

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/303304493>

Subdivision de courbes de Bézier quadratiques

Conference Paper · November 2015

CITATIONS

2

READS

344

3 authors:



Lionel Garnier

University of Burgundy

52 PUBLICATIONS 163 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Jean-Paul Bécar

Université Polytechnique Hauts-de-France

39 PUBLICATIONS 56 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Lucie Druoton

University of Burgundy

22 PUBLICATIONS 73 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Skeleton based multiview reconstruction [View project](#)



conics [View project](#)

Subdivisions de courbes de Bézier quadratiques

Lionel GARNIER¹, Jean-Paul BECAR², Lucie DRUOTON³

¹ LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870 , 21 078 Dijon Cedex, France, lionel.garnier@u-bourgogne.fr

²LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

³ IMB, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France, < lucie.druoton > @u-bourgogne.fr

Résumé

Dans cet article, nous donnons des théorèmes, inspirés de l'algorithme de De Casteljau, permettant de subdiviser des courbes de Bézier rationnelles quadratiques en utilisant la théorie des points massiques. Une exemple d'application consiste en l'affichage de cercles caractéristiques de cyclides de Dupin directement depuis l'espace des sphères. Cet exemple illustre la puissance et la robustesse de ces théorèmes : nous nous affranchissons totalement de la métrique du plan dans lequel nous nous trouvons et nos schémas de subdivisions fonctionnent quel que soit la métrique i.e. que la signature de la forme quadratique soit (2;0), (1;1), ou (1;0).

Mots clé : Subdivision, courbes de Bézier, espace des sphères, points massiques

1 Introduction

Les courbes de Bézier de degré 2 jouent un très grand rôle en modélisation géométrique puisqu'elles permettent de représenter des arcs de coniques [Béz86,Cas85,Gar07,Béc97]. Une telle courbe peut être vue comme le lieu de barycentres de points pondérés : le poids est le produit d'un nombre avec un polynôme de Bernstein. Cependant, la modélisation d'arcs de paraboles ou d'hyperboles pose problème puisque ces dernières ne sont pas bornées : les vecteurs vont jouer le rôle de points à l'infini. Une solution élégante consiste à regrouper dans le même espace, celui des points massiques [FJ89], l'ensemble des points pondérés et des vecteurs que nous affectons d'un poids nul. Ainsi, nous pouvons généraliser la notion de courbes de Bézier et proposer de nouveaux algorithmes de subdivisions en utilisant les points massiques. La modélisation de cyclides de Dupin dans l'espace de Lorentz peut se faire en utilisant des courbes de Bézier rationnelles quadratiques, mais un problème se pose : les points singuliers d'une surface de \mathbb{R}^3 sont représentés dans cet espace par des vecteurs. Nous devons donc avoir un modèle de courbe utilisant des points et des vecteurs.

L'espace de Lorentz [LW08,Dru13] est l'espace \mathbb{R}^5 muni d'une forme quadratique de signature (4;1). Dans cet espace, les sphères de l'espace euclidien usuel à trois dimensions, noté \mathcal{E}_3 , sont représentées par des points sur la pseudosphère unité tandis que les points (y compris celui de l'infini) de \mathcal{E}_3 sont représentés par des vecteurs isotropes via un parabololoïde de dimension 3, isométrique à \mathcal{E}_3 . Dans cet espace, une cyclide de Dupin (cônes et cylindres de révolu-

tions compris) est représentée par une conique[†] : il est donc fondamental d'avoir un modèle de courbes comprenant des points et des vecteurs. A notre connaissance, c'est la première fois qu'un article traite de la subdivision de courbe de Bézier à base de points massiques. Par rapport aux travaux précédents sur la modélisation de coniques, soit par des I.F.S. [Zai98, Gol04], soit par des courbes de subdivision [MWW01, BCR07], nos algorithmes permettent de construire les tangentes à la courbe limite et sont inspirés de la méthode de De Casteljau [Cas85]. De plus nous imposons que le point construit appartienne à la médiane du triangle, constitué des trois points de contrôle, issue du point intermédiaire. Deux autres méthodes ont été développées, en travaillant dans la fermeture projective du plan affine, G. Albrecht en se servant du calcul matriciel [Alb01], R. Goldman et W. Wang qui se servent du calcul matriciel et de la reparamétrisation des courbes [GW04]. Ces trois méthodes présentent de plus l'inconvénient de ne travailler que dans un espace projectif, ce qui fait perdre toute notion métrique : il nous est essentiel de rester dans l'espace de Lorentz car ce dernier permet de résoudre des problèmes insolubles dans un modèle projectif [LSD*14].

