



Bureau d'Étude

Résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles d'advection-diffusion par une méthode semi-implicite

Florent PUY
Lucas DE LANUX
Année 2023-2024

Résumé

The aim of this project is to numerically simulate the flow between two flat plates using Fortran 90, and to exploit the numerical code with Paraview.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Énoncé et définition du problème	4
3	Discretisation de l'équation d'advection-diffusion	5
3.1	Discretisation des termes advectifs	6
3.2	Discretisation des termes diffusifs	7
3.3	Approximation des flux aux frontières	8
3.4	Équation au schéma numérique	8
4	Analyse et validation du schéma explicite	10
4.1	Développement du schéma explicite	10
4.2	Test d'advection pure	11
4.3	Test de diffusion pure	12
5	Exploitation du code	13
5.1	Comparaison des temps de calcul	13
5.2	Stabilité du schéma numérique	14
5.3	Influence de la régularité du domaine sur la stabilité	16
5.4	Influence du nombre de Péclet sur le refroidissement	16
5.5	Influence de l'algorithme d'inversion de la matrice sur le temps de calcul	17
5.6	Influence du paramètre de sur-relaxation ω	18

5.7 Influence du critère d'arrêt R_0	19
Conclusion	21

[section]placeins float

1 Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles d'advection-diffusion est essentielle pour comprendre et modéliser divers processus de transport présents dans de nombreux phénomènes physiques et naturels. Dans ce rapport, nous explorons l'utilisation de la méthode des volumes finis pour résoudre efficacement une équation d'advection-diffusion, en adaptant un code existant pour implémenter un schéma explicite. En modifiant ce code, nous avons cherché à améliorer la stabilité et la précision de la résolution numérique de l'équation, tout en réduisant la complexité calculatoire associée à cette méthode. Notre objectif est de démontrer les résultats obtenus en comparant les performances du schéma explicite nouvellement implémenté avec ceux du schéma explicite initial, mettant en évidence les améliorations significatives en termes de stabilité et de précision de la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation aux dérivées partielles d'advection-diffusion.

2 Énoncé et définition du problème

On souhaite modéliser le phénomène d'advection-diffusion thermique dans un écoulement laminaire confiné (figure 1).

De l'air, de diffusivité thermique D , est injecté à la température T_e et circule à la vitesse caractéristique U_0 entre deux plaques de longueur L , séparées d'une distance $2H$. Les plaques supérieure et inférieure ont respectivement une température imposée T_p (l'indice p désignant « paroi »). L'air est initialement à la température T_i . L'une des applications de ce problème est le refroidissement par air de composants électroniques. Lorsque ce n'est pas précisé, on prendra par la suite les valeurs suivantes : $D=2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $T_i=T_e=20^\circ\text{C}$, $T_p=50^\circ\text{C}$, $L=3\text{mm}$ et $H=250\text{m}$. Par défaut, $U_0=5 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ et on fera varier U_0 dans la gamme $[5 \times 10^{-2} \text{ m/s}, 5 \times 10^{-1} \text{ m/s}, 5 \text{ m/s}]$.

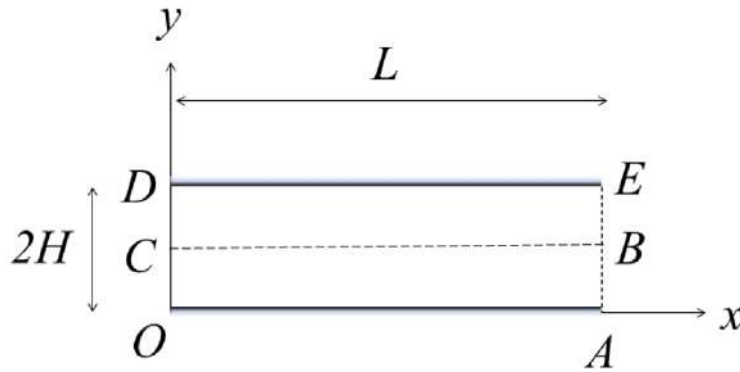


Figure 1 : Géométrie du problème

L'évolution spatio-temporelle de la température dans un écoulement de vitesse connue u est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (uT) = \nabla \cdot (D \nabla T) \quad (1)$$

Pour des raisons de symétrie de la géométrie, des conditions limites et de l'écoulement, on ne simulera que la moitié inférieure (OABC) du domaine physique (OAED). Les conditions limites sont ici : $T=T_e$ en $x=0$ (OC), $T=T_p$ en $y=0$ (OA), $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ en $y=H$ (CB). En $x=L$ (AB), on choisit une condition de sortie telle que $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i=N} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i=N-1}$. Le problème dépend d'un seul paramètre Pe appelé nombre de Péclet défini par $Pe=U_0 \times H/D$. On supposera $u = u(y)e_x$ tel que :

$$u(y) = 6U_0 \frac{y}{2H} \left(1 - \frac{y}{2H}\right) \quad (2)$$

3 Discrétisation de l'équation d'advection-diffusion

Premièrement, nous devons discrétiser en temps et en espace l'équation d'advection-diffusion (1) en appliquant la méthode des volumes finies.

