线性代数: 矩阵

Linear algebra: The matrix

王浩铭

2017 年 · 冬

这篇笔记的参考资料为刘丽、韩本三《高等代数》，部分内容根据我的理解进行调整。因为本人水平有限，无法保证本文内容正确性，这篇笔记仅供参考。若您发现本文的错误，请将这些错误发送到我的邮箱 wanghaoming17@163.com ，谢谢！您可以在我的主页中浏览更多笔记。

目录

Edition 4

1 矩阵及其运算

1.1 矩阵的概念

定义 1.1. 由数域 P 中的 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形数表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行，第 j 列的元素.

下面介绍几种常见矩阵：

1. n 阶方阵

   当 $m=n$ 时，矩阵称为 n 阶矩阵或方阵. 方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   中由左上角至右下角的斜线称为主对角线，a_{ii} 称为主对角元，由右上至左下角的斜线称为副对角线.

2. 对角矩阵

   方阵中主对角线以外的元素均为 0 的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   称为对角矩阵，简称对角阵，可以记为 $\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$.

3. 数量矩阵

   主对角元相等的对角矩阵

$$\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

   称为数量矩阵，记作 K_n.

4. 单位矩阵

主对角元均为 1 的对角阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为单位矩阵矩阵，记作 E_n.

5. 行矩阵、列矩阵

当 n 为 1 时，矩阵称为列矩阵，此时

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

当 n 为 1 时，矩阵称为行矩阵，此时

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

特别地，当 $m = n = 1$ 时，一阶矩阵 $A = a_{11}$ 为一个数.

1.2 矩阵的运算

两个具有相同行数与列数的矩阵称为**同型矩阵**，同型矩阵 A_{mn}, B_{mn} 若对应位置上的元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij},$$

则称矩阵 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

定义 1.2 (矩阵的加法)**.** 设同型矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A + B$，即

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为 A 的**负矩阵**，记作 $-A$，由此矩阵的减法为：$A - B = A + (-B)$.

有定义可知，矩阵的加法满足运算律：

1. $A + B = B + A$；(交换律)

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$；（结合律）

3. $A+O=A$；

4. $A+(-A)=O$.

定义 1.3 (矩阵的数乘)**.** 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$k\in P$，称矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 A 的数量乘积，简称数乘，记作 kA，即

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

由数乘的定义，数量矩阵可以表示为:

$$K=\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}=kE.$$

矩阵的数乘满足运算律:

1. $1A=A$；

2. $k(lA)=(kl)A=l(kA)$；（结合律）

3. $(k+l)A=kA+lA$；（数分配律）

4. $k(A+B)=kA+kB$；（矩阵分配律）

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的**线性运算**.

定义 1.4 (矩阵的乘法)**.** 设矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times s}, B=(b_{kj})_{s\times n}$，称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的乘积，记作 $C=AB$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}.$$

在矩阵乘法中需要注意:

1. 一般情况下，交换律不成立，即使 AB, BA 都有意义，也不一定有 $AB=BA$；

   但是:

   - **任意两个同阶对角阵可交换**: 设 $A=\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}, B=\mathrm{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，则 $AB=BA=\mathrm{diag}\{a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n\}$.

   - **数量矩阵与任意同阶方阵可交换**：易证明：$E_mA_{mn}=A_{mn}=A_{mn}E_n$.

例 1.1. 设 A,B 都是三阶矩阵，且 $AB=2A+B$，若

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

则求 $(A-E)^{-1}$

解. 因为 $AB-2A=A(B-2E)=B$，因此 $A(B-2E)B^{-1}=E$，即 $A^{-1}=(B-2E)B^{-1}$. 又因为 $AB-B=(A-E)B=2A$，因此 $(A-E)B(2A)^{-1}=E$，即

$$(A-E)^{-1}=B(2A)^{-1}=\frac{1}{2}BA^{-1}=\frac{1}{2}B(B-2E)B^{-1},$$

因为 $B-2E=\mathrm{diag}(2,2,2)$，所以

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)BB^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

2. 一般情况下，消去律不成立，即便有 $AB=AC$，且 $A\neq O$，也不一定有 $B=C$，但是**若 A 可逆，则 A 可以消去**；

3. 非零矩阵的乘积可能是零矩阵，即便 $AB=O$，也不一定有 $A=O$ 或 $B=O$.