Après un bref rappel sur les points massiques et l'espace des sphères, nous donnons, dans le paragraphe 3, l'algorithme de De Casteljau dans l'espace des points massiques. Avant de conclure et de donner quelques perspectives, nous présentons, dans le paragraphe 4, quelques théorèmes permettant de subdiviser des courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans l'espace des points massiques.

[†]. En fait, il y a deux coniques, mais une seule suffit pour caractériser la cyclide de Dupin. A partir de l'une des coniques, il est possible de déterminer l'autre.

2 Etat de l'art

2.1 Sphères orientées de \mathcal{E}_3

A partir d'une sphère S de centre Ω et de rayon r , nous pouvons définir deux sphères orientées S^+ et S^- de la façon suivante : en tout point M de S , la sphère orientée S^+ (resp. S^-), de rayon $p = r$ (resp. $p = -r$) est définie par le fait que le vecteur normal unitaire \vec{N} à la sphère S en M est sortant (resp. rentrant). Ainsi, dans les deux cas, nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega M} = p \vec{N} \quad (1)$$

2.2 Espaces de Lorentz et des sphères

L'espace vectoriel de Lorentz est le \mathbb{R} -espace vectoriel, noté $\overrightarrow{L_{4,1}}$, muni de la base canonique $(\vec{e}_-; \vec{e}_1'; \vec{e}_2'; \vec{e}_3'; \vec{e}_+')$ sur lequel nous définissons la forme quadratique de Lorentz $\mathcal{Q}_{4,1}$, de forme bilinéaire symétrique associée $\mathcal{L}_{4,1}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,1}(\vec{e}_i; \vec{e}_j) &= 0, \quad (i; j) \in \{-; 1; 2; 3; +\}^2 \text{ avec } i \neq j \\ \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{e}_-) &= -1, \quad \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{e}_i') = 1, \quad i \in \{1; 2; 3; +\} \end{aligned} \quad (2)$$

Dans cet espace, la forme quadratique $\mathcal{L}_{4,1}$, de signature $(4; 1)$, s'appelle un (*pseudo*)[‡]-produit scalaire.

L'espace affine d'origine O_5 et d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{L_{4,1}}$ est noté $L_{4,1}$ et nous avons une bijection qui à tout point M de $L_{4,1}$ associe son vecteur position $\overrightarrow{O_5 M}$.

Etant donné que la forme quadratique $\mathcal{Q}_{4,1}$ n'est pas définie positive, nous pouvons considérer l'ensemble des vecteurs \vec{u} non nuls isotropes (i.e. $\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = 0$), et l'ensemble des vecteurs positions isotropes engendre un cône, appelé cône de lumière, :

$$C_l = \left\{ M \in L_{4,1} \mid \mathcal{Q}_{4,1}\left(\overrightarrow{O_5 M}\right) = 0 \right\} \quad (3)$$

qui est la sphère de centre O_5 et de rayon nul pour la forme quadratique $\mathcal{Q}_{4,1}$ car tous les points M sont à une distance nulle de O_5 . Nous pouvons distinguer trois types de vecteurs, tableau 1.

Type du vecteur	Vecteur \vec{u}
Espace	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) > 0$
Temps	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) < 0$
Lumière	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = 0$

Table 1: Définition des trois types de vecteurs de l'espace de Lorentz.