La première étape consiste à intégrer (1) sur le volume Ω :

$$(1) \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{u}T) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (D\nabla T) d\Omega$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski (théorème de la divergence) sur l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_S T \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_S D \nabla C \cdot \vec{n} dS$$

Chacun des termes surfaciques ci-dessus peut être décomposé comme la somme des termes sur les quatres surfaces chaque cellule de calcul :

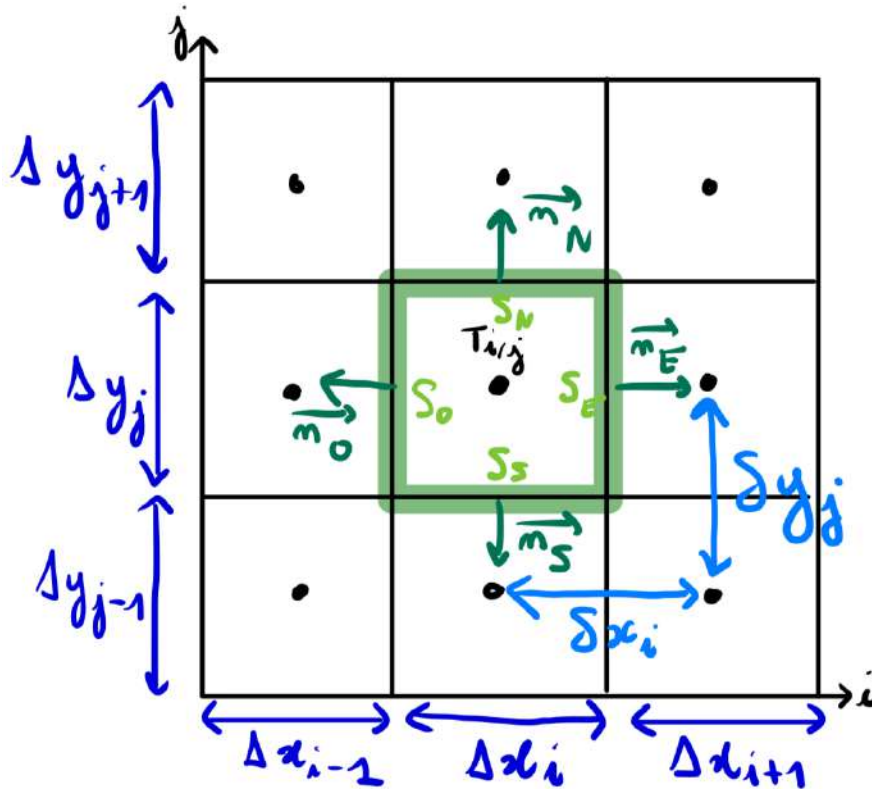


Figure 2 : Schéma d'une portion de maillage

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{S_O} T \vec{u} \cdot \vec{n}_O dS_O + \int_{S_E} T \vec{u} \cdot \vec{n}_E dS_E + \int_{S_S} T \vec{u} \cdot \vec{n}_S dS_S + \int_{S_N} T \vec{u} \cdot \vec{n}_N dS_N \\
 &= \int_{S_O} D \nabla T \cdot \vec{n}_O dS_O + \int_{S_E} D \nabla T \cdot \vec{n}_E dS_E + \int_{S_S} D \nabla T \cdot \vec{n}_S dS_S + \int_{S_N} D \nabla T \cdot \vec{n}_N dS_N \\
 &\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \underline{u_{Est}} T_{Est} S_E + \underline{u_{Ouest}} T_{Ouest} S_O + \underline{u_{Sud}} T_{Sud} S_S + \underline{u_{Nord}} T_{Nord} S_N = \\
 &\quad D \nabla T_{Est} S_E + D \nabla T_{Ouest} S_O + D \nabla T_{Sud} S_S + D \nabla T_{Nord} S_N
 \end{aligned}$$

En identifiant les termes advectifs et diffusifs, l'équation se réduit à :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + F_{Ouest}^{adv} + F_{Est}^{adv} + F_{Sud}^{adv} + F_{Nord}^{adv} = F_{Ouest}^{diff} + F_{Est}^{diff} + F_{Sud}^{diff} + F_{Nord}^{diff} \quad (3)$$

À partir de l'équation ci-dessus, nous devons discrétiser chacun des termes advectifs et diffusifs.

3.1 Discrétisation des termes advectifs

La discrétisation des termes advectifs suivra un schéma explicite amont (VOIR COURS POUR EXPLIQUER C QUOI) :

On définira les vitesses telles qu'elles sont sur le schéma suivant :

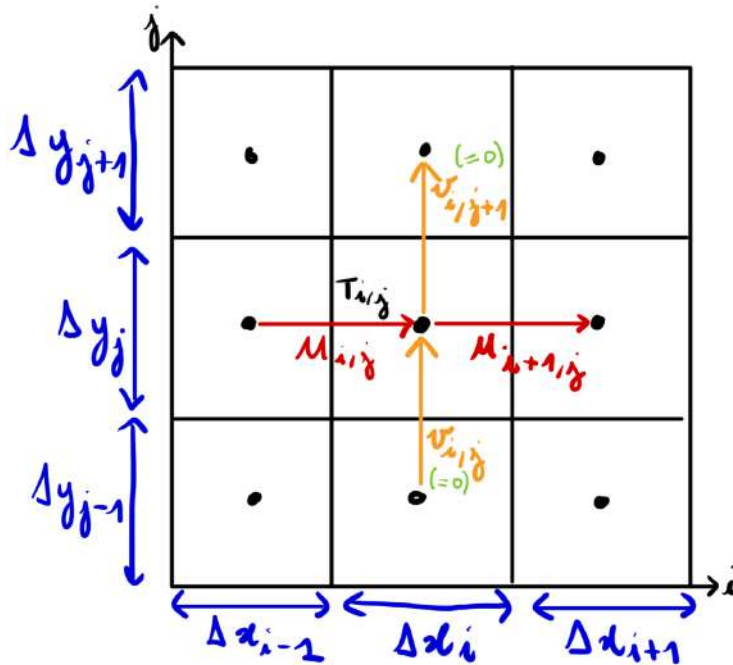


Figure 3 : Définition des vitesses

Voici ainsi les nouvelles expressions des termes advectifs :

$$F_{Ouest}^{adv} = \begin{cases} -u_{i,j} T_{i,j}^n \Delta y_j & \text{si } u < 0 \\ -u_{i,j} T_{i-1,j}^n \Delta y_j & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$F_{Est}^{adv} = \begin{cases} u_{i+1,j} T_{i+1,j}^n \Delta y_j & \text{si } u < 0 \\ u_{i+1,j} T_{i,j}^n \Delta y_j & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

$$F_{Sud}^{adv} = -v_{i,j} T_{i,j-1}^n \Delta x_i = 0$$

$$F_{Nord}^{adv} = v_{i,j+1} T_{i,j}^n \Delta x_i = 0$$

Avec $S_{Ouest} = \Delta y_j$, $S_{Est} = \Delta y_j$, $S_{Sud} = \Delta x_i$, $S_{Nord} = \Delta x_i$.

