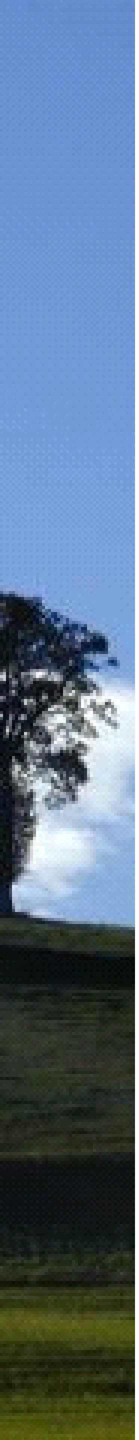
Bildverarbeitung

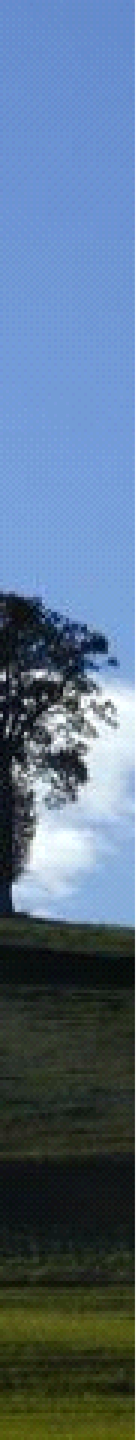
Herbstsemester 2012

Filter



Inhalt

- **Lineare und nichtlineare Filter**
- **Glättungsfilter (z.B. Gauss-Filter)**
- **Differenzfilter (z.B. Laplace-Filter)**
- **Lineare Faltung**
- **Separierbare Filter (z.B. Prewitt-Filter)**
- **Impulsfunktion und Impulsantwort**
- **Median-Filter**
- **Implementierung von Filtern**



Lernziele

- **Sie wissen was ein Filter ist und verstehen die Einteilung in lineare und nichtlineare Filter.**
- **Sie begreifen Filter als eine lokale Bildoperation im Gegensatz zu den Punktoperationen.**
- **Sie kennen den Begriff der Impulsfunktion und können damit rechnerisch umgehen.**
- **Sie können einfache, bekannte Filteraufgaben selber effizient implementieren.**

Was ist ein Filter?

- **Lokale Operation**
  - **Einbezug von mehreren Bildelementen (Pixels) aus der Region**
- **Geometrie des Bildes ändert sich nicht**

Beispiel: Glättung eines Bildes (1)

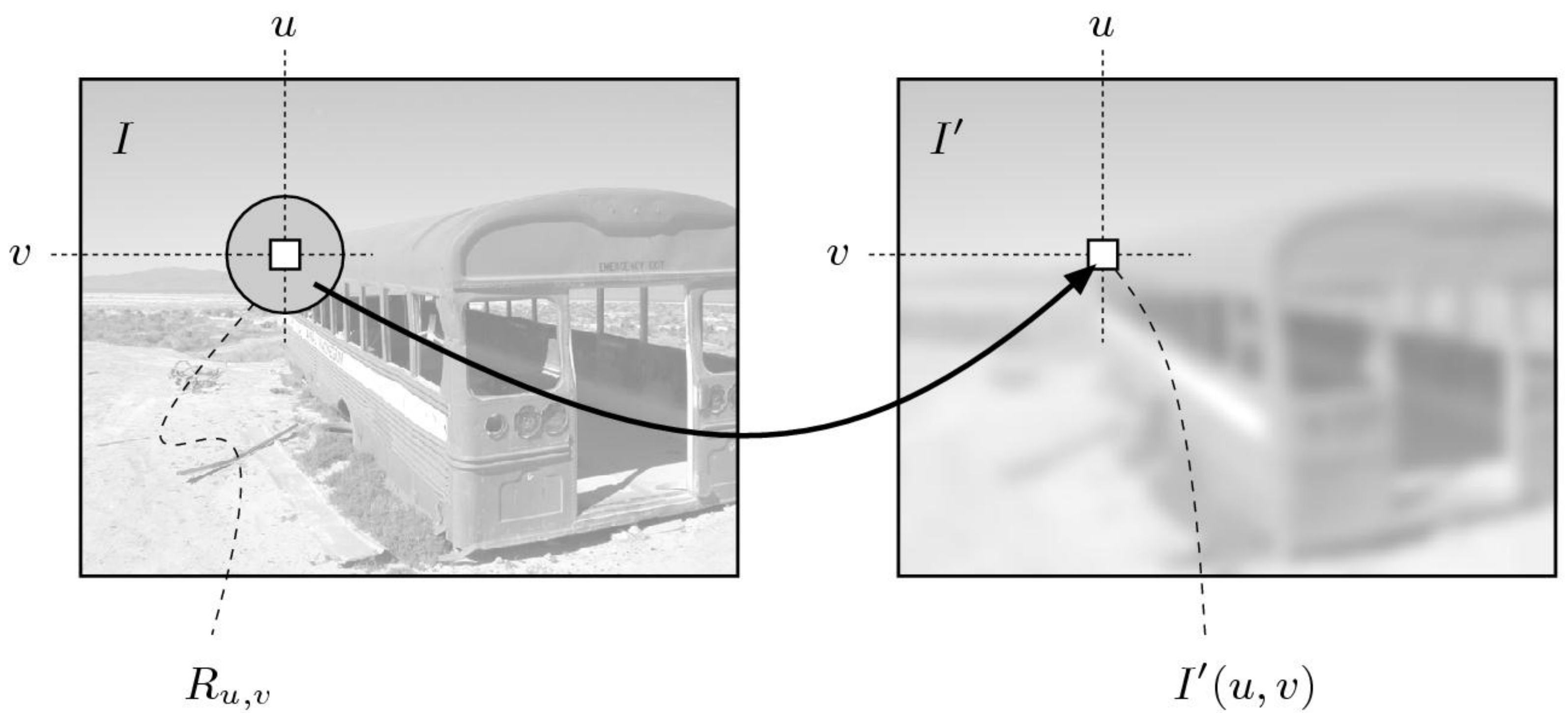
- **Bilder sehen scharf aus**
  - **wo die Intensität lokal stark ansteigt oder abfällt**
  - **grosse Unterschiede zu benachbarten Pixeln**
- **Bildstellen sehen unscharf aus**
  - **wenn die Helligkeitsfunktion glatt ist**