Afin de faciliter le plongement de \mathcal{E}_3 dans l'espace de Lorentz, nous utilisons la base $(\vec{e}_o'; \vec{e}_1'; \vec{e}_2'; \vec{e}_3'; \vec{e}_\infty')$ où :

$$\vec{e}_o' = \vec{e}_- - \vec{e}_+ \quad \text{et} \quad \vec{e}_\infty' = \frac{1}{2} (\vec{e}_- + \vec{e}_+)$$

‡. Dans la suite, le terme *pseudo* sera omis.

et nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{e}_o') = \mathcal{Q}_{4,1}(\vec{e}_\infty') = 0 \\ \mathcal{L}_{4,1}(\vec{e}_o'; \vec{e}_\infty') = -1 \end{cases} \quad (4)$$

Dans la suite, nous n'utilisons que la base $(\vec{e}_o'; \vec{e}_1'; \vec{e}_2'; \vec{e}_3'; \vec{e}_\infty')$. Soit $\overrightarrow{u}(u_o; x_u; y_u; z_u; u_\infty)$ et $\overrightarrow{v}(v_o; x_v; y_v; z_v; v_\infty)$ deux vecteurs de $\overrightarrow{L_{4,1}}$, le produit scalaire de \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} est :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v - u_o v_\infty - u_\infty v_o \quad (5)$$

L'équation du cône de lumière est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty = 0 \quad (6)$$

2.2.1 Paraboloïde isométrique au plongement de \mathcal{E}_3 dans l'espace de Lorentz

Considérons le point O_3 défini par $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o'$ et l'hyperplan affine \mathcal{H} engendré par O_3 , les vecteurs espace \vec{e}_1' , \vec{e}_2' et \vec{e}_3' et le vecteur lumière \vec{e}_∞' . La restriction de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{4,1}$ à \mathcal{H} est dégénérée. Le paraboloïde P est l'intersection entre le cône de lumière C_l et l'hyperplan affine \mathcal{H} . L'espace \mathcal{E}_3 est identifié à son plongement dans l'espace de Lorentz i.e. :

$$\mathcal{E}_3 \simeq \{1\} \times \mathcal{E}_3 \times \{0\}$$

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 1 : Le paraboloïde P , d'équation :

$$\begin{cases} x_o - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty = 0 \end{cases} \quad (7)$$

est isométrique au plongement de \mathcal{E}_3 dans l'espace de Lorentz.

Démonstration : voir [GDB15] ■

Soit P un point de \mathcal{E}_3 et $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{O_3 P}$ de $\overrightarrow{L_{4,1}}$ son vecteur position, la représentation [§] du point P dans l'espace de Lorentz est :

$$\overrightarrow{P} = \vec{e}_o' + \overrightarrow{P} + \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P}\|^2 \vec{e}_\infty' \quad (8)$$

et le vecteur \vec{e}_o' représente l'origine O_3 de l'espace \mathcal{E}_3 (i.e. $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o'$) tandis que le vecteur \vec{e}_∞' représente le point à l'infini. Par construction, le vecteur position \overrightarrow{P} est un vecteur isotrope (i.e. $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{P} = 0$). Remarquons que la détermination du point de \mathcal{E}_3 à partir de sa représentation, formule (8) est triviale. De façon plus générale, si $\overrightarrow{P}(x_o; x; y; z; x_\infty)$ est un vecteur lumière, deux cas sont à distinguer :

- $x_0 = 0$ implique que nous considérons le vecteur \vec{e}_∞' et nous obtenons le point à l'infini de \mathcal{E}_3 ;
- $x_0 \neq 0$ implique que nous considérons le vecteur $\frac{1}{x_0} \overrightarrow{P}$ et nous obtenons le point P de \mathcal{E}_3 défini par :

$$P\left(\frac{x}{x_o}; \frac{y}{x_o}; \frac{z}{x_o}\right)$$

§. Dans la suite, sauf mention contraire, un point de \mathcal{E}_3 ou un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ est écrit en majuscule, sa représentation dans l'espace de Lorentz est écrite avec la même lettre en minuscule.