3.2 Discrétisation des termes diffusifs

Tandis que pour les termes diffusifs, leur discrétisation suivra un schéma implicite centré tel que :

$$F^{diff} = \int_S D \nabla T \cdot \underline{n}_S dS$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_{Ouest}^{diff} &= -D \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\delta x_{i-1}} \Delta y_j \\ F_{Est}^{diff} &= D \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\delta x_i} \Delta y_j \\ F_{Sud}^{diff} &= -D \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{\delta y_{j-1}} \Delta x_i \\ F_{Nord}^{diff} &= D \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\delta y_j} \Delta x_i \end{aligned}$$

Enfin, la discrétisation du terme temporel se réalise rapidement avec la méthode d'Euler explicite. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

3.3 Approximation des flux aux frontières

À partir des conditions limites de l'énoncé et des expressions des flux internes advectifs et diffusifs, nous pouvons approximer les flux aux frontières de notre système :

	x=0	x=L	y=0	y=H
F_{adv}^{nord}	0	0	0	0
F_{adv}^{sud}	0	0	0	0
F_{adv}^{est}	ok	ok	ok	ok
F_{adv}^{ouest}	$-u_{i,j}T_e\Delta y_j$	ok	ok	ok
F_{diff}^{nord}	ok	ok	ok	0
F_{diff}^{sud}	ok	ok	$-D\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_p}{\Delta y_{j/2}}\Delta x_i$	ok
F_{diff}^{est}	ok	$-F_{diff}^{ouest}$	ok	ok
F_{diff}^{ouest}	$-D\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_e}{\Delta x_{i/2}}\Delta y_j$	ok	ok	ok

3.4 Équation au schéma numérique

En regroupant tous les termes advectifs et diffusifs discrétisés précédemment, l'équation (3) devient :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \Omega - u_{i,j}T_{i-1,j}^n\Delta y_j + u_{i+1,j}T_{i,j}^n\Delta y_j = D\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\delta y_j}\Delta x_i - D\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{\delta y_{j-1}}\Delta x_i + D\frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\delta x_i}\Delta y_j - D\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\delta x_{i-1}}\Delta y_j$$

Soit, en réorganisant les termes :

$$(1 + a)T_{i,j}^{n+1} + bT_{i,j+1}^{n+1} + cT_{i,j-1}^{n+1} + dT_{i+1,j}^{n+1} + eT_{i-1,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \phi_{i,j}^n \quad (4)$$

Avec :

$$\begin{cases} a = -(b + c + d + e) \\ b = -D\frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}}\frac{\Delta x_i}{\delta y_j} \\ c = -D\frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}}\frac{\Delta x_i}{\delta y_{j-1}} \\ d = -D\frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}}\frac{\Delta y_j}{\delta x_i} \\ e = -D\frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}}\frac{\Delta y_j}{\delta x_{i-1}} \\ \phi_{i,j}^n = -\frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}}(F_{Ovest}^{adv} + F_{Est}^{adv}) \end{cases}$$

Avec en dehors des bords de la matrice :

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= xv(i+1, j) - xv(i, j), & \Delta x_j &= xv(i, j+1) - xv(i, j), \\ \Delta y_i &= yv(i+1, j) - yv(i, j), & \Delta y_j &= yv(i, j+1) - yv(i, j), \\ \delta x_i &= \Delta x_i/2, & \delta x_j &= \Delta x_j/2, \\ \delta y_i &= \Delta y_i/2, & \delta y_j &= \Delta y_j/2,\end{aligned}$$

Cette équation peut également s'écrire sous forme matricielle comme : $\underline{\underline{A}}I^{n+1} = \underline{B}$.
Soit :

Avec A, I^{n+1} et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & d & & b & & \\ e & 1+a & d & & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \vdots & & & & & b \\ c & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & c & e & 1+a \end{pmatrix}$$

$$I^{n+1} = \begin{pmatrix} T_{1,1}^{n+1} \\ T_{2,1}^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N_x,1}^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N_x,N_y}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} T_{1,1}^n + \phi_{1,1}^n \\ T_{2,1}^n + \phi_{2,1}^n \\ \vdots \\ T_{i,j}^n + \phi_{i,j}^n \\ \vdots \\ T_{N_x,N_y}^n + \phi_{N_x,N_y}^n \end{pmatrix}$$

La matrice A correspond au maillage de notre domaine et le vecteur B est lui composé des

températures à l'itération n . Pour résoudre notre problème, il faut calculer $A^{-1}B$. Nous pouvons la remplir des coefficients a, b, c, d et e grâce à la formule suivante : $k = (j - 1)N_x + i$. On a alors :

$$A(k, k) = a + 1A(k, k + N_x) = bA(k, k - N_x) = cA(k, k + 1) = dA(k, k - 1) = e$$

4 Analyse et validation du schéma explicite

Avant de s'attaquer à la résolution de l'équation d'advection-diffusion pour le schéma semi-implicite, il est important dans un premier temps d'analyser les résultats issues du schéma explicite et de s'assurer qu'ils soient cohérents avec la réalité.

