Lineare Algebra

Lucas Westermann & Florian Scheibner 21. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

Literatur 8				
1	Gru	ındlege	endes	8
	1.1	Menge	en	8
		1.1.1	Definition (Relation)	8
		1.1.2	Beispiel	8
		1.1.3	Beispiel	8
		1.1.4	Beispiel	9
		1.1.5	Beispiel	9
		1.1.6	Beschreibung (Gerichtete Graphen)	9
		1.1.7	Beispiel	10
		1.1.8	Definition (Äquivalenzrelation)	10
		1.1.9	Beispiel	10
		1.1.10	Beispiel	10
	1.2	Abbild	lungen	11
		1.2.1	Definition (Abbildungen, Funktion)	11
		1.2.2	Bemerkung	11
		1.2.3	Beispiel (identische Abbildung)	12
		1.2.4	Beispiel	12
		1.2.5	Beispiel (ASCII-Code)	12
		1.2.6	Definition (Umkehrabbildung)	13
		1.2.7	Bemerkung	13
		1.2.8	Korollar	13
	1.3	Matriz	gen	13
		1.3.1	Definition (Matrix)	14
		1.3.2	Beispiel (n Tupeln, m -Spalten)	14
		1.3.3	Kronecker-Symbol, Einheits- und Nullmatrixe)	14
		1.3.4	Beispiel (Diagonal- und Dreieckmatrizen)	15
		1.3.5	Bemerkung	15
		1.3.6	Beispiel	16
		1.3.7	Beispiel	16
		1.3.8	Beispiel (RGB - Raum)	16
		1.3.9	Beispiel (Inzedenzmatrix)	16
		1.3.10	1	17
	1.4		re Gleichungen	$\frac{17}{17}$
		1.4.1	Definition (lineare Gleichung)	17
		1.4.2	Bemerkung	18
		1.4.3	Satz (Superpositionsprinzip)	18
		1.4.4	Satz	18
		1.1.1		-0

Inhaltsverzeichnis Seite 2 von 69

		1.4.5	Beispiel
		1.4.6	Beispiel (Rückwärts-Substitution)
		1.4.7	Beispiel
		1.4.8	Satz
		1.4.9	Satz
2	Line	eare R	äume
	2.1	Algebr	raische Strukturen
		2.1.1	Definition (Gruppe)
		2.1.2	Bemerkung
		2.1.3	Bemerkung (Potenzen)
		2.1.4	Beispiel
		2.1.6	Beispiel (modulo)
		2.1.7	Beispiel (symmetrische Gruppe)
		2.1.8	Korollar (Rechnen in Gruppen)
		2.1.9	Definition (Körper)
		2.1.10	Beispiel
		2.1.11	Beispiel (Restklassenkörper modulo p)
			Korollar
			Bemerkung
			Beweis
	2.2		räume
		2.2.1	Definition (linearer Raum, Vektorraum)
		2.2.2	Beispiel
		2.2.3	Beispiel
		2.2.4	Beispiel (Lösungsmengen)
		2.2.5	Beispiel (Funktionsräume)
		2.2.6	Korollar
		2.2.7	Definition (Unterraum)
		2.2.8	Bemerkung
		2.2.9	Beispiel (Stetige und stetig-differenzierbare Funktion)
		_	Beispiel (Polynome)
			Satz (Schnitte und Summen von Unterräumen)
	2.3		e Abhängigkeiten
	2.0	2.3.1	Definition (Spann)
		2.3.1 $2.3.2$	Beispiel
		2.3.2 $2.3.3$	Beispiel (Monome)
		2.3.3 2.3.4	Proposition
		2.3.4 $2.3.5$	Korollar
		2.3.6	Definition (lineare Unabhängigkeit)
		2.3.7	Bemerkung

Inhaltsverzeichnis Seite 3 von 69

		2.3.8	Beispiel
		2.3.9	Proposition
		2.3.10	Beispiel
		2.3.11	Satz
	2.4	Basis u	and Dimensionen
		2.4.1	Definition (Basis)
		2.4.2	Beispiel
		2.4.3	Beispiel (Standardbasis)
		2.4.4	Beispiel (Polynome)
		2.4.5	Lemma
		2.4.6	Satz
		2.4.7	Bemerkung (Koordinaten)
		2.4.8	Satz
		2.4.9	Proposition
		2.4.10	Lemma (Austauschsatz von Steinitz)
		2.4.11	Satz (Dimension)
		2.4.12	Bemerkung
		2.4.13	Beispiel
		2.4.14	Beispiel
		2.4.15	Korollar
		2.4.16	Korollar
	2.5	Kompl	emente und direkte Summen
		2.5.1	Definition (direkte Summen)
		2.5.2	Beispiel
		2.5.3	Beispiel
		2.5.4	Satz
		2.5.5	Satz
	2.6	Anwen	dung: Matrizen und lineare Gleichungen
		2.6.1	Definition (Rang einer Matrix)
		2.6.2	Bemerkung
		2.6.3	Proposition
3	Tine	one Al	bbildungen 40
3	3.1	Grund	8
	5.1	3.1.1	Definition (lineare Abbildung)
		3.1.1	Bemerkung
		3.1.3	Beispiel
		3.1.4	Beispiel (affine Abbildungen)
		3.1.4 $3.1.5$	Beispiel (die Abbildung T_A)
		3.1.6	Beispiel
		3.1.7	Beispiel (Vorwärts-Shift)
		0.1.1	Delibrier (vor war to Diffit)

Inhaltsverzeichnis Seite 4 von 69

	3.1.8	Definition (Kern, Bild, Rang)
	3.1.9	Proposition
	3.1.10	Satz
	3.1.11	Beispiel
	3.1.12	Satz (Dimensionssatz)
		Korollar
	3.1.14	Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung)
	3.1.15	Bemerkung
3.2	Isomor	phismen
	3.2.1	Definition
	3.2.2	Bemerkung
	3.2.3	Beispiel (Transponierte)
	3.2.4	Beispiel (Polynome)
	3.2.5	Lemma
	3.2.6	Satz
	3.2.7	Bemerkung
	3.2.8	Proposition
	3.2.9	Satz
	3.2.10	Satz
3.3	Linear	e Abbildungen und Matrizen
	3.3.1	Satz (darstellende Matrix)
	3.3.2	Bemerkung
	3.3.3	Beispiel (Polynome)
	3.3.4	Proposition
	3.3.5	Korollar
	3.3.6	Satz
	3.3.7	Bemerkung
	3.3.2	Die Abbildung T_A
	3.3.8	Satz
	3.3.9	Bemerkung
	3.3.10	Definition (inverse Matrix)
	3.3.11	Beispiel
	3.3.12	Korollar
	3.3.13	Definition (regulär, singulär)
		Satz (Charakterisierung regulärer Matrizen)
	3.3.15	Satz
	3.3.3	Basiswechsel
	3.3.16	Satz
	3.3.17	Definition (Ähnlichkeit)
		Bemerkung

Inhaltsverzeichnis Seite 5 von 69

1	Eige	genwerte 51		
	4.1		ninanten	
		4.1.1	Definition (Signum)	
		4.1.2	Beispiel	
		4.1.3	Proposition	
		4.1.4	Bemerkung	
		4.1.5	Definition (Determinante)	
		4.1.6	Bemerkung	
		4.1.7	Beispiel	
		4.1.8	Beispiel	
		4.1.9	Lemma	
		4.1.10	Satz (Multiplikativität der Determinante)	
		4.1.11	Satz (Regularität und die Determinante)	
		4.1.12	Korollar	
		4.1.13	Bemerkung	
		4.1.14	Proposition (Entwicklung von det)	
		4.1.15	Beispiel	
		4.1.16	Beispiel (Dreiecksmatrizen)	
		4.1.17	Proposition (Inverse und det)	
		4.1.18	Beispiel	
	4.2	Eigenv	verte und Eigenvektoren	
		4.2.1	Definition (Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum)	
		4.2.2	Bemerkung	
		4.2.3	Beispiel	
		4.2.4	Beispiel (Shift-Operator)	
		4.2.5	Proposition	
		4.2.6	Korollar	
	4.3		narakteristische Polynom	
		4.3.1	Definition (charakteristisches Polynom)	
		4.3.2	Bemerkung	
		4.3.3	Satz	
		4.3.4	Beispiel	
		4.3.5	Proposition	
		4.3.6	Beispiel	
		4.3.7	Satz	
	4.4	_	nalisierung und Trigonalisierung	
		4.4.1	Definition (diagonalisierbar, trigonalisierbar)	
		4.4.2	Bemerkung	
		4.4.3	Satz (Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit)	
		4.4.4	Beispiel	
		4.4.5	Satz (Charakterisierung von Trigonalisierbarkeit)	

Inhaltsverzeichnis Seite 6 von 69

		4.4.6	Bemerkung (Jordan-Normalform)
		4.4.7	Beispiel
		4.4.8	Korollar
		4.4.9	Korollar
		4.4.10	Satz (von Cayley-Hamilton)
		4.4.11	Bemerkung
5	Inn	ere Pro	odukte 65
	5.1	Skalar	produkte und Orthogonalität
		5.1.1	Definition (inneres Produkt)
		5.1.2	Bemerkung
		5.1.3	Bemerkung (Orthogonalität)
		5.1.4	Beispiel (Euklidischer Raum)
		5.1.5	Beispiel (Unitärer Raum)
		5.1.6	Beispiel
		5.1.7	Definition (Orhtogonales Komplement)
		5.1.8	Beispiel
		5.1.9	Proposition
		5.1.10	Satz
		5.1.11	Definition (Orthogonal- und Orthonormalbasis)
		5.1.12	Beispiel
		5.1.13	Proposition
		5 1 14	Proposition 68

Inhaltsverzeichnis Seite 7 von 69

Literatur

Mathematik für Informatiker: Teschl, Hackenberger Lineare Algebra: Beutelspacher, Fischer, Lang (auf Englisch), Stammbach.

1 Grundlegendes

1.1 Mengen

1.1.1 Definition (Relation)

Gegeben seien zwei Mengen X und Y. Eine Teilmenge R des kartesisches Produkts $X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}$ heißt Relation (R) zwischen X und Y; im Fall X = Y spricht man von einer Relation auf X. Ferner: $R_1^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}$ heißt Umkehrrelation.

1.1.2 Beispiel

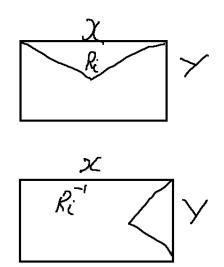
Die Menge $R_0 = \{(x, y) \in X \in Y : y \text{ ist Hauptstadt von } x \text{ ist eine Relation zwischen der Menge } X \text{ aller Länder und } Y \text{ aller Städte.}$



1.1.3 Beispiel

Mit den Mengen $X = \mathbb{R}$ $Y = [0, \infty)$ ist $R_1 = \{(x, |x|) \in X \times Y, X \in X\}$ ist eine Relation mit der Umkehrrelation $R^{-1} = \{(|x|, x) : x \in X\}$.

Inhaltsverzeichnis Seite 8 von 69



1.1.4 Beispiel

Mit den Mengen $X=Y=\mathbb{R}$ ist $R_2=\{(x,y)\in X\times Y:x\leq y\}$ eine Relation $R_2^{-1}=(y,x):x\leq y$



1.1.5 Beispiel

Die Menge $R_3 = \{(x, y) \in C \times C : x \text{ und } y \text{ haben gleichen Hersteller}\}$ ist eine Relation auf der Menge aller Computer C.

1.1.6 Beschreibung (Gerichtete Graphen)

Relation R auf endlichen Mengen X können alternative wie folgt dargestellt werden. Man repräsentiert die Elemente von X als Punkte in der Ebene (Knoten) und verbindet $x,y\in X$ genau dann durch einen Pfeil (gerichtete Kante), wenn $(x,y)\in R$. Das paar (X,R) heißt gerichteter Graph oder Digraph, z.B. $X=\{a,b,c\}$ $R=\{(a,b),(b,c),(c,d)\}$.

Inhaltsverzeichnis Seite 9 von 69



$$X = \{a, b, c\}$$
 $R = \{(b, a), (a, a), (c, c)\}.$
Eine Relation R auf X heißt
reflexiv $\Leftrightarrow (x, x) \in R$ für alle $x \in X$
transitiv $\Leftrightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ für alle $x, y, z \in X$
symmetrisch $\Leftrightarrow (x, y) \in R$ für alle $x, y \in X$

1.1.7 Beispiel

Die Relation R_2 aus Beispiel 1.1.4 ist reflexiv, transitiv, aber nicht Symmetrisch. Die Relation R_3 aus Beispiel 1.1.5 ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

1.1.8 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation A auf eine Menge X heißt eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Für ein Paar $(x, y) \in A$ Schreiben wir $x \sim y$ und nennen x und y äquivalent.

1.1.9 Beispiel

- 1. Sei X eine beliebige Menge. Dann ist $\{(x,y) \in X \times X : x = y\}$ eine Äquivalenzrelation (<u>Identitätsrelation</u>).
- 2. Ebenso ist das ganze Produkt $X \times X$ eine Äquivalenzrelation (Allrelation).
- 3. Die Relation R_3 aus Beispiel 1.1.5 ist eine Äquivalenzrelation. Mit ihr lassen sich Computer nach ihrem Hersteller klassifizieren. Für jedes $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$ die von X erzeugte Äquivalenzklasse und ein Element $y \in [x]$ heißt Repräsentant von [x].

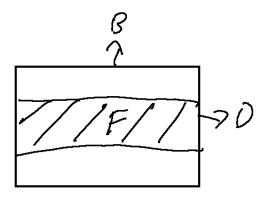
1.1.10 Beispiel

- 1. Für die Identitätsrelation ist $[x] = \{x\}$ für alle $x \in X$. Die Allrelation besitzt genau eine Äquivalenzklasse [x] = X.
- 2. Im Beispiel 1.1.5 sind die Äquivalenzklassen die Menge aller Hersteller.

Inhaltsverzeichnis Seite 10 von 69

1.2 Abbildungen

 $F \subseteq D \times B$.



1.2.1 Definition (Abbildungen, Funktion)

Eine Relation F zwischen zwei nichtleeren Mengen D und B heißt Abbildung oder Funktion von D nach B, falls für alle $x \in D$ gilt.

- 1) Es existiert ein $y \in B$ mit $(x, y) \in F$
- 2) Mit $y_1, y_2 \in B$ folgt aus $(x, y_1) \in F$ und $(x, y_2) \in F$, dass $y_1 = y_2$.

Die Menge D heißt <u>Definitionsbereich</u> und B <u>Bildbereich</u> von F. Im Fall D = B spricht man von einer Abbildung auf D oder um einer Selbstabbildung auf D.

1.2.2 Bemerkung

Veranschaulicht man Funktionen auf (endlichen) Mengen D als gerichtete Graphen (Beschreibung 1.1.7), so geht von jedem Knoten genau eine Kante ab. Anstelle der Notation $F \subseteq D \times B$, $(x,y) \in F$ schreibt man auch $f:D \to B, x \mapsto f(x)$ oder y:=f(x) Mit einer weiteren nichtleeren Menge C und einer Abbildung $g:B \to C$ ist die Verknüpfung (Komposition) von g und f definiert als $g \circ f:D \to C, (g \circ f)(x):=g(f(x))$. Im Fall von Abbildungen f,g auf D gilt i.A. $f \circ g \neq g \circ f$. Statt einzelner Punkte $x \in D$ kann man auch Mengen $X \subseteq D$ abbilden: $f(X):=\{y \in B: \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } y=f(x)\}$. f(X) heißt \underline{Bild} von X unter f. Das \underline{Urbild} einer Menge $Y \subseteq B$ ist definiert durch $f^{-1}(Y):=\{x \in D \mid f(x) \in Y\}$. Eine Abbildung $f:D \to B$ heißt

injektiv $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$ enthält für alle $y \in B$ höchstens ein Element

 $\overline{\text{surjektiv}} \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$ enthält für alle $y \in B$ mindestens ein Element.

 $\overline{\text{bijektiv}} \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$ enthält für alle $y \in B$ genau ein Element.

Eine Abbildung $f: D \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Inhaltsverzeichnis Seite 11 von 69



1.2.3 Beispiel (identische Abbildung)

Die identische Abbildung auf eine Menge $D \neq \emptyset$ ist $id_D: D \to D, id_D(x) := x$. Sie ist bijektiv.

Beispiel

Die Relation R_0 aus Beispiel 1.1.2 zwischen $X = \{Land\}$ und $Y = \{Stadt\}$ ist eine Funktion $r_o: X \to Y$ $r_0(Land) :=$ Hauptstadt vom Land. Ihr Bild ist $r_0(X) = \{Hauptstädte\}$ und die Urbilder lauten:

$$r_0^{-1}(\{s\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } s \text{ keine Hauptstadt,} \\ \{l\} & \text{falls } s \text{ Hauptstadt von } l. \end{cases}$$

Folglich ist r_0 injektiv, aber nicht surjektiv. Betrachtet man die Menge aller Haupstädte als Bildbereich von r_0 , so ist diese Abbildung auch surjektiv.

