

# Lineare Algebra

Lucas Westermann & Florian Scheibner

26. Juni 2011

# Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| <b>Literatur</b>                                   | <b>6</b> |
| <b>1 Grundlegendes</b>                             | <b>6</b> |
| 1.1 Mengen   | 6        |
| 1.1.1 Definition (Relation)                        | 6        |
| 1.1.2 Beispiel                                     | 6        |
| 1.1.3 Beispiel                                     | 6        |
| 1.1.4 Beispiel                                     | 7        |
| 1.1.5 Beispiel                                     | 7        |
| 1.1.6 Beschreibung (Gerichtete Graphen)            | 7        |
| 1.1.7 Beispiel                                     | 8        |
| 1.1.8 Definition (Äquivalenzrelation)              | 8        |
| 1.1.9 Beispiel                                     | 8        |
| 1.1.10 Beispiel                                    | 8        |
| 1.2 Abbildungen                                    | 9        |
| 1.2.1 Definition (Abbildungen, Funktion)           | 9        |
| 1.2.2 Bemerkung                                    | 9        |
| 1.2.3 Beispiel (identische Abbildung)              | 10       |
| 1.2.4 Beispiel                                     | 10       |
| 1.2.5 Beispiel (ASCII-Code)                        | 10       |
| 1.2.6 Definition (Umkehrabbildung)                 | 11       |
| 1.2.7 Bemerkung                                    | 11       |
| 1.2.8 Korollar                                     | 11       |
| 1.3 Matrizen                                       | 11       |
| 1.3.1 Definition (Matrix)                          | 12       |
| 1.3.2 Beispiel ( $n$ Tupeln, $m$ -Spalten)         | 12       |
| 1.3.3 Kronecker-Symbol, Einheits- und Nullmatrixe) | 12       |
| 1.3.4 Beispiel (Diagonal- und Dreiecksmatrizen)    | 13       |
| 1.3.5 Bemerkung                                    | 13       |
| 1.3.6 Beispiel                                     | 14       |
| 1.3.7 Beispiel                                     | 14       |
| 1.3.8 Beispiel (RGB - Raum)                        | 14       |
| 1.3.9 Beispiel (Inzidenzmatrix)                    | 14       |
| 1.3.10 Satz (Rechenregeln für Matrizen)            | 15       |
| 1.4 Lineare Gleichungen                            | 15       |
| 1.4.1 Definition (lineare Gleichung)               | 15       |
| 1.4.2 Bemerkung                                    | 16       |
| 1.4.3 Satz (Superpositionsprinzip)                 | 16       |
| 1.4.4 Satz   | 16       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.4.5    | Beispiel . . . . .  | 17        |
| 1.4.6    | Beispiel (Rückwärts-Substitution) . . . . .                       | 17        |
| 1.4.7    | Beispiel . . . . .  | 18        |
| 1.4.8    | Satz . . . . .  | 19        |
| 1.4.9    | Satz . . . . .  | 19        |
| <b>2</b> | <b>Lineare Räume</b>  | <b>21</b> |
| 2.1      | Algebraische Strukturen . . . . .                                 | 21        |
| 2.1.1    | Definition (Gruppe) . . . . .                                     | 21        |
| 2.1.2    | Bemerkung . . . . .   | 21        |
| 2.1.3    | Bemerkung (Potenzen) . . . . .                                    | 21        |
| 2.1.4    | Beispiel . . . . .  | 22        |
| 2.1.6    | Beispiel (modulo) . . . . .                                       | 22        |
| 2.1.7    | Beispiel (symmetrische Gruppe) . . . . .                          | 22        |
| 2.1.8    | Korollar (Rechnen in Gruppen) . . . . .                           | 22        |
| 2.1.9    | Definition (Körper) . . . . .                                     | 23        |
| 2.1.10   | Beispiel . . . . .  | 23        |
| 2.1.11   | Beispiel (Restklassenkörper modulo $p$ ) . . . . .                | 23        |
| 2.1.12   | Korollar . . . . .  | 24        |
| 2.1.13   | Bemerkung . . . . .   | 24        |
| 2.1.14   | Beweis . . . . .  | 25        |
| 2.2      | Vektorräume . . . . .   | 25        |
| 2.2.1    | Definition (linearer Raum, Vektorraum) . . . . .                  | 25        |
| 2.2.2    | Beispiel . . . . .  | 26        |
| 2.2.3    | Beispiel . . . . .  | 26        |
| 2.2.4    | Beispiel (Lösungsmengen) . . . . .                                | 27        |
| 2.2.5    | Beispiel (Funktionsräume) . . . . .                               | 27        |
| 2.2.6    | Korollar . . . . .  | 27        |
| 2.2.7    | Definition (Unterraum) . . . . .                                  | 27        |
| 2.2.8    | Bemerkung . . . . .   | 27        |
| 2.2.9    | Beispiel (Stetige und stetig-differenzierbare Funktion) . . . . . | 28        |
| 2.2.10   | Beispiel (Polynome) . . . . .                                     | 28        |
| 2.2.11   | Satz (Schnitte und Summen von Unterräumen) . . . . .              | 28        |
| 2.3      | Lineare Abhängigkeiten . . . . .                                  | 29        |
| 2.3.1    | Definition (Spann) . . . . .                                      | 29        |
| 2.3.2    | Beispiel . . . . .  | 29        |
| 2.3.3    | Beispiel (Monome) . . . . .                                       | 29        |
| 2.3.4    | Beispiel . . . . .  | 29        |
| 2.3.5    | Korollar . . . . .  | 30        |
| 2.3.6    | Definition (lineare Unabhängigkeit) . . . . .                     | 30        |
| 2.3.7    | Bemerkung . . . . .   | 30        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.3.8    | Beispiel . . . . .                                    | 31        |
| 2.3.9    | Proposition . . . . .                                 | 31        |
| 2.3.10   | Beispiel . . . . .                                    | 31        |
| 2.3.11   | Satz . . . . .  | 32        |
| 2.4      | Basis und Dimensionen . . . . .                       | 32        |
| 2.4.1    | Definition (Basis) . . . . .                          | 32        |
| 2.4.2    | Beispiel . . . . .                                    | 32        |
| 2.4.3    | Beispiel (Standardbasis) . . . . .                    | 32        |
| 2.4.4    | Beispiel (Polynome) . . . . .                         | 33        |
| 2.4.5    | Lemma . . . . .                                       | 33        |
| 2.4.6    | Satz . . . . .  | 33        |
| 2.4.7    | Bemerkung (Koordinaten) . . . . .                     | 33        |
| 2.4.8    | Satz . . . . .  | 33        |
| 2.4.9    | Proposition . . . . .                                 | 34        |
| 2.4.10   | Lemma (Austauschsatz von Steinitz) . . . . .          | 34        |
| 2.4.11   | Satz (Dimension) . . . . .                            | 34        |
| 2.4.12   | Bemerkung . . . . .                                   | 34        |
| 2.4.13   | Beispiel . . . . .                                    | 34        |
| 2.4.14   | Beispiel . . . . .                                    | 34        |
| 2.4.15   | Korollar . . . . .                                    | 34        |
| 2.4.16   | Korollar . . . . .                                    | 35        |
| 2.5      | Komplemente und direkte Summen . . . . .              | 35        |
| 2.5.1    | Definition (direkte Summen) . . . . .                 | 35        |
| 2.5.2    | Beispiel . . . . .                                    | 35        |
| 2.5.3    | Beispiel . . . . .                                    | 36        |
| 2.5.4    | Satz . . . . .  | 36        |
| 2.5.5    | Satz . . . . .  | 36        |
| 2.6      | Anwendung: Matrizen und lineare Gleichungen . . . . . | 36        |
| 2.6.1    | Definition (Rang einer Matrix) . . . . .              | 37        |
| 2.6.2    | Bemerkung . . . . .                                   | 37        |
| 2.6.3    | Proposition . . . . .                                 | 37        |
| <b>3</b> | <b>Lineare Abbildungen</b>                            | <b>38</b> |
| 3.1      | Grundlagen . . . . .                                  | 38        |
| 3.1.1    | Definition (lineare Abbildung) . . . . .              | 38        |
| 3.1.2    | Bemerkung . . . . .                                   | 38        |
| 3.1.3    | Beispiel . . . . .                                    | 38        |
| 3.1.4    | Beispiel (affine Abbildungen) . . . . .               | 38        |
| 3.1.5    | Beispiel (die Abbildung $T_A$ ) . . . . .             | 38        |
| 3.1.6    | Beispiel . . . . .                                    | 38        |
| 3.1.7    | Beispiel (Vorwärts-Shift) . . . . .                   | 39        |

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 3.1.8  | Definition (Kern, Bild, Rang)               | 39 |
| 3.1.9  | Proposition                                 | 39 |
| 3.1.10 | Satz  | 39 |
| 3.1.11 | Beispiel                                    | 40 |
| 3.1.12 | Satz (Dimensionssatz)                       | 40 |
| 3.1.13 | Korollar                                    | 40 |
| 3.1.14 | Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung)     | 41 |
| 3.1.15 | Bemerkung                                   | 41 |
| 3.2    | Isomorphismen                               | 41 |
| 3.2.1  | Definition                                  | 41 |
| 3.2.2  | Bemerkung                                   | 42 |
| 3.2.3  | Beispiel (Transponierte)                    | 42 |
| 3.2.4  | Beispiel (Polynome)                         | 42 |
| 3.2.5  | Lemma                                       | 42 |
| 3.2.6  | Satz  | 42 |
| 3.2.7  | Bemerkung                                   | 43 |
| 3.2.8  | Proposition                                 | 43 |
| 3.2.9  | Satz  | 43 |
| 3.2.10 | Satz  | 43 |
| 3.3    | Lineare Abbildungen und Matrizen            | 44 |
| 3.3.1  | Satz (darstellende Matrix)                  | 44 |
| 3.3.2  | Bemerkung                                   | 44 |
| 3.3.3  | Beispiel (Polynome)                         | 44 |
| 3.3.4  | Proposition                                 | 45 |
| 3.3.5  | Korollar                                    | 45 |
| 3.3.6  | Satz  | 45 |
| 3.3.7  | Bemerkung                                   | 45 |
| 3.3.2  | Die Abbildung $T_A$                         | 45 |
| 3.3.8  | Satz  | 45 |
| 3.3.9  | Bemerkung                                   | 45 |
| 3.3.10 | Definition (inverse Matrix)                 | 46 |
| 3.3.11 | Beispiel                                    | 46 |
| 3.3.12 | Korollar                                    | 46 |
| 3.3.13 | Definition (regulär, singular)              | 46 |
| 3.3.14 | Satz (Charakterisierung regulärer Matrizen) | 47 |
| 3.3.15 | Satz  | 47 |
| 3.3.3  | Basiswechsel                                | 47 |
| 3.3.16 | Satz  | 48 |

# Literatur

Mathematik für Informatiker: Teschl, Hackenberger

Lineare Algebra: Beutelspacher, Fischer, Lang (auf Englisch), Stambach.

## 1 Grundlegendes

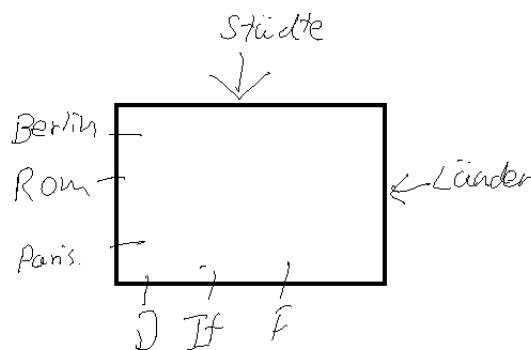
### 1.1 Mengen

#### 1.1.1 Definition (Relation)

Gegeben sein Mengen  $X$  und  $Y$ . Eine Teilmenge des kartesisches Produkt  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  heißt Relation ( $R$ ) zwischen  $X$  und  $Y$ ; im Fall  $X = Y$  spricht man von einer Relation auf  $X$ . Ferner:  $R_1^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$  heißt Umkehrrelation.

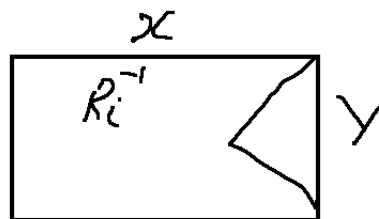
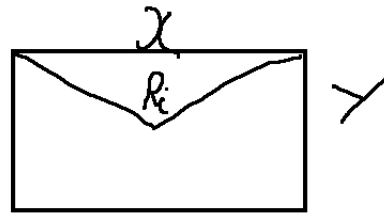
#### 1.1.2 Beispiel

Die Menge  $R_0 = \{(x, y) \in X \times Y : y \text{ ist Hauptstadt von } x\}$  ist eine Relation zwischen der Menge  $X$  aller Länder und  $Y$  aller Städte.



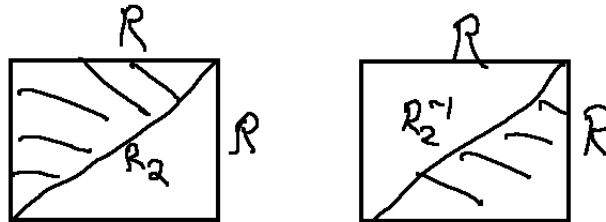
#### 1.1.3 Beispiel

Mit den Mengen  $X = \mathbb{R}$   $Y = [0, \infty)$  ist  $R_1 = \{(x, |x|) \in X \times Y, x \in X\}$  ist eine Relation mit der Umkehrrelation  $R^{-1} = \{(|x|, x) : x \in X\}$ .