4.1 Développement du schéma explicite

Le code du schéma explicite fourni sur Moodle ne permettait seulement d'avoir un maillage régulier. C'est pourquoi nous avons dû le modifier afin de donner la possibilité à l'utilisateur d'obtenir un maillage irrégulier. Pour cela, nous avons défini des nouvelles coordonnées y_{irreg} et x_{irreg} telles que :

$$x_{irreg}(x_{reg}) = \frac{x_{reg}^2}{L}$$

$$y_{irreg}(y_{reg}) = H(1 - \cos(\frac{\pi y_{reg}}{2H}))$$

On a pu permettre à l'utilisateur d'imposer un champ de vitesse non-uniforme suivant y tel que $u = u(y)e_x$ suive la loi (2) grâce à des conditions sur la vitesse que l'on a rajouté dans nos lignes de code.

Pour un maillage $N_x = 30, N_y = 10$, le champ de vitesse donné par (2), $U_0 = 1 \text{ cm/s}$ et tous les autres paramètres (t_f, D, \dots) étant les paramètres initiaux, on obtient les résultats suivants :

Maillage	$\Delta t(s)$	Nombre de solutions
Régulier	$1,47.10^{-5}$	68
Irrégulier	$1,28.10^{-8}$	7885

On constate que le pas de temps est environ 1000 fois plus grand pour un maillage régulier que pour un maillage irrégulier. Ce qui signifie que pour un même temps final imposé aux deux simulations, la simulation avec un maillage régulier générera moins de solutions mais sera relativement rapide. Concernant la simulation avec le maillage irrégulier, c'est l'inverse qui se produit : le pas de temps est plus petit, donc il y a plus de solutions qui sont générées (la simulation sera alors plus précise), ce qui demande un temps de calcul plus long.

4.2 Test d'advection pure

On décide de mener une campagne de simulations dans le cas d'advection pure (ie $D=0$ et $U_0 \neq 0\text{m/s}$).

On souhaite connaître le domaine de stabilité du schéma dans le cas d'un maillage régulier (à cellules carrées) en fonction du nombre de courant $CFL = U_0 \Delta t / \Delta x$. On pose $T_i = 5$, $T_y = 20$, $T_b = 50$, $U_0 = 5 \cdot 10^{-2}$, $t_f = 1 \cdot 10^{-3}\text{s}$.

Voici ce que l'on observe sur Paraview pour $CFL=0.5$, 1 et 1.2 :

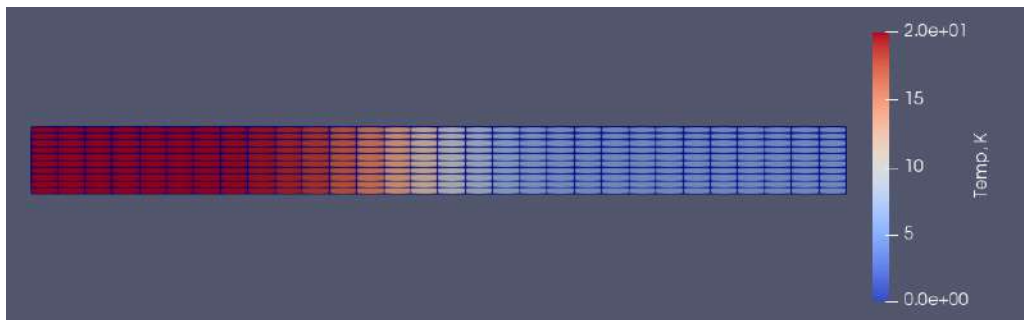


Figure 4 : Simulation pour $CFL=0.5$

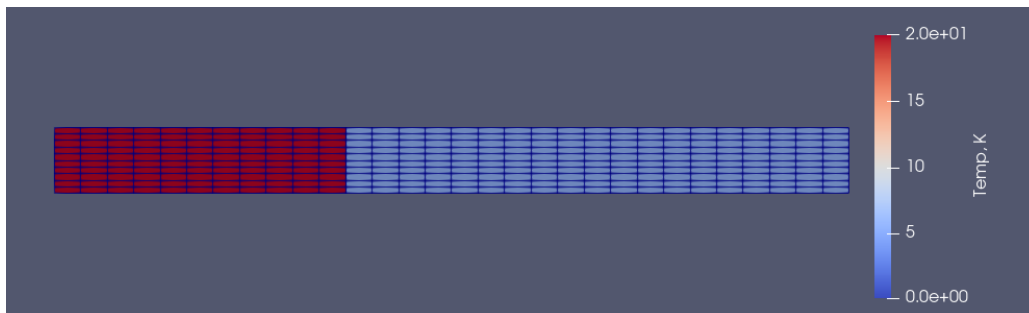


Figure 5 : Simulation pour $CFL=1$

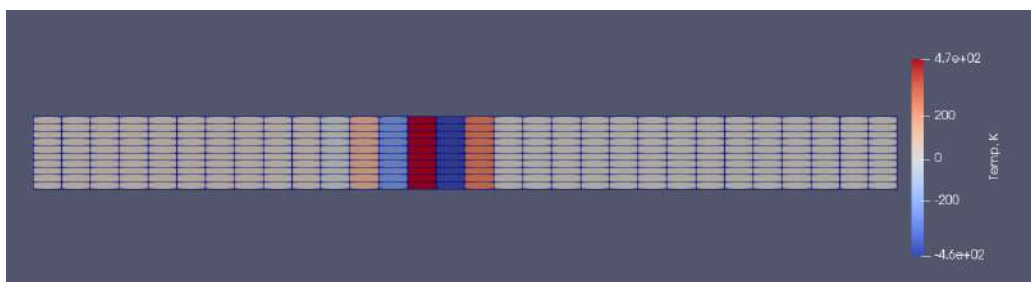


Figure 6 : Simulation pour $CFL=1.2$

Dans les trois cas de figure, on observe de l'advection pure 1D avec initialement T_i imposé sur tout le maillage, puis T_y qui va se déplacer colonne par colonne vers la droite.