但是矩阵乘法仍有许多运算性质：

1. $(AB)C=A(BC)$；（结合律）

   证明. $A=(a_{ij})_{m\times s},B=(b_{ij})_{s\times t},C=(c_{ij})_{t\times n}$，因此 $(AB)C=(u_{ij})$ 与 $A(BC)=(v_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，下面只需证明其对应位置元素相同即可，即

$$u_{ij}=v_{ij}$$

   因为

$$u_{ij}=\sum_{h=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}=\sum_{h=1}^{t}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kh}c_{hj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{t}b_{kh}c_{hj}\right)=v_{ij}.$$

   □

2. $A(B+C)=AB+AC$；（左乘分配律）

3. $(B+C)A=BA+CA$；（右乘分配律）

4. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$；（数乘结合律）

定义 1.5 (矩阵的乘幂)**.** 设 A 是 n 阶方阵，k 为正整数，则称 k 个 A 的连乘为 A 的 k 次幂，记作 A^k，即

$$A^k = AA\cdots A,$$

并规定

$$A^0 = E.$$

易验证，矩阵的幂运算满足如下性质:

1. $A^kA^l = A^{k+l}$;
2. $(A^k)^l = A^{kl}$;
3. 由于一般矩阵不满足交换律,因此对于同阶方阵 A, B,一般 $(AB)^k \neq A^kB^k$. 特别地,$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

设

$$f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0 \ (a_m \neq 0)$$

为 m 次多项式，A 为 n 阶矩阵，则

$$f(A) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0E \ (a_m \neq 0)$$

为 m **次矩阵多项式**.

定义 1.6 (矩阵的转置)**.** 将矩阵

$$A - (a_{ij})_{m\times n}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的行依次排为列，列依次排为行，得到 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的转置，记作 A^T.

显然 A^T 的第 i 行第 j 列元素正是 AB 的第 j 行第 i 列元素，由此我们有转置的运算性质:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(kA)^T = kA^T$;

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

证明. 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，因此 $(AB)^T$ 与 B^TA^T 均为 $n\times m$ 矩阵，因此只需证明其对应位置元素相同即可.

易知 $(AB)^T$ 第 i 行第 j 列元素正是 AB 的第 j 行第 i 列元素，即

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si},$$

而 B^TA^T 第 i 行第 j 列元素为 B^T 的第 i 行行矩阵与 A^T 的第 j 列列矩阵的乘积，即 B 的第 i 列的转置与 A 的第 j 行的转置的乘积，即

$$b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{si}a_{js}.$$

□

1.3 对称与反对称矩阵

定义 1.7 (对称与反对称矩阵)**.** 设 A 为 n 阶矩阵，若 $A^T=A$，则称 A 为对称矩阵；若 $A^T=-A$，则称 A 为反对称矩阵.

有定义可知:

1. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为对称矩阵的充要条件为：$a_{ij}=a_{ji}$；
2. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为反对称矩阵的充要条件为：$a_{ij}=-a_{ji}$，必要条件为 A 的主对角线元素均为 0.

利用定义容易证明对称阵与反对称阵有如下性质:

设 A,B 均为 n 阶对称阵，则

1. $A\pm B$ 为 n 阶对称阵;
2. kA 为对称阵;
3. A^m 为对称阵.

证明.

$$(A^m)^T=(AA\cdots A)^T=A^T\cdots A^TA^T=(A^T)^m=A^m.$$

□

设 A,B 均为 n 阶反对称阵，则

1. $A\pm B$ 为 n 阶反对称阵;
2. kA 为反对称阵;
3. A^{2k+1} 为反对称阵；A^{2k} 为对称阵，$k\in\mathbb{N}$;
4. 设 A 为 n 阶方阵，则 $A+A^T$ 为对称矩阵，$A-A^T$ 为反对称矩阵，因此任何一个 n 阶方阵可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

2 逆矩阵

2.1 方阵的行列式

定义 2.1. 设 A 为 n 阶方阵，A 的元素保持其原有位置不变所构成的 n 阶行列式称为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$ 或 $\det A$.

显然，方阵 A 与行列式 $|A|$ 是不同的概念，A 是一个数表，而 $|A|$ 是一个数.

由行列式的性质可知方阵的行列式有如下性质：

1. $|A| = |A^T|$;

2. $|kA| = k^n|A|$;

3. $|AB| = |A||B|$.