- **Ansatz für ein Glättungsfilter (Box-Filter)**

$$I'(u,v) \leftarrow \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8}{9}$$

$$\begin{aligned} I'(u,v) \leftarrow \tfrac{1}{9} \; [\; & I(u-1,v-1) + I(u,v-1) + I(u+1,v-1) + \\ & I(u-1,v) \quad\;\; + I(u,v) \quad\;\; + I(u+1,v) \quad\;\; + \\ & I(u-1,v+1) + I(u,v+1) + I(u+1,v+1) \;] \end{aligned}$$

Beispiel: Glättung eines Bildes (2)



$$I'(u,v) \leftarrow \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} I(u+i, v+j)$$

Eigenschaften von Filtern

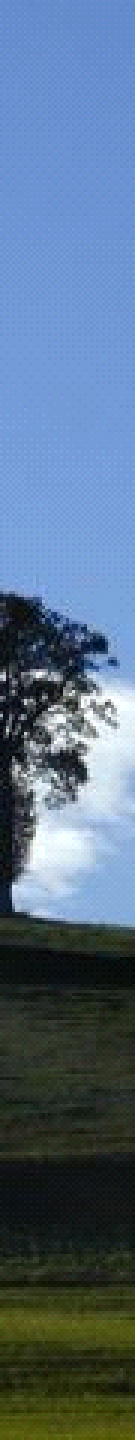
- **Grösse der Filterregion**
- **Form der Filterregion**
  - **muss nicht quadratisch sein (scheibenförmig ist oft besser)**
  - **muss nicht zusammenhängend sein**
  - **muss den Zielpixel nicht enthalten**
- **Gewichtung**
  - **nicht alle Pixel der Region müssen mit der gleichen Gewichtung in die Rechnung einbezogen werden**

→ Systematische Einteilung von Filtern gefragt

- **Lineare Filter**

  Pixel der Region werden mit linearem Ausdruck verknüpft
- **Nichtlineare Filter**

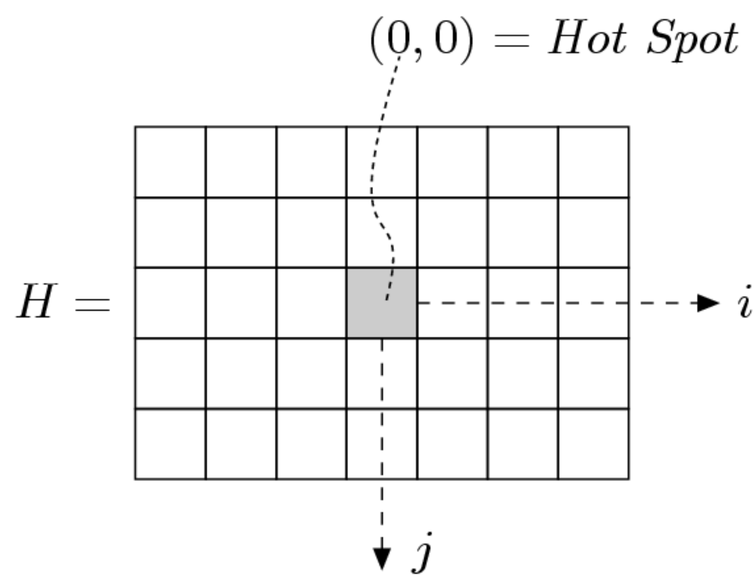
  Pixel der Region werden mit nichtlinearem Ausdruck verknüpft