2.2.2 Espace des sphères orientées Λ^4

Une sphère de \mathcal{E}_3 , de centre Ω , de rayon ρ est représentée par le point σ ou le vecteur position $\vec{\sigma}$ défini par [DFM07] :

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{O_5\sigma} = \frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_o + \vec{\Omega} + \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}\|^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \quad (9)$$

et nous avons $\vec{\sigma}^2 = 1$. De manière analogue, un plan orienté \mathcal{P} défini par un point P et un vecteur normal unitaire \vec{N} est représenté par :

$$\vec{\pi} = \overrightarrow{O_5\pi} = \vec{N} + (\vec{N} \bullet \vec{P}) \vec{e}_\infty \quad (10)$$

où \bullet désigne le produit scalaire de \mathcal{E}_3 . De plus, nous avons $\vec{\pi}^2 = \vec{N}^2 = 1$. Il est ainsi naturel d'introduire la sphère unité Λ^4 de centre O_5 de $\mathbb{L}_{4,1}$:

$$\Lambda^4 = \left\{ \sigma \in \mathbb{L}_{4,1} \mid \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5\sigma}) = \overrightarrow{O_5\sigma}^2 = 1 \right\} \quad (11)$$

qui représente les sphères orientées et les plans orientés de \mathcal{E}_3 . Notons que les deux sphères orientées S^+ et S^- de \mathcal{E}_3 sont représentées par les deux vecteurs positions opposés $\vec{\sigma}^+$ et $\vec{\sigma}^-$ de Λ^4 .

2.2.3 Cyclides de Dupin

Une cyclide de Dupin est l'enveloppe, de deux manières équivalentes, d'une famille à un paramètre de sphères orientées et chaque famille est représentée sur l'espace des sphères par une conique obtenue comme section de Λ^4 par un 2-plan affine ne contenant pas O_5 . Nous avons trois cas selon la signature de la restriction de la forme de Lorentz à ce plan :

- si la signature est $(2; 0)$, le plan est dit de type espace et la courbe est un cercle qui se trace comme une ellipse ;
- si la signature est $(1; 1)$, le plan est dit de type temps et la courbe est un cercle qui se trace comme une hyperbole, il y a deux points singuliers ou un point singulier et un point à l'infini (cas d'un cône de révolution) ;
- si la signature est $(1; 0)$, le plan est dit de type lumière et la courbe est une parabole (affine) isométrique à une droite, il y a un point singulier ou un point à l'infini (cas d'un cylindre de révolution).

Les cercles caractéristiques d'une surface canal peuvent être déterminés par l'intersection de deux sphères particulières. Soit $t \mapsto \sigma(t)$ une paramétrisation admissible de la courbe C_1 représentant cette surface canal. Soit $\sigma(t_0)$ un point de la conique C_1 représentant la sphère $S(t_0)$. La sphère $S(t_0)$ est déterminée par la donnée du vecteur tangent $\frac{d\sigma}{dt}(t_0)$ au cercle au point $\sigma(t_0)$: elle est représentée sur Λ^4 par $\vec{\sigma}(t_0)$ définie par :

$$\left\{ \vec{\sigma}(t_0) \right\} = \left[O_5; \frac{d\sigma}{dt}(t_0) \right] \cap \Lambda^4 \quad (12)$$

et nous introduisons la définition suivante :

Définition 1 : sphère dérivée

Soit $t \mapsto \sigma(t)$ une paramétrisation admissible de la courbe C_1 représentant une surface canal définie par la famille à un paramètre de sphères $S(t)$.

La sphère dérivée de la sphère $\sigma(t_0)$ (resp. $S(t_0)$) est la sphère $\vec{\sigma}(t_0)$ (resp. $S(t_0)$) définie par la formule (12).

Notons que nous avons :

$$\overrightarrow{\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{\sigma(t_0)} = 0$$

et que le cercle caractéristique induit par $S(t_0)$ est l'intersection des deux sphères orthogonales $S(t_0)$ et $S(t_0)$ et la figure 1 illustre le cas où la courbe représentant la surface canal est un cercle qui se trace comme une ellipse.