   这一性质正是行列式乘法定理（定理**??**）的结论

定义 2.2. 行列式不为零的矩阵称为非奇异矩阵，行列式为零的矩阵称为奇异矩阵.

2.2 可逆矩阵与逆矩阵

定义 2.3. 对于矩阵 A，若存在矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$.

该定理表明，可逆矩阵与其逆矩阵必为同阶方阵，而且若 B 是 A 的逆矩阵，则 A 也是 B 的逆矩阵.

定理 2.1. 若方阵 A 可逆，则其逆矩阵唯一.

证明. 设 B, C 均为 A 的逆矩阵，因此

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

即 A 的逆矩阵唯一. □

定义 2.4 (伴随矩阵)**.** 设 n 阶方阵

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则称方阵

$$(A_{ji})_{n\times n}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵，记作 A^*.

定理 2.2. 设 A 为 n 阶方阵，A^* 为其伴随矩阵，则伴随矩阵 A^* 有以下性质：

1. $AA^*=A^*A=|A|E$;
2. $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A^{-1}$;
3. $(kA)^*=k^{n-1}A^*$;
4. $(A^*)^T=(A^T)^*$;
5. $|A^*|=|A|^{n-1}$;
6. $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$, $(n\le 2)$.

证明. 1. 由行列式一阶展开定理（定理??）及其推论（推论??）可知：

$$AA^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|E.$$

同理可证

$$A^*A=|A|E$$

由此

$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

注 2.1. 此定理无论 A 是否可逆均成立.

2. 因为 $AA^*=|A|E$, 所以 $\frac{1}{|A|}AA^*=E$, 因此 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$; 而 $(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$;
3. $(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|\frac{1}{k}A^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*$;
4. $(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^T)^{-1}=|A^T|(A^T)^{-1}=(A^T)^*$;
5. $|A||A^*|=|A|^n\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}$;
6. $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$.

□

定理 2.3 (可逆的充要条件)**.** n 阶方阵 A 可逆的充要条件为 $|A| \neq 0$，且当 A 可逆时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

证明. 必要性，若 A 可逆，则存在 A^{-1}，使得 $AA^{-1} = E$，即 $|A||A^{-1}| = 1$，因此 $|A| \neq 0$;

充分性，若 $|A| \neq 0$，则由

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

可知

$$\frac{1}{|A|} \cdot AA^* = \frac{1}{|A|} \cdot A^*A = E,$$

即

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E,$$

因此 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

□

注 2.2. 在必要性的证明中还可以得到：$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

推论 2.1. 若方阵 A, B 满足 $AB = E$，则 A 可逆，且 $A^{-1} = B$.

证明. 因为 $|A||B| = 1$，因此 $|A| \neq 0$，因此 A 可逆，以 A^{-1} 左乘上式，有

$$B = A^{-1}.$$

□

此推论表明，要说明方阵 A 与 B 互逆，只需说明 $AB = E$ 即可，而不需再去验证 $BA = E$.

2.3 可逆矩阵的性质

设 A, B 为 n 阶可逆矩阵，则

1. 左（右）消去律，即 $AC = AD \Rightarrow C = D$;

   在 $AC = AD$ 两侧左乘 A^{-1}，有 $A^{-1}AC = A^{-1}AD$，因此 $C = D$.

2. A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

   因为 A 可逆，所以 $|A| \neq 0$，因此 $|A^{-1}| = |A|^{-1} \neq 0$，因此 A^{-1} 可逆，由

   $$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

   因此 A^{-1} 的逆矩阵为 A.

3. kA 可逆，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

   因为

   $$kA\frac{1}{k}A^{-1} = k\frac{1}{k}A^{-1}A = E$$

   ，所以

   $$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$$

4. AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

   因为
   $$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = E,$$
   所以
   $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5. A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；

   因为
   $$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$$
   所以
   $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

6. 若 $n \geq 2$，无论 A 是否可逆，均有 $|A^*| = |A|^{n-1}$；

   (1) 若 A 可逆，则 $|A| \neq 0$，因为 $A^*A = |A|E$，因此 $|A^*||A| = |A|^n$，即
   $$|A^*| = |A|^{n-1};$$
   (2) 若 A 不可逆，且 $A \neq O$，则利用反证法.