Lineare Filter

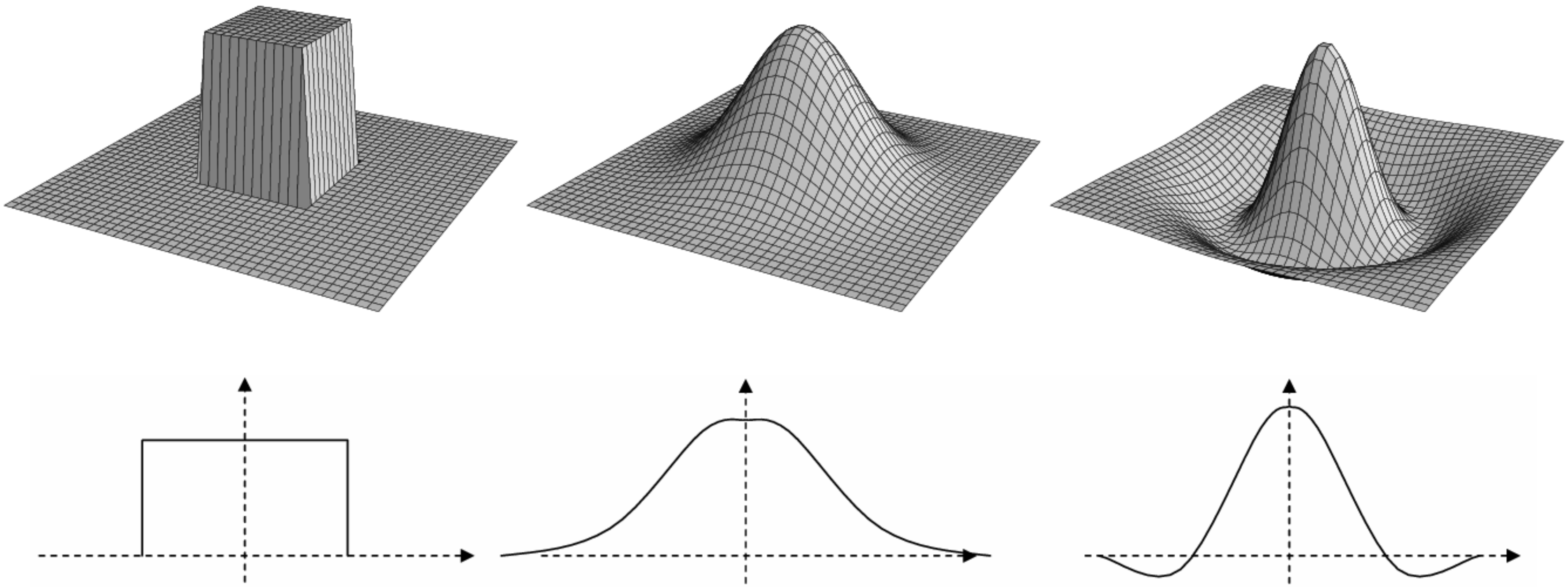
- **Pixel werden durch gewichtete Summation verknüpft**
  - **Beispiel: Glättungsfilter im vorangegangenen Beispiel**
- **Filtermatrix (Filtermaske) *H***
  - **bestimmt Grösse, Form, Gewichte der Filterregion**
  - **Hot Spot: Koordinatenursprung der Filtermatrix**