#### 1.1.4 Beispiel

Mit den Mengen  $X = Y = \mathbb{R}$  ist  $R_2 = \{(x, y) \in X \times Y : x \leq y\}$  eine Relation  $R_2^{-1} = \{(y, x) : x \leq y\}$

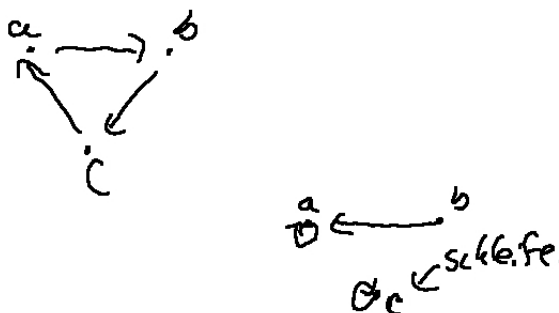


#### 1.1.5 Beispiel

Die Menge  $R_3 = \{(x, y) \in C \times C : x \text{ und } y \text{ haben gleichen Hersteller}\}$  ist eine Relation auf der Menge aller Computer  $C$ .

#### 1.1.6 Beschreibung (Gerichtete Graphen)

Relation  $R$  auf endlichen Mengen  $X$  können alternative wie folgt dargestellt werden. Man repräsentiert die Elemente von  $X$  als Punkte in der Ebene (Knoten) und verbindet  $x, y \in X$  genau dann durch einen Pfeil (gerichtete Kante), wenn  $(x, y) \in R$ . Das paar  $(X, R)$  heißt gerichteter Graph oder Digraph, z.B.  $X = \{a, b, c\}$   $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$ .



$$X = \{a, b, c\} \quad R = \{(b, a), (a, a), (c, c)\}.$$

Eine Relation  $R$  auf  $X$  heißt

reflexiv  $\Leftrightarrow (x, x) \in R$  für alle  $x \in X$

transitiv  $\Leftrightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$  für alle  $x, y, z \in X$

symmetrisch  $\Leftrightarrow (x, y) \in R$  für alle  $x, y \in X$

### 1.1.7 Beispiel

Die Relation  $R_2$  aus Beispiel 1.1.4 ist reflexiv, transitiv, aber nicht Symmetrisch. Die Relation  $R_3$  aus Beispiel 1.1.5 ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

### 1.1.8 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation  $A$  auf eine Menge  $X$  heißt eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Für ein Paar  $(x, y) \in A$  Schreiben wir  $x \sim y$  und nennen  $x$  und  $y$  äquivalent.

### 1.1.9 Beispiel

1. Sei  $X$  eine beliebige Menge. Dann ist  $\{(x, y) \in X \times X : x = y\}$  eine Äquivalenzrelation (Identitätsrelation).
2. Ebenso ist das ganze Produkt  $X \times X$  eine Äquivalenzrelation (Allrelation).
3. Die Relation  $R_3$  aus Beispiel 1.1.5 ist eine Äquivalenzrelation. Mit ihr lassen sich Computer nach ihrem Hersteller klassifizieren. Für jedes  $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$  die von  $X$  erzeugte Äquivalenzklasse und ein Element  $y \in [x]$  heißt Repräsentant von  $[x]$ .

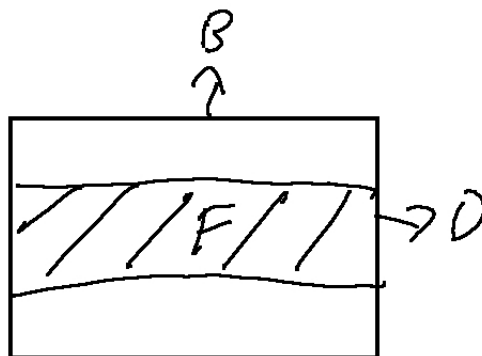
### 1.1.10 Beispiel

1. Für die Identitätsrelation ist  $[x] = \{x\}$  für alle  $x \in X$ . Die Allrelation besitzt genau eine Äquivalenzklasse  $[x] = X$ .
2. Im Beispiel 1.1.5 sind die Äquivalenzklassen die Menge aller Hersteller.



## 1.2 Abbildungen

$$F \subseteq D \times B.$$



### 1.2.1 Definition (Abbildungen, Funktion)

Eine Relation  $F$  zwischen zwei nichtleeren Mengen  $D$  und  $B$  heißt Abbildung oder Funktion von  $D$  nach  $B$ , falls für alle  $x \in D$  gilt.

1) Es existiert ein  $y \in B$  mit  $(x, y) \in F$

2) Mit  $y_1, y_2 \in B$  folgt aus  $(x, y_1) \in F$  und  $(x, y_2) \in F$ , dass  $y_1 = y_2$ .

Die Menge  $D$  heißt Definitionsbereich und  $B$  Bildbereich von  $F$ . Im Fall  $D = B$  spricht man von einer Abbildung auf  $D$  oder um einer Selbstabbildung auf  $D$ .

### 1.2.2 Bemerkung

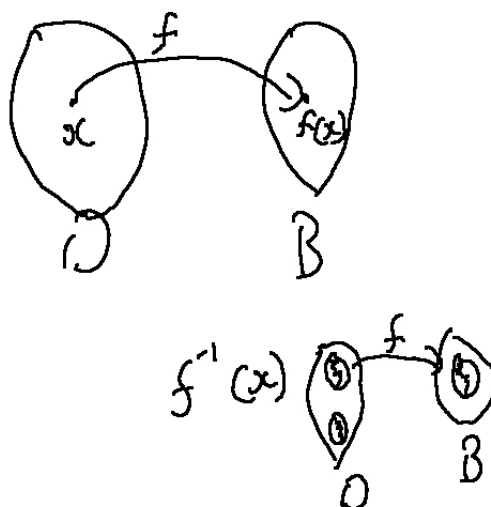
Veranschaulicht man Funktionen auf (endlichen) Mengen  $D$  als gerichtete Graphen (Beispiel 1.1.6), so geht von jedem Knoten genau eine Kante ab. Anstelle der Notation  $F \subseteq D \times B$ ,  $(x, y) \in F$  schreibt man auch  $f : D \rightarrow B, x \mapsto f(x)$  oder  $y := f(x)$ . Mit einer weiteren nichtleeren Menge  $C$  und einer Abbildung  $g : B \rightarrow C$  ist die Verknüpfung (Komposition) von  $g$  und  $f$  definiert als  $g \circ f : D \rightarrow C, (g \circ f)(x) := g(f(x))$ . Im Fall von Abbildungen  $f, g$  auf  $D$  gilt i.A.  $f \circ g \neq g \circ f$ . Statt einzelner Punkte  $x \in D$  kann man auch Mengen  $X \subseteq D$  abbilden:  $f(X) := \{y \in B : \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$ .  $f(X)$  heißt Bild von  $X$  unter  $f$ . Das Urbild einer Menge  $Y \subseteq B$  ist definiert durch  $f^{-1}(Y) := \{x \in D : f(x) \in Y\}$ . Eine Abbildung  $f : D \rightarrow B$  heißt

injektiv  $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$  enthält für alle  $y \in B$  höchstens ein Element

surjektiv  $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$  enthält für alle  $y \in B$  mindestens ein Element.

bijektiv  $\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$  enthält für alle  $y \in B$  genau ein Element.

Eine Abbildung  $f : D \rightarrow B$  ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.



### 1.2.3 Beispiel (identische Abbildung)

Die identische Abbildung auf eine Menge  $D \neq \emptyset$  ist  $id_D : D \rightarrow D, id_D(x) := x$ . Sie ist bijektiv.

#### Beispiel

Die Relation  $R_0$  aus Beispiel 1.1.2 zwischen  $X = \{Land\}$  und  $Y = \{Stadt\}$  ist eine Funktion  $r_0 : X \rightarrow Y$   $r_0(Land) := \text{Hauptstadt vom Land}$ . Ihr Bild ist  $r_0(X) = \{\text{Hauptstädte}\}$  und die Urbilder lauten:

$$r_0^{-1}(\{s\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } s \text{ keine Hauptstadt,} \\ \{l\} & \text{falls } s \text{ Hauptstadt von } l. \end{cases}$$

Folglich ist  $r_0$  injektiv, aber nicht surjektiv. Betrachtet man die Menge aller Hauptstädte als Bildbereich von  $r_0$ , so ist diese Abbildung auch surjektiv.

### 1.2.4 Beispiel

Die Relation  $R_1$  zwischen  $\mathbb{R}$  und  $[0, \infty)$  aus Beispiel 1.1.3 ist eine Abbildung und lässt sich schreiben als  $r_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $r_1(x) := |x|$ . Für sie gilt  $r_1(\mathbb{R}) := [0, \infty)$  und  $r_1^{-1}(\{y\}) = \{-y, y\}$  für alle  $y \in [0, \infty)$ . Also ist  $r_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  surjektiv, aber nicht injektiv. Betrachten wir  $r_1$  mit ganz  $\mathbb{R}$  als Bildbereich, so gilt  $r_1^{-1}(\{y\}) = \emptyset$  für  $y < 0$  und dann ist  $r_1$  nicht mehr surjektiv.

### 1.2.5 Beispiel (ASCII-Code)

Der ASCII-Code zur Codierung alpha-numerischer Zeichen ist gegeben durch eine bijektive Abbildung  $f : \{0, 1, \dots, 255 \text{ bzw. } 127\} \rightarrow \{\text{Zeichen}\}$ .

Einfache Beispiele (etwa Beispiel 1.2.5) zeigen, dass die Umkehrrelation  $F^{-1}$  einer Abbildung  $F \subseteq D \times B$  bzw.  $f : D \rightarrow B$  nicht unbedingt eine Abbildung ist.

### 1.2.6 Definition (Umkehrabbildung)

Eine Abbildung  $f : D \rightarrow B$  heißt umkehrbar, falls ihre Umkehrrelation  $F^{-1}$  wieder eine Abbildung ist. Für letztere schreibt man  $f^{-1} : B \rightarrow D$  und nennt sie Umkehrabbildung von  $f$ .

### 1.2.7 Bemerkung

Mit einer umkehrbaren Abbildung  $f : D \rightarrow B$  ist auch ihre Umkehrfunktion  $f^{-1} : B \rightarrow D$  umkehrbar mit  $f^{-1} \circ f = id_D$  und  $f \circ f^{-1} = id_B$ .

### 1.2.8 Korollar

Eine Abbildung  $f : D \rightarrow B$  ist genau dann umkehrbar, wenn  $f$  bijektiv ist. Für umgekehrtes  $f$  existiert die Umkehrfunktion nur auf  $f(D)$ .

Beweis: Hausaufgabe

## 1.3 Matrizen

Wir führen kurz die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ein. Darunter versteht man alle Paare  $z = (x, y)$  reeller Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  mit der Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 := z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

wobei  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$

Differenz und Quotient ergeben sich zu:

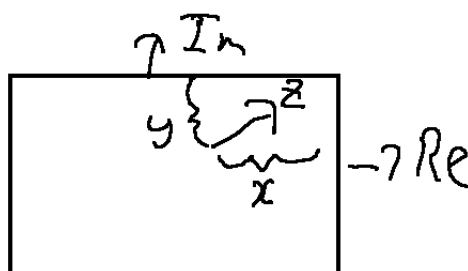
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \text{ falls } x_2^2 + y_2^2 \neq 0$$

Alternative Darstellung:

$$z = (x, y) = x + iy \text{ mit der Konvention } i^2 = -1$$

Wobei  $x$  der Realteil ( $Rez = x$ ) ist und  $y$  der Imaginärteil ( $Imz = y$ ).



Im Folgenden stehe  $\mathbb{K}$  für eine der drei Mengen  $\mathbb{Q}$  (rationalen Zahlen),  $\mathbb{R}$  (reelle Zahlen) oder  $\mathbb{C}$ .

### 1.3.1 Definition (Matrix)

Eine  $m \times m$ -Matrize ist ein rechteckiges Schema von Zahlen  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  der Form

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

Der erste Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  nummeriert die  $m$  Zeilen, der zweite Index  $j \in \{1, \dots, m\}$  die  $m$  Spalten der Matrix  $A$ , das Element  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  steht daher in der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte. Für die Menge aller solchen Matrizen schreiben wir  $\mathbb{K}^{m \times m}$ . Für eine quadratische Matrix  $A$  gilt  $m = n$  und die  $a_{i,i}$  heißen Diagonalelement.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Beispiel ( $n$ Tupeln, $m$ -Spalten)

Ein  $n$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_n)$  von Zahlen  $x$  aus  $\mathbb{K}$  wird als  $1 \times m$ -Matrix interpretiert. Eine  $m$ -Spalte  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$  wird als  $m \times 1$ -Matrix verstanden, identifiziert durch  $\mathbb{K}^m = k^{m \times 1}$ .

### 1.3.3 Kronecker-Symbol, Einheits- und Nullmatrixe)

Wir definieren das Kronecker-Symbol  $S_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  und  $I_m := (S_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$  ist die Einheitsmatrix.

Bei der Nullmatrix  $0 = (0)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  sind alle Elemente gleich  $0 \in \mathbb{N}$ .

### 1.3.4 Beispiel (Diagonal- und Dreiecksmatrizen)

Man nennt eine quadratische Matrix  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  diagonal falls  $a_{i,j} = 0$  für  $i \neq j$ . Wir schreiben

dann  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{1,1}, \cdot, a_{n,n})$ . Eine obere Dreiecksmatrix ist quadratisch und erfüllt  $a_{i,j} = 0$  für  $i > j$ , wogegen eine untere Dreiecksmatrix  $a_{i,j} = 0$  für  $i < j$  erfüllt. Sie

sind von der Form:  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$  bzw.  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ .

Mathematische Operationen für Matrizen:

- Skalare Multiplikation:  $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $\alpha \cdot A = \alpha A = (\alpha a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ . Wir schreiben  $-A := (-1) \cdot A$ .
- Addition:  $+: \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ . Die Subtraktion lautet  $A - B = A + (-B)$ .
- Genau für  $m \times n$ -Matrizen  $A$  und  $n \times p$ -Matrizen  $B$  lässt sich eine Multiplikation erklären.  $\cdot: \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times p}$ .  $A \cdot B = AB := (\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ . das Produkt ist also eine  $m \times p$ -Matrix.

