}\\ &= \arcsin\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

注 1.2. 对于 $\frac{1}{a^2\pm x^2}$ 型的被积函数，我们把分母中的 a^2 提出，把 $\frac{1}{a}$ 分给微分号后面，凑成 $\mathrm{d}\frac{x}{a}$，这样积分号前剩余一个 $\frac{1}{a}$；而对于 $\frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}$ 型的被积函数，由于根号的作用，只能提出一个 $\frac{1}{a}$，凑微分后，积分号前就没有常数 $\frac{1}{a}$ 了.

4. $\int \sin^2 x\cos^5 x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^5 x\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}\sin x\\ &= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}\sin x\\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C.\end{aligned}$$

5. $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{(1+\cos 2x)^2}{4}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\int 1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+C.\end{aligned}$$

6. $\int \sec^6 x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sec^6 x\mathrm{dx} &= \int(1+\tan^2 x)^2\mathrm{d}\tan x\\ &= \int 1+2\tan^2 x+\tan^4 x\mathrm{d}\tan x\\ &= \tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^x+C.\end{aligned}$$

7. $\int \tan^5 x\sec^3 x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\sec^3 x\mathrm{d}x &= \int \tan^4 x\sec^2 x\mathrm{d}\sec x\\ &= \int(\sec^2 x-1)^2\sec^2 x\mathrm{d}\sec x\\ &= \frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C.\end{aligned}$$

8. $\int \mathrm{csc}x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{csc}x\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}\frac{x}{2}\\ &= \int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\frac{x}{2}=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}\\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

又因为

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\mathrm{csc}x-\cot x,$$

因此不定积分又可以表示为

$$\int \mathrm{csc}x\mathrm{d}x=\ln|\mathrm{csc}x-\cot x|+C.$$

9. $\int\sec x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int\sec x\mathrm{d}x&=\int\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\frac{x}{2}\\&=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C.\\&=\ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned}$$

10. $\int\cos 3x\cos 2x\mathrm{d}x$

由积化和差公式:

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)],$$

得

$$\cos 3x\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos(x)+\cos(5x)],$$

因此

$$\begin{aligned}\int\cos 3x\cos 2x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int[\cos(x)+\cos(5x)]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.\end{aligned}$$

注 1.3. 作为总结我们有:

1) 一般的，对于 $\sin^{2k+1}x\cos^n x$ 或 $\sin^n x\cos^{2k+1}x$ $(k\in N)$ 型函数的积分，总可以把做变换 $u=cos^n x$ 或 $u=\sin^n x$，并利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 求得结果；

2) 一般的，对于 $\sin^{2k}x\cos^{2l}x$ $(k,l\in N)$ 型函数的积分，需要运用降幂公式

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

化为 $\cos 2x$ 的多项式或有理函数，并求得积分.

3) 一般的，对于 $\tan^n x\sec^{2k}x$ 或 $\tan^{2k-1}\sec^n x$ $(n,k\in N^+)$ 型函数的积分，可以做换元 $u=\tan x$ 或 $y=\sec x$，以及公式

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x,\ \tan' x=\sec^2 x,\ \sec' x=\sec x\tan x$$

化为 $\tan x$ 或 $\sec x$ 的多项式或有理函数，并求得积分.

此外，我们还有

$$1+\cot^2 x=\mathrm{csc}^2x,\ \cot'(x)=-\mathrm{csc}^2x,\ \mathrm{csc}'x=-\mathrm{csc}x\cot x.$$

4) 因为 $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，$\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$，所以有

$$
\begin{aligned}
\sec(x+\frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin x} = -\csc x;\\
\csc(x+\frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos x} = \sec x;\\
\tan(x+\frac{\pi}{2}) &= \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x;\\
\cot(x+\frac{\pi}{2}) &= \frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.
\end{aligned}
$$

5) 和差化积公式：

$$
\begin{aligned}
\cos A+\cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\
\sin A+\sin B &= -\left(\cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= -2\cos\frac{A+B+\pi}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\
\cos A-\cos B &= \cos A+\cos(B+\pi)\\
&= 2\cos(\frac{A+B+\pi}{2})\cos\frac{A-B-\pi}{2}\\
&= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
\sin A-\sin B &= \sin A+\sin -B\\
&= 2\sin\frac{A+(-B)}{2}\cos\frac{A-(-B)}{2}\\
&= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.
\end{aligned}
$$