$$H(i,j) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$



- **Applet 1**, **Applet 2**

Typische lineare Filter

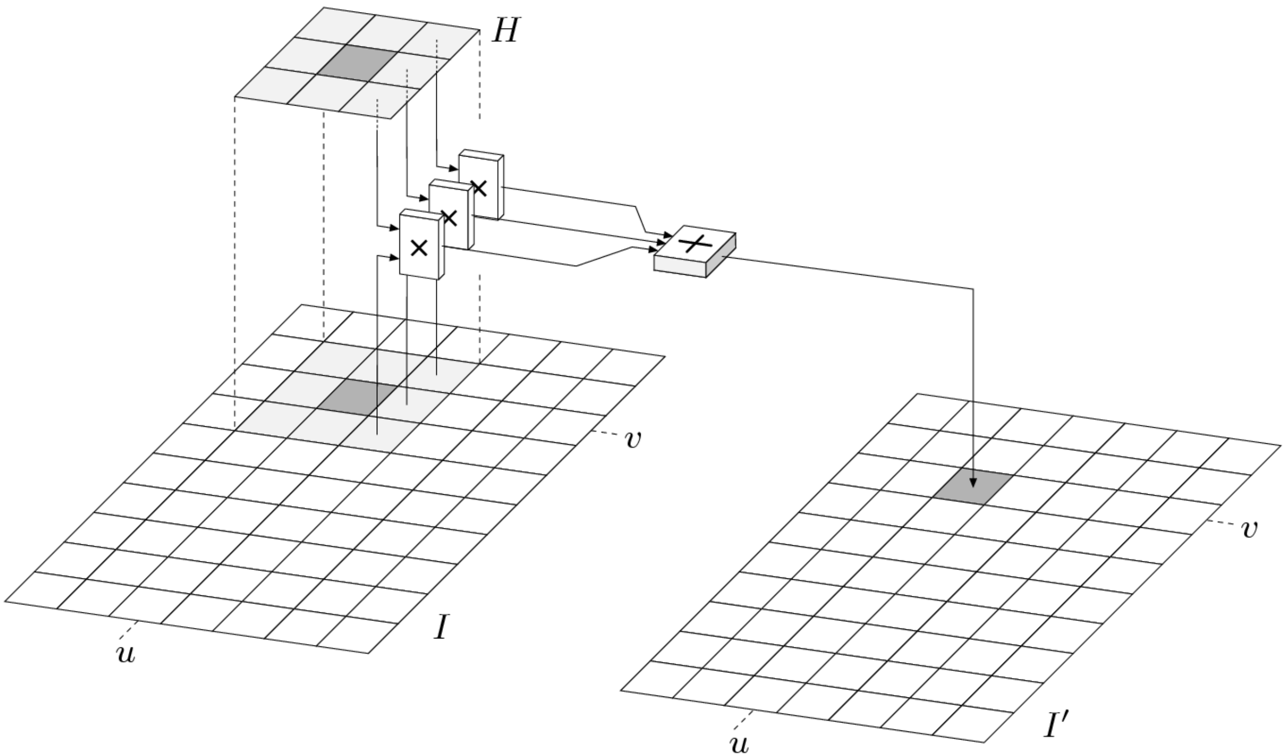


0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

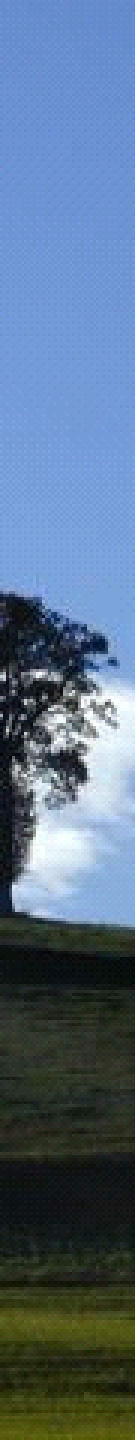
0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

Anwendung des Filters



$$I'(u,v) \leftarrow \sum_{(i,j)\in R} I(u+i, v+j) \cdot H(i,j)$$



Gauss-Filter

- **diskrete, zweidimensionale Gauss-Funktion**

$$G_\sigma(r) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad\qquad G_\sigma(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

- **Glättungsfilter (Tiefpassfilter)**
  - **weil alle Filterkoeffizienten positiv sind**
  - **annähernd isotrop ab Filtergrössen von 5 x 5**
    (nach allen Richtungen hin gleichförmig arbeiten)
  - **gutmütiges Frequenzverhalten (stetig, differenzierbar)**

Laplace-Filter

- **Interpretation als Differenz von zwei Summen**

$$I'(u,v) = \sum_{(i,j)\in R^+} I(u+i, v+j) \cdot |H(i,j)| - \sum_{(i,j)\in R^-} I(u+i, v+j) \cdot |H(i,j)|$$

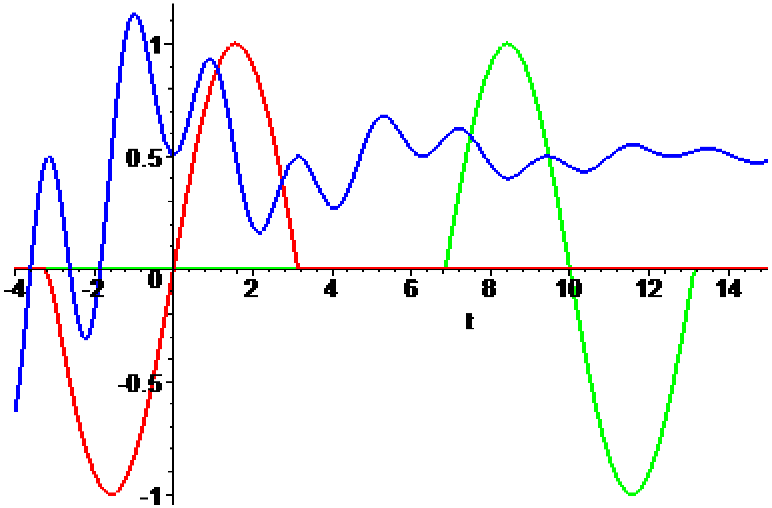
  - ***R*$^+$: Teil der Filterregion mit positiven Koeffizienten**
  - ***R*$^-$: Teil der Filterregion mit negativen Koeffizienten**
- **Verstärken von Kanten und Konturen**
  - **örtliche Intensitätsunterschiede werden verstärkt**
  - **richtungsunabhängige Detektion von Kanten**
  - **Hochpassfilter**

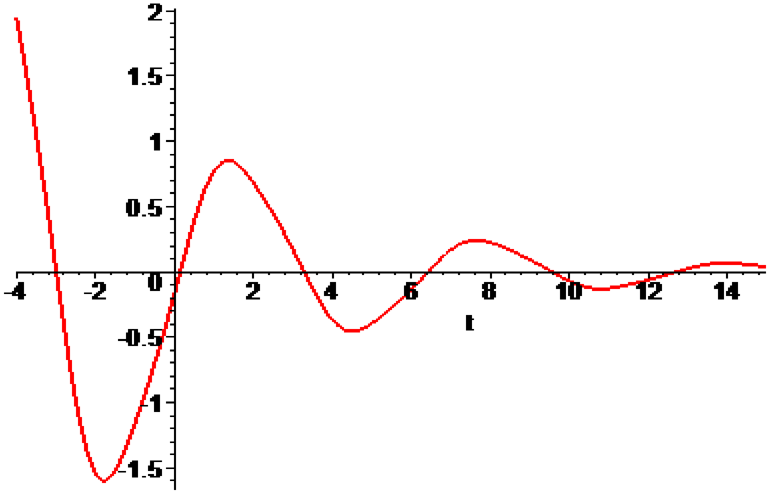
Faltung

- **Definition**
  - ***f*, *g* : D → R**
  - **(*f* ∗ g) ist das Integral über dem Produkt von *f* mit einer gespiegelten und verschobenen Version von *g***

$$\big(f(t) * g(t)\big) = \int_D f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