Merke: Das Produkt macht nur Sinn, falls die Spaltenzahl der ersten mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.

### 1.3.5 Bemerkung

(1) Um Produkte von Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$  zum berechnen ergibt sich das Schema

$$A \begin{array}{c} | \\ B \\ | \\ C \end{array} = (\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

(2) Spezialfall:  $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ ,  $x \in \mathbb{K}^m$   $Ax = \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} a_{1,k} & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,k} & x_k \end{pmatrix}$ .

### 1.3.6 Beispiel

Das Produkt von  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$  lautet:

|     |                         |                         |
|-----|-------------------------|-------------------------|
|     | 4                       | 5                       |
|     | 6                       | 7                       |
| 0 1 | $0 \cdot 4 + 1 \cdot 6$ | $5 \cdot 0 + 1 \cdot 7$ |
| 2 3 | $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3$ | $2 \cdot 5 + 7 \cdot 3$ |

also  $C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$ .

Im Umgekehrter Reihenfolge gilt  $BA = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$ . Daher ist das Produkt von Matrizen nicht kommutativ  $AB \neq BA$ .

### 1.3.7 Beispiel

(1) Für  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  gilt  $I_m A = A = A I_n$

(2) Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $AB = 0$ , womit das Produkt von Matrizen nicht nullteilerfrei ist, d.h.  $AB = 0$  kann gelten, ohne dass ein Faktor Null ist.

(3) Das Produkt von  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$  ist nicht definiert,  $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 34 & 47 \\ 27 & 44 & 61 \end{pmatrix}$  dagegen schon.

### 1.3.8 Beispiel (RGB - Raum)

Im RGB-Farbmodell werden Farben durch Tupel  $(r, g, b)$  reeller Zahlen  $r, g, b \in \mathbb{R}$  beschreiben:  $(1, 0, 0)$  = rot,  $(0, 0, 1)$  blau,  $(1, 1, 0)$  gelb. Alternativ: *YIQ*-Modell  $(y, i, q)$ .

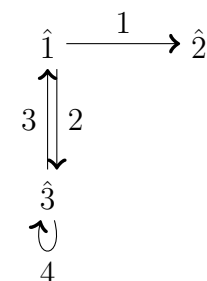
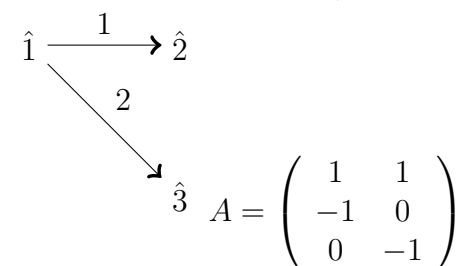
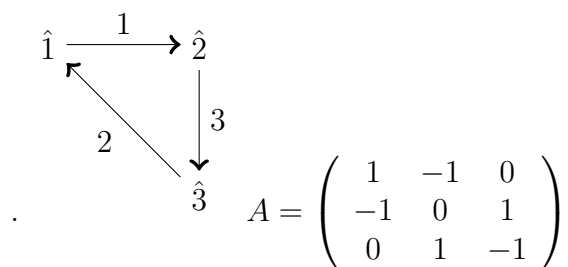
Umrechnung  $\begin{pmatrix} y \\ i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & -0.3 & -0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ .

### 1.3.9 Beispiel (Inzidenzmatrix)

Gerichtete Graphen ohne Schleifen (kein Knoten wird durch eine Kante mit sich selbst verbunden, siehe Bemerkung 1.1.6) mit den Knoten  $\hat{1}, \dots, \hat{n}$  mit den Knoten  $1, \dots, m$  lassen sich durch eine

sogenannte Inzidenzmatrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  beschreiben mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{Von Knoten } \hat{1} \text{ geht die Kante } j \text{ aus.} \\ -1, & \text{ein Knoten } \hat{1} \text{ mündet die Kante } j \\ 0, & \text{Knoten } \hat{1} \text{ und Kante } j \text{ berühren sich nicht.} \end{cases}$$



Nicht schleifen frei!

### 1.3.10 Satz (Rechenregeln für Matrizen)

Für Zahlen  $\alpha \in \mathbb{K}$  und Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{K}^{m \times p}$  gilt das Distributiv-Gesetz.  $A(B + C) = AB + AC$  für alle  $C \in \mathbb{K}^{m \times p}$  und die Assoziativ-Gesetze  $(\alpha A)B = A(\alpha B)$ ,  $A(BC) = (AB)C$  für alle  $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ . Beweis: Übung.

## 1.4 Lineare Gleichungen

### 1.4.1 Definition (lineare Gleichung)

Es seien  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{K}^m$ . Dann bezeichnet man  $(L_b) Ax = b$  als lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen für die  $n$  unbekannten  $x_m \in \mathbb{K}$  oder kurz also lineare Gleichung in  $\mathbb{K}^m$ .  $A$  heißt Koeffizientenmatrix und  $b$  Inhomogenität von  $(L_b)$ . Im Fall  $b \neq 0$  nennt man  $(L_b)$  inhomogen und

erhält andernfalls die homogene Gleichung:  $(L_0) Ax = 0$ . Eine Lösung von  $(L_b)$  ist ein Element  $x \in \mathbb{K}^m$  mit  $Ax = b$  und  $L_b := \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = b\}$  steht für die Lösungsmenge von  $(L_b)$ .

### 1.4.2 Bemerkung

(1) Ausgeschrieben lautet  $(L_b)$ :

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m.$$

Oder noch unübersichtlicher  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i$  für  $1 \leq i \leq m$ .

(2)  $(L_b)$  hat stets die triviale Lösung  $0 \in \mathbb{K}^m$ . Inhomogene Gleichungen müssen nicht unbedingt lösbar sein:  $0x = 1$ .

### 1.4.3 Satz (Superpositionsprinzip)

Es seien  $x, y \in \mathbb{K}^n$  Lösungen von  $(L_0)$ . Dann ist auch  $\alpha x + \beta y$  eine Lösung von  $(L_0)$ , d.h.  $\alpha x + \beta y \in L_0$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Beweis: Übung.

### 1.4.4 Satz

Ist  $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung von  $(L_b)$  so gilt  $L_b = \hat{x} + L_0$ . Hierbei: Für gegebene  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $A \subseteq \mathbb{K}^n$  ist  $x + A := \{y \in \mathbb{K}^n : \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } y = x + a\}$

Beweis: Übung. Nun: Explizite Lösung von  $(L_b)$ !

Besonders einfach, falls  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  diagonal ist gilt nämlich  $a_{i,i} \neq 0, 1 \leq i \leq n$ , so besitzt  $(L_b)$  die eindeutige Lösung  $x \in \mathbb{K}^n$  mit Elementen  $x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}}$  für  $1 \leq i \leq n$  ist dagegen  $a_{i,i} = 0$  für ein

$1 \leq i \leq n$ , so besitzt  $(L_b)$  unendlich viele Lösungen für  $b_i = 0$  und anderenfalls keine Lösung.

Allgemeinere Klasse: Ein  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist in Zeilen-Stufen-Form (ZSF) falls in jeder Zeile gilt:

(1) Beginnt sie mit  $k$  Nullen, so stehen unter diesen Nullen lediglich weitere Nullen.

(2) Unter dem ersten Element  $\neq 0$  stehen nur Nullen.

Bei strenger ZSF muss zusätzlich gelten:

(3) Über jedem ersten Element  $\neq 0$  stehen nur Nullen



### 1.4.5 Beispiel

(1) Obere Dreiecksmatrizen sind in ZSF, Diagonalmatrizen sogar in strenger ZSF.

(2) Bezeichnet  $*$  ein Element  $\neq 0$ , so gilt:

- $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$  sind nicht in ZSF.
- $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$  ist in ZSF (aber nicht strenger ZSF).
- $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ist in strenger ZSF

### 1.4.6 Beispiel (Rückwärts-Substitution)

Die inhomogene lineare Gleichung (1.4b)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$  hat die Koeffizientenmatrix bzw. Inhomogenität  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rückwärtssubstitution: Aus der letzten Gleichung  $x_3 + 2x_4 = 1$  sieht man, dass  $x_4 = t$  frei gewählt werden kann,  $t \in \mathbb{K}$ . Dies liefert  $x_3 = 1 - 2t$ . Die bekannten variablen  $x_3, x_4$  können in die zweite Gleichung von (1.4b) eingesetzt werden, also  $x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = t - 1$  und analog liefert die erste Gleichung  $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0$ . Die Lösungsmenge von (1.4b) ist also:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 : t \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge  $L_b$  von (1.4b) ändert sich nicht, wenn folgende Operationen auf (1.4b) angewandt werden:

- Vertauschen von Gleichungen
- Multiplikation von Gleichungen mit  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

- Addition des  $\alpha$ -fachen der  $k$ -ten Gleichung zur  $j$ -ten.

Diese sind elementare Zeilentransformationen.

ZIEL: Transformiere  $A$  bzw.  $(L_b)$  auf ZSF mittels elementarer Zeilentransformationen. Systematisch: Gauß Algorithmus.

Zu seiner Beschreibung gehen wir davon aus, dass die erste Spalte von  $A$  von 0 verschieden ist (anderenfalls sind  $x_1, \dots, x_n$  umzunummerieren). Ohne Sonderfälle zu berücksichtigen gilt:

1. Ordne die Gleichungen in (1.4a) so an, dass  $a_m \neq 0$ . In der gängigen Notation schreibt man

$$\text{nun (1.4b) als } \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}$$

2. Subtrahiere von der  $i$ -ten Gleichung,  $2 \leq i \leq m$  in (1.4a) das  $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ -fache der ersten Gleichung:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m,2}^{(2)} & \cdots & a_{m,n}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ A^{(1)}x^{(1)} = b^{(1)} \end{cases}$$

mit  $A^{(1)} \in \mathbb{K}^{(m-1) \times (n-1)}$ ,  $b \in \mathbb{K}^{m-1}$ .

3. Transformiere  $A^{(1)}x^{(1)} = b^{(1)}$  entsprechend und fahre sukzessive fort, bis (idealerweise) eine Dreiecks- oder ZSF entstanden ist.
4. Löse das resultierende System durch Rückwärts-Substitution.

### 1.4.7 Beispiel

Als Kurzschreibweise für

$$(1.4d) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ II - 4I \\ II - 7I \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ (-\frac{1}{3}) \\ III - 2II \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ist (1.4d) äquivalent zu  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Rückwärts-Substitution: Wähle  $x_3 = t$  mit  $t \in \mathbb{K}$  und es folgt  $x_2 = -2x_3 = -2t$ ,  $x_1 = -2x_2 + 3x_3 =$

$t$ . Die Lösungsmenge von (1.4d) ergibt sich zu:

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : t \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### 1.4.8 Satz

Hat  $(L_0)$  weniger Gleichungen als Unbekannte, also  $m < n$ , so besitzt sie unendlich viele Lösungen.  
Beweis:

- I. Man zeigt (\*)  $(L_0)$  hat eine nichttriviale Lösung.
- II. Da  $(L_0)$  nach Schritt (I) eine Lösung  $x \neq 0$  besitzt ist nach dem Superpositionsprinzip aus Satz 1.4.3 auch jeder  $tx, t \in \mathbb{K}$ , eine Lösung #.

#### 1.4.9 Satz

Besitzt  $(L_b)$  genauso viele Gleichungen wie Unbekannte, also  $m = n$ , so gilt:

- (a) Ist  $L_0 = \{0\}$ , so besitzt  $(L_b)$  genau eine Lösung.
- (b) Besitzt  $(L_0)$  eine nichttriviale Lösung, so existieren entweder keine oder unendlich viele verschiedene Lösungen von  $(L_b)$

Beweis:

- (a) Wie gehen mittels vollständiger Induktion vor.  
 Für  $n = 1$  gilt die Behauptung offenbar. Im Induktionsschritt gelte (a) für  $n - 1$ . Da  $(L_0)$  nur die triviale Lösung hat gilt  $A \neq 0$ . Durch Umm nummerieren erreichen wir  $a_{1,1} \neq 0$ . Dann wird zur  $i$ -ten Gleichung,  $2 \leq i$ , in (1.4a) das  $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ -fache der ersten Gleichung addiert:

$$(1.4f) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ A^* = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = b^* \end{cases} \quad \text{mit } A^* \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (m-1)}, b^* \in \mathbb{K}^{n-1}$$

Beweis:

Wir wissen:

- (a) Die homogene Gleichung  $A^*x^* = 0$  hat nur die triviale Lösung, denn sonst hätte  $(L_0)$  eine nicht triviale Lösung. Das Teilsystem  $A^*x^* = b^*$  besitzt nach Induktionsannahme genau eine Lösung  $x^*$  mit Elementen  $x_2, \dots, x_m$ . Durch Einsetzen in die erste Gleichung in (1.4f) folgt ein eindeutiger Wert  $x_1$  und die Lösung von  $(L_b)$  in eindeutiger Weise.

- (b) Es sei  $\hat{x}$  eine Lösung von  $(L_b)$  und  $x$  eine nichttriviale Lösung von  $(L_o)$ . Dann liefern die Sätze 1.4.3 und 1.4.4, dass  $\hat{x} + \alpha x$  die Gleichung löst für jedes  $\alpha \in \mathbb{K}$ . In diesem Fall hat  $(L_b)$  unendlich viele Lösungen. Die einzige verbleibende Möglichkeit ist, dass  $(L_b)$  keine Lösung besitzt.

## 2 Lineare Räume

### 2.1 Algebraische Strukturen

Bezeichnet  $M \neq \emptyset$  eine Menge und  $F(M)$  die Menge aller Selbstabbildungen auf  $M$ , so kann die Komposition  $\circ$  als Abbildung  $\circ : F(M) \times F(M) \rightarrow F(M)$  interpretiert werden - man spricht von einer Verknüpfung.