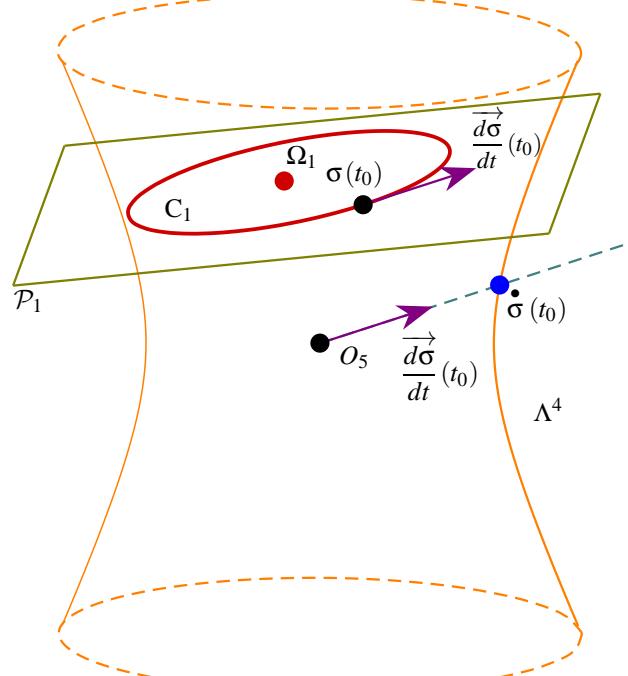


Figure 1: Sur Λ^4 , C_1 est un cercle représentant une cyclide de Dupin. Considérons le point $\sigma(t_0)$. Le vecteur tangent à cette courbe en ce point est $\frac{d\sigma}{dt}(t_0)$. Le cercle caractéristique de la cyclide de Dupin est l'intersection entre les deux sphères $S(t_0)$ et $S(t_0)$, représentées sur Λ^4 par $\sigma(t_0)$ et $\vec{\sigma}(t_0)$ où cette dernière est l'intersection entre la demi-droite $[O_5; \frac{d\sigma}{dt}(t_0)]$ et Λ^4 .

La figure 2 montre un cercle caractéristique sur une cyclide de Dupin à croissant externe obtenu comme intersection de deux sphères orthogonales $S(t_0)$ et $S(t_0)$. Notons que la seconde sphère peut être un plan et dans ce cas, le cercle caractéristique obtenu sera un grand cercle sur la première sphère.

Pour représenter toutes les cyclides de Dupin, nous avons besoin de manipuler des courbes où les éléments sont des

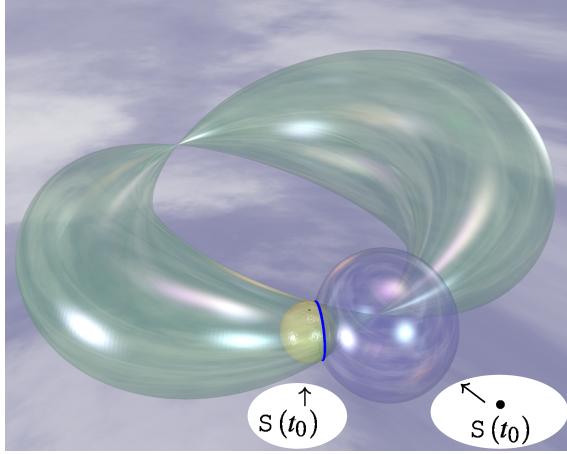


Figure 2: Construction, dans \mathcal{E}_3 , d'un cercle caractéristique d'une cyclide de Dupin obtenu par l'intersection d'une sphère et de sa sphère dérivée, figure 1.

points de Λ^4 (représentant les sphères orientées de \mathcal{E}_3) ou des vecteurs isotropes (représentants les points de \mathcal{E}_3 et le point à l'infini de \mathcal{E}_3). Pour ce faire, nous allons utiliser des courbes de Bézier et le formalisme des points massiques.

2.3 Points massiques d'un espace affine \mathcal{E}

L'ensemble des vecteurs de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$, de dimension n , et des points pondérés de l'espace affine \mathcal{E} sont regroupés dans l'espace $\tilde{\mathcal{E}}$ défini par :