1.2.4 Beispiel

Die Relation R_1 zwischen \mathbb{R} und $[0, \infty)$ aus Beispiel 1.1.3 ist eine Abbildung und lässt sich schreiben als $r_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $r_1(x) := |x|$ Für sie gilt $r_1(\mathbb{R}) := [0, \infty)$ und $r_1^{-1}(\{y\}) = \{-y, y\}$ für alle $y \in [0, \infty)$. Also ist $r_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ surjektiv, aber nicht injektiv. Betrachten wir r_1 mit ganz \mathbb{R} als Bildbereich, so gilt $r_1^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ für y < 0 und dann ist r_1 nicht mehr surjektiv.

1.2.5 Beispiel (ASCII-Code)

Der ASCII-Code zur Codierung alpha-numerischer Zeichen ist gegeben durch eine bijektive Abbildung $f:\{0,1,\cdots,255\text{ bzw. }127\} \to \{\text{Zeichen}\}.$

Einfache Beispiele (etwa Beispiel 1.2.5) zeigen, dass die Umkehrrelation F^{-1} einer Abbildung $F \subseteq D \times B$ bzw. $f: D \to B$ nicht unbedingt eine Abbildung ist.

Inhaltsverzeichnis Seite 12 von 69

1.2.6 Definition (Umkehrabbildung)

Eine Abbildung $f:D\to B$ heißt umkehrbar, falls ihre Umkehrrelation F^{-1} wieder eine Abbildung ist. Für letztere schreibt man $f^{-1}:B\to D$ und nennt sie Umkehrabbildung von f.

1.2.7 Bemerkung

Mit einer umkehrbaren Abbildung $f: D \to B$ ist auch ihre Umkehrfunktion $f^{-1}: B \to D$ umkehrbar mit $f^{-1} \circ f = id_D$ und $f \circ f^{-1} = id_B$.

1.2.8 Korollar

Eine Abbildung $f: D \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn f bijektiv ist. Für umgekehrtes f existiert die Umkehrfunktion nur auf f(D).

Beweis: Hausaufgabe

1.3 Matrizen

Wir führen kurz die komplexen Zahlen \mathbb{C} ein. Darunter versteht man alle Paare z=(x,y) reeller Zahlen $x,y\in\mathbb{R}$ mit der Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

wobei $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$

Differenz und Quotient ergeben sich zu:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \text{ falls } x_2^2 + y_2^2 \neq 0$$

Alternative Darstellung:

$$z = (x, y) = x + iy$$
 mit der Konvention $i^2 = -1$

Wobei x der Realteil (Rez = x) ist und y der Imaginärteil (Imz = y).

Inhaltsverzeichnis Seite 13 von 69



Im Folgenden stehe K für eine der drei Mengen ℚ (rationalen Zahlen), ℝ (reelle Zahlen) oder ℂ.

1.3.1 Definition (Matrix)

Eine $m\times m$ -Matrize ist ein rechteckiges Schema von Zahlen $a_{ij}\in\mathbb{K}$ der Form

$$A = (a_{i,j})1 \le i \le m, 1 \le j \le m = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

Der erste Index $i \in \{1, \dots, m\}$ nummeriert die m Zeilen, der zweite Index $j \in \{1, \dots, m\}$ die m Spalten der Matrix A, das Element $a_{ij} \in \mathbb{K}$ steht daher in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Für die Menge aller solchen Matrizen schreiben wir $\mathbb{K}^{m \times m}$. Für eine quadratische Matrix A gilt m = n und die $a_{i,i}$ heißen Diagonalelement.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

1.3.2 Beispiel (n Tupeln, m-Spalten)

Ein <u>n-Tupel</u> $x = (x_1, \dots, x_n)$ von Zahlen X aus \mathbb{K} wird als $1 \times m$ -Matrix interpretiert. Eine <u>m-Spalte</u> $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ wird als $m \times 1$ -Matrix verstanden, identifiziert durch $\mathbb{K}^m = k^{m \times 1}$.

1.3.3 Kronecker-Symbol, Einheits- und Nullmatrixe)

Wir definieren das Kronecker-Symbol $S_{i,j} := \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ und $I_m := (S_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ ist die Einheitsmatrix. Bei der Nullmatrix $0 = (0)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sind alle Elemente gleich $0 \in \mathbb{N}$.

Inhaltsverzeichnis Seite 14 von 69

Beispiel (Diagonal- und Dreieckmatrizen)

Man nennt eine quadratische Matrix $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ diagonal falls $a_{i,j}=0$ für $i\neq j$. Wir schreiben

dann
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{1,1}, \cdot, a_{n,n})$$
. Eine obere Dreiecksmatrix ist quadratisch

Man nennt eine quadratische Matrix
$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$$
 diagonal falls $a_{i,j} = 0$ für $i \ne j$. Wir schreiben dann $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{1,1}, \cdot, a_{n,n})$. Eine obere Dreiecksmatrix ist quadratisch und erfüllt $a_{i,j} = 0$ für $i > j$, wogegen eine untere Dreiecksmatrix $a_{i,j} = 0$ für $i < j$ erfüllt. Sie sind von der Form: $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ bzw. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Mathematische Operationen für Matr

- <u>Skalare Multiplikation</u>: $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{m \times n}, \alpha \cdot A = \alpha A = (\alpha a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \leq j \leq n}}$. Wir schreiben $-A := (-1) \cdot A$
- Addition: $+: \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{m \times n}, A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Die Subtraktion lautet A - B = A + (-B).
- Genau für $m \times n$ -Matrizen A und $n \times p$ -Matrizen B lässt sich eine Multiplikation erklären. $\cdot: \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{n \times p} \to \mathbb{K}^{m \times p}$. $A \cdot B = AB := (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ das Produkt ist also eine $m \times p$ -Matrix.

Merke: Das Produkt macht nur Sinn, falls die Spaltenzahl der ersten mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.

1.3.5Bemerkung

(1) Um Produkte von Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ zum berechnen ergibt sich das Schema

$$A \mid B C = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}}$$

$$(2) \text{ Spezialfall: } A \in \mathbb{K}^{m \times m}, x \in \mathbb{K}^m \ Ax = \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} a_{1,k} & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,k} & x_k \end{pmatrix}.$$

Inhaltsverzeichnis Seite 15 von 69

1.3.6 Beispiel

Das Produkt von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ lautet:

also
$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$$
.

Im Umgekehrter Reihenfolge gilt $BA = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$. Daher ist das Produkt von Matrizen nicht kommutativ $AB \neq BA$.

1.3.7 Beispiel

(1) Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt $I_m A = A = A I_m$

(2) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt AB = 0, womit das Produkt von Matrizen nicht $\underline{\text{nullteilerfrei}}$ ist, d.h. AB = 0 kann gelten, ohne dass ein Faktor Null ist.

(3) Das Produkt von
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
 und $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert, $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 34 & 47 \\ 27 & 44 & 61 \end{pmatrix}$ dagegen schon.

1.3.8 Beispiel (RGB - Raum)

Im RGB-Farbmodell werden Farben durch Tupel (r, g, b) reeller Zahlen $r, g, b \in \mathbb{R}$ beschreiben:

$$(1,0,0) = \text{rot, } (0,0,1) \text{ blau, } (1,1,0) \text{ gelb. Alternativ: } YIQ\text{-Modell } (y,i,q).$$
 Umrechnung
$$\begin{pmatrix} y \\ i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & -0.3 & -0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}.$$

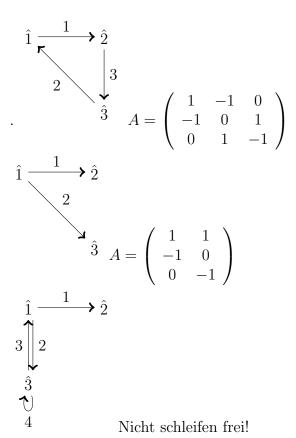
Beispiel (Inzedenzmatrix)

Gerichtete Graphen ohne Schleifen (kein Knoten wird durch eine Kante mit sich selbst verbunden, siehe Beschreibung 1.1.7) mit den Knoten $\hat{1}, \dots, \hat{m}$ mit den Knoten $1, \dots, m$ lassen sich durch

Inhaltsverzeichnis Seite 16 von 69

eine sogenannte Inzedenzmatrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beschreiben mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ Von Knoten } \hat{1} \text{ geht die Kante } j \text{ aus.} \\ -1, \text{ ein Knoten } \hat{1} \text{ mündet die Kante } j \\ 0, \text{ Knoten } \hat{1} \text{ und Kante } j \text{ berühren sich nicht.} \end{cases}$$



1.3.10 Satz (Rechenregeln für Matrizen)

Für Zahlen $\alpha \in \mathbb{K}$ und Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{m \times p}$ gilt das <u>Distributiv-Gesetz</u>. A(B+C) = AB + AC für alle $C \in \mathbb{K}^{m \times p}$ und die <u>Assoziativ-Gesetze</u> $(\alpha A)B = A(\alpha B), A(BC) = (AB)C$ für alle $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$. Beweis: Übung.

1.4 Lineare Gleichungen

1.4.1 Definition (lineare Gleichung)

Es seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Dann bezeichnet man (L_b) Ax = b als lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen für die n unbekannten $x_m \in \mathbb{K}$ oder kurz also lineare Gleichung in \mathbb{K}^m . A heißt Koeffizientenmatrix und b Inhomogenität von (L_b) . Im Fall $b \neq 0$ nennt man (L_b) inhomogen und

Inhaltsverzeichnis Seite 17 von 69

erhält andernfalls die homogene Gleichung: (L_0) Ax = 0. Eine Lösung von (L_b) ist ein Element $x \in \mathbb{K}^m$ mit Ax = b und $L_b := \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = b\}$ steht für die Lösungsmenge von (L_b) .

1.4.2 Bemerkung

```
\begin{array}{l} (1) \text{ Ausgeschrieben lautet } (L_b): \\ a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ a2,1x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ am,1x_1+a_{m,2}x_2+\cdots+a_{m,n}x_n=b_m. \\ \text{Oder noch unübersichtlicher } \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j=b_i \text{ für } 1\leq i\leq m. \end{array}
```

(2) (L_b) hat stehts die <u>triviale Lösung</u> $0 \in \mathbb{K}^m$. Inhomogene Gleichungen müssen nicht unbedingt lösbar sein: 0x = 1.

1.4.3 Satz (Superpositionsprinzip)

Es seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ Lösungen von (L_0) . Dann ist auch $\alpha x + \beta y$ eine Lösung von (L_0) , d.h. $\alpha x + \beta y \in L_0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Beweis: Übung.

1.4.4 Satz

Ist $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von (L_b) so gilt $L_b = \hat{x} + L_0$. Hierbei: Für gegebene $x \in \mathbb{K}^n$, $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist $x + A := \{y \in \mathbb{K}^n : \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } y = x + a\}$ Beweis: Übung. Nun: Explizite Lösung von $(L_b)!$ Besonders einfach, falls $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ diagonal ist gilt nämlich $a_{i,i} \neq 0, 1 \leq i \leq n$, so besitzt (L_b) die eindeutige Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ mit Elementen $X_1 = \frac{b_i}{a_{i,i}}$ für $1 \leq 1 \leq n$ ist dagegen $d_{i,i} = 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, so besitzt (L_b) unendlich viele Lösungen für $b_i = 0$ und anderenfalls keine Lösung. Allgemeinere Klasse: Ein $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist in Zeilen-Stufen-Form (ZSF) falls in jeder Zeile gilt:

- (1) Beginnt sie mit k Nullen, so stehen unter diesen Nullen lediglich weitere Nullen.
- (2) Unter dem ersten Element $\neq 0$ stehen nur Nullen.

Bei strenger ZSF muss zusätzlich gelten:

(3) Über jedem ersten Element $\neq 0$ stehen nur Nullen

Inhaltsverzeichnis Seite 18 von 69

1.4.5 Beispiel

- (1) Obere Dreiecksmatrizen sind in ZSF, Diagonalmatrizen sogar in strenger ZSF.
- (2) Bezeichnet * ein Element $\neq 0$, so gilt:

•
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ sind nicht in ZSF.

•
$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$
 ist in ZSF (aber nicht strenger ZSF).

•
$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 ist in strenger ZSF

1.4.6 Beispiel (Rückwärts-Substitution)

Die inhomogene lineare Gleichung (1.4b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ hat die Koeffizientenmatrix bzw. Inhomogenität $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rückwärtssubstitution: Aug der let the Gleichen Gleiche Gleichen Gle

<u>Rückwärtssubstitution</u>: Aus der letzten Gleichung $x_3 + 2x_4 = 1$ sieht man, dass $x_4 = t$ frei gewählt wenden kann, $t \in \mathbb{K}$. Dies liefert $x_3 = 1 - 2t$. Die bekannten variablen x_3, x_4 können in die zweite Gleichung von (1.4b) eingesetzt werden, also $x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = t - 1$ und analog liefert die erste Gleichung $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0$. Die Lösungsmenge von (1.4b) ist also:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 : t \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge L_b von (L_b) ändert sich nicht, wenn folgende Operationen auf (1.4b) angewandt werden:

- Vertauschen von Gleichungen
- Multiplikation von Gleichungen mit $\alpha \in \mathbb{K}$ {0}

Inhaltsverzeichnis Seite 19 von 69

• Addition des α -fachen der k-ten Gleichung zur j-ten. Diese sind <u>elementare Zeilentransformationen</u>.

ZIEL: Transformiere A bzw. (L_b) auf ZSF mittels elementarer Zeilentransformationen. Systematisch: Gauß Algorithmus.

Zu seiner Beschreibung gehen wir davon aus, dass die erste Spalte von A von 0 verschieden ist (anderenfalls sind x_1, \dots, x_n umzunummerieren). Ohne Sonderfälle zu berücksichtigen gilt:

1. Ordne die Gleichungen in (1.4a) so an, dass $a_m \neq 0$. In der gängigen Notation schreibt man

nun (1.4b) als
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{vmatrix}$$

2. Subtrahiere von der *i*-ten Gleichung, $2 \le i \le m$ in (1.4a) das $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ -fache der ersten Gleichung:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m,2}^{(2)} & \cdots & a_{m,n}^{(1)} \end{array} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_m^{(1)} \end{vmatrix} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ A^{(1)}x^{(1)} = b^{(1)} \end{cases}$$

$$\text{mit } A^{(1)} \in \mathbb{K}^{(m-1)\times (n-1)}, b \in \mathbb{K}^{m-1}.$$

- 3. Transformiere $A^{(1)}x^{(1)}=b^{(1)}$ entsprechend und fahre sukzessive fort, bis (idealerweise) eine Dreiecks- oder ZSF entstanden ist.
- 4. Löse das resultierende System durch Rückwärts-Substitution.

1.4.7 Beispiel

Als Kurzschreibweise für

Damit ist (1.4*d*) äquivalent zu $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Rückwärts-Substitution: Wähle $x_3=t$ mit $t\in\mathbb{K}$ und es folgt $x_2=-2x_3=-2t, x_1=-2x_2+3x_3=-2t$

Inhaltsverzeichnis Seite 20 von 69

t. Die Lösungsmenge von (1.4d) ergibt sich zu:

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : t \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4.8 Satz

Hat (L_0) weniger Gleichungen als Unbekannte, also m < n, so besitzt sie unendlich viele Lösungen. Beweis:

- I. Man zeigt (*) (L_0) hat eine nichttriviale Lösung.
- II. Da (L_0) nach Schritt (I) eine Lösung $x \neq 0$ besitzt ist nach dem superpositionsprinzip aus Satz 1.4.3 auch jeder $tx, t \in \mathbb{K}$, eine Lösung #.

1.4.9 Satz

Besitzt (L_b) genauso viele Gleichungen wie Unbekannte, also m = n, so gilt:

- (a) Ist $L_0 = \{0\}$, so besitzt (L_b) genau eine Lösung.
- (b) Besitzt (L_0) eine nichttriviale Lösung, so existieren entweder keine oder unendlich viele verschiedene Lösungen von (L_b)

Beweis:

(a) Wie gehen mittels vollständiger Induktion vor. Für n=1 gilt die Behauptung offenbar. Im Induktionsschritt gelte (a) für n-1. Da (L_0) nur die triviale Lösung hat gilt $A \neq 0$. Durch Umnummerieren erreichen wir $a_{1,1} \neq 0$. Dann wird zur *i*-ten Gleichung, $2 \leq i$, in (1.4a) das $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ -fache der ersten Gleichung addiert:

$$(1.4f) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ A^* = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = b^* \\ & \text{mit } A^* \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(m-1)}, b^* \in \mathbb{K}^{n-1} \end{cases}$$

Beweis:

Wir wissen:

(a) Die homogene Gleichung $A^*x^* = 0$ hat nur die triviale Lösung, denn sonst hätte (L_0) eine nicht triviale Lösung. Das Teilsystem $A^*x^* = b^*$ besitzt nach Induktionsannahme genau eine Lösung x^* mit Elementen x_2, \dots, x_m . Durch Einsetzten in die erste Gleichung in (1.4f) folgt ein eindeutiger Wert x_1 und die Lösung von (L_b) in eindeutiger Weise.