#### 2.1.1 Definition (Gruppe)

Eine Gruppe  $(G, \cdot)$  ist eine nichtleere Menge  $G$  mit einer Verknüpfung  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  mit den Eigenschaften:

$(G_1)$   $\cdot$  ist Assoziativ, d.h.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  für  $a, b, c \in G$

$(G_2)$  es existiert ein neutrales Element  $e \in G$  mit  $a \cdot e = a = e \cdot a$  für  $a \in G$

$(G_3)$  zu jedem  $a \in G$  existiert ein inverses Element  $a^{-1} \in G$  mit  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$  für  $a \in G$

Bei einer kommutativen oder Abel'schen Gruppe gilt ferner

$(G_4)$   $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in G$ .

Für eine Halbgruppe müssen nur  $(G_1)$  und  $(G_2)$  gelten.

#### 2.1.2 Bemerkung

- (1) Das neutrale Element  $e \in G$  ist eindeutig: In der Tat, bezeichnen  $e_1, e_2 \in G$  zwei neutrale Elemente, so folgt nach  $(G_2)$  ist:  $e_2 = e_1 \cdot e_2$  und  $e_1 \cdot e_2 = e_1$ , also  $e_1 = e_2$
- (2) Zu gegebenem  $a \in G$  ist auch das inverse Element  $a^{-1} \in G$  eindeutig. Für inverse Elemente  $a_1^{-1}, a_2^{-1}$  von  $a$  gilt nämlich

$$a_1^{-1} \stackrel{(G_2)}{=} a_1^{-1} \cdot e \stackrel{(G_3)}{=} a_1^{-1} \cdot (a \cdot a_2^{-1}) \stackrel{(G_1)}{=} (a_1^{-1} \cdot a) \cdot a_2^{-1} \stackrel{(G_3)}{=} e \cdot a_2^{-1} \stackrel{(G_2)}{=} a_2^{-1}$$

- (3) Entsprechend  $e = e^{-1}$ ,  $a = (a^{-1})^{-1}$

#### 2.1.3 Bemerkung (Potenzen)

Die Potenzen  $a^n \in G$  eines  $a \in G$  ( $G$  ist eine multiplikative Halbgruppe) sind rekursiv erklärt durch  $a^0 := e$ ,  $a^{n+1} := a \cdot a^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . In einer Gruppe setzen wir  $a^n := (a^{-n})^{-1}$  für  $n < 0$ .

### 2.1.4 Beispiel

- (1)  $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und dem zu  $a \in \mathbb{Z}$  inverses Element  $-a$ . Dagegen ist  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  keine Gruppe, denn das multiplikative Inverses lässt sich innerhalb von  $\mathbb{Z}$  nicht erklären. Ebenso ist  $(\mathbb{N}, +)$  keine (additive) Gruppe.
- (2) Es sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann ist  $(\mathbb{K}, +)$  eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und  $-a$  als zu  $a$  Inversen. Auch  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative multiplikative Gruppe mit neutralem Element 1 und dem zu  $a$  inversen Element  $\frac{1}{a}$ .
- (3) Mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$  bilden die Matrizen  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +)$  eine kommutative additive Gruppe mit neutralem Element 0 und den Inversen  $-A$  zu  $A$ . Die quadratischen reellen rationalen oder komplexen Matrizen  $(\mathbb{K}^{m \times n} \setminus \{0\}, \cdot)$  bilden keine Gruppe, da etwa  $\text{diag}(1, 0) \neq 0$  kein Inverses besitzt.

### 2.1.6 Beispiel (modulo)

Es sei  $p \geq 2$  eine ganze Zahl und  $\mathbb{Z}_p := \{0, \dots, p-1\}$ . Für beliebige  $a, b \in \mathbb{Z}$  gibt es vermöge der Division mit Rest eindeutige  $m \in \mathbb{Z}$  und  $k \in \mathbb{Z}_p$  mit  $a + b = mp + k$  wir schreiben dann  $k = a + b \bmod p$  oder  $k =: a +_p b$ . Dann ist  $(\mathbb{Z}_p, +_p)$  eine kommutative Gruppe mit dem neutralem Element 0.

### 2.1.7 Beispiel (symmetrische Gruppe)

Es sei  $M$  eine nichtleere Menge und  $S(M)$  bezeichnet alle bijektiven Selbstabbildungen  $f : M \rightarrow M$ . Dann ist die symmetrischen Gruppe  $(S(M), \circ)$  eine i.A. nicht-kommutative Gruppe mit  $\text{id}_M$  als neutralem Element und  $f^{-1} : M \rightarrow M$  als inversen Element zu  $f$ . Im Fall  $M = \{1, \dots, n\}$  schreiben wir  $S_n := S(\{1, \dots, n\})$ . Die Menge aller nicht-notwendig bijektiven Selbstabbildungen  $F(M)$  ist dagegen eine Halbgruppe bezüglich  $\circ$ .

### 2.1.8 Korollar (Rechnen in Gruppen)

Für alle  $a, b, c \in \mathbb{G}$  gilt  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ , wie auch  $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c, a \cdot b = e \Rightarrow a = b^{-1}$ .

Beweis:

Es seien  $a, b, c \in \mathbb{G}$ . Wir zeigen zunächst, dass  $b^{-1} \cdot a^{-1}$  das inverse Element von  $a \cdot b$  ist. Dazu

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G_1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot (a \cdot b)) \stackrel{(G_1)}{=} b^{-1} \cdot ((a^{-1} \cdot a) \cdot b) \stackrel{(G_3)}{=} b^{-1} \cdot (e \cdot b) \stackrel{(G_2)}{=} b^{-1} \cdot b \stackrel{(G_3)}{=} e$$

und entsprechend  $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = e$ . Die erste Implikation ergibt sich nach Voraussetzung durch

$$b \stackrel{(G_2)}{=} e \cdot b \stackrel{(G_3)}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot b \stackrel{(G_1)}{=} a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) \stackrel{(G_1)}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot c \stackrel{(G_3)}{=} e \cdot c \stackrel{(G_2)}{=} c$$

Die verbleibende Implikation sei den Leser überlassen.

### 2.1.9 Definition (Körper)

Ein Körper  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ist eine Menge  $\mathbb{K}$  mit mindestens zwei Elementen versehen, mit den arithmetischen Operationen  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  (Addition) und  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  (Multiplikation).  
 $(\mathbb{K}_1)(\mathbb{K}, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 und dem zu  $\alpha \in \mathbb{K}$  inversen Element  $-\alpha$ , d.h. für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$  gilt:

$$\begin{aligned}(\mathbb{K}_1^1) \alpha + (\beta + \gamma) &= (\alpha + \beta) + \gamma \\(\mathbb{K}_1^2) \alpha + 0 &= 0 + \alpha = \alpha \\(\mathbb{K}_1^3) \alpha \cdot -\alpha &= -\alpha \cdot \alpha = 0 \\(\mathbb{K}_1^4) \alpha + \beta &= \beta + \alpha\end{aligned}$$

$(\mathbb{K}_2)(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1 und zu  $\alpha \in \mathbb{K}$  Inversem  $\frac{1}{\alpha}$ , d.h. es gilt für  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned}(\mathbb{K}_2^1) \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \\(\mathbb{K}_2^2) \alpha \cdot 1 &= 1 \cdot \alpha = \alpha \\(\mathbb{K}_2^3) \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \\(\mathbb{K}_2^4) \alpha \cdot \beta &= \beta \cdot \alpha\end{aligned}$$

$(\mathbb{K}_3)$  es gelten die Distributivgesetze  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ,  $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ . Üblich  $\alpha\beta := \alpha \cdot \beta$ . Subtraktion als  $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ . Division  $\frac{\alpha}{\beta} := \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ .

### 2.1.10 Beispiel

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Körper bzgl.  $+, \cdot$

### 2.1.11 Beispiel (Restklassenkörper modulo $p$ )

Mit einer gegebenen Primzahl  $p \in \mathbb{N}$  definieren wir die Mengen  $\mathbb{Z}_p := \{0, \dots, p\}$ . Dann gibt es für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$  eindeutige Zahlen  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $k, l \in \mathbb{Z}_p$  derart, dass

$$\alpha + \beta = m \cdot p + k$$

$$\alpha \cdot \beta = np + l \text{ Division mit Rest.}$$

$$\text{Addition: } \alpha +_p \beta := k$$

$$\text{Multiplikation: } \alpha \cdot_p \beta := l \text{ (2.1a)}$$

$(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$  ist Körper, der sogenannten Restklassenkörper modulo  $p$ .

$$\mathbb{Z}_2 : \begin{array}{c|cc} +_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \cdot_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\mathbb{Z}_3 : \begin{array}{c|ccc} +_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

### 2.1.12 Korollar

Ist  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper, so gilt für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ , dass

$$\begin{aligned} 0 \cdot \alpha &= \alpha \cdot 0 = 0, & \beta \cdot (-\alpha) &= -(\beta \cdot \alpha) = (-\beta) \cdot \alpha \quad (2.1b) \\ (-1) \cdot \alpha &= -\alpha, & (-\alpha) \cdot (-\beta) &= \alpha \cdot \beta \quad (2.1c) \end{aligned}$$

Und ferner die Implikation  $\alpha \cdot \beta = 0 \rightarrow \alpha = 0$  oder  $\beta = 0$ .

### 2.1.13 Bemerkung

Es gilt  $1 \neq 0$ , da die Annahme  $1 = 0$  folgenden Widerspruch impliziert: Da  $\mathbb{K}$  mindestens 2 Elemente enthält, gibt es ein  $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$  mit:

$$\alpha \stackrel{(\mathbb{K}_2^2)}{=} \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot 0 \stackrel{(2.1b)}{=} 0$$

Daher ist der Restklassenkörper modulo 2  $\mathbb{Z}_2$  der kleinste Körper.



### 2.1.14 Beweis

Wähle ein  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ . Es gilt  $0 \cdot \alpha \stackrel{(\mathbb{K}_1^2)}{=} (0+0) \cdot \alpha \stackrel{(\mathbb{K})}{=} 0\alpha + 0\alpha$  mittels Korollar 2.1.8 ( $+, a = b = 0$  und  $c = 0$ ) folgt  $0 \cdot \alpha = 0$ , kommutativ liefert  $\alpha 0 = 0$ . Aus dieser Behauptung resultiert

$$(-\beta)\alpha + \beta\alpha \stackrel{(\mathbb{K}_3)}{=} (-\beta + \beta)\alpha = 0 \cdot \alpha = 0$$

mit Korollar 2.1.8 ( $+, a = (-\beta)\alpha, b = \beta\alpha$ ). Dies liefert  $-(\beta\alpha) = (-\beta)\alpha$  und  $\beta(-\alpha) = -(\beta\alpha)$ . Die Beziehung  $(-1)\alpha = -\alpha$  resultiert aus dem eben gezeigten  $\beta = 1$  und

$$(-1)\alpha = 1 \cdot (-\alpha) \stackrel{(\mathbb{K}_2^2)}{=} -\alpha.$$

2.1c ergibt sich mit Bemerkung 2.1.2(3) aus

$$(-\alpha)(-\beta) \stackrel{2.1b}{=} -(\alpha(-\beta)) \stackrel{2.1b}{=} -(-(\alpha\beta)) = \alpha\beta = 0$$

Annahme:  $\alpha \neq 0$  und  $\beta \neq 0$  dann  $1 \stackrel{(\mathbb{K}_2^3)}{=} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta \stackrel{2.1b}{=} 0$

## 2.2 Vektorräume

### 2.2.1 Definition (linearer Raum, Vektorraum)

Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Ein Vektorraum oder linearer Raum  $(X, +, \cdot)$  (über  $\mathbb{K}$ ) ist eine nichtleere Menge  $X$  mit arithmetische Operationen:

- (1) Addition  $+: X \times X \rightarrow X$  derart, dass  $(X, +)$  eine kommutative Gruppe mit neutralem Element  $0$  oder Nullvektor.
- (2) Skalare Multiplikation  $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$  derart, dass für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in X$  gilt:

$$(V_1) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \text{ Distributiv Gesetz}$$

$$(V_2) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x \text{ Distributiv Gesetz}$$

$$(V_3) (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \text{ Assoziativ Gesetz}$$

$$(V_4) 1 \cdot x = x$$

Die Elemente aus  $\mathbb{K}$  heißen Skalare und  $X$  heißen Vektoren.

Konventionen:  $\alpha x := \alpha \cdot x \quad x - y := x + (-y)$

### 2.2.2 Beispiel

Es sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper.

(0) Der triviale Raum  $\{0\}$  der nur die 0 enthält.

(1) Weiter ist  $\mathbb{K}$  ein Vektorraum über sich selbst.

(2) Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen  $\mathbb{K}^{m \times n}$  ist ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$  bezüglich

$$(1.3b) \quad \alpha A := \alpha A = (\alpha a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$(1.3c) \quad A + B := (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Ein  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  bezeichnen wir als Zeilenvektor und eine  $m$ -Spalte (1.3a) als Spaltenvektor.

### 2.2.3 Beispiel

Es sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind die  $n$ -Spalten  $\mathbb{Z}_p^n$  in  $\mathbb{Z}_p$  mit den komponentenweisen Addition  $+_p$  und skalaren Multiplikation  $\cdot_p$  ein linearer Raum über  $\mathbb{Z}_p$ .

Insbesondere für  $\mathbb{Z}_2^2$

| $+_2$                                  | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
|--|--|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| $\cdot_2$                              | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| 0                                      | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| 1                                      | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

### 2.2.4 Beispiel (Lösungsmengen)

Mit Satz 1.4.3 ist  $L_0$  einer homogenen Gleichung ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Die Lösungsmenge  $L_b$  inhomogener Systeme ist kein linearer Raum über  $\mathbb{K}$ .