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{E}} \times \{0\}) \quad (13)$$

et il est possible d'identifier $\tilde{\mathcal{E}}$ à $\vec{\mathcal{E}}_n = \vec{\mathcal{E}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$. L'idée est de considérer l'espace affine \mathcal{E} comme un hyperplan de $\vec{\mathcal{E}}_n$ d'équation $\omega = 1$: la coordonnée supplémentaire ω représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré de l'espace affine \mathcal{E} , soit un vecteur de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ dont la somme des poids est nul n'est pas défini. Cependant, il existe un unique vecteur \vec{u} défini par :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA}_i, \quad (\text{avec } \sum_{i \in I} \omega_i = 0)$$

qui est indépendant du point M . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de \mathcal{E} et les vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$, identifié à l'hyperplan de $\vec{\mathcal{E}}_n$ d'équation $\omega = 0$. Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle. J.-C. Fioriot et al. [FJ89, Béc97] établissent une bijection entre $\tilde{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{E}}_n$ suivie d'une projection sur \mathcal{E} ou $\vec{\mathcal{E}}$ selon le cas. L'espace $\tilde{\mathcal{E}}$ est aussi connu sous le nom d'espace universel.

Concrètement, nous choisissons une autre approche : toutes les sommes de points massiques sont définies en utilisant des transformations affines et nous masquons les projections sur l'hyperplan affine \mathcal{E} ou vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$. Sur l'espace $\tilde{\mathcal{E}}$, l'addition, notée \oplus , est définie de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0 \implies \begin{aligned} & (M; \omega) \oplus (N; \mu) \\ &= (M; \omega) \oplus (N; -\omega) \\ &= \left(\omega \overrightarrow{NM}; 0 \right) \end{aligned}$
- $\omega + \mu \neq 0 \implies \begin{aligned} (M; \omega) \oplus (N; \mu) &= \left(\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right) \text{ où} \\ &\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\} \text{ désigne le barycentre des points} \\ &\text{pondérés } (M; \omega) \text{ et } (N; \mu) \\ &\bullet (\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0) \end{aligned}$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}} (M); \omega \right)$ où $\mathcal{T}_{\vec{w}}$ est la translation de \mathcal{E} de vecteur \vec{w} .

Sur l'espace $\tilde{\mathcal{E}}$, la multiplication par un scalaire, notée \odot , est définie de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [FJ89, Béc97, GDB15].

2.4 Courbes BR dans $\tilde{\mathcal{E}}$

Nous appelons courbe BR toute courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle. Rappelons les expressions des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_2(t) = t^2 \quad (14)$$

que nous considérons sur l'intervalle $[0; 1]$.

Les points de contrôle P_0, P_1 et P_2 d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique sont des points massiques (i.e. des points pondérés de \mathcal{E} ou des vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$).

Définition 2 : courbe BR dans $\tilde{\mathcal{E}}$

Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non tous nuls. Soit $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ trois points massiques de $\tilde{\mathcal{E}}$.

Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit la fonction ω_f définie sur $[0; 1]$ par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t) \quad (15)$$

Un point massique $(M; \omega)$ ou $(\vec{u}; 0)$ appartient à la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$, notée :

$$BR \{(P_0; \omega_0), (P_1; \omega_1), (P_2; \omega_2)\}$$

s'il existe un réel t_0 de $[0; 1]$ tel que :

- si $\omega_f(t_0) \neq 0$ alors, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{OM} & = & \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP}_i \\ & + & \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_i(t_0) \overrightarrow{P}_i \\ \omega & = & \omega_f(t_0) \end{array} \right. \quad (16)$$

- si $\omega_f(t_0) = 0$ alors, nous avons :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP}_i + \sum_{i \in J} B_i(t_0) \overrightarrow{P}_i \quad (17)$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [BG14, GDB15].

Commençons par un lemme concernant la multiplication de tous les points massiques de contrôle par un même scalaire non nul généralisant un résultat classique.

Lemme 1 :

Soit $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ trois éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$.

Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit λ un réel non nul. Alors, si $\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)$ est non nul, nous avons :

$$\begin{aligned} BR \left\{ (P_i; \omega_i)_{i \in I}; \left(\vec{P}_j; 0 \right)_{j \in J} \right\} &= \\ BR \left\{ (P_i; \lambda \omega_i)_{i \in I}; \left(\lambda \vec{P}_j; 0 \right)_{j \in J} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Démonstration : laissée au lecteur. ■

Si $J = \emptyset$, nous ne changeons pas les points de contrôle d'une courbe BR en multipliant tous les poids par un même réel non nul. Les théorèmes de subdivisions, paragraphe 4, sont basés sur le théorème 2 qui permet de modifier les points de contrôle : la courbe de Bézier est la courbe de Bézier obtenue par ce changement homographique modélisent deux arcs différents d'une **même** conique donnée.