- **Beispiel**





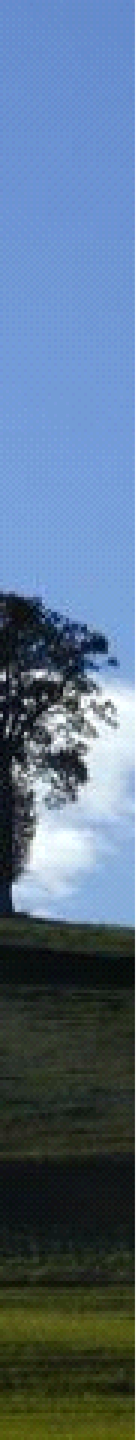
Diskrete Faltung

- **Linear Convolution**

$$I'(u,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot H(i,j)$$

$$\boxed{I' = I * H}$$

$$\begin{aligned} I'(u,v) &= \sum_{(i,j)\in R} I(u-i, v-j) \cdot H(i,j) \\ &= \sum_{(i,j)\in R} I(u+i, v+j) \cdot H(-i,-j) \end{aligned}$$



Eigenschaften der Faltung

- **Kommutativität**

$$I * H = H * I$$

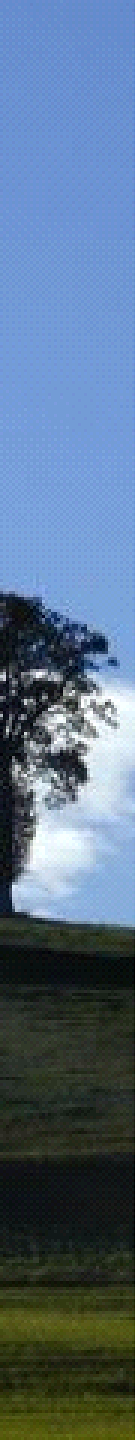
- **Linearität**

$$(a \cdot I) * H \quad = \quad I * (a \cdot H) \quad = \quad a \cdot (I * H)$$

$$(I_1 + I_2) * H \quad = \quad (I_1 * H) + (I_2 * H)$$

- **Assoziativität**

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$



Separierbarkeit von Filtern

- **direkte Folge der Assoziativität**

$$I * H = I * (H_1 * H_2 * \ldots * H_n) = (\ldots((I * H_1) * H_2) * \ldots * H_n)$$

- **x/y-Separierbarkeit**

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \underline{1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_y = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I' \leftarrow (I * H_x) * H_y = I * \underbrace{(H_x * H_y)}_{H_{xy}}$$

Beispiel: Prewitt-Filter

$$H_x^P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_y^P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_x^P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_y^P = \begin{bmatrix} 1 \; 1 \; 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Impulsfunktion (1-D)

- **Impulsfunktion (Dirac-Funktion): $\delta(t - t_0)$**
  - **Grenzfall ($\tau \rightarrow 0$) eines Rechteckimpulses der Breite τ und der Höhe $1/\tau$ an der Stelle $t = t_0$**
  - **Fläche ist gleich 1**
  - **$\delta(t - t_0)$ ist die Ableitung der Heaviside-Funktion (Schrittfunktion) $h(t - t_0)$**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$$

- **wichtige Eigenschaft (Abtasteigenschaft)**

$$\int_{a}^{b} f(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = \begin{cases} f(t_0), \text{falls } a \le t_0 \le b \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

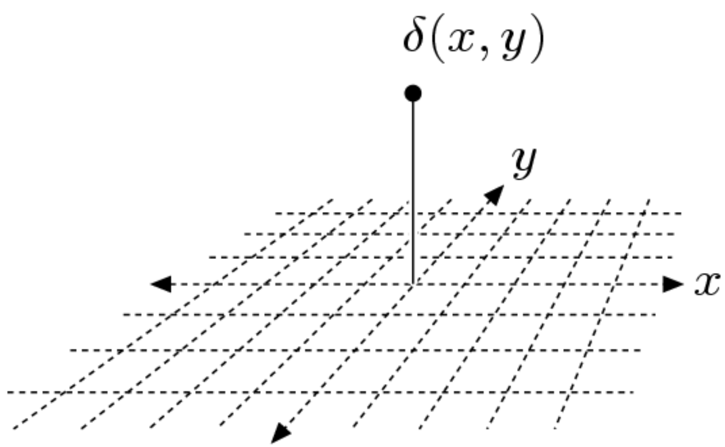
Impulsfunktion (2-D)

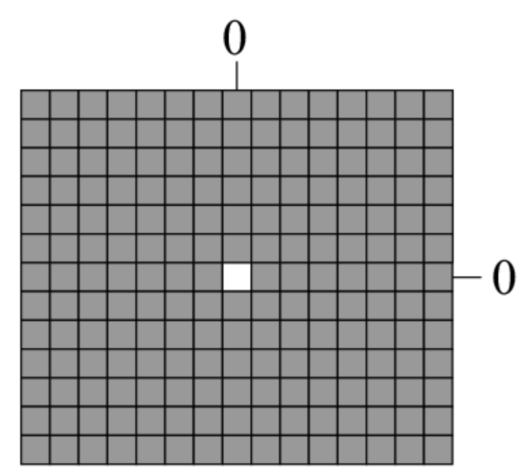
- **neutrales Element der Faltung**

$$I * \delta = I$$

- **diskrete Impulsfunktion**

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; i = j = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$