### 2.2.5 Beispiel (Funktionsräume)

Es sei  $\omega \neq \emptyset$  und  $X$  ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $F(\omega, X) := \{u : \omega \rightarrow X\}$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit punktweise definierten arithmetischen Operationen  $(a+v)(t) := u(t)+v(t)$ ,  $(\alpha u)(t) := \alpha u(t)$  für alle  $t \in \omega, \alpha \in \mathbb{K}$ .

Die Menge  $F(\omega, X)$  wird als Funktionenraum bezeichnet.  $\omega \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \in \mathbb{Z}$ , dann bezeichnen wir  $F(\omega, X)$  als Folgenraum.

### 2.2.6 Korollar

Ist  $(X, +, \cdot)$  ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$  so gilt für alle Skalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und Vektoren  $x, y \in X$ :

- (a)  $0_{\mathbb{K}} \cdot x = \alpha \cdot 0_x = 0_x$
- (b) Falls  $\alpha x = 0_x$ , so folgt  $\alpha = 0 \in \mathbb{K}$  oder  $x = 0 \in X$
- (c)  $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$
- (d)  $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$  und  $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

Beweis: Es sei  $\alpha \in \mathbb{K}$  und  $x \in X$ :

- (a) Es gilt  $0_{\mathbb{K}}x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}}x + 0_{\mathbb{K}}x$  wegen  $V_2$ . Nach Definition 2.2.1 (a) existiert zum Vektor  $z := 0_{\mathbb{K}}x$  ein Vektor  $-z$  mit  $0 \cdot x + (-z) = 0_X$  und wir erhalten  $0_X = 0 \cdot x + (-z) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-z) = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-z)) = 0 \cdot x + 0_x = 0 + x$  und die Beziehung  $\alpha \cdot 0 = 0$  folge analog.
- (b) (b) Es gelte  $\alpha x = 0$  mit  $\alpha \neq 0$  und wir zeigen  $x = 0_x$ .  $\alpha \neq 0$  existiert  $\frac{1}{\alpha}$ . Nach (a) folgt  $\frac{1}{\alpha}(\alpha \cdot x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$  und andererseits  $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \cdot x = 1 \cdot x = x$
- (c) , (d)

### 2.2.7 Definition (Unterraum)

Eine nicht leere Teilmenge  $Y \subseteq X$  eines linearen Raumes  $(X, +, \cdot)$  über  $\mathbb{K}$  heißt Unterraum von  $X$ , falls gilt  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$  für alle  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$  und  $y_1, y_2 \in Y$

### 2.2.8 Bemerkung

Jeder lineare Raum  $x$  hat die trivialen Unterräume  $\{0\}$  und  $X$ .

### 2.2.9 Beispiel (Stetige und stetig-differenzierbare Funktion)

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Menge der stetigen Funktionen  $C(I, \mathbb{R}^n)$  auf  $I$  mit Bildern in  $\mathbb{R}^n$  ist ein Unterraum von  $F(I, \mathbb{R})$ . Ebenso sind stetig differenzierbare Funktionen  $C^1(I, \mathbb{R})$  ein Unterraum von  $C(I, \mathbb{R})$  und  $F(I, \mathbb{R}^n)$ .

### 2.2.10 Beispiel (Polynome)

Mit gegebenem Körper  $\mathbb{K}$  definieren wir den Raum der Polynome (über  $\mathbb{K}$ ) durch

$$P(\mathbb{K}) := \{p \in F(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} : p(t) = \sum_{l=0}^n a_l \cdot t^l\};$$

seine Elemente heißen Polynome und die  $a_k$  deren Koeffizienten. Dann ist  $P(\mathbb{K})$  ein Unterraum von  $F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ .

Der Grad  $\deg p$  eines Polynoms  $p \in P(\mathbb{K})$  ist der maximale Index  $k \in \mathbb{N}_0$  für den  $a_k \neq 0$  ist. Für  $m \in \mathbb{N}_0$  sind die Mengen  $P_m(\mathbb{K}) := \{p \in P(\mathbb{K}) : \deg p \leq m\}$

Unterräume von  $P(\mathbb{K})$ , wogegen  $\{p \in P(\mathbb{K}) : \deg p = m\}$  für  $m \neq 0$  kein Unterraum ist. Ferner ist jedes  $P_n(\mathbb{K})$  Unterraum von  $P_m(\mathbb{K})$  für  $0 \leq n \leq m$ .

### 2.2.11 Satz (Schnitte und Summen von Unterräumen)

Ist  $I$  eine nichtleere Indexmenge und  $(Y_i)_{i \in I}$  eine Familie von Unterräumen von  $X$ .

(a) Der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} Y_i$  ist ein Unterraum von  $X$ .

(b) Für endliche  $I$  ist die Summe  $\sum_{i \in I} Y_i := \{\sum_{i \in I} y_i \in X : y_i \in Y_i \text{ mit } i \in I\}$  der kleinste Unterraum von  $X$ , der jedes  $y_i$  enthält.

Für  $I = \{1, \dots, n\}$  schreibt man auch  $Y_1 + \dots + Y_m = \sum_{i \in J} Y_i$ .

Beweis:

(a) Es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ . Dann gilt  $x, y \in Y_i$  für alle  $i \in I$  und da jedes  $Y_i$  ein Unterraum von  $X$  ist, folgt  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y_i$  für jedes  $i \in I$ . Dies impliziert, dass  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ .

(b) Wir zeigen  $Y := \sum_{i \in I} Y_i$  ist ein Unterraum von  $X$ . Dazu sei  $x = \sum_{i \in I} x_i$  und  $y = \sum_{i \in I} y_i$  mit  $x_i, y_i \in Y_i$  und wir erhalten für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ :

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \sum_{i \in I} x_i + \beta \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} \underbrace{(\alpha x_i + \beta y_i)}_{\in Y_i}$$

Zu zeigen  $Y$  ist kleinster Unterraum der alle  $Y_i$  enthält.

Dazu sei  $Z \subseteq X$  ein weiterer Unterraum von  $X$  der alle  $Y_i$  enthält. Für  $x_i \in Y_i$  ist dann auch

$x_i \in Z$  für alle  $i \in I$ , da  $Y_i$  in  $Z$  enthalten sind.

Aus der Unterraumeigenschaft von  $Z$  resultiert  $\sum_{i \in I} x_i \in Z$  und folglich ist  $Y \subseteq Z$

## 2.3 Lineare Abhängigkeiten

Gegeben sei eine nichtleere Menge  $S$  von Vektoren aus einem linearen Raum  $X$  über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Existieren zu einem gegebenen  $x \in X$  dann endlich viele Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{K}$  und  $x_i \in S$ ,  $1 \leq i \leq n$ , mit  $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$  so bezeichnen wir  $x$  als Linearkombination der Vektoren aus  $S$ .

### 2.3.1 Definition (Spann)

Es sei  $S \subseteq X$ . Der Spann oder die lineare Hülle  $\text{span } S$  von  $S$  ist die Menge aller Linearkombinationen. Ferner setzt man  $\text{span } \{0\} = \{0\}$ .

### 2.3.2 Beispiel

Für endliche  $S = \{x_0, \dots, x_n\}$  ist der  $\text{span } S = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i \in X : \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gilt  $\text{span } \{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2$

$\text{span } \{x_1, x_2\}$  wenn  $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  aber

$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  dann  $\text{span } \{y_1, y_2\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

### 2.3.3 Beispiel (Monome)

Polynome  $m_n(t) := t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  heißen Monome. Dann lassen sich die Polynome als lineare Hülle der Monome darstellen, d.h.  $\text{span } \{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = P(\mathbb{K})$  insbesondere ist

$\text{span } \{m_0, \dots, m_n\} = P_n(\mathbb{K})$

$\text{span } \{m_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{p \in P(\mathbb{K}) : p(t) = p(-t) \text{ auf } \mathbb{K}\}$

$\text{span } \{m_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{p \in P(\mathbb{K}) : p(t) = -p(-t) \text{ auf } \mathbb{K}\}$

### 2.3.4 Beispiel

Es sei  $S \subseteq X$  nicht leer. Dann ist die lineare Hülle der kleinste  $S$  umfassende Unterraum von  $X$

**Beweis:**  $x, y \in \mathcal{S}$  ist  $\alpha x + \beta y$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  in  $\text{span } \mathcal{S}$ . Also ist  $\text{span } \mathcal{S}$  Unterraum von  $X$ .  $\text{span } \mathcal{S}$  enthält die Vektoren aus  $\mathcal{S}$  und damit ist  $\mathcal{S} \subseteq \text{span } \mathcal{S}$ ,  $Y \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$  mit  $x \in Y$  für sämtliche  $x \in \mathcal{S}$ . Dann liegen sämtliche Linearkombinationen von Vektoren aus  $\mathcal{S}$  in  $Y$ . Also ist  $\text{span } \mathcal{S}$  in  $Y$  enthalten.

### 2.3.5 Korollar

Ist  $x$  eine Linearkombination von Vektoren aus  $\mathcal{S} \subseteq X$ , so gilt  $\text{span } \mathcal{S} = \text{span}(\mathcal{S} \cup \{x\})$ .

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch zwei Inklusionen:

( $\subseteq$ ) Es ist klar dass  $\text{span } \mathcal{S} \subseteq \text{span}(\mathcal{S} \cup \{x\})$

( $\supseteq$ ) Also Linearkombination von Vektoren aus  $\mathcal{S}$  liegt  $x$  auch in  $\text{span } \mathcal{S}$ .

Demnach ist  $\text{span } \mathcal{S}$  derjenige Unterraum welcher  $\mathcal{S}$  und  $\{x\}$  enthält.

Damit folgt aus Prop 2.3.4, dass  $\text{span}(\mathcal{S} \cup \{x\}) = \text{span } \mathcal{S}$ .

### 2.3.6 Definition (lineare Unabhängigkeit)

Eine endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  von Vektoren aus  $X$  heißt linear unabhängig falls gilt:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k x_k = 0 \Rightarrow \xi_k = 0 \forall k = 1, n$$

Griechische Buchstaben:

$\eta$  – eta

$\xi$  – xi

$\zeta$  – zeta

Für beliebige Mengen  $\mathcal{S} \subseteq X$  nennt man  $\mathcal{S}$  linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von  $\mathcal{S}$  linear unabhängig ist, die leere Menge  $\emptyset$  wird als linear unabhängig betrachtet. Eine Teilmenge von  $X$  heißt linear abhängig, falls sie nicht linear unabhängig ist.

Man nennt Vektoren  $x_1, x_2, \dots$  linear unabhängig, wenn  $\{x_1, x_2, \dots\}$  diese Eigenschaft hat.

### 2.3.7 Bemerkung

- (1) lineare Abhängigkeit einer endlichen Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  bedeutet, dass eine nichttriviale Darstellung der Null aus Vektoren  $x_u$  existiert:

Man kann also

$$(2.3a) \sum_{k=1}^n \xi_k x_k = 0$$

schreiben, ohne dass alle  $\xi_k$  verschwinden.

- (2) Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

### 2.3.8 Beispiel

Die Menge  $\{0\}$  ist linear abhängig, dagegen ist  $\{x\}, x \neq 0$ , linear unabhängig.

### 2.3.9 Proposition

Es sei  $\mathcal{S} \subseteq X$  nichtleer und  $x, x_1, \dots, x_n \in X$

- (a) Ist  $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_n\}$  linear abhängig, so lässt sich mindestens ein Vektor aus  $\mathcal{S}$  als Linearkombination der weiteren Elementen von  $\mathcal{S}$  darstellen.
- (b) Für jede Linearkombination  $x$  aus  $\mathcal{S}$  ist  $\mathcal{S} \cup \{x\}$  linear abhängig.

Beweis:

- (a) Weil  $\{x_1, \dots, x_n\}$  linear abhängig ist, besitzt 0 die Darstellung (2.3a) in welcher nicht alle  $\xi_k$  verschwinden. Also existiert ein Index  $1 \leq k^* \leq n$  mit  $\xi_{k^*} \neq 0$  und damit

$$X_{k^*} = -\xi_{k^*}^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k^*}}^n \xi_k x_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k^*}}^n (-\xi_{k^*}^{-1} \xi_k) x_k$$

- (b) Mit  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$  ist  $x - \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$  eine nichttriviale Darstellung der 0

In  $X = \mathbb{K}^m$  gilt: Es sei  $\mathcal{S} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{K}^m$ . Mit der  $m \times n$ -Matrize  $A := (a_1, \dots, a_n)$  ist die Beziehung  $\sum_{k=1}^n \xi_k a_k = 0$  (vgl. (2.3a)) äquivalent zu:

$$(2.3b) Ax = 0, x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Demzufolge ist  $\mathcal{S}$  genau dann linear unabhängig, wenn  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung hat. Aus Satz 1.4.8 (in Verbindung mit Blatt 5, Aufg. 1) erhalten wir daher, dass mehr als  $m$  Vektoren stets linear abhängig sind.

### 2.3.10 Beispiel

- (1) Für die kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{K}^m$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt in obiger Terminologie  $A = I_m$ . Also besitzt  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung und  $\{e_1, \dots, e_m\}$  ist linear unabhängig.

(2) Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  um die lineare Unabhängigkeit von

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

in  $\mathbb{R}^3$  zu untersuchen, betrachten wir die Gleichung (2.3b) mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & \lambda \end{pmatrix}$$

und lösen sie mit dem in Beispiel 1.4.6 beschriebenen Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ 2I - I \\ 3I - I \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 21 - \lambda & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ III - 2II \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 - \lambda & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ III - 2II \end{array}$$

Also hat  $Ax = 0$  für  $\lambda \neq 9$  nur die triviale Lösung (lineare Unabhängigkeit von  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ) und für  $\lambda = 9$  nichttriviale Lösungen (lineare Abhängigkeit).