   假设 $|A^*| \neq 0$，所以 A^* 可逆，则因为 $AA^* = |A|E$，所以 $A = |A|(A^*)^{-1} = O$，矛盾. 故 $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$；

   (3) 若 $A = O$，则自然 $A^* = O$，此时 $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$.

3 分块矩阵

3.1 矩阵的分块与分块矩阵

定义 3.1. 在矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的 m 行间加入 $s-1$ 条横线将 m 行分成 s 个行组（$1 \leq s \leq m$），在其 n 列中加入 $t-1$ 条纵线将 n 行分成 t 个列组（$1 \leq t \leq n$），从而矩阵 A 被分割成 $s \times t$ 个分块 $(A_{pq})_{s\times t}$，其中 A_{pq} 表示分块矩阵中的第 p 行第 q 列的子块矩阵.

3.2 分块矩阵的运算

3.2.1 （一）相等、加法与数乘

设 A, B 为同型矩阵，且分法相同：$A = (A_{pq})_{s\times t}, B = (B_{pq})_{s\times t}$.

1. 若
   $$A_{pq} = B_{pq}$$
   则称分块矩阵 A 与 B 相等；

2. $A + B = (A_{pq})_{s\times t} + (B_{pq})_{s\times t} = (A_{pq} + B_{pq})_{s\times t}$；

3. $kA = k(A_{pq})_{s\times t} = (kA_{pq})_{s\times t}$.

3.2.2 （二）乘法

设

$$A=(a_{ij})_{m\times k},\ B=(b_{ij})_{k\times n}$$

对 A 的列分法与对 B 的行分法相同：

$$A=(A_{pq})_{s\times r},\ B=(B_{pq})_{r\times t},$$

则

$$AB=(A_{pq})_{s\times r}(B_{pq})_{r\times t}=(C_{pq})_{s\times t},$$

其中 $C_{pq}=\sum_{i=1}^{r}A_{pi}B_{iq}$.

例 3.1. 设

$$A=\begin{bmatrix} C_{3\times 2} & E_{3\times 3} \\ 2E_{2\times 2} & O_{2\times 3} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} O_{2\times 3} & H_{2\times 1} \\ D_{3\times 3} & O_{3\times 1} \end{bmatrix}$$

注意到 A 的列分法 $2|3$ 与 B 的行分法 $\frac{2}{3}$ 一致，因此有

$$AB=\begin{bmatrix} C_{3\times 2} & E_{3\times 3} \\ 2E_{2\times 2} & O_{2\times 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_{2\times 3} & H_{2\times 1} \\ D_{3\times 3} & O_{3\times 1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{3\times 3} & C_{3\times 2}H_{2\times 1} \\ O_{2\times 3} & 2H_{2\times 1} \end{bmatrix}.$$

注意其中矩阵乘法的顺序.

3.2.3 （三）转置

设矩阵 A 的分块矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}$$

则

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}.$$

注意：分块矩阵要转置，子块矩阵也要转置.

3.2.4 （四）特殊分块矩阵求逆

1. 分块对角阵求逆

定义 3.2 (分块对角阵)**.** 当 $A_1, A_2, ..., A_s$ 均为方阵时，称分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$$

为分块对角阵.

定理 3.1. 当且仅当 $A_1, A_2, ..., A_s$ 均可逆时，分块对角阵 A 可逆，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

证明. 由拉普拉斯定理可知:

$$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|,$$

因此当且仅当 $|A_1|, |A_2|, ..., |A_s|$ 均不为零时 $|A| \neq 0$，即 A 可逆. 由分块矩阵的乘法可知:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sA_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E \end{bmatrix} = E.$$

证毕. □

与之相似的有

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ 0 & \cdots & A_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_s & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_s^{-1} \\ 0 & \cdots & A_{s-1}^{-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中 $A_1, A_2, ..., A_s$ 均可逆.

2. 分块三角阵求逆

定义 3.3. 主对角线以上（下）的子块都是方阵，而主对角线以下（上）都是零矩阵的分块矩阵称为分块上（下）三角阵.