Inhaltsverzeichnis Seite 21 von 69

(b) Es sei \hat{x} eine Lösung von (L_b) und x eine nichttriviale Lösung von (L_o) . Dann liefern die Sätze 1.4.3 und 1.4.4, dass $\hat{x} + \alpha x$ die Gleichung löst für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$. In diesem Fall hat (L_b) unendlich viele Lösungen. Die einzige verbleibende Möglichkeit ist, dass (L_b) keine Lösung besitzt.

Inhaltsverzeichnis Seite 22 von 69

2 Lineare Räume

2.1 Algebraische Strukturen

Bezeichnet $M \neq \emptyset$ eine Menge und F(M) die Menge aller Selbstabbildungen auf M, so kann die Komposition \circ als Abbildung $\circ : F(M) \times F(M) \to F(M)$ interpretiert werden - man spricht von einer Verknüpfung.

2.1.1 Definition (Gruppe)

Eine Gruppe (G, \cdot) ist eine nichtleere Menge \mathbb{G} mit einer Veknüpfung $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ mit den Eigenschaften:

- (G_1) · ist Assoziativ, d.h. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für $a, b, c \in \mathbb{G}$
- (G_2) es existiert ein neutrales Element $e \in \mathbb{G}$ mit $a \cdot e = a = e \cdot a$ für $a \in \mathbb{G}$
- (G_3) zu jedem $a \in \mathbb{G}$ existiert ein <u>inverses Element</u> $a^{-1} \in \mathbb{G}$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ für $a \in \mathbb{G}$ Bei einer kommutativen oder Abel schen Gruppe gilt ferner
- (G_4) $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{G}$.

Für eine Halbgruppe müssen nur (G_1) und (G_2) gelten.

2.1.2 Bemerkung

- (1) Das neutrale Element $e \in \mathbb{G}$ ist eindeutig: In der Tat, bezeichnen $e_1, e_2 \in \mathbb{G}$ zwei neutrale Elemente, so folgt nach (G_2) ist: $e_2 = e_1 \cdot e_2$ und $e_1 \cdot e_2 = e_1$, also $e_1 = e_2$
- (2) Zu gegebenem $a \in \mathbb{G}$ ist auch das inverse Element $a^{-1} \in \mathbb{G}$ eindeutig. Für inverse Elemente a_1^{-1}, a_2^{-1} von a gilt nämlich

$$a_1^{-1} \stackrel{(G_2)}{=} a_1^{-1} \cdot e \stackrel{(G_3)}{=} a_1^{-1} \cdot (a \cdot a_2^{-1}) \stackrel{(G_1)}{=} (a_1^{-1} \cdot a) \cdot a_2^{-1} \stackrel{(G_3)}{=} e \cdot a_2^{-1} \stackrel{(G_2)}{=} a_2^{-1}$$

(3) Entsprechend $e = e^{-1}$, $a = (a^{-1})^{-1}$

2.1.3 Bemerkung (Potenzen)

Die Potenzen $a^n \in \mathbb{G}$ eines $a \in \mathbb{G}$ (G ist eine multiplikative Halbgruppe) sind rekursiv erklärt durch $a^0 := e, a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. In einer Gruppe setzen wir $a^n := (a^{-n})^{-1}$ für n < 0.

Inhaltsverzeichnis Seite 23 von 69

2.1.4 Beispiel

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative additive Gruppe mit neutralen Element 0 und dem zu $a \in \mathbb{Z}$ inverses Element -a. Dagegen ist (\mathbb{Z}, \cdot) keine Gruppe, denn das multiplikative Inverses lässt sich innerhalb von \mathbb{Z} nicht erklären. Ebenso ist $(\mathbb{N}, +)$ keine (additive) Gruppe.

- (2) Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist $(\mathbb{K}, +)$ eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und -a als zu a Inversen. Auch $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative multiplikative Gruppe mit neutralem Element 1 und dem zu a inversen Element $\frac{1}{a}$.
- (3) Mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$ bilden die Matrizen ($\mathbb{K}^{m \times n}$, +) eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und den Inversen -A zu A. Die quadratischen reellen rationalen oder komplexen Matrizen ($\mathbb{K}^{m \times n} \setminus \{0\}$, ·) bilden keine Gruppe, da etwa diag $(1,0) \neq 0$ kein Inverses besitzt.

2.1.6 Beispiel (modulo)

Es sei $p \ge 2$ eine ganze Zahl und $\mathbb{Z}_p := \{0, \dots, p-1\}$. Für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt es vermöge der Division mit Rest eindeutige $m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}_p$ mit a+b=mp+k wir schreiben dann k=a+b mod p oder $k=:a+_pb$. Dann ist $(\mathbb{Z}_p,+_p)$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralem Element 0.

2.1.7 Beispiel (symmetrische Gruppe)

Es sei M eine nichtleere Menge und S(M) bezeichnet alle bijektiven Selbstabbildungen $f: M \to M$. Dann ist die <u>symmetrischen Gruppe</u> $(S(M), \circ)$ eine i.A. nicht-kommutative Gruppe mit id_m als neutralem Element und $f^{-1}: M \to M$ als inversen Element zu f. Im Fall $M = \{1, \dots, n\}$ schreiben wir $S_n := S(\{1, \dots, n\})$. Die Menge aller nicht-notwendig bijektiven Selbstabbildungen F(M) ist dagegen eine Halbgruppe bezüglich \circ .

2.1.8 Korollar (Rechnen in Gruppen)

Für alle $a, b, c \in \mathbb{G}$ gilt $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, wie auch $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c, a \cdot b = e \Rightarrow a = b^{-1}$. Beweis:

Es seien $a, b, c \in \mathbb{G}$. Wir zeigen zunächst, dass $b^{-1} \cdot a^{-1}$ das inverse Element von $a \cdot b$ ist. Dazu

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G_1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot (a \cdot b \cdot)) \stackrel{(G_1)}{=} b^{-1} \cdot ((a^{-1} \cdot a) \cdot b) \stackrel{(G_3)}{=} b^{-1} \cdot (e \cdot b) \stackrel{(G_2)}{=} b^{-1} \cdot b \stackrel{(G_3)}{=} e$$

und entsprechend $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = e$. Die erste Implikation ergibt sich nach Voraussetzung durch

$$b \stackrel{(G_2)}{=} e \cdot b \stackrel{(G_3)}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot b \stackrel{(G_1)}{=} a^{-1} + (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) \stackrel{(G_1)}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot c \stackrel{(G_3)}{=} e \cdot c \stackrel{(G_2)}{=} c$$

Die verbleibende Implikation sei den Leser überlassen.

Inhaltsverzeichnis Seite 24 von 69

2.1.9 Definition (Körper)

Ein Körper ($\mathbb{K}, +, \cdot$) ist eine Menge \mathbb{K} mit mindestens zwei Elementen versehen, mit den <u>arithmetischen Op</u> $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (<u>Addition</u>) und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (Multiplikation).

 $(\mathbb{K}_1)(\mathbb{K},+)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 und dem zu $\alpha \in \mathbb{K}$ inversen Element $-\alpha$, d.h. für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(\mathbb{K}_1^1)\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$(\mathbb{K}_1^2)\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$
$$(\mathbb{K}_1^3)\alpha \cdot -\alpha = -\alpha \cdot \alpha = 0$$
$$(\mathbb{K}_1^4)\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

 (\mathbb{K}_2) ($\mathbb{K} \setminus \{0\}$, ·) ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1 und zu $\alpha \in \mathbb{K}$ Inversem $\frac{1}{\alpha}$, d.h. es gilt für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$$(\mathbb{K}_{2}^{1})\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

$$(\mathbb{K}_{2}^{2})\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

$$(\mathbb{K}_{2}^{3})\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$$

$$(\mathbb{K}_{2}^{4})\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

 (\mathbb{K}_3) es gelten die Distributivgesetze $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \gamma + \beta \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Üblich $\alpha\beta := \alpha \cdot \gamma$. Subtraktion als $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Division $\frac{\alpha}{\beta} := \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

2.1.10 Beispiel

 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper bzgl. $+, \cdot$

2.1.11 Beispiel (Restklassenkörper modulo p)

Mit einer gegebenen <u>Primzahl</u> $p \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen $\mathbb{Z}_p := \{0, \dots, p\}$. Dann gibt es für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ eindeutige Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ und $k, l \in \mathbb{Z}_p$ derart, dass

$$\alpha + \beta = m \cdot p + k$$

$$\alpha \cdot \beta = np + l \text{ Divison mit Rest.}$$
 Addition:
$$\alpha +_p \beta := k$$
 Multiplikation:
$$\alpha \cdot_p \beta := l \text{ (2.1a)}$$

Inhaltsverzeichnis Seite 25 von 69

 $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist Körper, der sogenannten Restklassenkörper modulo p.

2.1.12 Korollar

Ist $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ein Körper, so gilt für alle $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K},$ dass

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0, \qquad \beta \cdot (-\alpha) = -(\beta \cdot \alpha) = (-\beta) \cdot \alpha(2.1b)$$

$$(-1) \cdot \alpha = -\alpha, \qquad (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta(2.1c)$$

Und ferner die Implikation $\alpha \cdot \beta = 0 \rightarrow \alpha = 0$ oder $\beta = 0$.

2.1.13 Bemerkung

Es gilt $1 \neq 0$, da die Annahme 1 = 0 folgenden Widerspruch impliziert: Da \mathbb{K} mindestens 2 Elemente enthält, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ mit:

$$\alpha \stackrel{(\mathbb{K}_2^2)}{=} \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot 0 \stackrel{(2.1b)}{=} 0$$

Daher ist der Restklassenkörper modulo 2 \mathbb{Z}_2 der kleinste Körper.

Inhaltsverzeichnis Seite 26 von 69

2.1.14 Beweis

Wähle ein $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Es gilt $0 \cdot \alpha \stackrel{(\mathbb{K}_1^2)}{=} (0+0) \cdot \alpha \stackrel{(\mathbb{K})}{=} 0\alpha + 0\alpha$ mittels Korollar 2.1.8 (+, a = b = 0) und c = 0) folgt $0 \cdot \alpha = 0$, kommutativ liefert $\alpha 0 = 0$. Aus dieser Behauptung resultiert

$$(-\beta)\alpha + \beta\alpha \stackrel{(\mathbb{K}_3)}{=} (-\beta + \beta)\alpha = 0 \cdot \alpha = 0$$

mit Korollar 2.1.8 $(+, a = (-\beta)\alpha, b = \beta\alpha)$. Dies liefert $-(\beta\alpha) = (-\beta)\alpha$ und $\beta(-\alpha) = -(\beta\alpha)$. Die Beziehung $(-1)\alpha = -\alpha$ resultiert aus dem eben gezeigten $\beta = 1$ und

$$(-1)\alpha = 1 \cdot (-\alpha) \stackrel{\mathbb{K}_2^2}{=} -\alpha.$$

2.1c ergibt sich mit Bemerkung 2.1.2(3) aus

$$(-\alpha)(-\beta) \stackrel{2.1b}{=} -(\alpha(-\beta)) \stackrel{2.1b}{=} -(-(\alpha\beta)) = \alpha\beta = 0$$

Annahme: $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ dann $1 \stackrel{\mathbb{K}_2^3)}{=} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta \stackrel{2.1b}{=} 0$

2.2 Vektorräume

2.2.1 Definition (linearer Raum, Vektorraum)

Es sei \mathbb{K} ein Körper. Ein Vektorraum oder linearer Raum $(X, +, \cdot)$ (über \mathbb{K}) ist eine nichtleere Menge X mit arithmetische Operationen:

- (1) Addition $+: X \times X \to X$ derart, dass (X, +) eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 oder Nullvektor.
- (2) Skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ derart, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt:

 $(V_1) \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ Distributiv Gesetz

 (V_2) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$ Distributiv Gesetz

 (V_3) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ Assoziativ Gesetz

 (V_4) $1 \cdot x = x$

Die Elemente aus \mathbb{K} heißen Skalare und X heißen Vektoren.

Konventionen: $\alpha x := \alpha \cdot x \quad x - y := x + (-y)$

Inhaltsverzeichnis Seite 27 von 69

2.2.2 Beispiel

Es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper.

- (0) Der triviale Raum {0} der nur die 0 enthält.
- (1) Weiter ist \mathbb{K} ein Vektorraum über sich selbst.
- (2) Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen $\mathbb{K}^{m \times n}$ ist ein linearer Raum über \mathbb{K} bezüglich

$$(1.3b) \ \alpha A := \alpha A = (\alpha a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$(1.3c) \ A + B := (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ bezeichnen wir als Zeilenvektor und eine m-Spalte (1.3a) als Spaltenvektor.

2.2.3 Beispiel

Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die n-Spalten \mathbb{Z}_p^n in \mathbb{Z}_p mit den komponentenweisen Addition $+_p$ und skalaren Multiplikation \cdot_p ein linearer Raum über \mathbb{Z}_p . Insbesondere für \mathbb{Z}_2^2

Inhaltsverzeichnis Seite 28 von 69

2.2.4 Beispiel (Lösungsmengen)

Mit Satz 1.4.3 ist L_0 einer homogenen Gleichung ein Vektorraum über \mathbb{K} . Die Lösungsmenge L_b inhomogener Systeme ist kein linearer Raum über \mathbb{K} .

2.2.5 Beispiel (Funktionsräume)

Es sei $\omega \neq \emptyset$ und X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Dann ist $F(\omega, X) := \{u : \omega \to X\}$ ein Vektorraum über \mathbb{K} mit punktweise definierten arithmetischen Operationen (a+v)(t) := u(t) + v(t), $(\alpha u)(t) := \alpha u(t)$ für alle $t \in \omega, \alpha \in \mathbb{K}$.

Die Menge $F(\omega, X)$ wird als Funktionenraum bezeichnet. $\omega \in \mathbb{N}, \ \omega \in \mathbb{Z}$, dann bezeichnen wir $F(\omega, X)$ als Folgenraum.

2.2.6 Korollar

Ist $(X, +, \cdot)$ ein linearer Raum über \mathbb{K} so gilt für alle Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und Vektoren $x, y \in X$:

- (a) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = \alpha \cdot 0_x = 0_x$
- (b) Falls $\alpha x = 0_x$, so folgt $\alpha = 0 \in \mathbb{K}$ oder $x \in 0 \in X$
- (c) $(-\alpha)x = \alpha(-\alpha) = -(\alpha x)$
- (d) $\alpha(x-y) = \alpha x \alpha y$ und $(\alpha \beta)x = \alpha x \beta x$

Beweis: Es sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$:

- (a) Es gilt $0_{\mathbb{K}}x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}}x + 0_{\mathbb{K}}x$ wegen V_2 . Nach Definition 2.2.1 (a) existiert zum Vektor $z := 0_{\mathbb{K}}x$ ein Vektor -z mit $0 \cdot x + (-z) = 0_X$ und wir erhalten $0_X = 0 \cdot x + (-z) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-z) = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-z)) = 0 \cdot x + 0_x = 0 + x$ und die Beziehung $\alpha \cdot 0 = 0$ folge analog.
- (b) (b) Es gelte $\alpha x = 0$ mit $\alpha \neq 0$ und wir zeigen $x = 0_x$ $\alpha \neq 0$ existiert $\frac{1}{\alpha}$. Nach (a) folgt $\frac{1}{\alpha}(\alpha \cdot x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$ und andererseits $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \cdot x = 1 \cdot x = x$
- (c), (d)

2.2.7 Definition (Unterraum)

Eine nicht leere Teilmenge $Y \subseteq X$ eines linearen Raumes $(X, +, \cdot)$ über \mathbb{K} heißt Unterraum von X, falls gilt $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$ für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $y_1, y_2 \in Y$

2.2.8 Bemerkung

Jeder lineare Raum x hat die trivialen Unterräume {0} und X.

Inhaltsverzeichnis Seite 29 von 69

2.2.9 Beispiel (Stetige und stetig-differenzierbare Funktion)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Menge der stetigen Funktionen $C(I,\mathbb{R}^n)$ auf I mit Bildern in \mathbb{R}^n ist ein Unterraum von $F(I,\mathbb{R})$. Ebenso sind stetig differenzierbare Funktionen $C^1(I,\mathbb{R})$ ein Unterraum von $C(I,\mathbb{R})$ und $F(I,\mathbb{R}^n)$

2.2.10 Beispiel (Polynome)

Mit gegebenem Körper $\mathbb K$ definieren wir den Raum der Polynome (über $\mathbb K$) durch

 $P(\mathbb{K}) := \{ p \in F(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{K} : p(t) = \sum_{l=0}^n a_l \cdot t^l \};$

seine Elemente heißen Polynome und die a_k deren Koeffizienten. Dann ist $P(\mathbb{K})$ ein Unterraum von $F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Der Grad $deg\ p$ eines Polynoms $p \in P(\mathbb{K})$ ist der maximale Index $k \in \mathbb{N}_0$ für den $a_k = 0$ ist. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sind die Mengen $P_m(\mathbb{K}) := \{ p \in P(\mathbb{K}) : deg\ p \leq m \}$

Unterräume von $P(\mathbb{K})$, wogegen $\{p \in P(\mathbb{K}) : deg \ p = m\}$ für $m \neq 0$ kein Unterraum ist. Ferner ist jedes $P_n(\mathbb{K})$ Unterraum von $P_m(\mathbb{K})$ für $0 \leq n \leq m$.