### 2.3.11 Satz

Eine Menge  $\mathcal{S} \subseteq X$  ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes  $x \in \mathcal{S}$  auf nur eine Art (bis auf Glieder mit Null-Koeffizienten) als Linearkombinationen von Vektoren aus  $\mathcal{S}$  dargestellt werden kann.

## 2.4 Basis und Dimensionen

Es sei  $X$  ein linearer Raum über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

### 2.4.1 Definition (Basis)

Eine Menge  $\mathcal{X} \subseteq X$  heißt Basis von  $X$ , falls  $\mathcal{X}$  linear unabhängig mit  $X = \text{span}\mathcal{X}$  ist:

Eine Menge  $\mathcal{X}$  mit  $X = \text{span}\mathcal{X}$  wird Erzeugendensystem (EVS) von  $X$  genannt. Man nennt  $X$  endlich erzeugt, falls er ein endliches EVS hat.

### 2.4.2 Beispiel

Die Basis von  $\{0\}$  ist die leere Menge.

### 2.4.3 Beispiel (Standardbasis)

Die mittels der kanonischen Einheitsvektoren aus Beispiel 2.3.10 (1) gebildete Menge  $\mathcal{E}_m := \{e_1, \dots, e_m\}$  ist eine Basis von  $\mathbb{K}^m$ , die sogenannte Standardbasis, damit ist  $\mathbb{K}^m$  endlich erzeugt.



### 2.4.4 Beispiel (Polynome)

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sind  $\mathcal{M}_n := \{m_0, \dots, m_n\}$  aus Beispiel 2.3.3 eine Basis der Polynome  $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$  von maximalem Grad  $n$ . Ebenso ist  $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Basis von  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ . Somit ist jedes  $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$  endlich erzeugt,  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  dagegen nicht.

### 2.4.5 Lemma

Es sei  $\mathcal{S} \subseteq X$  linear unabhängig. Gilt dann  $x \notin \text{span} \mathcal{S}$ , so ist auch  $\mathcal{S} \cup \{x\}$  linear unabhängig.  
Beweis: Es ist nachzuweisen, dass jede endliche Teilmenge von  $\mathcal{S} \cup \{x\}$  linear unabhängig ist. Dazu sei  $\{x_1, \dots, x_n, x\}$  eine solche Menge und  $\sum_{k=1}^n \xi_k x_k + \eta x = 0$  eine Darstellung der Null. Wäre  $\eta \neq 0$ , so könnte man  $x$  als Linearkombination der  $x_1, \dots, x_n$  darstellen, dies widerspricht  $x \notin \text{span} \mathcal{S}$ . Also gilt  $\eta = 0$ . Da aber  $\{x_1, \dots, x_n\}$  linear unabhängig ist, folgt  $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ . In trivialer Weise: ist  $X$  ein EZS von  $X$ . Unser Interesse besteht aber gerade in „kleinen“ EZSen.

### 2.4.6 Satz

Mit nicht leerem  $\mathcal{X} \subseteq X$  sind äquivalent:

- (a)  $\mathcal{X}$  ist eine Basis von  $X$
- (b) Jeder Vektor  $x \in X$  lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus  $\mathcal{X}$  darstellen.
- (c)  $\mathcal{X}$  ist maximal linear unabhängig, d.h.  $\mathcal{X}$  ist linear unabhängig und für jedes  $x \in X \setminus \mathcal{X}$  ist  $\mathcal{X} \cup \{x\}$  linear abhängig.
- (d)  $\mathcal{X}$  ist ein minimales EZS, d.h. keine echte Teilmenge von  $\mathcal{X}$  ist ein EZS.

### 2.4.7 Bemerkung (Koordinaten)

Besitzt  $x \in X$  bzgl. der Basis  $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$  die nach Satz 2.4.6 (b) eindeutige Darstellung  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$  mit Koeffizienten  $\xi_k \in \mathbb{K}$  so bezeichnet man das  $n$ -tupel  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  also Koordinaten von  $x$  (bzgl.  $\mathcal{X}$ ). Von nun an sei  $X$  endlich erzeugt.

### 2.4.8 Satz

Jedes endliche EZS eines Vektorraumes enthält eine Basis. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte lineare Raum eine Basis.

Beweis: Es sei  $\mathcal{X}$  ein endliches EZS. Ist  $\mathcal{X}$  keine Basis, so kann  $\mathcal{X}$  nicht minimal sein und es existiert eine echte Teilmenge  $\mathcal{X}^1 \subsetneq \mathcal{X}$ , die ebenfalls ein EZS ist. Ist wiederum  $\mathcal{X}^1$  keine Basis, so existiert erneut eine echte Teilmenge  $\mathcal{X}^2 \subsetneq \mathcal{X}^1$ , die  $X$  erzeugt. Durch Iteration erhält man eine echt absteigende Folge von Teilmengen  $\dots \subsetneq \mathcal{X}^2 \subsetneq \mathcal{X}^1 \subsetneq \mathcal{X}$ . Diese Folge bricht nach endlich vielen

schritten ab, da  $\mathcal{X}$  endlich ist, d.h. es gibt ein minimales  $\mathcal{X}^k$ . Dieses  $\mathcal{X}^k$  ist nach Satz 2.4.6 eine Basis von  $X$ .

#### 2.4.9 Proposition

Ist  $X$  endlich erzeugbar und  $\mathcal{S} \subseteq X$  linear unabhängig, so existiert eine Basis von  $X$ , welche  $\mathcal{S}$  als Teilmenge enthält.

#### 2.4.10 Lemma (Austauschsatz von Steinitz)

Ist  $\{x_1, \dots, x_p\}$  linear unabhängig und  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ein EZS von  $X$ , so gilt  $p \leq n$  und nach einer Umnummerierung der  $y_k$  ist  $\{x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n\}$  ein EZS von  $X$ .

#### 2.4.11 Satz (Dimension)

Falls  $X$  eine Basis von  $n$  Elementen besitzt, enthält jede Basis von  $X$  genau  $n$  Elemente. Wir bezeichnen  $n$  als Dimension von  $X$  und schreiben  $n = \dim X$ .

#### 2.4.12 Bemerkung

Ein linearer Raum  $X$  heißt unendlich-dimensional (symbolisch  $\dim X = \infty$ ) falls er kein endlichen EZS besitzt, anderenfalls heißt er endlich-dimensional.

Beweis: Es seien  $\{x_1, \dots, x_n\}$  und auch  $\{y_1, \dots, y_m\}$  Basen von  $X$ . Mit Lemma 2.4.10 folgt dann  $n \leq m$ , wie auch  $m \leq n$ , und somit  $m = n$ .

#### 2.4.13 Beispiel

Für die bislang betrachteten Räume ist  $\dim \mathbb{K}^n = n$ ,  $\dim \mathbb{K}^{m \times n} = m \cdot n$ ,  $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$  und  $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \dim C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dim C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dim F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$ .

#### 2.4.14 Beispiel

Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind ein 2-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und ein 1-dimensionaler Raum über  $\mathbb{C}$ .

#### 2.4.15 Korollar

In linearen Räumen  $X$  mit  $n := \dim X$  gilt:

- (a) Weniger als  $n$  Vektoren aus  $X$  sind kein EZS.
- (b) Mehr als  $n$  Vektoren aus  $X$  sind linear abhängig.
- (c) Jedes EZS mit  $n$  Elementen ist eine Basis.

- (d) Jede linear unabhängige Menge mit  $n$  Elementen ist eine Basis.

Beweis:

- (a) jedes EZS enthält laut Satz 2.4.8 eine Basis. Für jedes aus weniger als  $n$  Vektoren bestehenden EZS gäbe es dann auch eine Basis mit Weniger als  $n$  Elementen. Dies widerspricht Satz 2.4.11.
- (b) Laut Proposition 2.4.9 ist jede linear unabhängige Menge Teil einer Basis. Somit hätte man mit einer linear unabhängigen Familie von mehr als  $n$  Vektoren auch eine Basis mit mehr als  $n$  Elementen - im Widerspruch zu 2.4.11.
- (c) Ein EZS enthält wegen Satz 2.4.8 eine Basis und ist wegen Satz 2.4.11 bereits eine solche.
- (d) Mit Proposition 2.4.9 ist eine linear unabhängige Familie Teilmenge einer Basis und mit Satz 2.4.11 eine Basis.

### 2.4.16 Korollar

Für jeden Unterraum  $Y$  eines endlich-dimensionalen Raumes  $X$  ist  $\dim Y \leq \dim X$ , Gleichheit gilt genau für  $X = Y$ .

## 2.5 Komplemente und direkte Summen

Wieder sei  $X$  ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$ .

### 2.5.1 Definition (direkte Summen)

Es seien  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  Unterräume. Dann heißt  $Y_2$  Komplement von  $Y_1$  in  $X$ , falls gilt  $Y_1 + Y_2 = X$   $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ , man schreibt  $X = y_1 \oplus y_2$  und nennt  $X$  direkte Summe von  $Y_1, Y_2$ .

Beispiele:

$$Y_1 \cap Y_2 \neq 0 \quad Y_1 \oplus Y_2 = \mathbb{R}^3 \quad Y_1 \oplus Y_2 \subsetneq \mathbb{R}^3$$

### 2.5.2 Beispiel

Im Raum  $X = \mathbb{R}^3$  ist die Gerade  $Y_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in X : x_1 = x_2 = x_3 \right\}$  ein Komplement zur Ebene

$$Y_1 := \{x \in X : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

In der Tat liegt  $x \in Y_1 \cap Y_2$ , so erfüllen die Elemente des Durchschnitts

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

und folglich  $x = 0$ , dies bedeutet  $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ . Andererseits liegen  $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  in  $Y_1$  und  $y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  in  $Y_2$ . Da  $\{y_1, y_2, y_3\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3 = X$  bilden, gilt auch  $Y_1 + Y_2 = X$ .

### 2.5.3 Beispiel

Wir betrachten den Unterraum  $Y_1 := \{p \in P(\mathbb{K}) : p(0) = 0\}$  von  $X = P(\mathbb{K})$ . Dann gilt  $P(\mathbb{K}) = Y_1 \oplus P_0(\mathbb{K})$ , d.h. der lineare Raum aller konstanten Polynome ist ein Komplement von  $Y_1$ .

### 2.5.4 Satz

Es seien  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  Unterräume. Es ist  $X = Y_1 \oplus Y_2$  genau dann, wenn es zu jedem  $x \in X$  eindeutige  $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$  mit  $x = y_1 + y_2$  gilt.

Beweis:

( $\Rightarrow$ ) Es sei  $Y_2$  ein Komplement von  $Y_1$  in  $X$ . Wegen  $Y_1 + Y_2 = X$  lässt sich jedes  $x \in X$  darstellen als  $x = y_1 + y_2$  mit  $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ . Um deren Eindeutigkeit zu verifizieren, sein  $\hat{y}_1 \in Y_1, \hat{y}_2 \in X_2$  zwei weitere Vektoren mit  $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ . Dies impliziert  $y_1 - \hat{y}_1 = \hat{y}_2 - y_2$  und  $y_1 - \hat{y}_1 \in Y_1$  für  $i = 1, 2$  und folglich  $y_i - \hat{y}_i \in Y_1 \cap Y_2$  für  $i = 1, 2$ . Wegen  $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$  folgt  $y_1 = \hat{y}_1$  und  $y_2 = \hat{y}_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Umgekehrt seien  $Y_1, Y_2 \subseteq X$  Unterräume derart, dass sich jedes  $x \in X$  eindeutig als Summe  $x = y_1 + y_2$  mit  $y_i \in Y_i, i = 1, 2$ , darstellen lässt. Dann gilt sicherlich  $Y_1 + Y_2 = X$ . Ist nun  $x \in Y_1 \cap Y_2$ , so gilt  $x = x + 0 = 0 + x$  und da die Darstellung eindeutig sein muss, resultiert  $x = 0$ ; also  $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ .

### 2.5.5 Satz

Jeder Unterraum eines endlich dimensionalen linearen Raumes hat ein Komplement.

Beweis(-skizze):

Ergänze eine Basis von  $Y_1$  zu einer Basis von  $X$  gemäß Proposition 2.4.9.

## 2.6 Anwendung: Matrizen und lineare Gleichungen

Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  mit den  $n$  Spalten und den  $m$  Zeilen. Die  $n$  Spalten seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$  und  $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilen von  $A$ . Man bezeichnet den Unterraum  $\text{span}\{a_k\}_{1 \leq k \leq n} \subseteq \mathbb{K}^m$  als Spaltenraum und  $\text{span}\{a^1, \dots, a^m\} \subseteq \mathbb{K}^{1 \times n}$  als Zeilenraum von  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)$$

### 2.6.1 Definition (Rang einer Matrix)

Der Rang ( $\text{rk}A$ ) einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist die Dimension ihres Zeilenraumes.

### 2.6.2 Bemerkung

$$0 \leq \text{rk}A \leq m$$

$$(L_0)Ax = 0$$

### 2.6.3 Proposition

Der Lösungsraum  $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$  von  $(L_0)$  erfüllt  $\dim L_0 = n - \text{rk}A$ .