积化和差公式：

$$
\begin{aligned}
\cos A\cdot\cos B &= \frac{1}{2}\cdot[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\\
\sin A\cdot\sin B &= \cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot[\cos(A+B-\pi)+\cos(A-B)]\\
&= -\frac{1}{2}\cdot[\cos(A+B)-\cos(A-B)]\\
\sin A\cdot\cos B &= \cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos B\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(A+B-\frac{\pi}{2})+\cos(A-B-\frac{\pi}{2})\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot[\sin(A+B)+\sin(A-B)]
\end{aligned}
$$

11. $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x\ (a^2+b^2\neq 0)$

考虑 m,n 使得

$$\begin{aligned}a_1\sin x+b_1\cos x&=m(a\sin x+b\cos x)+n(a\sin' x+b\cos' x)\\&=m(a\sin x+b\cos x)+n(a\cos x-b\sin x)\\&=(ma-nb)\sin x+(mb+na)\cos x.\end{aligned}$$

即

$$ma-nb=a_1,\ mb+na=b_1$$

因此 $m=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$；$n=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$，所以有

$$\begin{aligned}\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{m(a\sin x+b\cos x)+n(a\sin' x+b\cos' x)}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x\\&=m\int\mathrm{d}x+n\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}a\sin x+b\cos x\\&=mx+n\ln|a\sin x+b\cos x|+C\\&=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C.\end{aligned}$$

定理 1.3 (第二类换元积分法)**.** 设 $x=\phi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\phi'(t)\neq0$，又设 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 具有原函数，则有：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t\bigg|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

其中 $\phi^{-1}(x)$ 是 $x=\phi(t)$ 的反函数.

证明. 第一种证法：对左端不定积分取微分，证明方法与第一类换元积分法完全一致. □

证明. 第二种证法：对右端不定积分取微分.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t=f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t&=f(\phi(t))\phi'(t)\cdot t'_x\mathrm{d}x\\&=f(\phi(t))\phi'(t)\cdot\frac{1}{\phi'(t)}\mathrm{d}x=f(\phi(t))\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 是 $f(x)$ 的原函数，证毕. □

注 1.4. $t=\phi^{-1}(x)$ 这里的 t,x 是在换元之前，因此 $t'_x=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ 的自变量仍为 t，即 $t'_x=\frac{1}{\phi'(t)}$，这一点在反函数求导法则（定理**??**）的附注中已经说明.

注意. 第一类换元积分法是将原积分被积表达式的部分函数换元为新变量，从而简化计算；第二类换元积分法是将将原积分被积表达式的变量换元为新函数（有反函数的函数），从而简化计算.

第一类换元积分法与第二类换元积分法完全等价，只是两者是从不同的方向来考虑的.

第二类换元积分法主要有几种应用：

1. **三角换元.**

   利用下列恒等式：

   $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

   以及

   $$\mathrm{d}\tan x = \sec^2 x \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\sec x = \sec x \tan x \mathrm{d}x.$$

   换元遵循如下原则：

   1) 如果被积函数有因子 $\sqrt{a^2 - x^2}$，则做代换 $x = a\sin u$，利用 $\sin' x = \cos x$，$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ 化去根式；

   2) 如果被积函数有因子 $\sqrt{a^2 + x^2}$，则做代换 $x = a\tan u$，利用 $\tan' x = \sec^2 x$，$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$ 化去根式；

   3) 如果被积函数有因子 $\sqrt{x^2 - a^2}$，则做代换 $x = a\sec u$，利用 $\sec' x = \sec x \tan x$，$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$ 化去根式. 注意还需对两个定义域区间分别求原函数.

2. **万能公式.**

   令 $\tan\frac{x}{2} = u$，利用下列恒等式：

   $$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2},$$

   $$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 - u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1 + u^2}\mathrm{d}u$$

   将三角被积函数化为有理函数积分.

3. **根式换元.**

   对于被积函数中存在简单根式 $\sqrt[n]{ax + b}$ 或者 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，可以令这个简单根式为 u. 由于这样的变换有反函数，且反函数是 u 的有理函数，因此原积分即可化为有理函数积分.

4. **正代换、反代换、倒代换.**

   这三种代换是计算不定积分与定积分的核心手段. 倒代换在计算不定积分时，常用与分母最高次幂高于分子的情形；在计算定积分时则可以将无穷区间转化为有限区间，即将反常积分转化为定积分，常用与含有 $\ln x$ 的情形.