以 2×2 分块三角阵举例求逆的方法:

设

$$H=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$$

其中 A,B 分别为 s 阶, t 阶可逆矩阵, 则由拉普拉斯定理可知

$$|H|=|A||B|\neq 0$$

即 H 可逆. 设

$$H^{-1}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

则

$$HH^{-1}=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX_1+CX_3 & AX_2+CX_4 \\ BX_3 & BX_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_s & C \\ O & E_t \end{bmatrix}.$$

因此有

$$\begin{cases} AX_1+CX_3=E \\ AX_2+CX_4=0 \\ BX_3=0 \\ BX_4=E \end{cases}$$

由此有

$$\begin{cases} X_1=A^{-1} \\ X_2=-A^{-1}CB^{-1} \\ X_3=O \\ X_4=B^{-1} \end{cases}$$

即

$$H^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

相似的

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

这一结论在下一节中将有更简便的求法(例4.1).

特殊的, 我们有

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_s \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_s} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_s & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_s} \\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_{s-1}} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

以及

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{bmatrix},$$

由此可以扩展:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{d}{bc} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

4 矩阵的初等变换与秩

4.1 矩阵的初等变换

定义 4.1 (初等变换). *如下三种变换称为矩阵的初等变换:*

1. *互换第 i,j 行(列),记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;*
2. *用非零数 k 乘第 i 行(列),记为 kr_i;*
3. *将第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上,记为 $r_i + kr_j$.*

列变换只需将 r 变为 c.

定义 4.2 (等价). *如果矩阵 A 经过有限次初等变换化为矩阵 B,则称 A 与 B 等价,记为 $A \sim B$.*

矩阵的等价具有以下性质:

1. 反身性: $A \sim A$;
2. 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
3. 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

定义 4.3 (行阶梯形矩阵). *若矩阵有以下特征,则称之为行阶梯形矩阵:*

1. *零行(若有的话),全部位于非零行下方;*
2. *由上至下的各非零行中,首个非零元素的列数随着行数的增加而严格增加.*

定义 4.4 (行最简阶梯型矩阵). *若行阶梯形矩阵有以下特征,则称之为行最简阶梯形矩阵:*

1. 各非零行中首个非零元素均为 1;
2. 各非零行中首个非零元素所在列的其他元素均为 0.

定义 4.5 (标准型矩阵)**.** 具有如下特征的矩阵称为标准型矩阵:

1. 位于左上角的子块是一个 r 阶单位阵;
2. 其余的子块 (若有的话), 都是零矩阵.

定理 4.1. 任意非零矩阵都可以经过初等行变换变为行阶梯型矩阵.

证明. 不妨设非零矩阵 $A = a_{ij\ m\times n}$ 中第一行是非零行, 且首个非零元素 a_{1k} 的列数 k 是所以行首个非零元素中最小的 (否则可以通过第一类初等行变换变为这种类型).

则依次将第一行的 $-\frac{a_{ik}}{a_{1k}}$ 倍加到第 $i(i=2,3,...,m)$ 行上有:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & a_{m,k+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{m,k+1} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

令

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{m,k+1} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

若 $A' = O$, 则 A 已为行阶梯形矩阵, 若 $A' \neq O$, 则继续对 A' 做上述变换即可. □

定理 4.2. 任意非零矩阵都可以经过初等行变换变为最简行阶梯形矩阵.

证明. 首先利用初等行变换将非零矩阵化为阶梯型矩阵, 在对各非零行乘以其首个非零元素的倒数, 最后从最后一个非零行开始, 依次将该行适当倍数加至其上每一行, 以使与该首非零元素同列的元素均为 0. □

定理 4.3. 任意非零矩阵可经过初等变换化为标准型矩阵.

证明. 首先利用初等行变换将非零矩阵 A 变为最简阶梯型矩阵 B 在对第一行非零元素所在列的适当倍数加到后面每一列, 是第一行除了首个非零元素外的元素均为 0, 在将第一行首个非零元素所在列换至第一列, 依次类推即可化为标准型. □

注 4.1. 对于某矩阵的最简行阶梯形矩阵, 若其首个非零元素行数随列数的增加为不严格增加时, 对该最简行阶梯型矩阵取转置再利用初等行变换化为最简行阶梯型矩阵, 则得到的便是标准型.

因此对于满秩的方阵, 只通过初等行变换得到的最简阶行梯型矩阵正是标准型, 且标准型为单位阵, 因此便只需通过初等行变换便可化为单位阵. (定理4.13)

注 4.2. 一个矩阵经过初等行变换所化成的行阶梯形矩阵不是唯一的, 但是其最简行阶梯形矩阵以及标准型 (可能需要初等列变换) 是唯一的.