On observe sur la figure 4 qu'il y a de la diffusion numérique (différentes nuances de rouge et de bleu sont observables) qui ne devrait normalement pas exister physiquement dans le cas de l'advection pure. Cette "erreur" peut être dû au type de schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation d'advection-diffusion, à savoir ici le schéma d'Euler explicite qui repose sur une discrétisation des différents termes de l'équation. Pour minimiser la diffusion numérique, il faudrait éventuellement trouver un schéma plus sophistiqué pour la résolution de ce problème ou augmenter le CFL.

Sur la figure 6, on observe clairement que le schéma est instable et que les résultats ne sont pas cohérents. On en déduit que le CFL est trop grand. La raison est que la quantité transportée peut se déplacer sur une distance trop grande pour un pas de temps donné, menant le schéma numérique à diverger.

Sur la figure 5, il n'y a ni diffusion numérique, ni visualisation aberrante : on est bien dans le cas d'advection pure parfaite. On notera par ailleurs que l'advection dans ce cas est plus rapide que celle dans le cas $CFL=0.5$.

Finalement, on trouvera avec des tests supplémentaires que le calcul est stable si et seulement si $CFL < 1$, ce qui valide bien le critère de stabilité théorique pour un tel maillage.

4.3 Test de diffusion pure

À la suite du test précédent, on décide cette fois-ci de réaliser des simulations dans le cas de diffusion pure (ie $D \neq 0$, $U_0 = 0m/s$ et $CFL=0$).

On souhaite comme précédemment trouver le critère de stabilité dans le cas d'un maillage régulier en fonction du nombre de Fourier $R = D\Delta t / \Delta x^2$. On effectue les calculs avec les mêmes paramètres précédents, pour $R=0.2$, 0.5 et 0.7 :

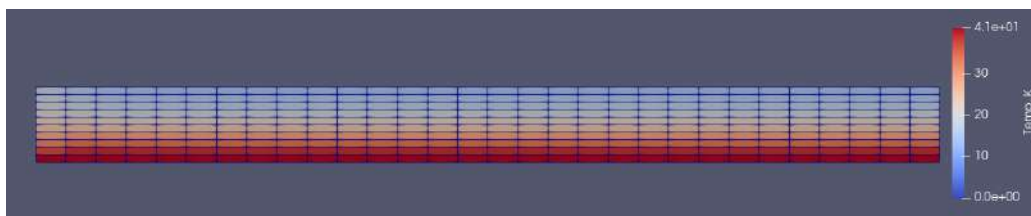


Figure 7 : Simulation pour $R=0.2$

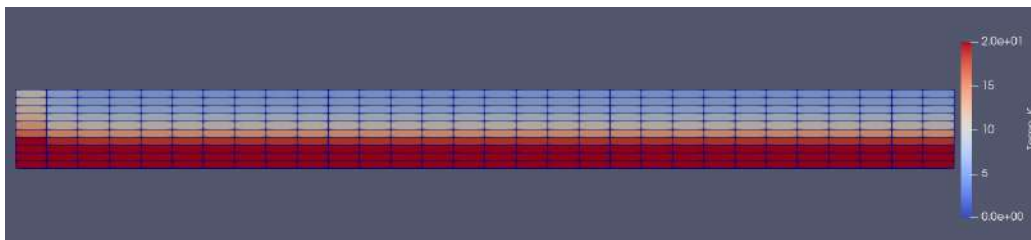


Figure 8 : Simulation pour $R=0.5$

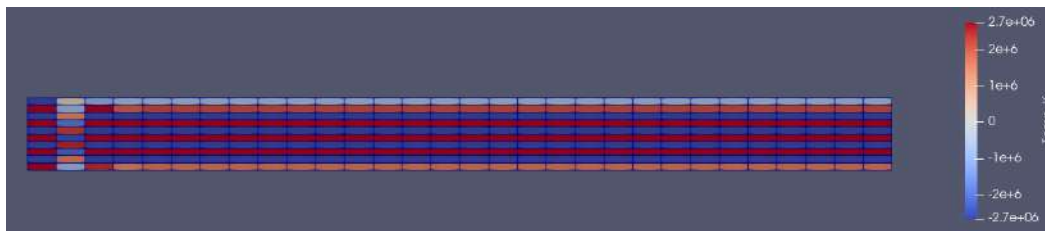


Figure 9 : Simulation pour $R=0.7$

On observe que le schéma est stable pour $R=0.2$ et $R=0.5$ avec une diffusion qui se fait du bas vers le haut du maillage. Pour $R=0.2$, la diffusion s'opère plus lentement que pour le cas avec $R=0.5$. Cela s'explique par le fait que dans le cas d'un petit nombre de Fourier, le schéma numérique suit mieux les variations spatiales en permettant des pas de temps plus petits par rapport à la diffusion physique.

Pour $R=0.7$, le schéma est clairement instable. Cela peut s'expliquer par un pas de temps trop élevé par rapport à la diffusion physique : le schéma numérique aura du mal à suivre les variations spatiales fines dues à la diffusion, ce qui l'amène à diverger.

On trouvera finalement avec des tests supplémentaires que le schéma est stable si et seulement si $R < 0.5$, ce qui est conforme avec le critère de stabilité théorique.

5 Exploitation du code

Après avoir entièrement discrétisé l'équation d'advection-diffusion pour le schéma semi-implicite, nous pouvons à présent exploiter le code et visualiser les différentes simulations sur Paraview en jouant sur les paramètres d'entrée.

L'exploitation du code a été réalisée avec le fichier d'exécution "prog _ exploitation_linux.exe" et le fichier des données d'entrée fournies sur Moodle.