2.2.11 Satz (Schnitte und Summen von Unterräumen)

Ist I eine nichtleere Indexmenge und $(Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen von X.

- (a) Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} Y_i$ ist ein Unterraum von X.
- (b) Für endliche I ist die Summe $\sum_{i\in I}Y_i:=\{\sum_{i\in I}y_i\in X:y_i\in Y_i \text{ mit }i\in I\}$ der kleinste Unterraum von X, der jedes y_i enthält.

Für
$$I = \{1, ..., n\}$$
 schreibt man auch $Y_1 + ... + Y_m = \sum_{i \in I} Y_i$.

Beweis:

- (a) Es seien $\alpha, p \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \cap_{i \in I} Y_i$. Dann gilt $x, y \in Y_i$ für alle $i \in I$ und da jedes Y_i ein Unterraum von X ist, folgt $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y_i$ für jedes $i \in I$. Dies impliziert, dass $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \cap_{i \in I} Y_i$
- (b) Wir zeigen $Y:=\sum_{i\in I}Y_i$ ist ein Unterraum von X. Dazu sei $x=\sum_{i\in I}x_i$ und $y=\sum_{i\in I}y_i$ mit $x_i,y_i\in Y_i$ und wir erhalten für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \sum_{i \in I} x_i + \beta \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} (\underbrace{\alpha x_i + \beta y_i}_{\in Y_i})$$

Zu zeigen y ist kleinster Unterraum der alle Y_i enthält.

Dazu sei $z \subseteq X$ ein weiterer Unterraum von X der alle Y_i enthält. Für $x_i \in Y_i$ ist dann auch

Inhaltsverzeichnis Seite 30 von 69

 $x_i \in Z$ für alle $i \in I$, da Y_i in Z enthalten sind. Aus der Unterraumeigenschaft von Z resultiert $\sum_{i \in I} x_i \in Z$ und folglich ist $Y \subseteq Z$

2.3 Lineare Abhängigkeiten

Gegeben sei eine nichtleere Menge S von Vektoren aus einem linearen Raum X über dem Körper \mathbb{K} . Existieren zu einem gegebenem $x \in X$ dann endlich viele Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in S$, $1 \le i \le n$, mit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ so bezeichnen wir x als Linearkombination der Vektoren aus S.

2.3.1 Definition (Spann)

Es sei $S \leq X$. Der Spann oder die lineare Hülle span S von S ist die Menge aller Linearkombinationen. Ferner setzt man $span \{0\} = \{0\}$.

2.3.2 Beispiel

Für endliche
$$S = \{x_0, ..., x_n\}$$
 ist der $span S = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i \in X : \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gilt } span \ \{e_i, e_2\} = \mathbb{R}^2$$

$$span \ \{x_1, x_2\} \text{ wenn } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ aber}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dann } span \ \{y_1, y_2\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2.3.3 Beispiel (Monome)

Polynome $m_n(l):=t^n, n\in\mathbb{N}_0$ heißen Monome. Dann lassen sich die Polynome als lineare Hülle der Monome darstellen, d.h. $span\ \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}=P(\mathbb{K})$ insbesondere ist $span\ \{m_0,...,m_n\}=P_n(\mathbb{K}^n)$ $span\ \{m_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{p\in P(\mathbb{K}):p(t)=p(-t)\text{ auf }\mathbb{K}\}$ $span\ \{m_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{p\in P(\mathbb{K}):p(t)=-p(-t)\text{ auf }\mathbb{K}\}$

2.3.4 Proposition

Es sei $S \in X$ nicht leer. Dann ist die lineare Hülle der kleinste S umfassende Unterraum von X

Inhaltsverzeichnis Seite 31 von 69

Beweis: $x, y \in \mathcal{S}$ ist $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ in $span \mathcal{S}$. Also ist $span \mathcal{S}$ Unterraum von X. $span \mathcal{S}$ enthält die Vektoren aus \mathcal{S} und damit ist $\mathcal{S} \subseteq span \mathcal{S}$, $Y \subseteq X$ ein Unterraum von X mit $x \in Y$ für sämtliche $x \in \mathcal{S}$. Dann liegen sämtliche Linearkombinationen von Vektoren aus \mathcal{S} in Y. Also ist $span \mathcal{S}$ in Y enthalten.

2.3.5 Korollar

Ist x eine Linearkombination von Vektoren aus $S \subseteq X$, so gilt $\operatorname{span} S = \operatorname{span}(S \cup \{x\})$.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch zwei Inklusionen:

 (\subseteq) Es ist klar dass span $\mathcal{S} \subseteq \text{span}(\mathcal{S} \cup \{x\})$

 (\supseteq) Also Linearkombination von Vektoren aus \mathcal{S} liegt x auch in span \mathcal{S} .

Demnach ist span \mathcal{S} derjenige Unterraum welcher \mathcal{S} und $\{x\}$ enthält.

Damit folgt aus Prop 2.3.4, dass $\operatorname{span}(\mathcal{S} \cup \{x\}) = \operatorname{span}\mathcal{S}$.

2.3.6 Definition (lineare Unabhängigkeit)

Eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ von Vektoren aus X heißt linear unabhängig falls gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = 0 \Rightarrow \xi_k = 0 \forall n = 1, n$$

Griechische Buchstaben:

$$\eta - \text{eta}$$
 $\xi - \text{xi}$
 $\zeta - \text{zeta}$

Für beliebige Mengen $S \subseteq X$ nennt man S linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von S linear unabhängig ist, die leere Menge \emptyset wird als lineare unabhängig betrachtet. Eine Teilmenge von X heißt linear abhängig, falls sie nicht linear unabhängig ist.

Man nennt Vektoren x_1, x_2, \cdots linear unabhängig, wenn $\{x_1, x_2, \cdots\}$ diese Eigenschaft hat.

2.3.7 Bemerkung

(1) lineare Abhängigkeit einer endlichen Menge $\{x_1, \cdots x_n\}$ bedeutet, dass eine nichttriviale Darstellung der Null aus Vektoren x_u existiert: Man kann also

$$(2.3a)\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = 0$$

schreiben, ohne dass alle ξ_k verschwinden.

(2) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

Inhaltsverzeichnis Seite 32 von 69

2.3.8 Beispiel

Die Menge $\{0\}$ ist linear abhängig, dagegen ist $\{x\}, x \neq 0$, linear unabhängig.

2.3.9 Proposition

Es sei $S \subseteq X$ nichtleer und $x, x_1, \dots, x_n \in X$

- (a) Ist $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ linear abhängig, so lässt sich mindestens ein Vektor aus S als Linear-kombination der weiteren Elementen von S darstellen.
- (b) Für jede Linearkombination x aus S ist $S \cup \{x\}$ linear abhängig.

Beweis:

(a) Weil $\{x_1, \dots, x_n\}$ linear abhängig ist, besitzt 0 die Darstellung (2.3a) in welcher nicht alle ξ_k verschwinden. Also existiert ein Index $1 \le k^* \le n$ mit $\xi_{k^*} \ne 0$ und damit

$$X_{k^*} = -\xi_k^{-1} \sum_{\substack{k=1\\k \neq k^*}}^n \xi_k x_k = \sum_{\substack{k=1\\k \neq k^*}}^n (-\xi_k^{-1} \xi_k) x_k$$

(b) Mit $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$ ist $x - \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$ eine nichttriviale Darstellung der 0

In $X = \mathbb{K}^m$ gilt: Es sei $\mathcal{S} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{K}^m$. Mit der $m \times n$ -Matrize $A := (a_1, \dots, a_n)$ ist die Beziehung $\sum_{k=1}^n \xi_k a_k = 0$ (vgl. (2.3a)) äquivalent zu:

$$(2.3b)Ax = 0, x \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Demzufolge ist S genau dann linear unabhängig, wenn Ax = 0 nur die triviale Lösung hat. Aus Satz 1.4.8 (in Verbindung mit Blatt 5, Aufg. 1) erhalten wir daher, dass mehr als m Vektoren stets linear abhängig sind.

2.3.10 Beispiel

(1) Für die kanonischen Einheitsvektoren in \mathbb{K}^m

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt in obiger Terminologie $A=I_m$. Also besitzt Ax=0 nur die triviale Lösung und $\{e_1, \dots, e_m\}$ ist linear unabhängig.

Inhaltsverzeichnis Seite 33 von 69

(2) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ um die lineare Unabhängigkeit von

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^3 zu untersuchen, betrachten wir die Gleichung (2.3b) mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & \lambda \end{pmatrix}$$

und lösen sie mit dem in Beispiel 1.4.6 beschriebenen Schema:

Also hat Ax = 0 für $\lambda \neq 9$ nur die triviale Lösung (lineare Unabhängigkeit von $\{x_1, x_2, x_3\}$ und für $\lambda = 9$ nichttriviale Lösungen (lineare Abhängigkeit).

2.3.11 Satz

Eine Menge $S \subseteq X$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes $x \in S$ auf nur eine Art (bis auf Glieder mit Null-Koeffizienten) als Linearkombinationen von Vektoren aus S dargestellt werden kann.

2.4 Basis und Dimensionen

Es sei X ein linearer Raum über dem Körper \mathbb{K} .

2.4.1 Definition (Basis)

Eine Menge $\mathcal{X} \subseteq X$ heißt <u>Basis</u> von X, falls \mathcal{X} linear unabhängig mit $X = \operatorname{span} \mathcal{X}$ ist: Eine Menge \mathcal{X} mit $X = \operatorname{span} \mathcal{X}$ wird Erzeugendessystem (EZS) von X genannt. Man nennt X endlich erzeugt, falls er ein endliches EZS hat.

2.4.2 Beispiel

Die Basis von {0} ist die leere Menge.

2.4.3 Beispiel (Standardbasis)

Die mittels der kanonischen Einheitsvektoren aus Beispiel 2.3.10 (1) gebildete Menge $\mathcal{E}_m := \{e_1, \cdots, e_m\}$ ist eine Basis von \mathbb{K}^m , die sogenannte Standardbasis, damit ist \mathbb{K}^m endlich erzeugt.

Inhaltsverzeichnis Seite 34 von 69

2.4.4 Beispiel (Polynome)

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind $\mathcal{M}_n := \{m_0, \dots m_n\}$ aus Beispiel 2.3.3 eine Basis der Polynome $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ von maximalem Grad n. Ebenso ist $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Somit ist jedes $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ endlich erzeugt, $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ dagegen nicht.

2.4.5 Lemma

Es sei $S \subseteq X$ linear unabhängig. Gilt dann $x \notin \text{span}S$, so ist auch $S \cup \{x\}$ linear unabhängig. Beweis: Es ist nachzuweisen, dass jede endliche Teilmenge von $S \cup \{x\}$ linear unabhängig ist. Dazu sei $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ eine solche Menge und $\sum_{k=1}^n \xi_k x_k + \eta x = 0$ eine Darstellung der Null. Wäre $\eta \neq 0$, so könnte man x als Linearkombination der x_1, \dots, x_n darstellen, dies widerspricht $x \notin \text{span}S$. Also gilt $\eta = 0$. Da aber $\{x_1, \dots, x_n\}$ linear unabhängig ist, folgt $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$. In trivialer Weise: ist X ein EZS von X. Unser Interesse besteht aber gerade in "kleinen" EZSen.

2.4.6 Satz

Mit nicht leerem $\mathcal{X} \subseteq X$ sind äquivalent:

- (a) \mathcal{X} ist eine Basis von X
- (b) Jeder Vektor $x \in X$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus \mathcal{X} darstellen.
- (c) \mathcal{X} ist maximal linear unabhängig, d.h. \mathcal{X} ist linear unabhängig und für jedes $x \in X \setminus \mathcal{X}$ ist $\mathcal{X} \cup \{x\}$ linear abhängig.
- (d) \mathcal{X} ist ein minimales EZS, d.h. keine echte Teilmenge von \mathcal{X} ist ein EZS.

2.4.7 Bemerkung (Koordinaten)

Besitzt $x \in X$ bzgl. der Basis $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$ die nach Satz 2.4.6 (b) eindeutige Darstellung $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$ mit Koeffizienten $\xi_k \in \mathbb{K}$ so bezeichnet man das n-tupel (ξ_1, \dots, ξ_n) also Koordinaten von x (bzgl. \mathcal{X}). Von nun an sei X endlich erzeugt.

2.4.8 Satz

Jedes endliche EZS eines Vektorraumes enthält eine Basis. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte lineare Raum eine Basis.

Beweis: Es sei \mathcal{X} ein endliches EZS. Ist \mathcal{X} keine Basis, so kann \mathcal{X} nicht minimal sein und es existiert eine echte Teilmenge $\mathcal{X}^1 \neq \mathcal{X}$, die ebenfalls ein EZS ist. Ist wiederum \mathcal{X}^1 keine Basis, so existiert erneut eine echte Teilmenge $\mathcal{X}^2 \neq \mathcal{X}^1$, die \mathcal{X} erzeugt. Durch Iteration erhält man eine echt absteigende Folge von Teilmengen $\cdots \subsetneq \mathcal{X}^2 \subsetneq \mathcal{X}^1 \subsetneq \mathcal{X}$. Diese Folge bricht nach endlich vielen

Inhaltsverzeichnis Seite 35 von 69

schritten ab, da \mathcal{X} endlich ist, d.h. es gibt ein minimales \mathcal{X}^k . Dieses \mathcal{X}^k ist nach Satz Satz 2.4.6 eine Basis von X.

2.4.9 Proposition

Ist X endlich erzeugbar und $S \subseteq X$ linear unabhängig, so existiert eine Basis von X, welche S als Teilmenge enthält.

2.4.10 Lemma (Austauschsatz von Steinitz)

Ist $\{x_1, \cdots x_p\}$ linear unabhängig und $\{y_1, \cdots, y_n\}$ ein EZS von X, so gilt $p \leq n$ und nach einer Umnummerierung der y_k ist $\{x_1, \cdots, x_p, y_{p+1}, \cdots, y_n\}$ ein EZS von X.

2.4.11 Satz (Dimension)

Falls X eine Basis von n Elementen besitzt, enthält jede Basis von X genau n Elemente. Wir bezeichnen n als Dimension von X und schreiben $n = \dim X$.

2.4.12 Bemerkung

Ein linearer Raum X heißt <u>unendlich-dimensional</u> (symbolisch dim $X = \infty$) falls er kein endlichen EZS besitzt, anderenfalls heißt er endlich-dimensional.

<u>Beweis</u>: Es seien $\{x_1, \dots, x_n\}$ und auch $\{y_1, \dots, y_m\}$ Basen von X. Mit Lemma 2.4.10 folgt dann $n \leq m$, wie auch $m \leq n$, und somit m = n.

2.4.13 Beispiel

Für die bislang betrachteten Räume ist $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}^{m \times n} = m \cdot n$, $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ und $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \dim C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dim C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dim F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

2.4.14 Beispiel

Die komplexen Zahlen $\mathbb C$ sind ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb R$ und ein 1-dimensionaler Raum über $\mathbb C$.

2.4.15 Korollar

In linearen Räumen X mit $n := \dim X$ gilt:

- (a) Weniger als n Vektoren aus X sind kein EZS.
- (b) Mehr als n Vektoren aus X sind linear abhängig.
- (c) Jedes EZS mit n Elementen ist eine Basis.

Inhaltsverzeichnis Seite 36 von 69

(d) Jede linear unabhängige Menge mit n Elementen ist eine Basis.

Beweis:

- (a) jedes EZS enthält laut Satz 2.4.8 eine Basis. Für jedes aus weniger als n Vektoren bestehenden EZS gäbe es dann auch eine Basis mit Weniger als n Elementen. Dies widerspricht Satz 2.4.11.
- (b) Laut Proposition 2.4.9 ist jede linear unabhängige Menge Teil einer Basis. Somit hätte man mit einer linear unabhängigen Familie von mehr als n Vektoren auch eine Basis mit mehr als n Elementen im Widerspruch zu Satz 2.4.11.
- (c) Ein EZS enthält wegen Satz 2.4.8 eine Basis und ist wegen Satz 2.4.11 bereits eine solche.
- (d) Mit Proposition 2.4.9 ist eine linear unabhängige Familie Teilmenge einer Basis und mit Satz 2.4.11 eine Basis.

2.4.16 Korollar

Für jeden Unterraum Y eines endlich-dimensionalen Raumes X ist dim $Y \leq \dim X$, Gleichheit gilt genau für X = Y.

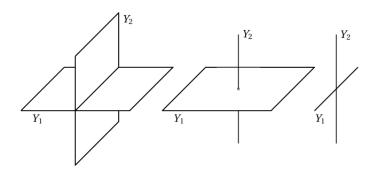
2.5 Komplemente und direkte Summen

Wieder sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} .