Théorème 2 : Changement de paramètre homographique

Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ de support la conique C. Soit les réels a, b, c et d vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (19)$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h: \quad \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{a(1-u)+bu}{c(1-u)+du} \end{aligned} \quad (20)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (Q_0; \varpi_0) & = & (c-a)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ & \oplus & 2a(c-a) \odot (P_1; \omega_1) \\ & \oplus & a^2 \odot (P_2; \omega_2) \\ (Q_1; \varpi_1) & = & (c-a)(d-b) \odot (P_0; \omega_0) \\ & \oplus & (bc-2ab+ad) \odot (P_1; \omega_1) \\ & \oplus & ab \odot (P_2; \omega_2) \\ (Q_2; \varpi_2) & = & (d-b)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ & \oplus & 2b(d-b) \odot (P_1; \omega_1) \\ & \oplus & b^2 \odot (P_2; \omega_2) \end{array} \right. \quad (21)$$

Démonstration : voir [Béc97]. ■

Lorsque nous voulons conserver les points de contrôle extrémaux, nous obtenons un corollaire du théorème 2.

Corollaire 1 : Changement de paramètre homographique laissant invariant 0 et 1

Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ de support la conique C. Soit b et c deux réels non nuls. Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h: \quad \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{bu}{c(1-u)+bu} \end{aligned} \quad (22)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (Q_0; \varpi_0) & = & c^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ & \underset{\text{si } \omega_0 \neq 0}{=} & \left(P_0; c^2 \omega_0 \right) \\ (Q_1; \varpi_1) & = & bc \odot (P_1; \omega_1) \\ & \underset{\text{si } \omega_1 \neq 0}{=} & \left(P_1; bc \omega_1 \right) \\ (Q_2; \varpi_2) & = & b^2 \odot (P_2; \omega_2) \\ & \underset{\text{si } \omega_2 \neq 0}{=} & \left(P_2; b^2 \omega_2 \right) \end{array} \right. \quad (23)$$

Démonstration : voir [Béc97].

Nous avons $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$.

Pour obtenir la formule (23), il suffit d'appliquer la formule (21) en remarquant que dans la formule (22), nous avons $a = 0$ et $b - d = 0$.

■

Le théorème 2 et le corollaire 1 permettent de construire un arc de conique facilitant la détermination des paramètres de cette conique [Béc97, BG14].

3 Adaptation de l'algorithme de De Casteljau à $\tilde{\mathcal{E}}$

La généralisation de l'algorithme de De Casteljau aux courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans l'espace des points massiques ne pose pas de problème étant donné que la loi \oplus est associative, algorithme 1.

Algorithme 1 Algorithme de De Casteljau dans l'espace des points massiques.

Entrée : Trois points massiques $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ non alignés.

1. Choix de t_0 dans $]0; 1[$
2. Calcul de $(N_1; \varpi_1) = (1-t) \odot (P_0; \omega_0) \oplus t \odot (P_1; \omega_1)$
3. Calcul de $(N_2; \varpi_2) = (1-t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t \odot (P_2; \omega_2)$
4. Calcul de $(N_3; \varpi_3) = (1-t) \odot (N_1; \varpi_1) \oplus t \odot (N_2; \varpi_2)$

SORTIE : Un point massique $(N_3; \varpi_3)$ de l'arc de conique modélisé par $RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & (N_3; \varpi_3) \\
 &= (1-t) \odot (N_1; \varpi_1) \oplus t \odot (N_2; \varpi_2) \\
 &= (1-t) \odot ((1-t) \odot (P_0; \omega_0) \oplus t \odot (P_1; \omega_1)) \\
 &\quad \oplus t \odot ((1-t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t \odot (P_2; \omega_2)) \\
 &= (1-t)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2t(1-t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
 &= B_0(t) \odot (P_0; \omega_0) \oplus B_1(t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus B_2(t) \odot (P_2; \omega_2)
 \end{aligned}$$