5.1 Comparaison des temps de calcul

Dans un premier temps, nous avons comparé le temps de calcul pour chacun des deux schémas en fonction du type de maillage (Régulier/Non régulier) et du profil de vitesse choisis (uniforme/Non uniforme). Les simulations ont été réalisées avec $N_x = 30$, $N_y = 10$, $U_0 = 5 \times 10^{-2} m/s$, $t_f = 2 \times 10^{-3} s$ et tous les paramètres d'entrée étaient égaux par ailleurs. Pour le calcul du temps de simulation, nous avons utilisé la commande "time".

Ci-dessous vous trouverez les tableaux comparant les différents temps d'exécution des codes selon la méthode utilisée et les paramètres choisis.

Pour le schéma explicite :

Vitesse	Maillage	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
Uniforme	Régulier	$1,45.10^{-5}$	0,164s
Non uniforme	Régulier	$1,45.10^{-5}$	0,14s
Uniforme	Irrégulier	$1,28.10^{-7}$	19,3s
Non uniforme	Irrégulier	$1,27.10^{-7}$	18,61s

Pour le schéma *implicite* :

Vitesse	Maillage	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
Uniforme	Régulier	$1,46.10^{-5}$	7,35s
Non uniforme	Régulier	$1,45.10^{-5}$	7,41s
Uniforme	Irrégulier	$1,28.10^{-7}$	12m10s
Non uniforme	Irrégulier	$1,28.10^{-7}$	11m50s

On en tire de ces tableaux plusieurs observations.

1) Pour un même schéma, on constate que le temps de simulation est plus grand lorsque le maillage irrégulier est utilisé, plutôt que le maillage régulier. Quant au pas de temps Δt , il est plus élevé dans le cas d'un maillage régulier. Cela signifie que moins de solutions ont été générées pour la résolution de l'équation d'advection-diffusion pour un maillage régulier que pour un maillage irrégulier, d'où un temps de simulation plus petit. Cependant, pour un même maillage, la forme du profil de vitesse en amont n'a que très peu d'influence sur le temps de calcul et le pas de temps.

2) Pour un même maillage et un même profil de vitesse, les temps de simulation pour le schéma semi-implicite est clairement plus important que pour le schéma explicite. On peut donner plusieurs raisons à ce constat : la mise en oeuvre d'un schéma semi-implicite conduit forcément à la résolution d'un système linéaire pour certains termes de l'équation contrairement au schéma explicite qui n'en nécessite pas. De plus, nous verrons que le schéma semi-implicite offre un domaine de stabilité beaucoup plus élargi en comparaison du schéma explicite, ce qui s'exprime par une résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps entraînant des coûts supplémentaires de temps de calcul.

5.2 Stabilité du schéma numérique

Un des critères importants à prendre en compte lors de la résolution de l'équation d'advection-diffusion est celle de la stabilité numérique. Ainsi, on s'intéresse ici au critère de stabilité pour l'équation de diffusion pure (ie CFL=0), résolue avec un schéma centré en espace et implicite en temps.

Après avoir réalisé plusieurs simulations avec tous les paramètres d'entrées fixes et le nombre de Fourier R qui varie, on obtient le tableau suivant :

R	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
0.5	$1,46.10^{-5}$	5,38s
5	$1,47.10^{-4}$	0,458
50	$1,47.10^{-3}$	0,051s
500	$1,25.10^{-2}$	0,021s

On observe que le pas de temps augmente avec le nombre de Fourier, ce qui signifie qu'il y a de moins en moins de solutions générées, d'où un temps de simulation plus faible.

Par ailleurs, contrairement au schéma explicite, la solution au schéma numérique converge toujours et est donc toujours stable, quel que soit R.

On peut le constater sur la simulation ci-dessous pour R=500 :

(FAIRE PHOTO DE LA SIMULATION AU TEMPS FINAL POUR R=500)

En répétant les mêmes simulations mais pour les deux schémas cette fois-ci avec $N_x = 60$, on peut observer l'influence de la taille du domaine sur la résolution.

Voici les résultats obtenus :

Schéma	R	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
Explicite	0.5		
Explicite	5		
Implicite	0.5	$1,25.10^{-5}$	56,357s
Implicite	5	$1,25.10^{-4}$	4,733s
Implicite	50	$1,25.10^{-3}$	0,302s
Implicite	500	$1,25.10^{-2}$	0,021s

(REFAIRE SIMULATION POUR LE SCHÉMA EXPLICITE ET COMPARER LES RÉSULTATS)

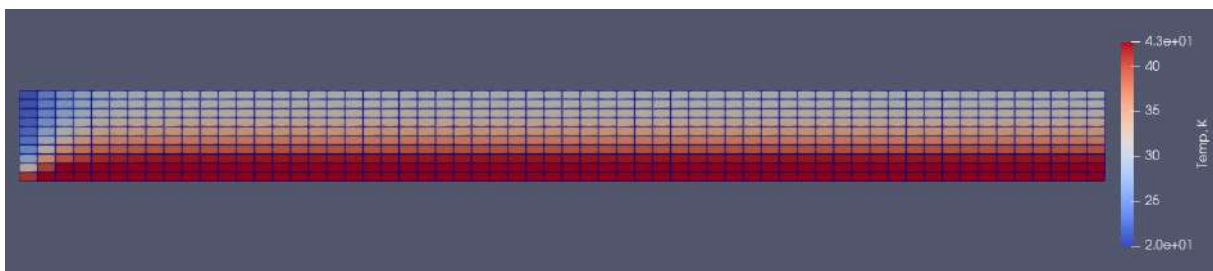


Figure 3 : Schéma du domaine lors de la résolution pour R = 5

On observe que plus le nombre de Fourier R est grand, plus la simulation sera rapide avec Δt qui augmente, mais la précision sera réduite puisque on aura créé moins de solutions (d'où un Δt

grand).