下面举几道例题：

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \ (a > 0)$

令 $x=a\sin u$，其中 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ 有：

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\mathrm{d}a\sin u\\&=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\mathrm{d}u\\&=a^2\int\cos^2 u\mathrm{d}u\\&=\frac{a^2}{2}\int 1+\cos 2u\mathrm{d}u\\&=\frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{2}\sin u\cos u+C.\end{aligned}$$

因为 $x=a\sin u$，且 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$，所以 $u=\arcsin\frac{x}{a},\cos u=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，代入有：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

2. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$

令 $x=a\tan u$，其中 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$，有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{a\tan^2 u+a^2}}\mathrm{d}a\tan u\\&=\int\frac{1}{\sec u}\cdot\sec^2 u\mathrm{d}u\\&=\int\sec u\mathrm{d}u=\ln|\sec u+\tan u|+C.\end{aligned}$$

因为 $x=a\tan u$，且 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sec u=\frac{1}{\cos u}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，代入有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x&=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C\\&=\ln|\sqrt{a^2+x^2}+x|+C.\end{aligned}$$

3. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$

注意到被积函数的定义域是 $x>a,x<-a$ 两个区间，我们在两个区间内分别求不定积分.

当 $x>a$ 时，设令 $x=a\sec u$，其中 $0<u<\frac{\pi}{2}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2 u-a^2}}\mathrm{d}a\sec u\\&=\int\frac{1}{\tan u}\cdot\sec u\tan u\mathrm{d}u\\&=\int\sec u\mathrm{d}u\\&=\ln|\sec u+\tan u|+C.\end{aligned}$$

因为 $x=a\sec u$，且 $0<u<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan u=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，代入有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C.\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.\end{aligned}$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$ 代入上式有：

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\mathrm{d}u\\&=-\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|+C\\&=-\ln|-x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\\&=\ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-a^2-x^2}\right|+C\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.\end{aligned}$$

综上有

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

4. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}$，代入

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x&=\int\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\cdot t^4\cdot-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\\&=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}|t|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

若 $t>0$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x&=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}t\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{a^2}\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2t^2-1)\\&=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C.\end{aligned}$$

若 $t<0$，有相同的结果.

5. $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{1-\ln\frac{1}{t}}{(\frac{1}{t}-\ln\frac{1}{t})^2}\mathrm{d}\frac{1}{t}=-\int\frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}\mathrm{d}t\\&=-\int\frac{1}{(1+t\ln t)^2}\mathrm{d}(1+t\ln t)=\frac{1}{1+t\ln t}+C\\&=\frac{1}{1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.\end{aligned}$$

1.4 分部积分法

设 $u=f(x)$ 与 $v=g(x)$ 两个都是 x 的函数，具有连续导数 $u'=f'(x), v'=g'(x)$. 在这种情形下，依乘积的微分法则，$\mathrm{d}uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ 或 $u\mathrm{d}v = \mathrm{d}uv - v\mathrm{d}u$. 易知 $\mathrm{d}uv$ 的原函数为 uv，因此有

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

这个公式就是所谓的**分部积分公式**.

分部积分法应用的范围比换元法受到更多的限制，但是有许多积分（多为多项式与三角函数、指数函数、对数函数的乘积形成的函数），例如

$$\int x^k \sin bx\mathrm{d}x,\ \int x^k \cos bx\mathrm{d}x,\ \int x^k e^{ax}\mathrm{d}x;$$

$$\int x^k \ln^m x\mathrm{d}x;$$

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x,\ \int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{1}{(x^2+x^2)^n}\mathrm{d}x.$$

等等只有借助分部积分法来计算.

注 1.5. 对于上面举例的不定积分：第一行的情形，一般把三角函数与指数函数先凑到微分号后面，再分部；第二行的情形，一般把幂函数的部分先凑到微分号后面，再分部（因为对数函数的原函数复杂，不好凑）；第三行的情形，先凑那种都可以，但需要凑两次.

重复应用分部积分法则，可以得到**分部积分法的推广公式**.