Beweis:

Wir können o.B.d.A (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  in strenger Zeilen-Stufen-Form ist. Es sei  $r$  die Anzahl der Zeilen von  $A$ , welche mindestens ein Element  $\neq 0$  besitzen - dies ist der Rang von  $A$ . Für  $1 \leq i \leq r$  sei  $j_i$  derjenige Spaltenindex, in welcher das erste Element  $\neq 0$  der  $i$ -ten Zeile steht. Weiter seien  $k_1, \dots, k_{n-r}$  diejenigen Element von  $\{1, \dots, n\}$ , welche nicht in  $\{j_1, \dots, j_r\}$  sind. Dann gilt

$$L_0 = \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : \xi_1, \dots, \xi_{k_{n-r}} \in \mathbb{K} \text{ und } \xi_{j_i} = -\frac{1}{a_{i,j_i}} \sum_{j=1}^{n-r} a_{i,k_j} \xi_{k_j} \text{ für } 1 \leq i \leq r \right\}$$

und  $x_1, \dots, x_{n-r} \in \mathbb{K}^n$  bezeichne die Vektoren in  $L_0$  mit  $\xi_{k_j} = 1$  und  $\xi_{k_i} = 0$  für  $i \neq j$ . Man überlegt sich nun, dass  $\{x_1, \dots, x_{n-r}\}$  eine Basis von  $L_0$  und die Behauptung folgt.

## 3 Lineare Abbildungen

Es seien  $X, Y$  lineare Räume über dem selben Körper  $\mathbb{K}$ .

### 3.1 Grundlagen

#### 3.1.1 Definition (lineare Abbildung)

Eine lineare Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  erfüllt die Eigenschaft

$$(3.1a) \quad T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$$

für alle  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in X$ . Für die Menge aller solchen linearen Abbildungen schreiben wir  $L(X, Y)$ .

Für lineare Abbildungen schreibt man  $Tx := T(x)$ .

#### 3.1.2 Bemerkung

- (1) Für  $T \in L(X, Y)$  ist  $T0 = 0$
- (2) Die Menge  $L(X, Y)$  ist ein Unterraum von  $F(X, Y)$ ; wir kürzen ferner ab  $L(X) := L(X, X)$ . Ist  $Z$  ein weiterer linearer Raum und  $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$ , so ist auch die Komposition  $S \circ T : X \rightarrow Z$  linear.  $(L(X), \circ)$  ist eine Halbgruppe mit neutralem Element  $id_x$ .

#### 3.1.3 Beispiel

Die Nullabbildung  $0 : X \rightarrow Y, 0x := 0 \in Y$  ist linear, wie auch die identische Abbildung  $id_x : X \rightarrow X$  aus Beispiel 1.2.3

#### 3.1.4 Beispiel (affine Abbildungen)

Eine Abbildung von  $S : X \rightarrow Y$  heißt affin, falls es  $T \in L(X, Y)$  und  $y \in Y$  derart gibt, dass  $S(x) = Tx + y$ .  $S$  ist genau dann linear, falls  $y = 0$ .

#### 3.1.5 Beispiel (die Abbildung $T_A$ )

Die wichtigsten linearen Abbildungen dieser Vorlesung sind von der Form  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, T_A x = Ax$  mit  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Auch die Abbildung  $\mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), A \mapsto T_A$  ist linear.

#### 3.1.6 Beispiel

- (1) Es sei  $\Omega \neq \emptyset$  eine Menge und  $x \in \Omega$ . Dann ist die Auswertung  $ev_x : F(\Omega, X) \rightarrow X, ev_x(u) := u(x)$  linear.

- (2) Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann ist die Differenziation  $D : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ ,  $Du := u'$  linear.
- (3) Mit einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , den fixen  $t_0 \in I$  und reellen Zahlen  $a < b$  definieren auch nachfolgende Integrale lineare Abbildungen:

$$T_1 : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad T_{1,u} := \int_a^b u(s) ds$$

$$T_2 : C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(I, \mathbb{R}), \quad (T_{2,u})(t) := \int_{t_0}^t u(s) ds$$

### 3.1.7 Beispiel (Vorwärts-Shift)

Es sei  $X$  ein linearer Raum und  $\mathbb{I} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ . Bezeichnet dann  $l(\mathbb{I})$  den linearen Raum aller Folgen  $F(\mathbb{I}, X)$ , so ist der durch  $(S\phi)_k := \phi_{k+1}$  definierte Vorwärts-Shift eine Abbildung  $S \in L(l(\mathbb{I}))$ .

### 3.1.8 Definition (Kern, Bild, Rang)

Ist  $T \in L(X, Y)$ , so bezeichnet  $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$  den Kern,  $R(T) := TX$  das Bild und  $\text{rk} T := \dim R(T)$  den Rang von  $T$ . Eine Verbindung des Begriffes „Rang einer Matrix“ (Def. 2.6.1) und Def 3.1.8 und in Satz 3.3.8 hergestellt.

### 3.1.9 Proposition

Für jedes  $T \in L(X, Y)$  ist der Kern  $N(T)$  ein Unterraum von  $X$ .

Beweis: Übungsaufgabe.

### 3.1.10 Satz

Für jedes  $T \in L(X, Y)$  gilt:

- (a)  $T$  ist genau dann injektiv, wenn  $N(T) = \{0\}$
- (b)  $T$  ist genau dann surjektiv, wenn  $R(T) = Y$

Beweis:

- (a) Die Abbildung  $T$  ist genau dann nicht injektiv, wenn es  $y \in Y$  und  $x_1, x_2 \in X$  derart gibt, dass  $x_1 \neq x_2$  und  $Tx_1 = y = Tx_2$ . Dies ist äquivalent zu  $T(x_1 - x_2) = 0$ , also  $0 \neq x_1 - x_2 \in N(T)$
- (b) ist genau die Definition von Surjektivität.

### 3.1.11 Beispiel

- (1) Die Auswertung  $ev_x : F(\Omega, X) \rightarrow X$  aus Beispiel 3.1.6 (1) hat den Kern  $N(ev_x) := \{m \in F(\Omega, X) : u(x) = 0\}$  und das Bild  $R(ev_x) = X$ , ein Urbild zu einem beliebigen  $y \in X$  ist gerade die konstante  $u(x) \equiv y$  auf  $\Omega$ .
- (2) Für die Nullabbildung  $0 \in L(X, Y)$  ist  $N(0) = X$  und  $R(0) = \{0\}$ , für  $X \neq \{0\}$  ist  $0$  nicht injektiv. Für  $Y \neq \{0\}$  ist  $0$  nicht surjektiv.
- (3) Mit einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist  $T_A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  aus Beispiel 3.1.5 genau dann
  - injektiv, wenn die linear homogene Gleichung  $(L_0)$  nur die triviale Lösung hat.
  - surjektiv, wenn es für jede Inhomogenität  $b \in \mathbb{K}^m$  mindestens eine Lösung  $x \in \mathbb{K}^n$  von  $(L_b)$  gibt.
- (4) Bei der Differenziation  $D : C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$  aus Beispiel 3.1.6 (2) besteht der Kern  $N(D)$  aus allen konstanten Funktionen. Für das Bild  $R(D)$  erhalten wir dagegen  $C([a, b], \mathbb{R})$ , denn für ein beliebiges  $v \in C([a, b], \mathbb{R})$  gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung  $Du = v$  mit  $u(t) := v(a) + \int_a^t v(s)ds$ . Damit ist  $D$  nicht injektiv, aber surjektiv.

### 3.1.12 Satz (Dimensionssatz)

Für jede  $T \in L(X, Y)$  mit  $\dim X = \infty$  gilt  $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim X$ .

Beweis: Es sei  $\{x_1, \dots, x_m\}$  eine Basis von  $N(T)$  und  $\{y_1, \dots, y_n\}$  eine Basis von  $R(T)$ . Wir wählen  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n \in X$  damit, dass  $T\hat{x}_i = y_i, 1 \leq i \leq n$  gilt und weisen nach, dass  $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_m, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$  eine Basis von  $X$  ist.

(i)  $\mathcal{X}$  ist linear unabhängig:  $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim X$

(ii)  $\mathcal{X}$  ist ein EZS:  $\dim m + \dim n = \dim X$

### 3.1.13 Korollar

Sei  $T \in L(X, Y)$  ist  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis von  $N(T)$  und  $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_d\}$  eine Basis von  $X$  mit  $n < d$ . Das Bild  $R(T)$  hat folgende Basis:

$$\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$$

Beweis: Sei  $d = \dim X, n = \dim N(T)$ . Nach Satz 3.1.12 gilt:  $\dim R(T) = d - n$ . Wir suchen  $d - n$  linear unabhängige Vektoren in  $R(T)$ . Die Vektoren  $\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$  sind  $d - n$  Vektoren in  $R(T)$ . Wir zeigen, dass diese linear unabhängig sind. Hierzu gehen wir indirekt vor. Wir nehmen an, dass  $\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$  linear abhängig sind.

$\Rightarrow$  Es existiert ein Index  $j^*, n < j^* \leq d$ , so dass  $Tx_{j^*} = \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq j^*}}^d \eta_j Tx_j$ . Das heißt  $\sum_{j=n+1}^d \eta_j Tx_j = 0$



mit  $\eta_j^* = -1 \otimes \otimes$ . Aus der Linearität von  $T$  folgt:  $T(\sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j) = 0$ , d.h.  $\sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j \in N(T)$ . Weil  $\{x_1, \dots, x_n\}$  Basis von  $N(T)$  ist gilt:  $\sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j = \sum_{j=1}^n \eta_j x_j$  für geeignete  $n_1, \dots, n_n \in \mathbb{K}$ , also:  $\sum_{j=1}^n \eta_j x_j - \sum_{j=n+1}^d \eta_j x_j = 0 \otimes$ . Weil nach Voraussetzung  $x_1, \dots, x_d$  Basis von  $X$  ist, folgt aus  $\otimes$ , dass  $\eta_j = 0 \forall 1 \leq j \leq d$  (Definition der linearen Unabhängigkeit). Das ist ein Widerspruch zu  $\otimes \otimes$ . Das heißt  $\{Tx_{n+1}, \dots, Tx_d\}$  sind linear unabhängig.

### 3.1.14 Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung)

Sei  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ein Basis von  $X$  und  $\{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n\} \in Y$ .

- (a) Sind  $T, S \in L(X, Y)$  zwei linearen Abbildungen mit  $Tx_i = Sx_i \forall 1 \leq i \leq n$ . Dann gilt  $T = S$
- (b) Es existiert genau eine lineare Abbildung  $T \in L(X, Y)$  mit  $Tx_i = \hat{y}_i, \forall 1 \leq i \leq n$

### 3.1.15 Bemerkung

Für gegebenes  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k, \xi_k \in \mathbb{K} \forall 1 \leq k \leq n$ , gilt  $Tx = T(\sum_{k=1}^n \xi_k x_k) \stackrel{3.1a}{=} \sum_{k=1}^n \xi_k Tx_k$ . Kenntnis der Koeffizienten  $\xi_k$  und der Werte  $Tx_i, 1 \leq i \leq n$  erlaubt uns den Wert von  $Tx$  zu bestimmen.

Beweis (Satz 3.1.14):

- (a) Sei  $Tx_i = Sx_i; \forall 1 \leq i \leq n$ . Sei  $x \in X$  mit  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i, 1 \leq i \leq n \xi_i \in \mathbb{K}$ .

$$Tx = \sum_{i=1}^n \xi_i Tx_i = \sum_{i=1}^n \xi_i Sx_i = S(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i) = Sx$$

- (b) Wir definieren  $T$  wie folgt. Der Vektor  $x$  habe die Darstellung  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \xi_i \in \mathbb{K}$ . Wir definieren  $Tx := \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{y}_i$ . Dann gilt  $Tx_j = \sum_{i=1}^n \xi_{i,j} \hat{y}_i = \hat{y}_j$ . Zeige noch:  $T$  ist linear. Sei  $z \in X$  dargestellt als  $z = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

zeige:  $T(x+z) = T(x) + T(z)$  und  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

$$T(x+z) = T(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i) = T(\sum_{i=1}^n (\xi_i + \beta_i) x_i) \stackrel{def.}{=} \sum_{i=1}^n (\xi_i + \beta_i) \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \hat{y}_i = Tx + Tz$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx \text{ analog}$$

## 3.2 Isomorphismen

### 3.2.1 Definition

Eine bijektive Abbildung  $T \in L(X, Y)$  heißt Isomorphismus, und wir definieren  $GL(X, Y) = \{T \in L(X, Y) : T \text{ bijektiv}\}$ . Lineare Räume  $X, Y$  werden als isomorph bezeichnet, wenn es einen Isomorphismus  $T \in L(X, Y)$  gibt. Schreibweise:  $X \cong Y$ .

### 3.2.2 Bemerkung

- (a) Wenn  $Z$  ein weiterer  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist, und  $T \in GL(X, Y)$  und  $S \in GL(Y, Z)$ , dann ist  $S \circ T \in GL(X, Z)$ . bildlich:  $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ . Wir schreiben  $GL(X)$  für  $GL(X, X)$ . Mit neutralem Element  $\text{id}_x$  wird  $GL(X)$  zu einer Gruppe, der sogenannten General Linear Group. Achtung:  $GL(X)$  ist kein Untervektorraum von  $L(X)$ !
- (b) Durch  $A = \{(X, Y) : X \text{ und } Y \text{ sind Isomorph}\}$  wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller linearen Räume erklärt.

### 3.2.3 Beispiel (Transponierte)

Die Abbildung  $\circ^T : K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \mapsto A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

(Zeilen und Spalten vertauschen!)

ist ein Isomorphismus. Es gilt das Inverse des Transponieren ist das Transponieren selbst, d.h.  $((A^T)^T)^T = A$  (für  $n = m$ ). Damit ist der Raum der  $n$ -Spalten isomorph zum Raum der  $n$ -Zeilen.