De plus, on remarquera que pour $R=5$, le schéma semi-implicite reste stable par rapport au schéma explicite où le critère de stabilité doit vérifier $R < 0,5$ (d'après les tests réalisés précédemment).

5.3 Influence de la régularité du domaine sur la stabilité

EST CE QU'ON GARDE CETTE PARTIE ???

La régularité du maillage influence également grandement le temps d'exécution. Voici ci-dessous des exemples de résolution pour des maillages réguliers puis irréguliers. On utilise ici les paramètres suivants : $R = 50$, $N_x = 30$ et $D = 2,5 \cdot 10^{-4}$.

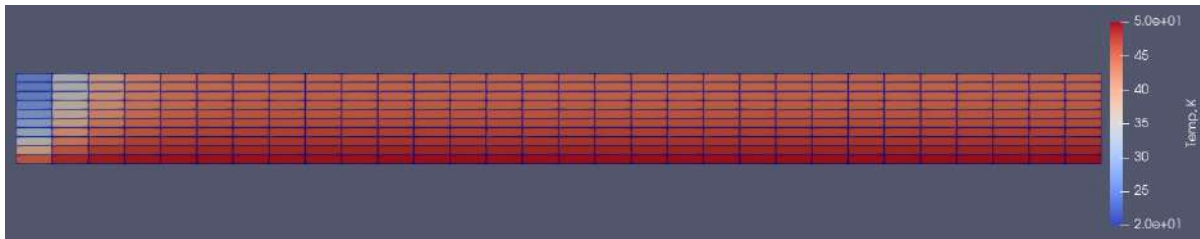


Schéma de la résolution pour un domaine régulier, temps d'exécution : 2,4s

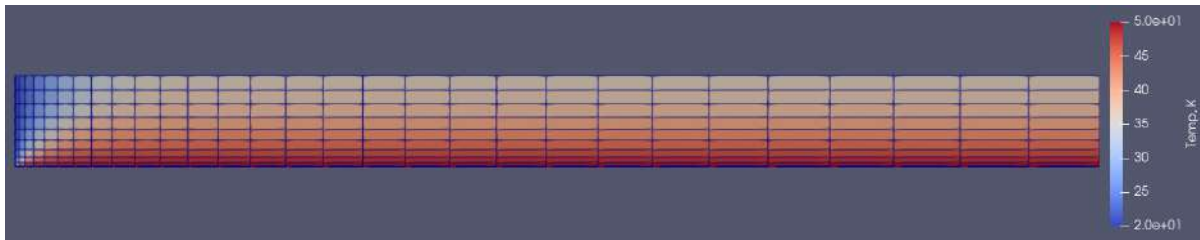


Figure 5 : Schéma de la résolution pour un domaine irrégulier, temps d'exécution : 35,2s

5.4 Influence du nombre de Péclet sur le refroidissement

Faisons maintenant varier le nombre de Péclet pour étudier son influence sur la résolution. Pour rappel on a :

$$Pe = \frac{U_0 L}{D}$$

Avec U la vitesse caractéristique du fluide, L la longueur caractéristique du domaine et D le coefficient de diffusion du matériau. Nous pouvons jouer sur ces trois paramètres afin d'obtenir certaines valeurs de Pe souhaitées. Grâce à l'analogie donnée dans le sujet $L = 3mm$, nous savons que $1px = 0.1mm$ d'où $L = 30px = N_x$. Pour les simulations qui suivent, nous avons imposé $R=5$ et $t_f = 8 \times 10^{-4}s$ pour éviter que le temps de calcul soit trop long.

Ainsi, nous allons faire varier Pe de deux manières différentes :

1) On décide d'abord de faire varier Pe avec D , en fixant $U_0 = 5 \times 10^{-2}$. On obtient ainsi pour un maillage irrégulier et pour un schéma semi-implicite les résultats suivants :

Pe	D	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
0.6	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	44s
6	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$	4,2s
60	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	1,2s

2) On décide ensuite de faire varier Pe avec U_0 , en fixant $D = 2,5 \times 10^{-5}$. On obtient ainsi pour un maillage irrégulier et pour un schéma semi-implicite les résultats suivants :

Pe	$U_0(m/s)$	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
0.6	$5 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	56s
6	$5 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	57s
60	$5 \cdot 10^{-1}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	57s

Schéma implicite, vitesse uniforme, maillage régulier avec U_0 fixe : (UTIIIIIIILLLLLLLEEE???????)

Pe	D	$\Delta t(s)$	Temps d'exécution
0.6	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-6}$	24,22s
6	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-5}$	2,34s
60	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-4}$	0,26s

On remarque que lorsque U_0 est fixé, le temps d'exécution est inversement proportionnel au nombre de Peclet d'un facteur 10 environ. On remarque en revanche que lorsque D est fixé, le temps d'exécution demeure constant lorsqu'on fait varier Pe .

5.5 Influence de l'algorithme d'inversion de la matrice sur le temps de calcul

Dans cette partie, nous utiliserons la méthode de sur-relaxation successive grâce au fichier sor.f90 fourni.