由行列式的基本性质知，经过一次初等行变换后的**方阵**的行列式与原方阵的行列式之间有下面的关系：

1. 若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，则 $|B| = -|A|$；
2. 若 $A \xrightarrow{kr_i} B$，则 $|B| = k|A|$；
3. 若 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$，则 $|B| = |A|$；

对方阵的列变换等于对原矩阵转置的行变换，而转置不改变方阵行列式的值，于是我们有结论：即若

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} B,$$

则

$$|A| = c \cdot |B|,$$

其中 $c \neq 0$. 由此我们有

定理 4.4. *方阵的初等变换不改变方阵的可逆性.*

定理 4.5. *n 阶方阵 A 可逆的充要条件为它的标准型为单位阵.*

证明. 设 A 的标准型为：

$$B = \begin{bmatrix} E_n & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

充分性：若 $B = E_n$，则 $1 = |B| = c \cdot |A| \neq 0$，因此 A 可逆；必要性：若 A 可逆，则 $|B| = c \cdot |A| \neq 0$，因此 $B = E_n$. □

注 4.3. *由此可知：可逆矩阵可以通过一系列初等变换变为单位阵. 事实上，后面会证明可逆矩阵可以只通过初等行变换变为单位阵（定理4.13）.*

4.2 矩阵的秩

定义 4.6 (k 阶子式)**.** *设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，任取 A 的 k 行 k 列（$a \leq k \leq \min\{m, n\}$），由这 k 行 k 列的交叉点处的元素按照原来的次序组成的 k 阶行列式称为 A 的 k 阶子式.*

定义 4.7 (秩)**.** *若矩阵 A 有一个 r 阶子式 D 不为 0，而所有高于 r 阶的子式均为 0，则称 D 为 A 的最高阶非零子式，称其阶数 r 为矩阵 A 的秩，记为 $R(A)$.*

矩阵的秩有如下性质：

1. 零矩阵没有非零子式，因此规定零矩阵的秩为 0；
2. $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$；
3. 因为 A 的一个 k 阶子式的转置也是 A 的转置的一个 k 阶子式，因此 $R(A) = R(A^T)$；

4. 由行列式按行（列）展开定理可知，如果矩阵 A 的全部 $r+1$ 阶子式均为 0，则其所有更高阶子式也均为 0. 因此若矩阵 A 有一个 r 阶子式 D 不为 0，而所有 $r+1$ 阶子式均为 0，则矩阵 A 的秩就是 r.

5. 矩阵 A 与其伴随矩阵 A^* 有如下关系：

$$\begin{cases} R(A)=n \Rightarrow R(A^*)=n; \\ R(A)=n-1 \Rightarrow R(A^*)=1; \\ R(A)=n-2 \Rightarrow R(A^*)=0. \end{cases}$$

第一个式子：因为 $R(A)=n$，因此 A 可逆，即 A^{-1} 可逆，因为 $A^*=|A|A^{-1}$，因此 A^* 可逆，因此 $R(A^*)=n$；

第二个式子：因为 $R(A)=n-1$，因此其存在非零的 $(n-1)$ 阶子式，因此 $A^*\neq O$，即 $R(A^*)>0$. 又因为 $AA^*=|A|E=O$，因此 $R(A)+R(A^*)\leq n$，即 $0<R(A^*)\leq n-n-1$，因此 $R(A^*)=1$；

第三个式子：因为 $R(A)=n-2$，因此其所有 $n-1$ 阶子式均为 0，故 $A^*=O$，即 $R(A^*)=0$.

定理 4.6. *行阶梯型矩阵的秩等于其非零行的个数，特殊的，标准型矩阵的秩等于其左上角单位阵的阶数.*

证明. 在一个有 r 个非零行的行阶梯型矩阵中取所有非零行以及每个非零行首个非零元素所在的列，这些行与列的交点构成一个 r 阶子式，易知此 r 阶子式为上三角行列式，因此其必不为零. 而该行阶梯型矩阵的任意 $r+1$ 阶子式因为有一行全为 0，因此任意 $r+1$ 阶子式必为 0，故该行阶梯型矩阵的秩等于 r，即其非零行的个数. □

定理 4.7. *矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.*

证明. 因为对矩阵的初等列变换等于对其转置的初等行变换，而矩阵的转置不改变矩阵的秩，因此只需证明初等行变换不改变矩阵的秩即可，更进一步，只需证明一次初等行变换不改变矩阵的秩即可. 在此只证明一次第三类初等行变换不改变矩阵的秩.