假设，函数 u, v 在所考虑的区间上有直至第 $(n+1)$ 阶的各阶连续导数：

$$u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)},$$

我们有：

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\mathrm{d}u = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\mathrm{d}x.$$

类似的

$$\int u'v^{(n)}\mathrm{d}x = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)},$$

$$\int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u^{(n)}v'\mathrm{d}x = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

综上

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x =& uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots \\ &+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当被积表达式的因式中之一是整多项式时，利用这个公式是特别方便的. 如果 u 是 n 次多项式，那么 $u^{(n+1)}$ 恒等于 0，于是左端的积分可得到最后表达式：

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + C;\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i u^{(i)}v^{(n-i)} + C.\end{aligned}$$

分部积分法有四种应用场景：

1. **一般分部.**

   通过凑微分将被积表达式中的部分凑入微元中，在利于分部积分公式计算；

2. **推广分部.**

   对于 $f \cdot g$ 型被积表达式，若 g 的 1 阶到 $n+1$ 阶原函数易求，则可以套用推广的分部积分公式；对于某些不好求的形式如 $\ln^m x$，则可以通过做换元将其转化为好求的形式；

3. **双重分部.**

   对于形如 $\int \sin ax \cdot e^{bx}\mathrm{d}x$ 的不定积分，需要做两次分部积分运算从而求解，分部对象是 $\sin ax$ 或是 e^{bx} 均可以.

4. **微元提前.**

   这是十分重要的一项技巧，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\mathrm{d}x.$$

下面我们讲几个例子

1. $\int x^2 \sin x \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}I = \int x^2 \mathrm{d}(-\cos \mathrm{x}) &= -x^2\cos x - \int(-\cos x)\mathrm{d}x^2\\ &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\mathrm{d}\sin x\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\mathrm{d}x\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.\end{aligned}$$

   分部积分法在这里共用了两次

   同样的，重复应用这个法则，可以计算

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x,\ \int P(x)\sin bx\mathrm{d}x, \int P(x)\cos bx\mathrm{d}x,$$

   其中 $P(x)$ 是 x 的整多项式.

2. 如果利用分部积分法的推广公式，就可以立即得到这种类型的积分的普遍表达式.

令 $v^{(n+1)} = e^{ax}$，即有

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a},\ v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2},\ v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3}, \dots,$$

因此若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则由分部积分法推广公式有

$$\begin{aligned}\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x &= e^{ax}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{P^{(i)}(x)}{a^{i+1}} + C;\\ &= e^{ax}\left[\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P'''}{a^3} - \dots\right] + C.\end{aligned}$$

同样的，如果取 $v^{(n+1)} = \sin bx$，那么

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b},\ v^{(n-1)} = -\frac{\sin bx}{b^2},\ v^{(n-2)} = \frac{\cos bx}{b^3}, \dots,$$

由此有公式

$$\int P(x)\sin bx\mathrm{d}x = \sin bx\cdot\left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \dots\right] - \cos bx\cdot\left[\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \dots\right] + C.$$

同样的

$$\int P(x)\cos bx\mathrm{d}x = \sin bx\cdot\left[\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \dots\right] - \cos bx\cdot\left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \dots\right] + C.$$

注 1.6. 利用分部积分法推广公式能够求解积分 $\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x$, $\int P(x)\sin bx\mathrm{d}x, \int P(x)\cos bx\mathrm{d}x$ 的原因在于 $e^{ax}, \sin bx, \cos bx$ 的原函数好求，因此令其为 $v^{(n+1)}$ 则 $v^{(n)}, v^{(n-1)}, \dots$ 也就方便求出来了；而形如 $\int x^k\ln^m x\mathrm{d}x$ 这样的积分由于 $\ln^m x$ 的原函数相对难求，因此不能像上面的方法利用分部积分推广公式求解，如下.

3. $\int x^3\ln^2 x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{4}\int\ln^2 x\mathrm{d}x^4 = \frac{1}{4}\cdot\left[x^4\ln^2 x - \int x^4\mathrm{d}\ln^2 x\right]\\ &= \frac{1}{4}\cdot\left[x^4\ln^2 x - \int x^4\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right] = \frac{x^4\ln^2 x}{4} - \frac{1}{2}\int x^3\ln x\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^4\ln^2 x}{4} - \frac{1}{8}\left[\int\ln x\mathrm{d}x^4\right] = \frac{x^4\ln^2 x}{4} - \frac{1}{8}\left[x^4\ln x - \frac{x^4}{4}\right] + C\\ &= \frac{1}{4}x^4\left[\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right] + C.\end{aligned}$$

对于这类积分，例如计算

$$\int x^k\ln^m x\mathrm{d}x,$$

其中 k 是任意常数，而 $m = 1, 2, 3, \dots$. 如果令 $u = \ln^m x$，则利用分部积分可以得到**递推公式**:

$$\begin{aligned}\int x^k\ln^m x\mathrm{d}x &= \int\ln^m x\mathrm{d}\frac{x^{k+1}}{k+1}\\ &= \frac{1}{k+1}\cdot\left[x^{k+1}\ln^m x - \int x^{k+1}\cdot m\ln^{m-1}x\cdot\frac{1}{x}\right]\\ &= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^m x - \frac{m}{k+1}\int x^k\ln^{m-1}x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

用这公式计算所考虑的积分时，能化为同一类型的积分，但是 $\ln x$ 的指数少了一次.