2.5.1 Definition (direkte Summen)

Es seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Unterräume. Dann heißt Y_2 Komplement von Y_1 in X, falls gilt $Y_1 + Y_2 = X$ $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$, man schreibt $X = y_1 \oplus y_2$ und nennt X direkte Summe von Y_1, Y_2 . Beispiele:

$$Y_1 \cap Y_2 \neq 0$$
 $Y_1 \oplus Y_2 = \mathbb{R}^3$ $Y_1 \oplus Y_2 \subsetneq \mathbb{R}^3$



Inhaltsverzeichnis Seite 37 von 69

2.5.2 Beispiel

Im Raum $X=\mathbb{R}^3$ ist die Gerade $Y_2:=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in X: x_1=x_2=x_3\right\}$ ein Komplement zur Ebene

 $Y_1 := \{ x \in X : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}.$

In der Tat liegt $x \in Y_1 \cap Y_2$, so erfüllen die Elemente des Durchschnitts

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

und folglich x = 0, dies bedeutet $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$. Andererseits liegen $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Y_1

und
$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 in Y_2 . Da $\{y_1, y_2, y_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3 = X$ bilden, gilt auch $Y_1 + Y_2 = X$.

2.5.3 Beispiel

Wir betrachten den Unterraum $Y_1 := \{ p \in P(\mathbb{K}) : p(0) = 0 \}$ von $X = P(\mathbb{K})$. Dann gilt $P(\mathbb{K}) = Y_1 \oplus P_0(\mathbb{K})$, d.h. der lineare Raum aller konstanten Polynome ist ein Komplement von Y_1 .

2.5.4 Satz

Es seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Unterräume. Es ist $X = Y_1 \oplus Y_2$ genau dann, wenn es zu jedem $x \in X$ eindeutige $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ mit $x = y_1 + y_2$ gilt.

Reweis:

- (⇒) Es sei Y_2 ein Komplement von Y_1 in X. Wegen $Y_1 + Y_2 = X$ lässt sich jedes $x \in X$ darstellen als $x = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$. Um deren Eindeutigkeit zu verifizieren, sein $\hat{y}_1 \in Y_1, \hat{y}_2 \in X_2$ zwei weitere Vektoren mit $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$. Dies impliziert $y_1 \hat{y}_2 = \hat{y}_2 y_2$ und $y_1 \hat{y}_1 \in Y_1$ für i = 1, 2 und folglich $y_i \hat{y}_i \in Y_1 \cap Y_2$ für i = 1, 2. Wegen $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ folgt $y_1 = \hat{y}_1$ und $y_2 = \hat{y}_2$.
- (\Leftarrow) Umgekehrt seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Unterräume derart, dass sich jedes $x \in X$ eindeutig als Summe $X = y_1 + y_2$ mit $y_i \in Y_i, i = 1, 2$, darstellen lässt. Dann gilt sicherlich $Y_1 + Y_2 = X$. Ist nun $x \in Y_1 \cap Y_2$, so gilt x = x + 0 = 0 + x und da die Darstellung eindeutig sein muss, resultiert x = 0; also $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$.

Inhaltsverzeichnis Seite 38 von 69

2.5.5 Satz

Jeder Unterraum eines endlich dimensionalen linearen Raumes hat ein Komplement. Beweis(-skizze):

Ergänze eine Basis von Y_1 zu einer Basis von X gemäß Proposition 2.4.9.

2.6 Anwendung: Matrizen und lineare Gleichungen

Es sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit den n Spalten und den m Zeilen. Die n Spalten seien $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}^m$ und $a^1, \cdots, a^m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ die Zeilen von A. Man bezeichnet den Unterraum span $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n} \subseteq \mathbb{K}^m$ als Spaltenraum und span $\{a^1, \cdots, a^m\} \subseteq \mathbb{K}^{1 \times n}$ als Zeilenraum von A.

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = (a_1, \cdots, a_n)$$

2.6.1 Definition (Rang einer Matrix)

Der Rang (rkA) einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die Dimension ihres Zeilenraumes.

2.6.2 Bemerkung

 $0 < \operatorname{rk} A < m$

$$(L_0)Ax = 0$$

2.6.3 Proposition

Der Lösungsraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ von (L_0) erfüllt $\dim L_0 = n - \operatorname{rk} A$.

Beweis:

Wir können o.B.d.A (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in strenger Zeilen-Stufen-Form ist. Es sei r die Anzahl der Zeilen von A, welche mindestens ein Element $\neq 0$ besitzen - dies ist der Rang von A. Für $1 \leq i \leq r$ sei j_i derjenige Spaltenindex, in welcher das erste Element $\neq 0$ der i-ten Zeile steht. Weiter seien k_1, \dots, k_{n-r} diejenigen Element von $\{1, \dots, n\}$, welche nicht in $\{j_1, \dots, j_r\}$ sind. Dann gilt

$$L_0 = \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : \xi_1, \dots, \xi_{k_{n-r}} \in \mathbb{K} \text{ und } \xi_{j_i} = -\frac{1}{a_{i,j_i}} \sum_{j=1}^{n-r} a_{i,k_j} \xi_{k_j} \text{ für } 1 \le i \le r \right\}$$

und $x_1, \dots x_{n-r} \in \mathbb{K}^n$ bezeichne die Vektoren in L_0 mit $\xi_{k_j} = 1$ und $\xi_{k_i} = 0$ für $i \neq j$. Man überlegt sich nun, dass $\{x_1, \dots x_{n-r}\}$ eine Basis von L_0 und die Behauptung folgt.

Inhaltsverzeichnis Seite 39 von 69

3 Lineare Abbildungen

Es seien X, Y lineare Räume über dem selben Körper \mathbb{K} .

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition (lineare Abbildung)

Eine lineare Abbildung $T:X\to Y$ erfüllt die Eigenschaft

$$(3.1a) T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in X$. Für die Menge aller solchen linearen Abbildungen schreiben wir L(X,Y).

Für lineare Abbildungen schreibt man Tx := T(x).

3.1.2 Bemerkung

- (1) Für $T \in L(X, Y)$ ist T0 = 0
- (2) Die Menge L(X,Y) ist ein Unterraum von F(X,Y); wir kürzen ferner ab L(X) := L(X,X). Ist Z ein weiterer linearer Raum und $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$, so ist auch die Komposition $S \circ T : X \to Z$ linear. $(L(X), \circ)$ ist eine Halbgruppe mit neutralem Element id_x .

3.1.3 Beispiel

Die Nullabbildung $0:X\to Y,\ 0x:=0\in Y$ ist linear, wie auch die identische Abbildung $id_x:\overline{X\to X}$ aus Beispiel 1.2.3

3.1.4 Beispiel (affine Abbildungen)

Eine Abbildung von $S: X \to Y$ heißt <u>affin</u>, falls es $T \in L(X,Y)$ und $y \in Y$ derart gibt, dass S(x) = Tx + y. S ist genau dann linear, falls y = 0.

3.1.5 Beispiel (die Abbildung T_A)

Die wichtigsten linearen Abbildungen dieser Vorlesung sind von der Form $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $T_A x = Ax$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Auch die Abbildung $\mathbb{K}^{m \times n} \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto T_A$ ist linear.

3.1.6 Beispiel

(1) Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $x \in \Omega$. Dann ist die <u>Auswertung</u> $ev_x : F(\Omega, X) \to X, \ ev_x(u) := u(x)$ linear.

Inhaltsverzeichnis Seite 40 von 69

(2) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist die <u>Differenziation</u> $D: C^1(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R}), \ Du := u'$ linear.

(3) Mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, den fixen $t_0 \in I$ und reellen Zahlen a < b definieren auch nachfolgende Integrale lineare Abbildungen:

$$T_1: C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ T_{1,u} := \int_a^b u(s)ds$$

$$T_2: C(I, \mathbb{R}) \to C^1(I, \mathbb{R}), \ (T_{2,u})(t) := \int_{t_0}^t u(s)ds$$

3.1.7 Beispiel (Vorwärts-Shift)

Es sei X ein linearer Raum und $\mathbb{I} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$. Bezeichnet dann $l(\mathbb{I})$ den linearen Raum aller Folgen $F(\mathbb{I}, X)$, so ist der durch $(S\phi)_k := \phi_{k+1}$ definierte <u>Vorwärts-Shift</u> eine Abbildung $S \in L(l(\mathbb{I}))$.

3.1.8 Definition (Kern, Bild, Rang)

Ist $T \in L(X,Y)$, so bezeichnet $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ den <u>Kern</u>, R(T) := TX das <u>Bild</u> und R(T) := R(T) den <u>Rang</u> von T. Eine Verbindung des Begriffes "Rang einer Matrix" (Definition 2.6.1) und Definition 3.1.8 wird in Satz 3.3.8 hergestellt.

3.1.9 Proposition

Für jedes $T \in L(X,Y)$ ist der Kern N(T) ein Unterraum von X. Beweis: Übungsaufgabe.

3.1.10 Satz

Für jedes $T \in L(X, Y)$ gilt:

- (a) T ist genau dann injektiv, wenn $N(T) = \{0\}$
- (b) T ist genau dann surjektiv, wenn R(T) = Y

Beweis:

- (a) Die Abbildung T ist genau dann nicht injektiv, wenn es $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ derart gibt, dass $x_1 \neq x_2$ und $Tx_1 = y = Tx_2$. Dies ist äquivalent zu $T(x_1 x_2) = 0$, also $0 \neq x_1 x_1 \in N(T)$
- (b) ist genau die Definition von Surjektivität.

Inhaltsverzeichnis Seite 41 von 69

3.1.11 Beispiel

(1) Die Auswertung $ev_x : F(\Omega, X) \to X$ aus Beispiel 3.1.6 (1) hat den Kern $N(ev_x) := \{m \in F(\Omega, X) : u(x) = 0\}$ und das Bild $R(ev_x) = X$, ein Urbild zu einem beliebigen $y \in X$ ist gerade die konstante $u(x) \equiv y$ auf Ω .

- (2) Für die Nullabbildung $0 \in L(X, Y)$ ist N(0) = X und $R(0) = \{0\}$, für $X \neq \{0\}$ ist 0 nicht injektiv. Für $Y \neq \{0\}$ ist 0 nicht surjektiv.
- (3) Mit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ aus Beispiel 3.1.5 genau dann
 - injektiv, wenn die linear homogene Gleichung (L_0) nur die triviale Lösung hat.
 - surjektiv, wenn es für jede Inhomogenität $b \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ von $\overline{(L_b)}$ gibt.
- (4) Bei der Differenziation $D: C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ aus Beispiel 3.1.6 (2) besteht der Kern N(D) aus allen konstanten Funktionen. Für das Bild R(D) erhalten wir dagegen $C([a,b],\mathbb{R})$, denn für ein beliebiges $v \in C([a,b],\mathbb{R})$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Du = v mit $u(t) := v(a) + \int_a^t v(s) ds$. Damit ist D nicht injektiv, aber surjektiv.

3.1.12 Satz (Dimensionssatz)

Für jede $T \in L(X,Y)$ mit $\dim X < \infty$ gilt $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim X$. <u>Beweis</u>: Es sei $\{x_1, \dots, x_m\}$ eine Basis von N(T) und $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis von R(T). Wir wählen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n \in X$ derart, dass $T\hat{x}_i = y_i, y \leq i \leq n$ gilt und weisen nach, dass $\mathcal{X} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n$

 $\{x_1, \dots, x_m, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$ eine Basis von X ist.

- (i) \mathcal{X} ist linear unabhängig: $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim X$
- (ii) \mathcal{X} ist ein EZS: $\dim m + \dim n = \dim X$

3.1.13 Korollar

Sei $T \in L(X,Y)$ ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von N(T) und $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_d\}$ eine Basis von X mit n < d. Das Bild R(T) hat folgende Basis:

$$\{Tx_{n+1},\cdots,Tx_d\}$$

Beweis: Sei $d = \dim X, n = \dim N(T)$. Nach Dimensionssatz 3.1.12 gilt: $\dim R(T) = d - n$. Wir suchen d - n linear unabhängige Vektoren in R(T). Die Vektoren $\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$ sind d - n Vektoren in R(T). Wir zeigen , dass diese linear unabhängig sind. Hierzu gehen wir indirekt vor. Wir nehmen an, dass $\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$ linear abhängig sind.

 \Rightarrow Es existiert ein Index $j^*, n < j^* \le d$, so dass $Tx_{j^*} = \sum_{\substack{j=n+1 \ j \ne j^*}}^d \eta_j Tx_j$. Das heißt $\sum_{j=n+1}^d \eta_j Tx_j = 0$

Inhaltsverzeichnis Seite 42 von 69

mit $\eta_{j^*} = -1 \circledast \circledast$. Aus der Linearität von T folgt: $T(\sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j) = 0$, d.h. $\sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j \in N(T)$. Weil $\{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von N(T) ist gilt: $\sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j = \sum_{j=1}^n \eta_j x_j$ für geeignete $n_1, \dots, n_n \in \mathbb{K}$, also: $\sum_{j=1}^n \eta_j x_j - \sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j = 0 \circledast$

Weil nach Voraussetzung $x_1, \dots x_d$ Basis von X ist, folgt aus \circledast , dass $\eta_j = 0 \ \forall 1 \leq j \leq d$ (Definition der linearen Unabhängigkeit). Das ist ein Widerspruch zu $\circledast \circledast$. Das heißt $\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$ sind linear unabhängig.

3.1.14 Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung)

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Basis von X und $\{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n\} \in Y$.

- (a) Sind $T, S \in L(X, Y)$ zwei linearen Abbildungen mit $Tx_i = Sx_i \ \forall 1 \leq i \leq n$. Dann gilt T = S
- (b) Es existiert genau eine lineare Abbildung $T \in L(X,Y)$ mit $Tx_i = \hat{y}_i, \ \forall 1 \leq i \leq n$

3.1.15 Bemerkung

Für gegebenes $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$, $\xi_k \in \mathbb{K} \ \forall 1 \leq k \leq n$, gilt $Tx = T(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k) \stackrel{(3.1a)}{=} \sum_{k=1}^{n} \xi_k Tx_k$. Kenntnis der Koeffizienten ξ_k und der Werte $Tx_i, 1 \leq i \leq n$ erlaubt uns den Wert von Tx zu bestimmen.

<u>Beweis</u> (Satz 3.1.14):

(a) Sei $Tx_i = Sx_i$; $\forall 1 \le i \le n$. Sei $x \in X$ mit $x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$, $1 \le i \le n$ $\xi_i \in \mathbb{K}$.

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Tx_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Sx_i = S(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i) = Sx$$

(b) Wir definieren T wie folgt. Der Vektor x habe die Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \ \xi_i \in \mathbb{K}$. Wir definieren $Tx := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{y}_i$. Dann gilt $Tx_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_{i,j} \hat{y}_i = \hat{y}_j$. Zeige noch: T ist linear. Sei $z \in X$ dargestellt als $z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. $\underline{\text{zeige}}$: T(x+z) = T(x) + T(z) und $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

$$T(x+z) = T(\sum_{i=1}^{n} \xi_{i} x_{i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i} x_{i}) = T(\sum_{i=1}^{n} (\xi_{i} + \beta_{i}) x_{i}) \stackrel{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} (\xi_{i} + \beta_{i}) \hat{y}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{I} \hat{y}_{i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i} \hat{y}_{i} = Tx + Tz$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx \text{ analog}$$

3.2 Isomorphismen

3.2.1 Definition

Eine bijektive Abbildung $T \in L(X,Y)$ heißt Isomorphismus, und wir definieren $GL(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : T \text{ bijektiv}\}$. Lineare Räume X,Y werden als isomorph bezeichnet, wenn es einen Isomorphismus $T \in L(X,Y)$ gibt. Schreibweise: $X \cong Y$.

Inhaltsverzeichnis Seite 43 von 69

3.2.2 Bemerkung

(a) Wenn Z ein weiterer \mathbb{K} -Vektorraum ist, und $T \in GL(X,Y)$ und $S \in GL(Y,Z)$, dann ist $S \circ T \in GL(X,Z)$. bildlich: $X \stackrel{T}{\to} Y \stackrel{S}{\to} Z$. Wir schreiben GL(X) für GL(X,X). Mit neutralem Element id_x wird GL(X) zu einer Gruppe, der sogenannten General Linear Group. Achtung: GL(X) ist kein Untervektorraum von L(X)!

(b) Durch $A = \{(X, Y) : X \text{ und } Y \text{ sind Isomorph}\}$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller linearen Räume erklärt.

3.2.3 Beispiel (Transponierte)

Die Abbildung $\circ^T : K^{n \times m} \to K^{m \times n}$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \mapsto A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

(Zeilen und Spalten vertauschen!)

ist ein Isomorphismus. Es gilt das Inverse des Transponieren ist das Transponieren selbst, d.h. $((A)^T)^T = A$ (für n = m). Damit ist der Raum der n-Spalten isomorph zum Raum der n-Zeilen.

