Math2.0

flofiz

December 2019

1 Introduction

Pour ce projet nous devons resoudre des equaions de degré 3 a 5 en utilisant le solveur de bernstein et en comparant les resultats obtenues avec cette methode et les methodes usuelles. Le solveur de bernstein est pricipalement utiliser en informatique graphique comme par exemple dans les logiciels de lancer de rayon. Cette méthode permet de calculter l'intersection entre un rayon et une forme. Dans un premier temps nous decrirons les methodes usuelles puis nous verrons le fonctionnement du solveur de bernstein.

2 Methodes Usuelles

3 Methode informatique

Afin de résoudre informatiquement des polynomes de dégrés 3 a 5 nous allons utiliser le solveur de berstein: pour cela nous devons, dans un premier temps, passer notre polynome dans la base de bernstein. Nous devrons ensuite utiliser l'algorithme de decasteljeau afin de trouver les racines.

3.1 Polynome de bernstein

Nous devons tout d'abord convertir notre fonction dans la base de bernstein or nous savons que:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} P_i B_i^m(x) \tag{1}$$

avec:

$$B_i^m(u) = (\binom{m}{i}) u^i (1-u)^{m-i} \tag{2}$$

on procède ensuite par identification.

3.1.1 Cas d'un polyome de degré 3

Dans le cas d'un polynomes de degré 3 on a:

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Or:

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}$$

donc:

$$\begin{aligned}
B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\
&= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\
B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2 \\
&= 3t(1 - 2t + t^2) \\
&= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\
B_2^3(t) &= 3t^2(1-t) \\
&= 3t^2 - 3t^3 \\
B_3^3(t) &= t^3
\end{aligned}$$

On peut donc en deduire que:

$$\begin{aligned}
t^3 &= B_3^3 \\
t^2 &= \frac{B_2^3}{3} + B_3^3 \\
t &= \frac{B_1^3}{3} + \frac{2B_2^3}{3} + B_3^3 \\
1 &= B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3
\end{aligned}$$

On remplace ensuite dans f(t) pour obtenir:

$$\begin{aligned}
f(t) &= a(B_3^3) + b(\frac{B_2^3}{3} + B_3^3) + c(\frac{B_1^3}{3} + \frac{2B_2^3}{3} + B_3^3) + d(B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \\
&= B_0^3 d + B_1^3(\frac{c}{3} + d) + B_2^3(\frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + d) + B_3^3(a + b + c + d)
\end{aligned}$$

par identification on peut en deduire que:

$$\begin{aligned}
P_0 &= d \\
P_1 &= \frac{c}{3} + d \\
P_2 &= \frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + d \\
P_3 &= a + b + c + d
\end{aligned}$$

3.2 Algorithme de De Casteljeau

Maintenant que nous connaissont les coordonnées de points de controles nous allons utiliser l'algorithme de De Casteljeau afin de déterminer les racines du polynome. Cet algorithme permet, de manière recursive, de diviser la courbe en 2 et de recalculer les points de controle pour chaque partie de la courbe. L'algorithme s'arrete après un certain nombre de récursion que nous pouvons choisir en fonction de la précision souhaité.
Les points de controles déterminés précédemment permettent de savoir si un

portion de courbe contiens 0.
En effet, dans le cas d'un polynome de degré 3, nous avons 4 points de controles, si l'un d'eux ne se trouve pas du coté de l'axe des axis alors il se peut que la courbe s'annule dans l'interval $[P_0; P_3]$, mais nous ne pouvons être sûr de cela que si ce sont dans les points de contrôle P_0 et P_3 qui se trouvent de part et d'autre de la courbe. Dans le cas de P_1 ou P_2 une recherche plus approfondi sera nécessaire.
Pour les portions de courbe dont les points de contrôles se trouvent tous du même coté nous pouvons être sûr qu'elles ne contiennent pas 0 et nous pouvons donc les exclure de la recherche. Nous allons donc utiliser l'algorithme de De Castlejeau afin d'éliminer les portions de courbes qui ne contiennent pas 0 jusqu'à un certain degré de précision. Une fois le degré de précision atteint on peut prendre le milieu du segment obtenu comme racine de notre équation.