Einsatz der Impulsfunktion

- **als Filterfunktion**
  - **wenig interessant, da sich das Ausgangsbild nicht ändert**

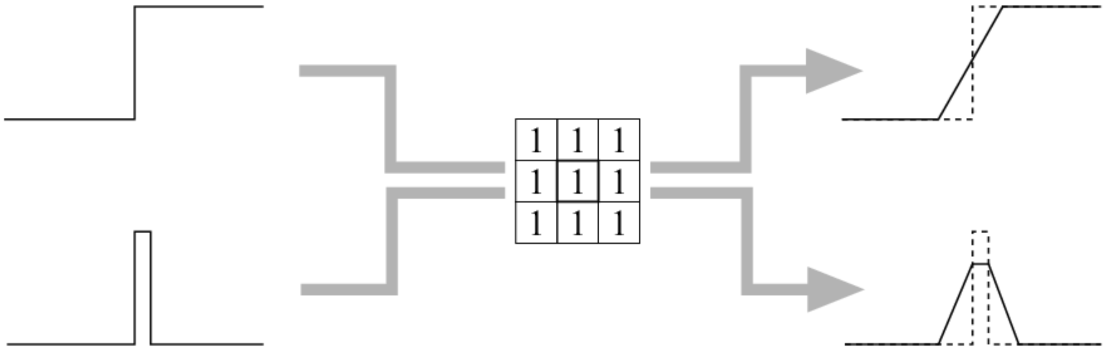
- **als Eingabe für einen (unbekannten) Filter**
  - **viel interessanter, weil sich damit der Filter beschreiben lässt**

$$H * \delta = \delta * H = H$$

  - **In einer Bildbearbeitungssoftware werden verschiedene lineare Filter angeboten, die zwar mit einem Namen versehen sind, von denen Sie aber nicht genau wissen, wie die Filterkoeffizienten aussehen**

Nichtlineare Filter

- **Nachteil von linearen Filtern**
  - **beim Glätten und Entfernen von Störungen werden auch beabsichtigte Strukturen wie Punkte, Linien und Kanten verwischt**



- **Nichtlineare Filter sind in vielen Bereichen überlegen**
  - **können aber auch nur beschränkt gewünschte von unerwünschten Strukturen unterscheiden**
  - **Beispiele**
    - **Minimum- und Maximum-Filter**
    - **Medianfilter**