3.2.4 Beispiel (Polynome)

- (1) Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $P_n(\mathbb{K})$ die Polynome von maximalem Grad $n \in \mathbb{N}_0$. $P_n(\mathbb{K})$ ist isomorph zu \mathbb{K}^{n+1} via den Isomorphismus $T: P_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{n+1}$, $p \to (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, wobei $p(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$. Zum Beispiel: $p(t) = t^2 + t$ $p \mapsto (0, 1, 1, 0, \dots, 0)$.
- (2) $l_{0,0} = \{(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \alpha_n = 0\}$ bezeichnet die Menge aller Folgen, die schließlich 0 sind. $l_{0,0}$ ist Isomorph zum Raum der Polynome $P(\mathbb{K})$ via den Isomorphismus $T \cdot CP(\mathbb{K}) \to l_{0,0}$; $p \mapsto (\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0, \dots) : p = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$

3.2.5 Lemma

Für $T \in L(X, Y)$ ist mit $S \subseteq X$ auch TS linear abhängig (in Y).

3.2.6 Satz

Es sei $T \in GL(X,Y)$. Eine Menge $S \subseteq X$ ist genau dann linear abhängig, wenn $TS \subseteq Y$ linear abhängig ist.

Inhaltsverzeichnis Seite 44 von 69

3.2.7 Bemerkung

Als logische Kontraposition erhalten wir, dass Isomorphismen linear unabhängige Mengen (oder Basen) auf ebensolche abbilden.

Beweis:

- (\Rightarrow) Folgt aus Lemma 3.2.5
- (\Leftarrow) Nun sei $TS \subseteq Y$ linear abhängig. Wegen $T \in GL(X,Y)$ ist auch $T^{-1}(TS)$ nach Lemma 3.2.5 linear abhängig.

3.2.8 Proposition

Jeder *n*-dimensionale lineare Raum ist isomorph zu \mathbb{K}^n , $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Beweis</u>: Es sei X ein linearer Raum mit $m := \dim X$ und der Basis $\mathcal{X} = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Wir definieren

$$T: \mathbb{K}^n \to X, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$$
. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von \mathcal{X} ist $N(T) = \{0\},$

nach Satz 3.1.10(a) ist T dann injektiv. Da \mathcal{X} ein EZS ist, muss T auch surjektiv sein.

3.2.9 Satz

Endlich dimensionale lineare Räume X,Y sind genau dann isomorph, wenn $\dim X = \dim Y$. Beweis

- (\Leftarrow) Es sei $n := \dim X = \dim Y$. Nach Proposition 3.2.8 existieren Isomorphismen $\Phi : X \to \mathbb{K}^n, \Psi : Y \to \mathbb{K}$, womit $\Psi^{-1} \circ \Phi \in GL(X,Y)$ ein Isomorphismus ist.
- (\Rightarrow) Sei $T \in GL(X,Y)$, $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist $y_i := Tx_i$, $1 \le i \le n$ nach Satz 3.2.6 Basis von Y.

3.2.10 Satz

Für jedes $T \in L(X,Y)$ zwischen linearen Räumen X,Y mit dim $X = \dim Y$ sind äquivalent:

- (a) T ist ein Isomorphismus (d.h. $T \in GL(X,Y)$)
- (b) T ist injektiv
- (c) T ist surjektiv

Beweis: Es ist nachzuweisen, dass Surjektivität und Injektivität äquivalent sind. Es sei $T \in L(X, Y)$ injektiv. Wegen Satz 3.1.10(a) ist dies äquivalent zu $N(T) = \{0\}$. Mit dem Dimensionssatz3.1.12 ist dann $\dim R(T) = \dim X - \dim N(T) = \dim Y$ und T ist genau dann injektiv, wenn $\dim R(T) = \dim Y$, d.h. R(T) = Y gilt. Aufgrund von Satz 3.1.10(b) folgt die Behauptung.

Inhaltsverzeichnis Seite 45 von 69

3.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

X, Y lineare Räume, $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{Y} := \{y_1, \dots, y_m\}$. Wir folgern aus Satz 3.1.14, dass eine lineare Abbildung $T \in L(X, Y)$ durch die Bilder Tx_i der Basisvektoren von X bestimmt ist. Sind etwa:

(3.3a)
$$Tx_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_j \text{ für } 1 \le i \le n$$

und $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$ mit $Tx = \sum_{j=1}^{m} \eta_j y_j$, so resultiert $Tx = T(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T x_k \stackrel{3.3a}{=} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{m} a_{k,j} y_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \xi_k) y_i$. Für die Koordinaten $\eta_i, \dots, \eta_m \in \mathbb{K}$ von Tx bzgl. \mathcal{Y} erhalten wir:

(3.3b)
$$\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \xi_k \text{ für } 1 \le i \le m$$

3.3.1 Satz (darstellende Matrix)

Jedes $T \in L(X,Y)$ wird eindeutig durch eine Matrix $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beschreiben, in deren k-ter Spalte gerade die Koordinaten von Tx_k bzgl der Basis \mathcal{Y} stehen. Man nennt $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ die T darstellende Matrix in den Basen \mathcal{X} und \mathcal{Y} ; im Fall X = Y und $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ schreiben wir $T_{\mathcal{X}} := T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$.

3.3.2 Bemerkung

Wir versehen $X = \mathbb{K}^n$ und $Y = \mathbb{K}^m$ mit Standardbasen \mathcal{E}_n bzw. \mathcal{E}_m aus Beispiel 2.4.3. Für jede Abbildung $T \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit darstellender Matrix

$$T_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}$$
 gilt dann $T = T_{T_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}}$ (Erinnerung $T_A x = Ax$)

3.3.3 Beispiel (Polynome)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $X = P_n(\mathbb{R})$ ausgestattet mit der monomialen Basis $\mathcal{M}_n := \{m_0, \dots, m_n\}$ aus Beispiel 2.4.4. Als lineare Abbildung betrachten wir die Ableitung $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ mit den Bildern

$$D_{m_0} = 0, \ D_{m_k} = k m_{k-1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

und erhalten aus Satz 3.3.1 die darstellende Matrix

$$D_{\mathcal{M}_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Inhaltsverzeichnis Seite 46 von 69

3.3.4**Proposition**

Zu jedem $A \in K^{m \times n}$ gibt es ein $T \in L(X,Y)$ mit $A = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$. <u>Beweis</u>: Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zu beliebigen $x \in X$ finden wir $\xi_i, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$. Die gesuchte Abbildung $T \in L(X, Y)$ ist dann

$$Tx := \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \xi_j \right) y_i$$

3.3.5 Korollar

Für endlich dimensionale Räume X, Y sind L(X, Y) und $\mathbb{K}^{\dim Y \times \dim X}$ isomorph. Insbesondere ist $\dim L(X,Y) = \dim X \cdot \dim Y$.

<u>Beweis</u>: Es sei $m = \dim Y, n = \dim X$. Wir verwenden die lineare Abbildung $\Phi : L(X,Y) \rightarrow \mathbb{R}$ $\overline{\mathbb{K}^{\dim Y \times \dim X}}, \Phi(T) = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ die in Proposition 3.3.4 konstruiert wurde.

3.3.6 Satz

Es sei Z ein weiterer linearer Raum mit Basis \mathcal{Z} . Für $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$ ist

$$(S \circ T)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}} = S_{\mathcal{V}}^{\mathcal{Z}} T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$$

3.3.7 Bemerkung

Für $A \in \mathbb{K}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$(3.3c)$$
 $T_A \circ T_b = T_{AB}$

3.3.2 Die Abbildung T_A

In diesem Abschnitt sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit $T_A x := Ax$.

3.3.8Satz

Die Ränge von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ stimmen überein: rk $T_A = \operatorname{rk} A$.

3.3.9 Bemerkung

Mit den Spalten $a_1, \dots a_n \in \mathbb{K}^m$ von A gilt $R(T_A) = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$, weshalb insbesondere $R(T_A)$ und der Spaltenraum von A gleiche Dimension haben. Andererseits war rkA nach Definition 2.6.1 die Dimension des Zeilenraumes von A. Daher wird Satz 3.3.8 auch formuliert als: "Spaltenrang=Zeilenrang".

Inhaltsverzeichnis Seite 47 von 69

Beweis: Zunächst merken wir an, dass $N(T_A)$ mit dem Lösungsraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ einer homogenen Gleichung (L_0) übereinstimmt. Nach Proposition 2.6.3 gilt also $\dim N(T) = n - \operatorname{rk} A$ Andererseits liefert der Dimensionssatz 3.1.12, dass $n = \dim N(T_A) + \dim N(T_A) = \dim N(T_A) + \operatorname{rk} T_A$ und folglich $\operatorname{rk} T_A = \operatorname{rk} A$.

Nun sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ quadratisch mit $\mathrm{rk}A = n$. Dies ist mit Satz 3.2.10 äquivalent dazu, dass $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ ein Isomorphismus ist. Wir interessieren uns nun für die simultane Lösbarkeit von Ax = e; für alle $1 \le i \le n$ welche wir mittels der augmentierten Matrix $(A, e_1, \dots e_n) = (A, I_n) \in \mathbb{K}^{n \times (2n)}$ notieren. Vermöge des Gauß-Verfahrens lässt sich (A, I_n) auf die Form (I_n, B) mit einem $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bringen; nach Konstruktion ist $A \cdot B = I_n$.

3.3.10 Definition (inverse Matrix)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt <u>invertierbar</u>, falls ein $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $A \cdot B = I_n$ existiert. Man nennt B die Inverse von A und schreibt $A^{-1} := B$.

3.3.11 Beispiel

Wir wollen die Matrix $A:=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}$ invertieren. Nach obigen Schema

und erhalten
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
.

Eine testweise Multiplikation ergibt $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

3.3.12 Korollar

Die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist eindeutig bestimmt mit $A^{-1}A = I_n$. Ferner ist A genau dann invertierbar, wenn $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$ ist.

3.3.13 Definition (regulär, singulär)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt regulär, falls rkA = n gilt, andernfalls nennen wir sie singulär.

Inhaltsverzeichnis Seite 48 von 69

3.3.14 Satz (Charakterisierung regulärer Matrizen)

Folgende Aussagen sind äquivalent für jedes $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- (a) $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$
- (b) A ist regulär
- (c) Die Zeilen von A sind linear unabhängig
- (d) Die Spalten von A sind linear unabhängig
- (e) Die homogene Gleichung (L_0) hat nur die triviale Lösung
- (f) Für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ ist (L_0) eindeutig lösbar.

<u>Beweis</u>: Die Äquivalenz von (b) und (c) ist Definition 3.3.13. Aufgrund von Satz 3.3.8 und Bemerkung 3.3.9 sind auch (c) und (d) gleichwertig.

- $(d) \Rightarrow (e)$ resultiert aus Definition 2.3.6 der linearen Unabhängigkeit.
- (e) \Rightarrow (f) ergibt sich aus Satz 1.4.9(a).
- (f) \Rightarrow (a) Nach unserer Voraussetzung (f) ist $T_A^{-1}(\{b\})$ für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ einpunktig. Also ist $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ bijektiv.
- $(a) \Rightarrow (b) \text{ Übung!}$

Zum Abschluss des Unterabschnittes beschäftigen wir uns mit linear inhomogenen Gleichungen: Ihre augmentierte Koeffizientenmatrix $(A,b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ definieren wir durch

$$(A,b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

3.3.15 Satz

Es sei $b \in \mathbb{K}^m$. Eine inhomogene Gleichung (L_b) hat genau dann eine Lösung, wenn gilt

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A, b)$$

Beweis: Übungsaufgabe.

3.3.3 Basiswechsel

Auf einem endlich dimensionalen Raum X seien die Basen $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$ und $\mathcal{X}' := \{x_1', \dots, x_n'\}$ gegeben. Wie verhält sich die Darstellungsmatrix von $T \in L(X)$ wenn man von \mathcal{X} auf die Basis \mathcal{X}' übergeht?

Inhaltsverzeichnis Seite 49 von 69

ullet Zunächst lassen sich die Elemente von \mathcal{X}' darstellen durch die Elemente von \mathcal{X}

$$(3.3e) X'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} x_i \text{ für alle } 1 \le j \le n$$

Hieraus wird die sogenannte <u>Basiswechselmatrix</u> $S = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ gebildet, welche den Übergang von \mathcal{X} nach \mathcal{X}' liefert:

Spalten von S = Koordinatenvektoren der "neuen" Basisvektoren

• Umgekehrt lassen sich die x_j durch die x_i' ausdrücken. Aus $x_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} x_i'$ erhalten wir $x_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} (\sum_{k=1}^n s_{ki} x_k) = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n s_{ki} s_{ij}') x_k$. Der Ausdruck in der letzten Klammer ist genau das (k, j)-te Element von SS'. Wegen der linearen Unabhängigkeit von \mathcal{X} folgern wir, dass $SS' = I_n$ und somit $S' = S^{-1}$ sein muss. Schließlich definiert man auch jede invertierbare Matrix S einen Basiswechsel gemäß (3.3e) bzw. $x_j' = Sx_j$.

3.3.16 Satz

Ist $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Basiswechselmatrix zwischen \mathcal{X} und \mathcal{X}' , so gilt $T_{\mathcal{X}'} = S^{-1}T_{\mathcal{X}}S$, für alle $T \in L(X)$.

3.3.17 Definition (Ähnlichkeit)

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen <u>ähnlich</u>, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ derart gibt, dass $B = S^{-1}AS$.

3.3.18 Bemerkung

- (1) Laut Satz 3.3.16 sind Darstellungsmatrizen bezüglich verschiedener Basen ähnlich vermöge der Basiswechselmatrix
- (2) Die Ähnlichkeit von Matrizen definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Ziel: Finde "einfache" Repräsentanten.

Inhaltsverzeichnis Seite 50 von 69

4 Eigenwerte

Im gesamten Kapitel sei X ein linearer Raum über dem Körper \mathbb{K} .

4.1 Determinanten

Wir beginnen mit einem Exkurs über Permutationen. Dazu sei (S_n, \circ) die in Beispiel 2.1.7 eingeführte symmetrische Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen von $\{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ihre Elemente σ werden als <u>Permutationen</u> bezeichnet (von $\{1, \dots, n\}$) und man notiert sie als Schema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

oder als n-Tupel $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. Weil σ bijektiv ist, kommt jede Zahl $j \in \{1, \dots, n\}$ genau einmal in $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ vor; ferner gibt es genau n! solche Permutationen.

4.1.1 Definition (Signum)

Es sei $\sigma \in S_n$ und $s(\sigma)$ bezeichnet die Anzahle der Paare $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Dann ist das Signum einer Permutation σ definiert durch

$$\operatorname{sgn} \sigma := (-1)^{s(\sigma)}$$

4.1.2 Beispiel

Für die identische Permutation id= $(1, 2, \dots, n)$ gilt $s(\sigma) = 0$ und folglich sgn id= 1. Weiter erhält man

$$\sigma = (2, 1, 3, 4, \dots, n), \ s(\sigma) = 1, \ \operatorname{sgn} \ \sigma = -1$$

$$\sigma = (n, n - 1, \dots, 2, 1), \ s(\sigma) = \frac{(n - 1)n}{2}, \operatorname{sgn} \ \sigma = (-1)^{s(\sigma)}$$

4.1.3 Proposition

Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt sgn $\sigma \circ \tau = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau$.

4.1.4 Bemerkung

Mittels Beispiel 4.1.2 ist 1 = sgn id = sgn $\sigma \circ \sigma^{-1}$ und damit erhalten wir

(4.1.a) sgn
$$\sigma^{-1} = \text{sgn } \sigma$$
 für alle $\sigma \in S_n$

<u>Beweis</u>: Es seien $\sigma, \tau \in S_n$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$ paarweise verschieden. Dann sind auch $y_i := x_{\sigma(i)}$ mit $1 \le i \le n$ paarweise verschieden.

Inhaltsverzeichnis Seite 51 von 69

(I) Zunächst gilt die Identität

$$(4.1b) \operatorname{sgn} \sigma = \prod_{1 \le i \le j \le n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}$$

denn Zähler und Nenner des Produkts stimmen bis auf ihr Vorzeichen überein. Im Zähler tritt ein Faktor $x_k - x_l$ mit k > l genau $s(\sigma)$ -mal auf, während dies im Nenner nicht vorkommt.

(II) Aufgrund von 4.1b erhalten wir

$$\operatorname{sgn} \tau = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{y_{\tau(i)} - y_{\tau(j)}}{y_i - y_j} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_{\sigma \circ \tau(i)} - x_{\sigma \circ \tau(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}$$

und folglich resultiert die Behauptung aus

$$\operatorname{sgn} \sigma \circ \tau \stackrel{\text{(4.1b)}}{=} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_{\sigma \circ \tau(i)} - x_{\sigma \circ \tau(j)}}{x_i - x_j}$$

$$= \left(\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_{\sigma \circ \tau(i)} - x_{\sigma \circ \tau(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}\right) \left(\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}\right)$$

$$= \operatorname{sgn} \tau \cdot \operatorname{sgn} \sigma$$

4.1.5 Definition (Determinante)

Die durch det: $\mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$

$$(4.1c) \det A := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

4.1.6 Bemerkung

- (1) (4.1c) heißt auch <u>Leibniz-Formel</u>
- (2) Es gilt die Beziehung $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}, A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, folglich ist die Determinante für $n \geq 2$ nicht linear.

4.1.7 Beispiel

Wir erhalten det0 = 0 und $detI_n = 1$

Inhaltsverzeichnis Seite 52 von 69

4.1.8 Beispiel

In Dimensionen $n \leq 3$ kann die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ verhältnismäßig einfach berechnet werden.