值得注意的是如果做替换 $t=\ln x$ 可以把所考虑积分化为能够利用分部积分推广公式的形状：

$$\int t^m e^{(k+1)t}\mathrm{d}t,$$

此时令 $u=t^m, v^{(n+1)}=e^{(k+1)t}$，则有

$$v^{(n)}=\frac{e^{(k+1)t}}{k+1},\ v^{(n-1)}=\frac{e^{(k+1)t}}{(k+1)^2},\cdots$$

因此例 3 的积分可以如下解

$$\begin{aligned}\int x^3\ln^2 x\mathrm{d}x=\int e^{3t}t^2e^t\mathrm{d}t&=\int e^{4t}t^2\mathrm{d}t\\&=t^2\cdot\frac{e^{4t}}{4}-2t\cdot\frac{e^{4t}}{16}+2\cdot\frac{e^{4t}}{64}\end{aligned}$$

代入 $t=\ln x, e^{4t}=x^4$，有

$$I=\frac{\ln^2 x\cdot x^4}{4}-\frac{\ln x\cdot x^4}{8}+\frac{x^4}{32}+C=\frac{1}{4}x^4\left[\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right]+C.$$

这种解法同时利用了换元积分法与分部积分法.

4. 考察积分 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$，$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$.

对于第一个积分，令 $e^{ax}=v'$，则有

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x&=\frac{1}{a}\cdot\int\cos bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}\cdot\left[\cos bxe^{ax}-\int e^{ax}\mathrm{d}\cos bx\right]\\&=\frac{1}{a}\cdot\int\cos bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}\cdot\cos bxe^{ax}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同样令 $e^{ax}=v'$，则有

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x&=\frac{1}{a}\cdot\int\sin bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}\cdot\left[\sin bxe^{ax}-\int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx\right]\\&=\frac{1}{a}\cdot\int\sin bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}\cdot\sin bxe^{ax}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

联立有

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x&=\frac{1}{a}\cdot\cos bxe^{ax}+\frac{b}{a}\cdot\left[\frac{1}{a}\cdot\sin bxe^{ax}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{a}\cdot\cos bxe^{ax}+\frac{b}{a^2}\sin bxe^{ax}-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\cos bxe^{ax}+\frac{b}{a^2}\sin bxe^{ax},$$

因此有

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

类似的有

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C'.$$

注 1.7. 若令 $\cos ba = v'$ 该积分也可求解，如下

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\sin ab = \frac{1}{b}\cdot\left[e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\mathrm{d}e^{ax}\right]\\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int \sin bxe^{ax}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x &= -\frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\sin ab = -\frac{1}{b}\cdot\left[e^{ax}\cos bx - \int \cos bx\mathrm{d}e^{ax}\right]\\ &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int \cos bxe^{ax}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

联立有

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\cdot\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int \cos bxe^{ax}\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int \cos bxe^{ax}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

因此有

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

5. 作为应用分部积分法的最后一个例子，我们计算积分 $J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$ 的递推公式.

令 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$，即有

$$\begin{aligned}J_n &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int \frac{-2nx^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x\\ &= J_n - a^2 J_{n+1}.\end{aligned}$$

因此有

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot(J_n - a^2 J_{n+1})$$

即

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}\cdot J_n + \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}.$$

其中 $J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\tan\frac{x}{a}$.

2 有理函数的部分分式法

2.1 有理函数与部分分式

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数，又称为有理分式，我们假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于（注意，不等于）分母多项式 $Q(x)$ 的次数时，称这个有理函数为真分式，否则称为假分式，本小节我们论述三项技术：1）把假分式化为多项式与真分式之和的形式；2）把真分式化为部分分式之和的形式；3）求待定系数，在下一小节我们则将论述部分分式的积分方法.