设 $A \xrightarrow{r_i+kr_j} B, R(A)=r, D$ 为 B 的任意一个 $r+1$ 阶子式，若 D 中不包含 B 的第 i 行，则 D 也是 A 的 $r+1$ 阶子式，因此 $D=0$.

若 D 中包含 B 的第 i 行，此时若 D 中包含 B 的第 j 行，则 D 可拆分为两个行列式，一个是 A 的 $r+1$ 阶子式，另一个有两行元素相同，两者均为 0，因此 $D=0$；若 D 中不包含 B 的第 j 行，则 D 可拆分为两个行列式，一个是 A 的 $r+1$ 阶子式，另一个与 A 的某个 $r+1$ 阶子式相差一个负号，两者均为 0，因此 $D=0$.

综上我们证明了 $R(B)\leq R(A)$. 又因为 B 可以经过一次初等变换变成 A，即 $B \xrightarrow{r_i-kr_j} A$ 因此 $R(A)\leq R(B)$，综上 $R(A)=R(B)$. □

上面两个定理给出了求一般矩阵的秩的简便方法.

定义 4.8 (满秩矩阵)**.** *设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $R(A)=m$，则称 A 为行满秩矩阵；若 $R(A)=n$，则称 A 为列满秩矩阵. 特殊的，若 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵.*

由此得到结论:

定理 4.8. n 阶矩阵 A 可逆的充要条件为其是满秩矩阵.

4.3 初等矩阵

定义 4.9 (初等矩阵)**.** 由单位矩阵经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

对于三类初等变换, 可以得到三类初等矩阵:

1. 互换单位矩阵的第 i, j 两行(列)得到的初等矩阵, 记为 $P(i,j)$:

$$P(i,j) = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

2. 用非零数 k 乘单位矩阵的第 i 行(列)得到的初等矩阵, 记为 $P(ki)$:

$$P(ki) = \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

3. 将单位矩阵的第 j 行(列)的 k 倍加至第 i 行(列)上得到的初等矩阵, 记为 $P(i,j(k))$:

$$P(i,j(k)) = \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

定理 4.9. 初等矩阵阶可逆，且其逆为同类初等矩阵：

$$\begin{cases} P(i,j)^{-1} = P(i,j); \\ P(i(k))^{-1} = P\left(i\left(\dfrac{1}{k}\right)\right); \\ P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k)). \end{cases}$$

证明. 因为单位矩阵可逆，因此三类初等矩阵可逆. 其逆的公式由逆矩阵定义可证. □

定理 4.10. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，对 A 试行一次初等行变换，等于用对应的初等矩阵左乘 A；对 A 试行一次初等列变换，等于用对应的初等矩阵右乘 A.

证明. 只证明行变换的情况即可：

将 A 按行分块：

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

其中：

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

因此

$$P(i,j)A = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix};$$

这正是将 A 的 i,j 行互换的结果.

$$P(ki)A = \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

这正是以非零常数 k 乘以 A 的第 i 行的结果.

$$P(i,j(k))A=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1\\\vdots\\A_i+kA_j\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}$$

这正是将 A 的第 j 行的 k 被加到第 i 行的结果. □

由此定理我们得到矩阵计算过程中常用的一项技巧：**矩阵拆解法**:

所谓矩阵拆解法,即对于矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)$,其中 $\beta_i=(b_{1i},b_{2i},...,b_{ni})^T$,则有

$$AB=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nm}\end{bmatrix}=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_jb_{j1},\sum_{j=1}^{n}\alpha_jb_{j2},...,\sum_{j=1}^{n}\alpha_jb_{jm}\right).$$

特殊的有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1),$$

反过来如

$$(\alpha_4+2\alpha_2,\alpha_3-3\alpha_1,2\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}0&-3&0&0\\2&0&2&0\\0&1&1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

同理

$$\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\\\alpha_4^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_4^T\\\alpha_3^T\\\alpha_2^T\\\alpha_1^T\end{bmatrix}.$$

定理 4.11. *n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件为 A 可以表示为一系列初等矩阵的乘积.*