### 3.2.4 Beispiel (Polynome)

- (1) Sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $P_n(\mathbb{K})$  die Polynome von maximalem Grad  $n \in \mathbb{N}_0$ .  $P_n(\mathbb{K})$  ist isomorph zu  $\mathbb{K}^{n+1}$  via den Isomorphismus  $T : P_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ ,  $p \mapsto (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ , wobei  $p(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$ . Zum Beispiel:  $p(t) = t^2 + t \mapsto (0, 1, 1, 0, \dots, 0)$ .
- (2)  $l_{0,0} = \{(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \exists n_0 \forall n \geq n_0 \alpha_n = 0\}$  bezeichnet die Menge aller Folgen, die schließlich 0 sind.  
 $l_{0,0}$  ist Isomorph zum Raum der Polynome  $P(\mathbb{K})$  via den Isomorphismus  $T : CP(\mathbb{K}) \rightarrow l_{0,0}$ ;  
 $p \mapsto (\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0, \dots) : p = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$

### 3.2.5 Lemma

Für  $T \in L(X, Y)$  ist mit  $\mathcal{S} \subseteq X$  auch  $T\mathcal{S}$  linear abhängig (in  $Y$ ).

### 3.2.6 Satz

Es sei  $T \in GL(X, Y)$ . Eine Menge  $\mathcal{S} \subseteq X$  ist genau dann linear abhängig, wenn  $T\mathcal{S} \subseteq Y$  linear abhängig ist.

### 3.2.7 Bemerkung

Als logische Kontraposition erhalten wir, dass Isomorphismen linear unabhängige Mengen (oder Basen) auf ebensolche abbilden.

Beweis:

- ( $\Rightarrow$ ) Folgt aus Lemma 3.2.5
- ( $\Leftarrow$ ) Nun sei  $T\mathcal{S} \subseteq Y$  linear abhängig. Wegen  $T \in GL(X, Y)$  ist auch  $T^{-1}(T\mathcal{S})$  nach Lemma 3.2.5 linear abhängig.

### 3.2.8 Proposition

Jeder  $n$ -dimensionale lineare Raum ist isomorph zu  $\mathbb{K}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Beweis: Es sei  $X$  ein linearer Raum mit  $m := \dim X$  und der Basis  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Wir definieren

$$T : \mathbb{K}^n \rightarrow X, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n \xi_k x_k. \text{ Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von } \mathcal{X} \text{ ist } N(T) = \{0\},$$

nach Satz 2.1.10(a) ist  $T$  dann injektiv. Da  $\mathcal{X}$  ein EZS ist, muss  $T$  auch surjektiv sein.

### 3.2.9 Satz

Endlich dimensionale lineare Räume  $X, Y$  sind genau dann isomorph, wenn  $\dim X = \dim Y$ .

Beweis

- ( $\Leftarrow$ ) Es sei  $n := \dim X = \dim Y$ . Nach Proposition 3.2.8 existieren Isomorphismen  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\Psi : Y \rightarrow \mathbb{K}^n$ , womit  $\Psi^{-1} \circ \Phi \in GL(X, Y)$  ein Isomorphismus ist.
- ( $\Rightarrow$ ) Sei  $T \in GL(X, Y)$ ,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dann ist  $y_i := Tx_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  nach Satz 3.2.6 Basis von  $Y$ .

### 3.2.10 Satz

Für jedes  $T \in L(X, Y)$  zwischen linearen Räumen  $X, Y$  mit  $\dim X = \dim Y$  sind äquivalent:

- (a)  $T$  ist ein Isomorphismus (d.h.  $T \in GL(X, Y)$ )
- (b)  $T$  ist injektiv
- (c)  $T$  ist surjektiv

Beweis: Es ist nachzuweisen, dass Surjektivität und Injektivität äquivalent sind. Es sei  $T \in L(X, Y)$  injektiv. Wegen Satz 3.1.10(a) ist dies äquivalent zu  $N(T) = \{0\}$ . Mit dem Dimensionssatz 3.1.12 ist dann  $\dim R(T) = \dim X - \dim N(T) = \dim Y$  und  $T$  ist genau dann injektiv, wenn  $\dim R(T) = \dim Y$ , d.h.  $R(T) = Y$  gilt. Aufgrund von Satz 3.1.10(b) folgt die Behauptung.

### 3.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

$X, Y$  lineare Räume,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\mathcal{Y} := \{y_1, \dots, y_m\}$ . Wir folgen aus Satz 3.1.14, dass eine lineare Abbildung  $T \in L(X, Y)$  durch die Bilder  $Tx_i$  der Basisvektoren von  $X$  bestimmt ist. Sind etwa:

$$(3.3a) \quad Tx_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} y_j \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

und  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$  mit  $Tx = \sum_{i=1}^n \eta_i y_i$ , so resultiert  $Tx = T(\sum_{k=1}^n \xi_k x_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k Tx_k \stackrel{3.3a}{=} \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^m a_{k,j} y_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{k,j} \xi_k) y_j$ . Für die Koordinaten  $\eta_i, \dots, \eta_m \in \mathbb{K}$  von  $Tx$  bzgl.  $\mathcal{Y}$  erhalten wir:

$$(3.3b) \quad \eta_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \xi_k \quad \text{für } 1 \leq i \leq m$$

#### 3.3.1 Satz (darstellende Matrix)

Jedes  $T \in L(X, Y)$  wird eindeutig durch eine Matrix  $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  beschreiben, in deren  $k$ -ter Spalte gerade die Koordinaten von  $Tx_k$  bzgl. der Basis  $\mathcal{Y}$  stehen. Man nennt  $T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$  die  $T$  darstellende Matrix in den Basen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ ; im Fall  $X = Y$  und  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  schreiben wir  $T_{\mathcal{X}} := T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$ .

#### 3.3.2 Bemerkung

Wir versehen  $X = \mathbb{K}^n$  und  $Y = \mathbb{K}^m$  mit Standardbasen  $\mathcal{E}_n$  bzw.  $\mathcal{E}_m$  aus Beispiel 2.4.3. Für jede Abbildung  $T \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  mit darstellender Matrix

$$T_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} \text{ gilt dann } T = T_{T_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}} \text{ (Erinnerung } T_A x = Ax)$$

#### 3.3.3 Beispiel (Polynome)

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $X = P_n(\mathbb{R})$  ausgestattet mit der monomialen Basis  $\mathcal{M}_n := \{m_0, \dots, m_n\}$  aus Beispiel 2.4.4. Als lineare Abbildung betrachten wir die Ableitung  $D : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$  mit den Bildern

$$D_{m_0} = 0, \quad D_{m_k} = k m_{k-1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und erhalten aus Satz 3.3.1 die darstellende Matrix

$$D_{\mathcal{M}_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.3.4 Proposition

Zu jedem  $A \in K^{m \times n}$  gibt es ein  $T \in L(X, Y)$  mit  $A = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ .

Beweis: Es sei  $A \in K^{m \times n}$ . Zu beliebigen  $x \in X$  finden wir  $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$  mit  $x = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k$ . Die gesuchte Abbildung  $T \in L(X, Y)$  ist dann

$$Tx := \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \xi_j \right) y_i$$

### 3.3.5 Korollar

Für endlich dimensionale Räume  $X, Y$  sind  $L(X, Y)$  und  $K^{\dim Y \times \dim X}$  isomorph. Insbesondere ist  $\dim L(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y$ .

Beweis: Es sei  $m = \dim Y, n = \dim X$ . Wir verwenden die lineare Abbildung  $\Phi : L(X, Y) \rightarrow K^{\dim Y \times \dim X}, \Phi(T) = T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$  die in Proposition 3.3.4 konstruiert wurde.

### 3.3.6 Satz

Es sei  $Z$  ein weiterer linearer Raum mit Basis  $\mathcal{Z}$ . Für  $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$  ist

$$(S \circ T)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}} = S_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}} T_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$$

### 3.3.7 Bemerkung

Für  $A \in K^{l \times m}, B \in K^{m \times n}$  gilt

$$(3.3c) \quad T_A \circ T_b = T_{AB}$$

### 3.3.2 Die Abbildung $T_A$

In diesem Abschnitt sei  $A \in K^{m \times n}$  und  $T_A \in L(K^n, K^m)$  mit  $T_A x := Ax$ .

### 3.3.8 Satz

Die Ränge von  $A \in K^{m \times n}$  und  $T_A \in L(K^n, K^m)$  stimmen überein:  $\text{rk} T_A = \text{rk} A$ .

### 3.3.9 Bemerkung

Mit den Spalten  $a_1, \dots, a_n \in K^m$  von  $A$  gilt  $R(T_A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ , weshalb insbesondere  $R(T_A)$  und der Spaltenraum von  $A$  gleiche Dimension haben. Andererseits war  $\text{rk} A$  nach Def. 2.6.1 die Dimension des Zeilenraumes von  $A$ . Daher wird Satz 3.3.8 auch formuliert als: „Spaltenrang=Zeilenrang“.

Beweis: Zunächst merken wir an, dass  $N(T_A)$  mit dem Lösungsraum  $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$  einer homogenen Gleichung ( $L_0$ ) übereinstimmt. Nach Proposition 2.6.3 gilt also  $\dim N(T) = n - \text{rk} A$ . Andererseits liefert der Dimensionssatz 3.1.12, dass  $n = \dim N(T_A) + \dim N(T_A) = \dim N(T_A) + \text{rk} T_A$  und folglich  $\text{rk} T_A = \text{rk} A$ .

Nun sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  quadratisch mit  $\text{rk} A = n$ . Dies ist mit Satz 3.2.10 äquivalent dazu, dass  $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$  ein Isomorphismus ist. Wir interessieren uns nun für die simultane Lösbarkeit von  $Ax = e_i$  für alle  $i \leq n$  welche wir mittels der augmentierten Matrix  $(A, e_1, \dots, e_n) = (A, I_n) \in \mathbb{K}^{n \times (2n)}$  notieren. Vermöge des Gauß-Verfahrens lässt sich  $(A, I_n)$  auf die Form  $(I_n, B)$  mit einem  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  bringen; nach Konstruktion ist  $A \cdot B = I_n$ .

### 3.3.10 Definition (inverse Matrix)

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt invertierbar, falls ein  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit der Eigenschaft  $A \cdot B = I_n$  existiert. Man nennt  $B$  die Inverse von  $A$  und schreibt  $A^{-1} := B$ .

### 3.3.11 Beispiel

Wir wollen die Matrix  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  invertieren. Nach obigen Schema

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

und erhalten  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Eine testweise Multiplikation ergibt  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$ .

### 3.3.12 Korollar

Die inverse Matrix  $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times m}$  ist eindeutig bestimmt mit  $A^{-1}A = I_n$ . Ferner ist  $A$  genau dann invertierbar, wenn  $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$  ist.

### 3.3.13 Definition (regulär, singular)

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt regulär, falls  $\text{rk} A = n$  gilt, andernfalls nennen wir sie singular.

**3.3.14 Satz (Charakterisierung regulärer Matrizen)**

Folgende Aussagen sind äquivalent für jedes  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- (a)  $T_A \in GL(\mathbb{K}^n)$
- (b)  $A$  ist regulär
- (c) Die Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig
- (d) Die Spalten von  $A$  sind linear unabhängig
- (e) Die homogene Gleichung  $(L_0)$  hat nur die triviale Lösung
- (f) Für jedes  $b \in \mathbb{K}^n$  ist  $(L_0)$  eindeutig lösbar.

Beweis: Die Äquivalenz von (b) und (c) ist Definition 3.3.13. Aufgrund von Satz 3.3.8 und Bemerkung 3.3.9 sind auch (c) und (d) gleichwertig.

(d)  $\Rightarrow$  (e) resultiert aus Definition 2.3.6 der linearen Unabhängigkeit.

(e)  $\Rightarrow$  (f) ergibt sich aus Satz 1.4.9(a).

(f)  $\Rightarrow$  (a) Nach unserer Voraussetzung (f) ist  $T_A^{-1}(\{b\})$  für jedes  $b \in \mathbb{K}^n$  einpunktig. Also ist  $T_A \in L(\mathbb{K}^n)$  bijektiv.

(a)  $\Rightarrow$  (b) Übung!

Zum Abschluss des Unterabschnittes beschäftigen wir uns mit linear inhomogenen Gleichungen: Ihre augmentierte Koeffizientenmatrix  $(A, b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$  definieren wir durch

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

**3.3.15 Satz**

Es sei  $b \in \mathbb{K}^m$ . Eine inhomogene Gleichung  $(L_b)$  hat genau dann eine Lösung, wenn gilt

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A, b)$$

Beweis: Übungsaufgabe.

**3.3.3 Basiswechsel**

Auf einem endlich dimensionalen Raum  $X$  seien die Basen  $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$  und  $\mathcal{X}' := \{x'_1, \dots, x'_n\}$  gegeben. Wie verhält sich die Darstellungsmatrix von  $T \in L(X)$  wenn man von  $\mathcal{X}$  auf die Basis  $\mathcal{X}'$  übergeht?

- Zunächst lassen sich die Elemente von  $\mathcal{X}'$  darstellen durch die Elemente von  $\mathcal{X}$

$$(3.3e) \quad X'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} x_i \text{ für alle } 1 \leq j \leq n$$

Hieraus wird die sogenannte Basiswechselmatrix  $S = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  gebildet, welche den Übergang von  $\mathcal{X}$  nach  $\mathcal{X}'$  liefert:

Spalten von  $S$  = Koordinatenvektoren der „neuen“ Basisvektoren

- Umgekehrt lassen sich die  $x_j$  durch die  $x'_i$  ausdrücken. Aus  $x_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} x'_i$  erhalten wir  $x_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} (\sum_{k=1}^n s_{ki} x_k) = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n s_{ki} s_{ij}) x_k$ . Der Ausdruck in der letzten Klammer ist genau das  $(k, j)$ -te Element von  $SS'$ . Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\mathcal{X}$  folgern wir, dass  $SS' = I_n$  und somit  $S' = S^{-1}$  sein muss. Schließlich definiert man auch jede invertierbare Matrix  $S$  einen Basiswechsel gemäß (3.3e) bzw.  $x'_j = Sx_j$ .

### 3.3.16 Satz

Ist  $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Basiswechselmatrix zwischen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{X}'$ , so gilt  $T_{\mathcal{X}'} = S^{-1} T_{\mathcal{X}} S$ , für alle  $T \in L(X)$ .