Nous remarquons tout d'abord la rapidité de cette méthode. En effet, nous avons comparé les temps d'exécution pour $R = 5$, $D = 2,5 \cdot 10^{-6}$ et différentes tailles de maillage allant de 4×12 à 45×15 . Voici nos résultats

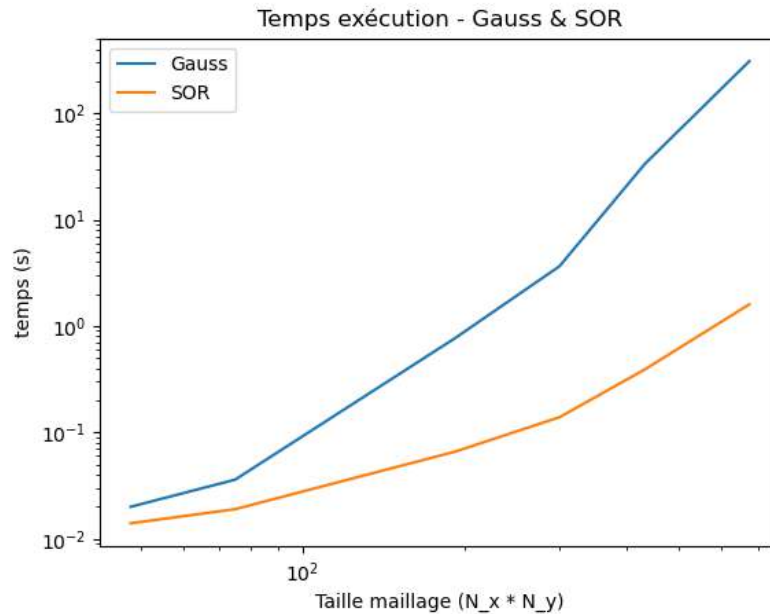


FIGURE 1 – Temps d'exécution pour les méthodes Gauss et SOR selon la taille du maillage.

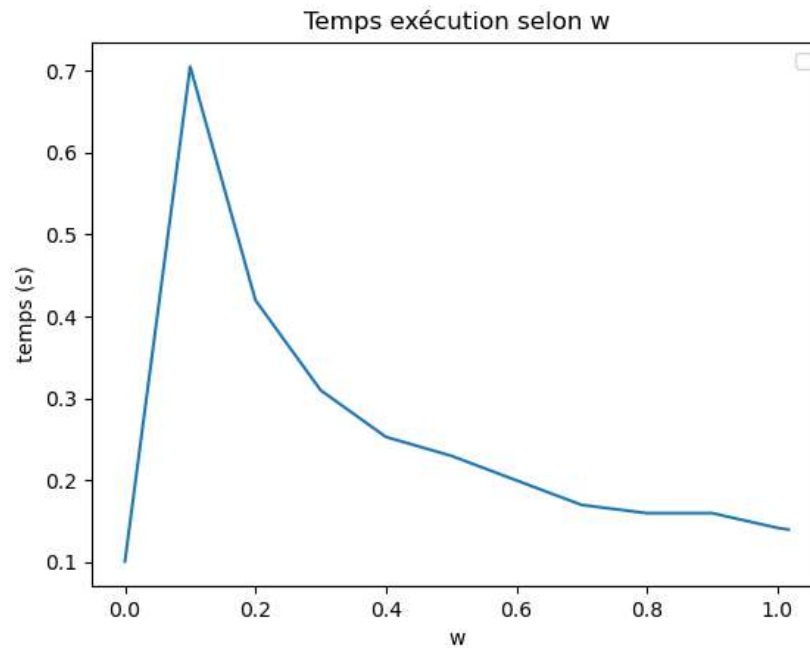
Taille de la maille	t_{Gauss}	t_{SOR}
12x4	0,02s	0,014s
15x5	0,036s	0,019s
24x8	0,77s	0,066s
30x10	3,65s	0,139s
36x12	33,41s	0,391s
45x15	5min8s	1,583s

Ces temps d'exécution rapides, obtenus grâce à la méthode SOR, permettront de faciliter d'une part les simulations dans un environnement industriel mais aussi pour nous, lors de nos futures expériences numériques.

5.6 Influence du paramètre de sur-relaxation ω

Enfin, nous allons comparer les temps d'exécution pour différentes valeurs de w allant de 0 jusqu'à sa valeur limite.

Voici le tracé du temps d'exécution selon ce facteur ω :

FIGURE 2 – Temps exécution selon ω

ω	temps de convergence (s)
1,0172	0,14
1	0,142
0,9	0,16
0,8	0,16
0,7	0,17
0,6	0,2
0,5	0,22
0,4	0,253
0,3	0,31
0,2	0,42
0,1	0,705
0	0,101

On remarque que en dessous de la valeur critique $\omega = 1.0172$, le programme converge et au-delà, il diverge. Nous avons un maximum pour $\omega = 0.1$ et ensuite le temps d'exécution diminue lorsque ω grandit jusqu'à sa valeur critique.

5.7 Influence du critère d'arrêt R_0

Nous allons ici faire varier le critère d'arrêt R_0 . Cette grandeur mesure la convergence par la variation relative entre itérations. L'algorithme s'arrête quand cette variation est suffisamment

petite. Après une première campagne de simulation où nous trouvons des résultats très similaires, nous avons décidé de nous placer à $t_f = 8.10^{-2}$ pour augmenter la durée de la simulation et ainsi mieux évaluer les différences de mesures que nous obtenons entre les différentes expériences. Voici les résultats obtenus

R_0	temps de convergence (s)
1.10^{-10}	5,48
1.10^{-9}	5,65
1.10^{-8}	5,56
1.10^{-7}	5,61
1.10^{-6}	5,62
1.10^{-5}	5,49
1.10^{-4}	5,50
1.10^{-3}	5,48
1.10^{-2}	5,47
1.10^{-1}	5,46

Nous remarquons que, malgré des variations de l'ordre de 10^9 , le temps d'exécution du modèle reste très stable autour de 5.5s. Nous concluons donc que cette variable n'a pas d'influence marquante sur le temps d'exécution.

Conclusion

En synthèse, notre simulation, avec l'implémentation informatique en Fortran90 du schéma semi-implicite de résolution, a éclairé les nuances de la résolution de l'équation d'advection-diffusion. Les variations du temps d'exécution, explorées à travers différents paramètres, ont fourni des indications précieuses sur l'efficacité des approches. Ces résultats, mis en pratique par le biais de notre code, ouvrent des perspectives tangibles pour des applications industrielles, soulignant la pertinence de nos conclusions dans des contextes pratiques.

Annexes