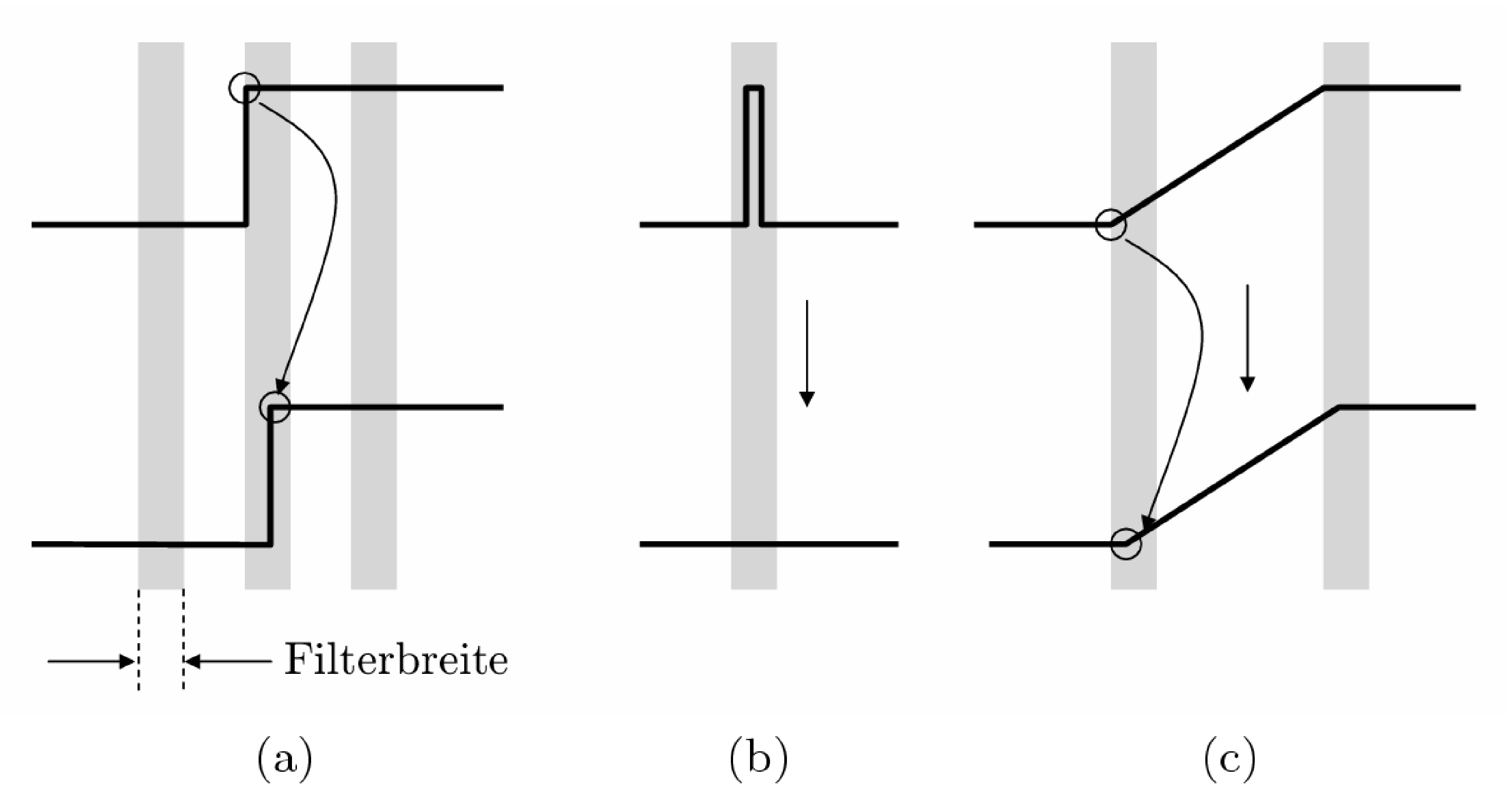
Minimum- und Maximum-Filter

(a) (b) (c)

$$I'(u,v) \leftarrow \min\{I(u+i, v+j) \mid (i,j) \in R\} = \min\big(R_{u,v}\big)$$

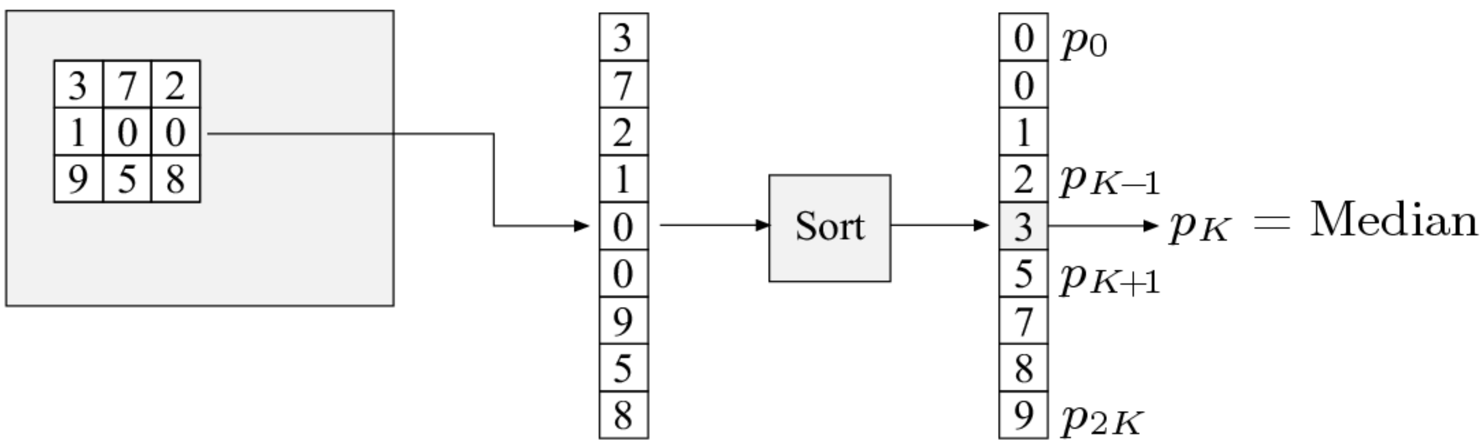
$$I'(u,v) \leftarrow \max\{I(u+i, v+j) \mid (i,j) \in R\} = \max\big(R_{u,v}\big)$$

Auswirkungen des Minimum-Filters



Medianfilter

- **Motivation**
  - **Kombination der guten Eigenschaften von Minimum- und Maximum-Filter: Ausreisser eliminieren**
- **Ansätze**
  - **einfacher Medianfilter**



  - **gewichteter Medianfilter**
    - **ein mit *w* gewichteter Pixel geht *w*-mal in die Folge ein**

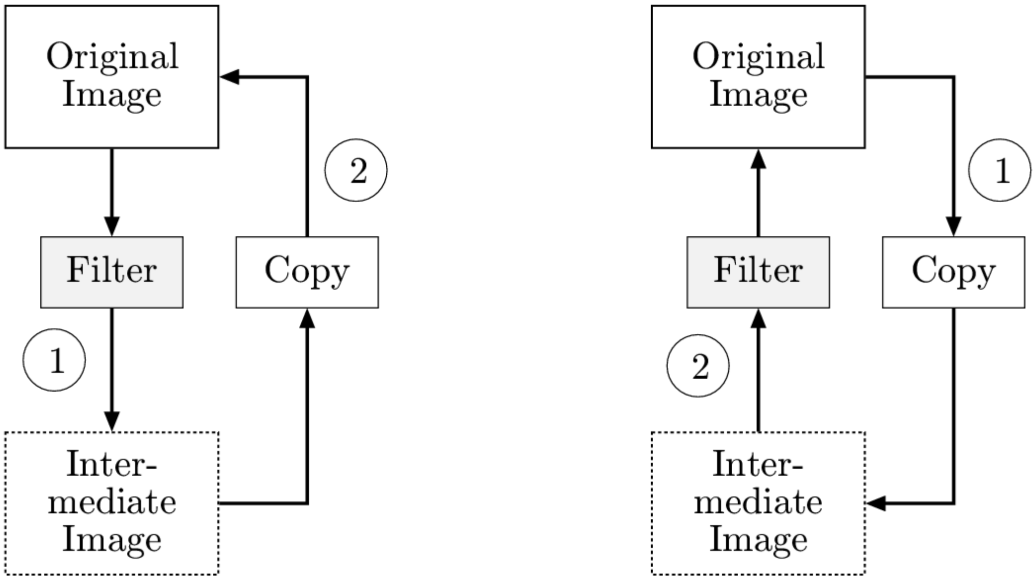
Beispiel: Medianfilter

(a) (b) (c)