- (1) Für n = 1 gilt $\det A = a_{1,1}$
- (2) Für n = 2 ist $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ und wir erhalten $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} a_{2,1}a_{1,2}$
- (3) Für n = 3 gilt $S_3 = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (2,1,3), (3,2,1), (1,3,2)\}$ wobei die ersten drei Permutationen das Signum 1 besitzen und die weiteren das Signum -1 besitzen. Dies liefert die Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \leftarrow \text{Bildlich dargestellt wie die Regel funktioniert} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{aligned}$$

4.1.9 Lemma

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

- (a) $\det A = \det A^T$
- (b) Entsteht B durch eine Permutation $\sigma \in S_n$ der Spalten von A (d.h. ist formal $B = (a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)})$), oder der Zeilen von A (d.h. formal $B = \begin{pmatrix} a^{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a^{\sigma(n)} \end{pmatrix}$), so gilt det $B = \operatorname{sgn} \sigma \det A$
- (c) Falls zwei Spalten der Zeilen von A übereinstimmen, so ist $\det A=0.$

Beweis: Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(a) Durch direktes Nachrechnen und 4.1a folgt

$$\det A^{T} \stackrel{(4,1c)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma^{-1}(j)}$$
$$= \det A$$

(b) folgt ähnlich und (c) ist etwas involvierter.

Eine zentrale Eigenschaft von Determinanten ist ihre Multiplikativität. Allerdings ist sie in Dimensionen n > 1 nicht additiv: Beispiel $\det(I_n + I_n) = 2^n$, aber $\det I_n = 1$.

Inhaltsverzeichnis Seite 53 von 69

4.1.10 Satz (Multiplikativität der Determinante)

Es gilt

$$(4.1d)\det(AB) = \det A \cdot \det B$$
 für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Zusätzlich zu Satz 3.3.14: Charakterisierung regulärer Matrizen:

Satz (Regularität und die Determinante)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$. Dann gilt

$$(4.1e) \, \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

4.1.12Korollar

Für ähnliche Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $\det A = \det B$.

4.1.13 Bemerkung

Es sei X ein linearer Raum, mit dim $X < \infty$. Auf Basis von Korollar 4.1.12 lässt sich auch die <u>Determinante</u> det: $L(X) \to \mathbb{K}$ einer linearen Abbildung $T \in L(X)$. Mit ihrer darstellenden Matrix $T_{\mathcal{X}}$ ist

$$\det T := \det T_{\mathcal{X}}$$

Hierbei ist det Tunabhängig von der Basis \mathcal{X} , denn nach Satz 3.3.16 sind alle darstellenden Matrizen ähnlich und haben gleiche Determinante.

<u>Beweis</u>: Mit $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und einer regulären Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $B = S^{-1}AS$ gilt aufgrund von Satz 4.1.10 und Satz 4.1.11

$$\mathrm{det} B = \mathrm{det} S^{-1} A S \overset{(4.1d)}{=} \mathrm{det} S^{-1} \mathrm{det} A \mathrm{det} S = \mathrm{det} A$$

Problem mit der Leibniz (4.1c): Sehr aufwändig!

Lösung: Zu gegebenem $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $1 \le k, l \le n$ sei $A_{kl} := (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n, i \ne k \\ 1 \le j \le n, i \ne l}} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times n(-1)}$ diejenige Matrix, welche aus A durch Streichen der k—ten Zeile und der l—ten Spalte entsteht.

Proposition (Entwicklung von det)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Für alle Indizen $k, l \in \{1, \dots, n\}$ gilt dann:

(a) die Entwicklung nach der k-ten Zeile

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

Inhaltsverzeichnis Seite 54 von 69

(b) die Entwicklung nach der l-ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il}$$

4.1.15 Beispiel

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhalten wir:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert entsprechend:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + (-1)3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

4.1.16 Beispiel (Dreiecksmatrizen)

Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Dreiecksmatrix, so gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4.1.17 Proposition (Inverse und det)

Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+j} \det A_{ji} \right)_{1 \le j, i \le n}$$

4.1.18 Beispiel

In $\mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>: Mittels der Matrix $B:=((-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ erhalten wir durch Nachrechnen $AB=BA=\mathrm{det}A\cdot I_n$. Wegen Korollar 3.3.12 ist $(\mathrm{det}A)^{-1}B$ die Inverse von A.

4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} .

<u>Ziel</u>: Finde zu $T \in L(X)$ eine Basis \mathcal{X} von X derart, dass $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ möglichst "einfach" ist. Hilfreich sind hierbei diejenigen Vektoren, welche von T auf ein Vielfaches abgebildet werden.

Inhaltsverzeichnis Seite 55 von 69

4.2.1 Definition (Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum)

Existiert zu $T \in L(X)$ ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein Vektor $x \in X \setminus \{0\}$ mit

$$(4.2a) Tx = \lambda x$$

So nennt man x den zum Eigenwert λ gehörigen Eigenvektor von T. Der Kern $E_{\lambda} := N(T - \lambda i dx)$ wird Eigenraum von T und dessen Dimension die geometrische Vielfachheit von λ genannt. Das Spektrum $\sigma(T) \subseteq \mathbb{K}$ ist die Menge aller Eigenwerte.

4.2.2 Bemerkung

- (1) Eine Abbildung $T \in L(X)$ besitzt genau dann einen nichttrivialen Kern, falls $0 \in \sigma(T)$ gilt. Im Fall dim $X < \infty$ ist T genau dann invertierbar, wenn $0 \notin \sigma(T)$.
- (2) Für jedes $\lambda \in \sigma(T)$ ist der zugehörige Eigenraum E_{λ} invariant bezüglich T, d.h.

$$x \in E_{\lambda} \Rightarrow Tx \in E_{\lambda}$$

Ist insbesondere $m := \dim E_{\lambda} < \infty$, so besitzt $S := T \mid_{E_{\lambda}} \in L(E_{\lambda})$ bezüglich jeder Basis \mathcal{X} von E_{λ} die Darstellung $S_{\mathcal{X}} = \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda) \in \mathbb{K}^{m \times m}$.

(3) Mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ besteht das Spektrum $\sigma(T_A)$ aus allen $\lambda \in \mathbb{K}$ derart, dass der Lösungsraum der homogenen Gleichung $[A - \lambda I_n]x = 0$ nichttrivial ist; letzterer stimmt mit E_{λ} überein.

4.2.3 Beispiel

- (1) Mit der Nullabbildung $0 \in L(X)$ gilt $0 \quad x = 0$ für alle $x \in X$. Folglich ist $\sigma(0) = \{0\}$, jedes $x \neq 0$ ist Eigenvektor und $E_0 = X$. Für die Identität idx gilt $\sigma(\mathrm{id}x) = \{1\}$ und $E_1 = X$.
- (2) Wir betrachten die von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ induzierte Abbildung $T_A \in L(\mathbb{R}^2)$:
 - Wegen $T_A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist -1 ein Eigenwert, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zugehörigen Eigenvektor und $E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenraum zu -1; also hat -1 die geometrische Vielfachheit 1.
 - Aufgrund von $T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ferner 3 ein Eigenwert $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zugehöriger Eigenvektor und $E_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geometrische Vielfachheit ist 1.

Inhaltsverzeichnis Seite 56 von 69

4.2.4 Beispiel (Shift-Operator)

Auf dem Folgenraum $X := F(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ betrachten wir den Vorwärts-Shift $(Tx)_k := x_{k+1}, T \in L(X)$. Im Fall $\lambda \neq 0$ gilt die Eigenwert - Eigenvektor - Beziehung (4.2a) genau dann, wenn

$$[x_{k+1} = (Tx)_k = \lambda x_k]$$
, für alle $k \in \mathbb{Z}$

dies ist wiederum für jede Folge $x^{\lambda} \in X$, $x_k^{\lambda} = \lambda^k$ erfüllt. Im Fall $\lambda = 0$ gibt es dagegen keine Folge $X \neq 0$, welche (4.2a) erfüllt. Daher besitzt der Shift-Operator T das Spektrum $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und x^{λ} ist ein zu $\lambda \in \sigma(T)$ gehöriger Eigenvektor. Aufgrund von $E_{\lambda} = span\{x^{\lambda}\}$ besitzt jedes λ die geometrische Vielfachheit 1.

4.2.5 Proposition

Sind λ_i , $1 \leq i \leq m$, paarweise verschiedene Eigenwerte von $T \in L(X)$ mit zugehörigen Eigenvektoren $x_i \in X$, so ist $\{x_1, \dots, x_m\}$ linear unabhängig.

Beweis: Induktion über m: Im Fall m=1 ist wegen $x_1 \neq 0$ nichts zu zeigen. Es gelte nun die Aussage für m und wir machen den Ansatz

$$(4.2b) \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i x_i = 0 \text{ mit } \xi_1, \dots, \xi_{m+1} \in \mathbb{K}$$

Es resultiert hieraus die Beziehungen

$$0 \stackrel{(4.2b)}{=} T(\sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i) \stackrel{(3.1a)}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i T x_i \stackrel{(4.2a)}{=} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i x_i = \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i \lambda_{m+1} x_i$$

und durch Subtraktion folgt $0 = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(\lambda_i - \lambda_{m+1})x_i$. Laut Induktionsannahme ist $\{x_1, \dots, x_m\}$ linear unabhängig und damit $\xi_i(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0$. Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, folgt zunächst $\xi_i = 0$, $1 \le i \le m$. Mit (4.2b) folgt $\xi_{m+1}x_{m+1} = 0$. Also Eigenvektor ist $x_{m+1} \ne 0$ und daher $\xi_{m+1} = 0$.

4.2.6 Korollar

Ist $n = \dim X < \infty$, so gilt:

- (a) T hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.
- (b) Besitzt T genau n verschiedene Eigenwerte λ_i mit zugehörigen Eigenvektoren x_i , so ist $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von X und $T_{\mathcal{X}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Inhaltsverzeichnis Seite 57 von 69

Beweis:

(a) Hätte T mehr als n verschiedene Eigenwerte, so gäbe es mehr als n linear unabhängige Vektoren in X.

(b) Ergibt sich aus Korollar 2.4.15 und Bemerkung 4.2.2(2)

4.3 Das charakteristische Polynom

Im Folgendem gilt: $\chi=$ griechischer Buchstabe "chi", und $\mathcal X$ ein Skript-X

X sei linearer Raum über \mathbb{K} , dim $X = n < \infty$, \mathcal{X} sei Basis. Dann hat jede $T \in L(X)$ eine darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Bezeichnet \mathcal{X}' eine weitere Basis von X, so folgern wir aus Satz 3.3.16 die Existenz einer regulären Basiswechselmatrix S mit $T_{\mathcal{X}'} = S^{-1}T_{\mathcal{X}}S$ und nach den Sätzen 4.1.10, 4.1.11:

$$\det(T_{\mathcal{X}'} - tI_n) = \det(S^{-1}T_{\mathcal{X}}S - tS^{-1}S) \stackrel{(4.1d)}{=} \det(T_{\mathcal{X}} - tI_n) \det(S \stackrel{(4.1e)}{=} \det(T_{\mathcal{X}} - tI_n))$$

für alle $t \in \mathbb{K}$. Also hängen die Werte von $t \mapsto \det(T_{\mathcal{X}} - tI_n)$ nur von $T \in L(X)$ und nicht von \mathcal{X} ab.

4.3.1 Definition (charakteristisches Polynom)

Besitzt $T \in L(X)$ eine darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so ist das <u>charakteristisches Polynom</u> von T gegeben durch $\chi_T(t) = \det(T_{\mathcal{X}} - tI_n)$.

4.3.2 Bemerkung

Es seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und die induzierte Abbildung $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ gegeben.

- (1) Im Fall $X = \mathbb{K}^n$ bezeichnet man χ_{T_A} auch als charakteristisches Polynom von A.
- (2) Die Spur von A ist definiert durch (vgl. Aufgabe)

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

und mit $\chi_{T_A}(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0$ gilt $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = (-1)^{n-1} trA$, $c_0 = \det A$.

Man sagt ein Polynom $\chi \in P_n(\mathbb{K})$ <u>zerfällt in Linearfaktoren</u> falls es Koeffizienten $\mu \in \mathbb{K}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, mit

$$(4.3a)\chi(t) = \mu \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i) \text{ auf } \mathbb{K}$$

Die Werte λ_i sind dann die Nullstellen von χ , ihre <u>algebraische Vielfachheit</u> gibt an, wie oft der <u>Linearfaktor</u> $t - \lambda_i$ in (4.3a) vorkommt.

Inhaltsverzeichnis Seite 58 von 69

4.3.3 Satz

Für jedes $T \in L(X)$ gilt $\sigma(T) = \chi_T^{-1}(\{0\})$, und die Vielfachheit von $\lambda \in \sigma(T)$ heißt <u>algebraische Vielfachheit</u> des Eigenwerts λ .

Beweis: Mittels Definition 4.2.1 gelten die Äquivalenzen

$$\lambda \not\in \sigma(T) \Leftrightarrow E_{\lambda} = N(T - \lambda \mathrm{id} \ x) = \{0\} \Leftrightarrow [T_{\mathcal{X}} - \lambda I_n] x = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung.}$$

$$\Leftrightarrow T_{\mathcal{X}} - \lambda I_n \text{ ist regul\"ar (Satz 3.3.14)}$$

$$\Leftrightarrow \chi_T(\lambda) = \det(T_{\mathcal{X}} - \lambda I_n) \neq 0 \text{ nach Satz 4.1.11}$$

4.3.4 Beispiel

Es seien
$$\alpha \in [0, 2\pi), A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- (1) Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten wir $T = T_A \in L(\mathbb{R}^2)$. Sie hat das charakteristische Polynom $\chi_T(t) = t^2 2\cos\alpha \cdot t + 1$. Für $\alpha = 0$ ist $\sigma(T) = \{1\}$ und für $\alpha = \pi$ gilt $\sigma(T) = \{-1\}$. Die Eigenwerte sind doppelte Nullstellen von χ_T und damit von algebraischer Vielfachheit 2. Ansonsten besitzt χ_T für $\alpha \notin \{0, \pi\}$ keine reellen Nullstellen, d.h. $\sigma(T) = \emptyset$.
- (2) Mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt $T = T_A \in L(\mathbb{C}^2)$ für alle α das Spektrum

$$\sigma(T) = \{\cos\alpha - i\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \cos\alpha + i\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\}.$$

Seine Elemente haben für $\alpha \notin \{0, \pi\}$ die algebraische Vielfachheit 1.

Wir nennen einen Körper \mathbb{K} <u>algebraisch abgeschlossen</u>, falls jedes Polynom $p \in P(\mathbb{K})$ mit degp > 0 mindestens eine Nullstelle hat.

4.3.5 Proposition

Ist K algebraisch abgeschlossen, so hat jedes $T \in L(X)$ einen Eigenwert.

4.3.6 Beispiel

- (1) \mathbb{R} ist nicht algebraisch abgeschlossen (z.B. $t^2 + 1$). Der Fundamentalsatz der Algebra besagt gerade, dass \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist; folglich zerfällt auch jedes Polynom über \mathbb{C} in Linearfaktoren.
- (2) \mathbb{Q} ist nicht algebraisch abgeschlossen (z.B. $t^2 2$).

Inhaltsverzeichnis Seite 59 von 69

4.3.7 Satz

Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes ist kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit.

Beweis: Es sei $T \in L(X)$ und $\lambda \in \sigma(T)$ mit $m := \dim E_{\lambda}$. Dann existieren m linear unabhängige Eigenvektoren von T in E_{λ} . Wählt man diese als ersten Teil einer Basis \mathcal{X} von X, so gilt (vgl. Bemerkung 4.2.2(2))

$$T_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \Lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \Lambda = diag(\lambda, \dots, \lambda) \in \mathbb{K}^{n \times m}, \ B \in \mathbb{K}^{m \times (m-n)}, \ C \in \mathbb{K}^{(n-m) \times (n-m)}$$

und wir erhalten nach Satz 4.1.14, dass

$$\chi_T(t) = (\lambda - t)^m \det(C - tI_{n-m})$$

Daher ist die algebraische Vielfachheit von λ mindestens m.

4.4 Diagonalisierung und Trigonalisierung

Wir betrachten n-dimensionale lineare Räume X mit $n < \infty$.

4.4.1 Definition (diagonalisierbar, trigonalisierbar)

Eine Abbildung $T \in L(X)$ heißt

- (a) diagonalisierbar falls eine Basis \mathcal{X} von X existiert, in der $T_{\mathcal{X}}$ eine Diagonalmatrix ist.
- (b) trigonalisierbar, falls eine Basis \mathcal{X} von X existiert, in der $T_{\mathcal{X}}$ obere Dreiecksform besitzt.

4.4.2 Bemerkung

- (1) Entsprechend wird eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar (trigonalisierbar) genannt, falls $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$ diese entsprechende Eigenschaft besitzt, bzw. ähnlich zu einer Diagonalmatrix (obere Dreiecksmatrix) ist.
- (2) Mit oberen Dreiecksmatrizen zu arbeiten ist reine Konvention und keine mathematische Notwendigkeit.