2.1.1 （一）把假分式化为多项式与真分式之和的形式

1. 多项式除法. 利用多项式除法，总可以将一个假分式化为一个多项式与一个真分式之和的形式，考虑到

$$\begin{array}{r|l} & c \\ \hline b & a \\ & \underline{} \\ & d \end{array}$$

有 $a = c \cdot b + d$，因此对于多项式除法有

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 1 \\ \hline x^2+1 & 2x^4 + x^2 + 3 \\ & \underline{2x^4 + 2x^2 } \\ & -x^2 + 3 \\ & \underline{-x^2 - 1} \\ & 4 \end{array}$$

因此

$$2x^4 + x^2 + 3 = \big(2x^2 - 1\big) \cdot \big(x^2 + 1\big) + 4,$$

即

$$\frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1}.$$

2. 加减配凑法. 相比于多项式除法，利用配凑法，有时能更方便地将假分式化为真分式：

$$\begin{aligned} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} &= \frac{x^2(2x^2 + 2) - 2x^2 + x^2 + 3}{x^2 + 1} \\ &= 2x^2 + \frac{-x^2 - 1 + 4}{x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

注 2.1. *加减配凑法在计算部分分式的定积分中也有应用，是很有效的手段.*

2.1.2 （二）把真分式化为部分分式之和的形式

对于如下分式：

$$\text{I.}\frac{A}{x-a},\ \text{II.}\frac{A}{(x-a)^k},\ \text{III.}\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \text{IV.}\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

其中 A, M, N, a, p, q 都是实数, $k, m = 2, 3, \ldots$; 此外对于 III. IV. 类型的分式, 假定三项式 x^2+px+q 没有实根，即

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \text{ 或 } q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

称之为**部分分式**. 对于一个分母已经完全因式分解的真分式可以按如下方法分解为有限个部分分式之和:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{(x-a)^k(x^2+px+q)^m} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^3} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.\end{aligned}$$

举几个例子:

1. $\frac{3x^2+1}{x(x+1)^2}$

$$\frac{3x^2+1}{x(x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}.$$

注 2.2. 还有另一种拆分方法，即

$$\frac{3x^2+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{M_1x+N_1}{(x+1)^2}.$$

这两种拆分的方法本质是一样的，因为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x+1)^2} = \frac{M_1(x+1)-M_1+N_1}{(x+1)^2} = \frac{M_1}{x+1} + \frac{N_1-M_1}{(x+1)^2}.$$

2. $\frac{x^4}{x^3+1}$

$$\frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x(x^3+1)-x}{x^3+1} = x - \frac{x}{x^3+1},$$

由立方和公式可知

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{x^2-x+1}.$$

因此原有理函数拆分为

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x - \frac{A}{x+1} - \frac{M_1x+N_1}{x^2-x+1}.$$

注 2.3. 考虑到 $x^2-1=(x-1)(x+1)$，$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，猜测这一规律具有普遍性，设

$$x^n - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}),$$

则

$$\begin{aligned}x^{n+1}-1 &= x^{n+1}-x^n+x^n-1 = x^n(x-1)+x^n-1 \\ &= x^n(x-1)+(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} \\ &= (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n).\end{aligned}$$

因此猜测成立.

与之相似的，当 n 为奇数时

$$\begin{aligned}x^n+1&=-1\cdot((-x)^n-1)\\&=(x+1)(1-x+x^2+\cdots-x^{n-2}+x^{n-1})\\&=(x+1)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i\end{aligned}$$

当 n 为偶数时, 没有一般规律, 但是当 n 可以表示一个奇数与偶数的乘积时, 如 $n=10=2\times5$, 则

$$x^{10}+1=(x^2)^5+1=(x^2+1)\cdot(1-x^2+x^4-x^6+x^8).$$

特别地，当 $n=3$ 时

$$\begin{aligned}x^3-1&=(x-1)(x^2+x+1);\\x^3+1&=(x+1)(x^2-x+1).\end{aligned}$$

2.1.3 （三）待定系数求法

求待定系数主要的方法有四种

1) 构造方程组

2) 留数法：等式两边同时乘以某个因子，再令该因子为零，解出待定系数；

3) 极限法：如果已经求得几个待定系数，可以用对 x 取极限的方法求得剩余待定系数；

4) 特殊值法：如果已经求得几个待定系数，可以用对 x 取特殊值的方法求得剩余待定系数；

求待定系数时需要注意：

1. **对于 $\frac{P(x)}{(x+a)^k}$ 型有理函数：**

$$\frac{P(x)}{(x+a)^k}=\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x+a)^k}$$