a) **Original mit Salt-and-Pepper-Rauschen**
b) **nach Anwendung des 3x3-Box-Filters**
c) **nach Anwendung des Medianfilters**

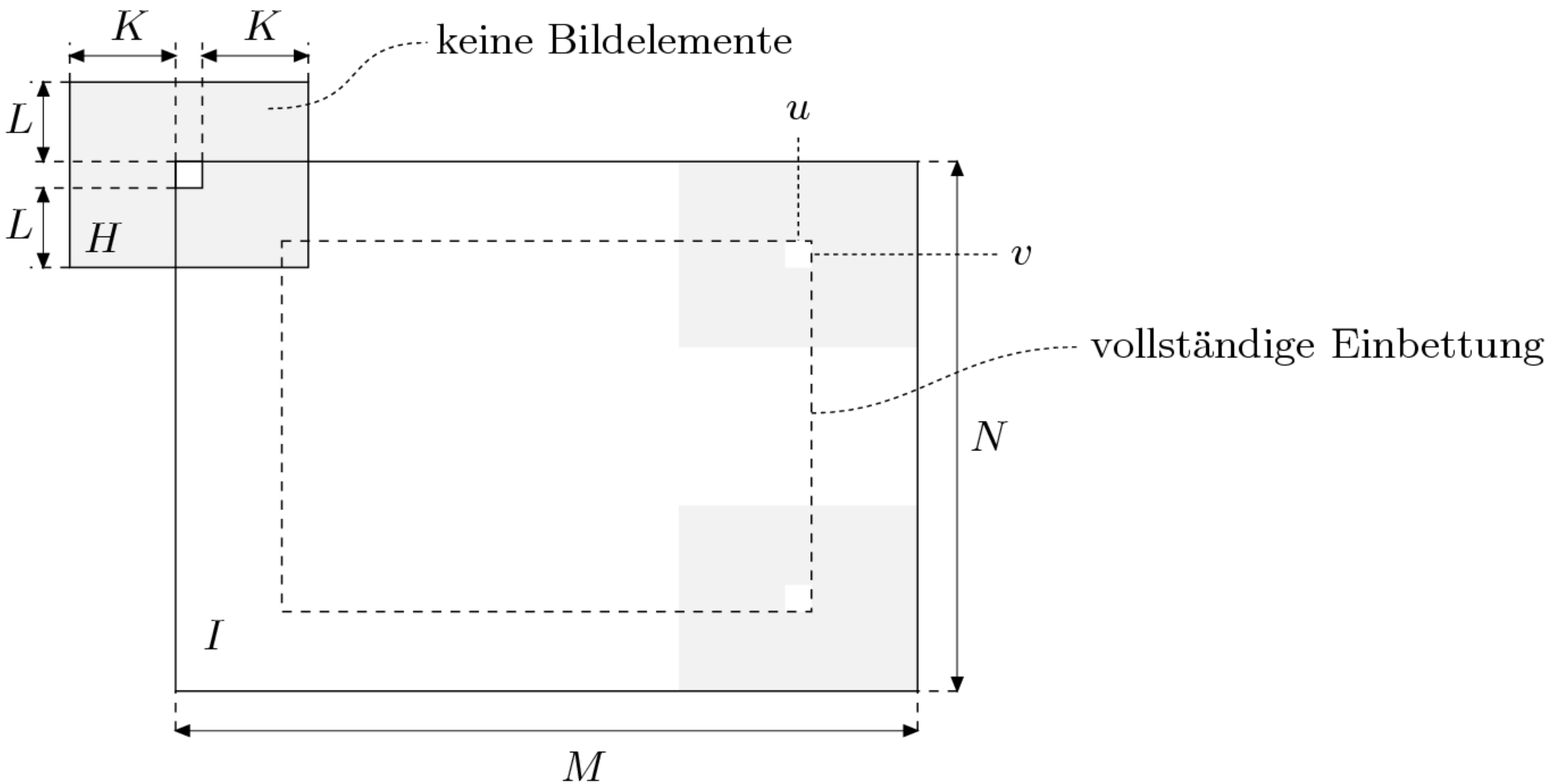
Implementierung von Filtern

- **Effizienz**
  - **Laufzeitanalyse mittels Zeitkomplexität (Big-O-Notation) vornehmen**
  - **separierbare Filter separieren**
  - **eventuell Reihenfolge und Assoziativität verändern**
- **Filteroperationen brauchen einen Zwischenspeicher**



Behandlung der Bildränder (1)

Was machen wir an den Bildrändern?



Behandlung der Bildränder (2)

(a) (b) (c)