4.4.3 Satz (Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit)

Eine Abbildung $T \in L(X)$ ist genau dann Diagonalisierbar, wenn gilt:

(i) Ihr charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

Inhaltsverzeichnis Seite 60 von 69

(ii) Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes stimmt mit seiner algebraische Vielfachheit überein.

Beweis: Wir zeigen zwei Richtungen:

 (\Rightarrow) Es sei $T \in L(X)$ diagonalisierbar und \mathcal{X} eine Basis von X derart, dass

$$T_{\mathcal{X}} = diag(a_1, \cdots, a_n) \text{ mit } a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}.$$

Das charakteristisches Polynom ergibt sich daher zu

$$(4.4a) \chi_T = \prod_{k=1}^n (a_k - t) \left[= \det(T_{\mathcal{X}} - tI_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & a_n - t \end{pmatrix} \right]$$

und zerfällt offenbar in Linearfaktoren. Nach Satz 4.3.7 bleibt also nachzuweisen, dass die geometrische Vielfachheit eines $\lambda \in \sigma(T)$ mindestens gleich seiner algebraischen Vielfachheit ist. Bezeichnet r die Algebraische Vielfachheit von λ , so kommt der Linearfaktor $\lambda - t$ genau r-mal in (4.4a) vor, d.h. r Diagonalelemente von $T_{\mathcal{X}}$ sind gleich λ . Damit werden r Elemente der Basis \mathcal{X} auf ihr λ -faches abgebildet und folglich ist $\dim E_{\lambda} \geq r$

(\Leftarrow) Umgekehrt zerfalle χ_T in Linearfaktoren, es gelte die Bedingung (ii) und es sei $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i , $1 \leq i \leq m \leq n$. Zu jedem Eigenraum E_{λ_i} wählen wir eine Basis

$$\mathcal{X}_i = \{x_1^i, \dots, x_{r_i}^i\} \text{ mit } 1 \le i \le m, r_1 + \dots r_m = n.$$

und erhalten somit n Vektoren im Raum X. Wir wollen zeigen, dass diese linear unabhängig sind. Dazu

$$(4.4b) \ 0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \xi_j^i x_j^i = \sum_{i=1}^{m} y_i \text{ mit } y_i = \sum_{j=1}^{r_i} \xi_j^i x_j^i \text{ und Koeffizienten } \xi_j^i$$

Die Invarianz der E_{λ_i} zeigt, dass jedes solcher $y_i \in E_{\lambda_i}$ auf sein λ_i -faches abgebildet wird, also Eigenvektor von T ist. Mit Proposition 4.2.5 liefert dies die lineare Unabhängigkeit von $\{y_1, \dots, y_m\}$. Dann muss aber $0 = y_i = \sum_{j=1}^{r_1} \xi_j^i x_j^i$, $1 \le i \le m$ gelten, denn andernfalls wäre (4.4b) eine nichttriviale Darstellung der 0. Da \mathcal{X}_i Basis ist, folgt $\xi_j^i = 0$ und somit sind die n Vektoren aus $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ linear unabhängig, bilden also eine Basis von X, in welcher $T_{\mathcal{X}}$ diagonal ist.

Inhaltsverzeichnis Seite 61 von 69

4.4.4 Beispiel

(1) Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T \in L(\mathbb{R}^3), \ Tx = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} x$$

und dem charakteristischen Polynom $\chi_T(t) = t^3 + t^2 - t - 1 = (t+1)^2(t-1)$. Es zerfällt in Linearfaktoren und der Eigenwert –1 besitzt die algebraische Vielfachheit 2. Der Lösungsraum der homogenen linearer Gleichung [T + id]x = 0 lautet

$$E_{-1} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

und ist der zugehörige Eigenraum zum Eigenwert-1. Somit hat -1 die geometrische Vielfachheit 2. Der weitere Eigenwert 1 ist algebraisch einfach. Seine geometrische Vielfachheit 1 ergibt sich aus der Gleichung [T - id]x = 0, deren Lösungsraum

$$E_1 = span \left\{ \begin{pmatrix} 1\\3\\2 \end{pmatrix} \right\}$$

gerade der zum Eigenwert 1 gehörige Eigenraum ist. Deshalb garantiert Satz 4.4.3 die Diagonalisierbarkeit von T. In der Tat, mit der aus den Eigenvektoren von T gebilde-

ten Basiswechselmatrix $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (gebildet von E_{-1} und E_{1} als Spalten) gibt

$$S^{-1}TS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Wir betrachten $T \in L(\mathbb{R}^3)$

$$Tx := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix} x$$

mit dem charakteristischen Polynom $\chi_T(t) = -(t-2)^3$, das in Linearfaktoren zerfällt. Der Eigenwert 2 von T hat die algebraische Vielfachheit 3. Man verifiziert leicht $E_2 = N(T - t)$

$$2id) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, weshalb die geometrische Vielfachheit 1 ist. Also ist T nicht diagonalisierbar.

Inhaltsverzeichnis Seite 62 von 69

4.4.5 Satz (Charakterisierung von Trigonalisierbarkeit)

Eine Abbildung $T \in L(X)$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

4.4.6 Bemerkung (Jordan-Normalform)

Der Satz 4.4.5 lässt sich wesentlich präziser fassen - wenn auch mit deutlich aufwändigeren Beweis: zu jedem $T \in L(X)$, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, existiert eine Basis \mathcal{X} von X, so dass die darstellende Matrix $T_{\mathcal{X}}$ in <u>Jordan-Normalform</u> ist.

$$T_{\mathcal{X}} = diag(J_1, \cdots, J_r) \text{ mit } 1 \leq i \leq r$$

Hierbei besitzt jeder <u>Jordan-Block</u> die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n_i \times m_i}, \ 1 \le i \le r$$

mit $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ und $n_1 + \dots + n_r = n$.

4.4.7 Beispiel

(1) Mit $\alpha \in [0, 2\pi)$ und der aus Beispiel 4.3.4 bekannten Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

betrachten wir die induzierte lineare Abbildung $T = T_A \in L(\mathbb{R}^2)$. Ihr charakteristisches Polynom $\chi_T(t) := t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1$ hat die Diskriminante $4(\cos^2\alpha - 1)$. Daher ist T genau für $\alpha \in \{0, \pi\}$ trigonalisierbar über \mathbb{R} .

(2) Weiter betrachten wir die in Beispiel 4.4.4(2) diskutierte Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3)$

$$Tx := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix} X$$

Da ihr charakteristisches Polynom $\chi_T(t)=(t-2)^3$ in Linearfaktoren zerfällt, ist sie nach

Satz 4.4.5 trigonalisierbar. In der Tat liefert die Matrix $S:=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ ihre Jordan-

Normalform
$$J = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inhaltsverzeichnis Seite 63 von 69

4.4.8 Korollar

Jede lineare Abbildung $T \in L(X)$ auf einem endlich-dimensionalen Raum X über \mathbb{C} ist trigonalisierbar.

Beweis: Mit dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom $p \in P(\mathbb{C})$ in Linearfaktoren, also insbesondere χ_T .

4.4.9 Korollar

Zerfällt χ_T in Linearfaktoren, so gilt

$$\det T = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j, \ tr \ T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ \text{mit } \sigma(T) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}.$$

Beweis: Nach Satz 4.4.5 ist $T \in L(X)$ trigonalisierbar und folglich ist jede Darstellung $T_{\mathcal{X}}$ ähnlich zu einer Dreiecksmatrix $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ vermöge S. Dann folgt mit Korollar 4.1.12, dass $\det T = \det D = \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nach einer Übungsaufgabe ist $trT = trS^{-1}(DS) = tr(DS)S^{-1} = trD = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Wir definieren die <u>Potenzen</u> $T^k \in L(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$, einer Abbildung $T \in L(X)$ rekursiv.

$$T^0 := id \ x, \ T^{k+1} := T \circ T^k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

und entsprechend für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wegen $\dim L(X) = n^2(\text{Korollar 3.3.5})$ ist die $(n^2 + 1)$ -elementige Menge $\{T^0, T^1, \cdots, T^{n^2}\}$ linear abhängig. Tatsächlich hat sogar $\{T^0, \cdots, T^n\}$ diese Eigenschaft:

4.4.10 Satz (von Cayley-Hamilton)

Jede lineare Abbildung $T \in L(X)$ erfüllt ihr charakteristisches Polynom, d.h. formal $\chi_T(T) = 0$.

4.4.11 Bemerkung

- (1) Bezeichnet \mathcal{X} eine Basis von X, so gilt für die darstellende Matrix $\chi_T(T_{\mathcal{X}}) = 0$
- (2) Für jedes $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt $A^2 = (trA)A (\det A)I_2$

Inhaltsverzeichnis Seite 64 von 69

5 Innere Produkte

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir beschränken uns weiter auf reelle oder komplexe lineare Räume X. Insbesondere im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erinnern wir an das komplex-konjugierte

$$\overline{z} = (x, -y) = x - iy$$

einer komplexen Zahl z=(x,y)=x+iy, sowie ihren Betrag $|z|:=\sqrt{zz}=\sqrt{x^2+y^2}$. Wir betrachten $\mathbb R$ als Teilmenge von $\mathbb C$ und erhalten: $z=\overline z \Leftrightarrow z\in \mathbb R$.

5.1 Skalarprodukte und Orthogonalität

5.1.1 Definition (inneres Produkt)

Ein <u>inneres Produkt</u> auf X ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ mit

- (i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (Linearität im 1. Argument)
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (konjugierte Symmetrie)
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und Gleichheit genau für x = 0 (positive Definitheit)

Für alle $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ein linearer Raum mit innerem Produkt heißt auch <u>Prä-Hilbert-Raum</u>. Statt innerem Produkt sagt man auch Skalarprodukt.

5.1.2 Bemerkung

- (1) Aufgrund der konjugierten Symmetrie ist stets $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, während die positive Definitheit $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$ garantiert.
- (2) Ein inneres Produkt ist Semilinear im 2. Argument:

$$(5.1a)\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \text{ für alle } x, y, z \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

(3) Unter einer Norm auf X versteht man die Funktion

$$\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}, \ \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Insbesondere gilt $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Zu jedem $x \neq 0$ nennen wir $y := \frac{1}{||x||}x$ den normierten Vektor zu x, denn ||y|| = 1.

Inhaltsverzeichnis Seite 65 von 69

5.1.3 Bemerkung (Orthogonalität)

(1) Die Elemente $x, y \in X$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Die resultierende Relation

$$x \perp y :\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

ist symmetrisch aber nicht transitiv. Wegen $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$ ist $0 \in X$ orthogonal zu jedem $x \in X$.

(2) Die Teilmengen $Y_1,Y_2\subseteq X$ heißen orthogonal, insofern

$$\langle y_1, y_2 \rangle = 0$$
 für alle $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$

5.1.4 Beispiel (Euklidischer Raum)

$$\mathbb{R}^n$$
mit $\langle x,y\rangle:=\sum_{j=1}^n x_jy_{,,}\; \|x\|=\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$

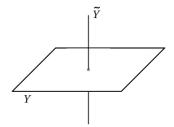
5.1.5 Beispiel (Unitärer Raum)

$$\mathbb{C}^n$$
 mit $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, n = 1, \langle i, i \rangle = i \cdot (-1) = 1.$

5.1.6 Beispiel

- (1) Mit sogenannten Gewichten $\omega_1, \ldots, \omega_n > 0$ ist auch $\langle x, y \rangle_{\omega} = \sum_{j=1}^n \omega_j x_j \overline{y}_j$ ein inneres Produkt auf \mathbb{K}^n mit induzierter Norm $||x||_{\omega} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \omega_j |x_j|^2}$
- (2) Mit einer stetigen Gewichtsfunktion $\omega:[a,b]\to(0,\infty),\ a< b$ sind auch die stetigen Funktionen $X=C([a,b],\mathbb{K})$ ein linearer Raum mit innerem Produkt

$$(5.1b) \langle x, y \rangle_{\omega} := \int_{a}^{b} \omega(t) x(t) \overline{y(t)} dt$$



5.1.7 Definition (Orhtogonales Komplement)

Es sei $S \subseteq X$. Dann heißt $S^{\perp} := \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in S\}$ das <u>orthogonale Komplement</u> von S (in X)

Inhaltsverzeichnis Seite 66 von 69

5.1.8 Beispiel

- (1) Es ist $\{0\}^{\perp} = X$ und $X^{\perp} = \{0\}$
- (2) Im Raum $X = \mathbb{R}^3$ haben wir in Beispiel 2.5.2 nachgewiesen, dass die Gerade $\tilde{Y} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Komplement zur Ebene $Y := \{x \in X, x_1 x_2 + x_3 = 0\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist. Betrachtet man \mathbb{R}^3 als Euklidischen Raum, so ist \tilde{Y} wegen $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2$ jedoch kein orthogonales Komplement von Y, vielmehr gilt $Y^{\perp} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.1.9 Proposition

Für jedes $x \subseteq X$ ist S^{\perp} ein Unterraum von X mit $span \ S \cap S^{\perp} = \{0\}.$

Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in S^{\perp}$ und wir erhalten $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle = 0$ für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ $y \in S$ dies garantiert $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in S^{\perp}$ und S^{\perp} ist ein linearer Raum. Weiter sei $x \in S^{\perp}$ und $X \in span S$, d.h. $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ mit Koeffizienten $\xi_i \in \mathbb{K}$ und $x_i \in S$. Dies impliziert $\langle x, x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle x_i, x \rangle = 0$ und folglich x = 0.

5.1.10 Satz

Ist $dim X < \infty$ und Y ein Unterraum von X, so gilt

- (a) $X = Y \oplus Y^{\perp}$
- (b) $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$
- (c) $dimX = dimY + dimY^{\perp}$

Beweis (a): $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ gilt nach Proposition 5.1.9. Es bleibt $X = Y \oplus Y^{\perp}$ zu zeigen. Zu jedem $x \in X$ muss es also $y \in X$ und $y^{\perp} \in Y^{\perp}$ mit $x = y + y^{\perp}$ geben. Ist $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Orthonormalbasis von Y, so definieren wir

$$Y := \sum_{i=1}^{m} \langle x, y_i \rangle \cdot y_i, Y^{\perp} := x - y \text{ usw.}$$

Inhaltsverzeichnis Seite 67 von 69

5.1.11 Definition (Orthogonal- und Orthonormalbasis)

Eine Familie $S \subseteq X$ heißt

(a) orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$, für alle $x, y \in \mathcal{S} \ X \neq y$

(b) orthonormal, falls
$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 1, x = y \\ 0, x \neq y \end{cases}$$
, für $x, y \in \mathcal{S}$

Eine Orthonormal- bzw. Orthonormalbasis von X ist eine orthogonale bzw. orthonormale Basis von X.

Jede orthonormale Familie ist auch orthogonal.

5.1.12 Beispiel

- (1) Die Standardbasis $\epsilon_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ aus Beispiel 2.4.3 ist eine Orthonormalbasis des Euklidischen Raums \mathbb{R}^n wie auch des unitären Raums \mathbb{C}^n .
- (2) Die Legendre Polynome $p_n \in P(\mathbb{R})$, $p_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 1)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren eine orthogonale Familie $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzgl. dem inneren Produkt (5.1b) aus Beispiel 5.1.6(2) mit $\omega(t) = 1$ auf [-1, 1]
- (3) Wir definieren die trigonometrischen Funktionen $c_n, s_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, c_n(t) := cos(nt),$ s(t) := sin(nt) mit $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathcal{S} := \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine orthogonale Familie in $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ bezüglich (5.1b) mit $\omega(t) = 1$ auf $[-\pi, \pi]$.

5.1.13 Proposition

Jede orthogonle Familie $S \subseteq X$ mit $0 \notin S$ ist linear unabhängig.

Beweis: Es sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Teilfamilie von \mathcal{S} und $\sum_{j=1}^n \xi_j x_j = 0$ mit Koeffizienten $\xi_j \in \mathbb{K}$. Dann resultiert $0 = \langle 0, x_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \xi_j x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \langle x_j, x_k \rangle = \xi_k \langle x_j, x_k \rangle$ für alle $1 \le k \le n$. Wegen $x_k \ne 0$ folgt $\xi_k = 0$.

Vorteil von Orthonormalbasen: Koordinaten einfach berechenbar

5.1.14 Proposition

Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis von X so gilt $x = \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j$ für alle $x \in X$. <u>Beweis</u>: Da $\{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal ist, gilt $\langle x_j, x_k = \delta_{jk}$ für $1 \le j, k \le n$. Die Koeffizienten $\xi_j \in \mathbb{K}$ eines beliebigen $x = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \ \xi_k = \sum_{j=1}^n \xi_k \underbrace{\langle x_j, x_k \rangle}_{\delta_{x_j}} = \langle \sum_{j=1}^n \xi_j x_j, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle$

Berechnung von Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis aus einer gegebenen Basis: Orthogonalisierungsverfahren von Gran-Schmidth:

Inhaltsverzeichnis Seite 68 von 69

(0) Es sei eine linear unabhängige Familie $\mathcal{S}=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$ gegeben auf X mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

(1) Setze $y_1 = x_1$

Inhaltsverzeichnis Seite 69 von 69