> 对于 A_1 的系数可以两侧乘 $(x+a)$ 并用**极限法**求得：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{(x+a)^{k-1}}&=\lim_{x\to\infty}A_1+\frac{A_2}{x+a}+\cdots+\frac{A_k}{(x+a)^{k-1}}\\&=A_1.\end{aligned}$$

> 对于 A_k 的系数可以两侧乘 $(x+a)^k$ 并用**留数法**求得：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{(x+a)^k}\cdot(x+a)^k&=\frac{A_1}{x+a}(x+a)^k+\frac{A_2}{(x+a)^2}(x+a)^k+\cdots+\frac{A_k}{(x+a)^k}(x+a)^k\\&=A_1(x+a)^{k-1}+A_2(x+a)^{k-2}+\cdots+A_k\end{aligned}$$

令 $x=-a$ 有 $A_k=P(-a)$.

> 而对于其他系数 A_i，则可以用**特殊值**的方法，若 $k>3$ 则计算会比较复杂，但这种情况很少见.

综上，即

$$\frac{P(x)}{(x+a)^k}=\underbrace{\frac{A_1}{x+a}}_{\text{极限法}}+\underbrace{\frac{A_2}{(x+a)^2}+\ldots+}_{\text{特殊值}}\underbrace{\frac{A_k}{(x+a)^k}}_{\text{留数法}}.$$

2. **对于 $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ 型的因子：**

> 利用**特殊值法**求 N，即令 $x=0$ 求 N，注意此时分母一定不为零，因为我们规定了分母三项式无实根；

> 利用**极限法**求 M，即乘 x 取极限 $x\to\infty$ 求 M.

下面举几个例子：

1. $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3}$$

等式两边乘以 $(x-1)$ 有

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=A_1+\left(\frac{A_2}{x-2}\frac{A_3}{x-3}\right)\cdot(x-1)$$

令 $x-1=0$，有 $A_1=\frac{1}{2}$，同理 $A_2=-1,A_3=\frac{1}{2}$.

2. $\frac{3x^2+1}{x(x+1)^2}$

$$\frac{3x^2+1}{x(x+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}$$

两侧同乘以 x 有

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)^2}=A_1+\left(\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}\right)\cdot x$$

令 $x=0$ 有 $A_1=1$. 两侧同时乘以 $(x+1)^2$ 有

$$\frac{3x^2+1}{x}=\frac{A_1(x+1)^2}{x}+A_2(x+1)+A_3$$

令 $x=-1$ 有 $A_3=-4$，即

$$\frac{3x^2+1}{x}=\frac{(x+1)^2}{x}+A_2(x+1)-4$$

此时令 $x=1$ 有 $A_2=2$.

对于该例我们运用了留数法与特殊值法，但也可以用极限法来求 A_2,A_3.

对原式两侧乘以 $(x+1)$ 有

$$\frac{3x^2+1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x} + A_2 + \frac{A_3}{x+1}$$

两侧取极限 $x \to \infty$ 有 $3 = 1 + A_2$，即 $A_2 = 2$.

3. $\frac{x^4}{x^3+1}$

已知

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x - \frac{A}{x+1} - \frac{M_1 x + N_1}{x^2 - x + 1}$$

因为 $x^2 - x + 1|_{x=-1} \neq 0$，因此先用留数法计算 A，两侧乘以 $x+1$ 有

$$\frac{x^4}{x^2-x+1} = x(x+1) - A - \frac{M_1 x + N_1}{x^2 - x + 1}(x+1)$$

令 $x = -1$，则 $A = -\frac{1}{3}$.

对原式两侧乘以 $x^2 - x + 1$ 有

$$\frac{x^4}{x+1} = x(x^2-x+1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2-x+1}{x+1} - M_1 x - N_1$$

令 $x = 0$，有 $0 = 0 + \frac{1}{3} - N_1$，即 $N_1 = \frac{1}{3}$.