证明. 充分性，由于初等变换不改变可逆性，因此 A 与单位阵有相同的可逆性，因此 A 可逆；必要性：若 A 可逆，则 A 的标准型为单位阵（定理4.5），即 A 可以通过一系列初等变换化为单位阵 E，即存在一系列初等矩阵 $P_l, P_2, ..., P_l, Q_1, Q_2, ..., Q_k$，使得

$$P_l \cdots P_2 P_l A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = E,$$

即

$$A = P_1^{-1} \cdots P_2^{-1} P_l^{-1} Q_k^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1}.$$

□

注 4.4. 定理*4.5*，定理**??**，定理*4.8*都给出来矩阵可逆的充要条件，它们本质上是相同的.

定理 4.12. 两个 $m \times n$ 的矩阵 A, B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得：

$$B = PAQ.$$

证明. 充分性：设存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $B = PAQ$，则由定理**??**可知：存在 m 阶初等矩阵 $P_l, P_2, ..., P_l$，以及 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, ..., Q_k$ 使得

$$P = P_l \cdots P_2 P_l, Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$$

因此

$$P_l \cdots P_2 P_l A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = B$$

由定理**??** 可知 A 可以通过有限次初等变换变为 B，因此 $A \sim B$.

必要性：有矩阵等价的定义知，A 等价于 B 的充要条件为 A 可以通过有限次初等变换变为 B，即存在 m 阶初等矩阵 $P_l, P_2, ..., P_l$，以及 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, ..., Q_k$ 使得：

$$P_l \cdots P_2 P_l A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = B,$$

令 $P = P_l \cdots P_2 P_l, Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$，易知 P, Q 可逆，因此

$$B = PAQ.$$

□

定理 4.13. 可逆矩阵必可只经初等行变换化为单位阵.

证明. 由定理**??** 可知：存在一系列初等矩阵 $P_l, P_2, ..., P_l, Q_1, Q_2, ..., Q_k$，使得

$$P_l \cdots P_2 P_l A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = E,$$

即

$$A = P_1^{-1} \cdots P_2^{-1} P_l^{-1} Q_k^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1}.$$

即

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_k P_1 P_2 \cdots P_l A = E.$$

□

4.4 初等变换求逆矩阵

设 A 经过初等行变换化为最简阶梯型矩阵 F，欲求其初等行变换对应的矩阵 P 可以采用如下方法：

$$P(A|E) = (PA|PE) = (F|P).$$

特殊的，若 A 可逆，则其最简阶梯型矩阵为 E，其初等行变换对应的矩阵 $P = A^{-1}$，于是有求 A^{-1} 的方法.

定理 4.14 (初等行变换求逆)**.** 设 A 可逆，构造分块矩阵 $(A|E)$，则

$$(A|E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1}).$$

证明. 由定理4.13可知存在一系列初等矩阵 $P_l, P_2, ..., P_l$，使得

$$P_1P_2\cdots P_lA = E$$

因此有：

$$A = P_l^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}.$$

以及

$$A^{-1} = P_1P_2\cdots P_l,$$

因此

$$\begin{aligned} P_1P_2\cdots P_l(A|E) &= P_1P_2\cdots P_l(P_l^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}|E) \\ &= (E|P_1P_2\cdots P_l) = (E|A^{-1}). \end{aligned}$$

□

推论 4.1 (初等列变换求逆)**.** 设 A 可逆，构造分块矩阵 $\left(\frac{A}{E}\right)$，则

$$\left(\frac{A}{E}\right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left(\frac{E}{A^{-1}}\right).$$

根据这一思想我们有

推论 4.2. 设 $A_{n\times n}$ 可逆，$B_{n\times m}$ 与 A 有相同行数，则

$$(A|B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1}B).$$

以及

推论 4.3. 设 $A_{n\times n}$ 可逆，$B_{m\times n}$ 与 A 有相同列数，则

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left(\frac{E}{BA^{-1}}\right).$$

例 4.1 (分块矩阵求逆)**.**

$$\begin{bmatrix} A & C & E & O \\ O & B & O & E \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+-CB^{-1}} \begin{bmatrix} A & O & E & -CB^{-1} \\ O & B & O & E \end{bmatrix} \xrightarrow{A^{-1}r_1, B^{-1}} \begin{bmatrix} E & O & A^{-1} & -CB^{-1} \\ O & E & O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$