对原式两侧乘以 x 有

$$\frac{x^5}{x^3+1} = x^2 + \frac{1}{3}\frac{x}{x+1} - \frac{M_1 x^2 + N_1 x}{x^2 - x + 1}$$

即

$$\frac{M_1 x^2 + N_1 x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x^3+1}$$

两侧取极限 $x \to \infty$，有 $M_1 = \frac{1}{3} + 0$，即 $M_1 = \frac{1}{3}$，因此原式为

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

注 2.4. 有两点需要注意：

1) 其实在我们第一步求 A 的时候一定有的结论是三项式 $x^2 - x + 1 \neq 0$，因为如果其等于 0，则意味着它没有因式分解彻底，这意味着原分式分母可以因式分解出 $(x+1)^k$ $(k > 1)$，这样问题就归结到了例 2 的情景，这也是为什么规定部分分式无实根的原因；

2) 另一个一定有的结论是，式 $\frac{x^4}{x^3+1}(x+1)$ 是一定存在的，原因同上；

2.2 部分分式的积分

上小节已经介绍了部分分式的定义，本小节将讨论四类部分分式的积分求法

I. $\frac{A}{x-a}$

$$A \cdot \int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = A \cdot \int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x - a = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\begin{aligned} A\cdot\int\frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}x &= \frac{A}{-k+1}\cdot\int\mathrm{d}(x-a)^{-k+1} \\ &= \frac{A}{-k+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C. \end{aligned}$$

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

由表达式 x^2+px+q 中分出一个二项式的完全平方

$$x^2+px+q=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(p-\frac{p^2}{4}\right).$$

依假定，分母无实根，即 $q-\frac{p^2}{4}>0$，可令第二个圆括弧中的表达式为 a^2，取 $t=x+\frac{p}{2},a=+\sqrt{p-\frac{p^2}{4}}$，则有

$$\begin{aligned} \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x &= \int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{2}\int\frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t^2+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\arctan\frac{t}{a}+C. \end{aligned}$$

代回 x 有

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

注 2.5. 此做法过于繁琐，不便于在考试中应用，在考试中我们一般采用如下方法:

$$\begin{aligned} \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{2M}\cdot\frac{2x+p+\frac{N}{2M}-p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2M}\int\frac{\mathrm{d}x^2+px+q}{x^2+px+q}+\frac{\frac{N}{2M}-p}{2M}\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2M}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{\frac{N}{2M}-p}{2M}\int\frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2M}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{\frac{N}{2M}-p}{2Ma}\arctan\frac{t}{a}. \end{aligned}$$

其中 $t=x+\frac{p}{2},a=+\sqrt{p-\frac{p^2}{4}}$. 即先凑微分，再配平方.

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$

同上 III. 中做法:

$$\begin{aligned} \int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\mathrm{d}x &= \int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m} \\ &= \frac{M}{2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}\mathrm{d}t^2+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{2(-m+1)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{1}{(t^2+a^2)^m}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{2(-m+1)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot J_m. \end{aligned}$$

其中 J_m 的递推公式在上文中已经论述，对于任何 m，利用递推公式可以算出其解，然后变回变量 x 即可. 这样就完全解决了关于部分分式的积分问题.

2.3　可化为有理函数的积分

1. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

   右万能公式可知
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}};$$
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$
   作换元 $u = \tan\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$. 则有 $x = 2\arctan u, \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，以及
$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$
   代入有
$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{1+u^2+2u}{2u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}+u+2\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln|u| + \frac{u^2}{2} + 2u\right) + C.\end{aligned}$$
   代回 $u = \tan\frac{x}{2}$ 有
$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{4} + \tan\frac{x}{2} + C.$$

2. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

   为去掉括号，设 $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$，因此有 $x = \frac{1}{u^2-1}$ 以及 $\mathrm{d}x = \frac{-2u}{(u^2-1)^2}$ 代入有
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x &= -2\int (u^2-1)u\frac{u}{u^2-1}\mathrm{d}u \\ &= -2\int \frac{u^2(u^2-1)}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u = -2\int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\mathrm{d}u \\ &= -2\int 1+\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u = -2u - 2\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \\ &= -2u + 2\ln(u+1) - \ln|u^2-1| + C.\end{aligned}$$
   代回 $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 有
$$I = -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right) + \ln|x| + C.$$

注 2.6. 上面两个例子展示了两类可以化为有理函数积分的积分形式，下面做一个总结

1. 对于三角有理式，应用万能公式化为 $\tan\frac{x}{2}$ 的有理函数，在通过换元将原积分化为有理函数积分；
2. 对于被积函数中存在简单根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或者 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，可以令这个简单根式为 u. 由于这样的变换有反函数，且反函数是 u 的有理函数，因此原积分即可化为有理函数积分.