Dans la suite, nous nous focalisons surtout sur des subdivisions régulières (i.e. $t_0 = \frac{1}{2}$ dans l'algorithme 1) et distinguons les points pondérés et les vecteurs. Nous allons utiliser le théorème 2 ou le corollaire 1 afin d'obtenir une subdivision régulière (le point pondéré N_3 construit est sur la $\mathcal{L}_{4,1}$ -médiatrice issue de P_1 dans le triangle $P_0P_1P_2$). Ce n'est pas possible d'obtenir directement ce résultat avec l'algorithme 1 : les poids s'ajoutent à chaque itération et cela crée un déséquilibre [Gar10]. De plus, si $(N_3; \varpi_3)$ est un point pondéré, la droite définie par les points massiques $(N_1; \varpi_1)$ et $(N_2; \varpi_2)$ est la tangente à la courbe BR en N_3 .

4 Principale de la subdivision itérative dans $\widetilde{\mathbf{L}_{4,1}}$

Nous nous intéressons à la subdivision de cyclides de Dupin (tores, cônes et cylindre de révolution compris) ce qui revient à subdiviser une conique dans un 2-plan de l'espace de Lorentz. A chaque étape, nous devons construire le vecteur tangent à la courbe afin d'obtenir les sphères dérivées. Les cercles pour la métrique de Lorentz se tracent comme des ellipses ou des hyperboles. Par exemple, le cercle Lorentz C de centre Ω et de rayon R d'équation :

$$\overrightarrow{\Omega M}^2 = x^2 - y^2 = R^2$$

correspond, dans un plan euclidien, à l'hyperbole H d'équation :

$$\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$$

Dans le premier cas, si σ_0 appartient à C et P_1 appartient à la tangente à C en σ_0 , nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega\sigma_0} \cdot \overrightarrow{\sigma_0 P_1} = 0$$

c'est-à-dire que la tangente et son rayon sont orthogonaux. Dans le second cas, l'excentricité de H est $e = \sqrt{2}$. Considérons le foyer $F(R\sqrt{2}; 0)$ et la directrice Δ d'équation $X = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, l'hyperbole H est l'ensemble des points M vérifiant :

$$MF = e \times d(M, \Delta)$$

où $d(M, \Delta)$ est la distance du point M à la droite Δ . Ainsi, étant donné la même courbe, il est intéressant d'avoir des algorithmes de subdivisions indépendant de la métrique.

Nous avons vu que le théorème 2 permet d'effectuer des changements de paramétrages afin de réaliser des changements de points massiques de contrôle. L'idée est de construire, la plupart du temps, en utilisant ce théorème, deux homographies h_0 et h_1 de $[0; 1]$ dans $[0; \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}; 1]$ respectivement. Pour i de $[0; 1]$, h_i dépend de quatre réels et nous obtenons deux relations ce qui nous laisse deux degrés

de liberté. En effet, nous considérons la courbe BR de points pondérés de contrôle $(\sigma_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; \omega_2)$ avec la condition :

$$\sum_{i=0}^2 \omega_i \neq 0$$

que nous subdivisons en deux courbes BR de points de contrôle $(\sigma_{00}; \omega_{00})$, $(P_{10}; \omega_{10})$ et $(\sigma_{20}; \omega_{20})$ d'une part et $(\sigma_{01}; \omega_{01})$, $(P_{11}; \omega_{11})$ et $(\sigma_{21}; \omega_{21})$ d'autre part, figure 3. Naturellement, nous avons $\sigma_{20} = \sigma_{01}$. Pour que la subdivision soit régulière, la condition nécessaire et non suffisante est que le point σ_{20} soit sur la médiane $\|\$, issue de P_1 , du triangle $\sigma_0 P_1 \sigma_2$. Pour que les constructions suivantes soient régulières, nous devons ajouter des conditions sur les poids, nous avons choisi de prendre $\|\$:

$$\omega_0 = \omega_2 = 1 = \omega_{00} = \omega_{20} = \omega_{01} = \omega_{21}$$

quand cela est possible. Même si du point de vue classique, nous n'avons pas un triangle affine, nous appliquerons les changements homographiques même si l'un des points de contrôle est un vecteur pur : le calcul des coefficients des homographies se fait selon le même principe. Détailons ces deux homographies.

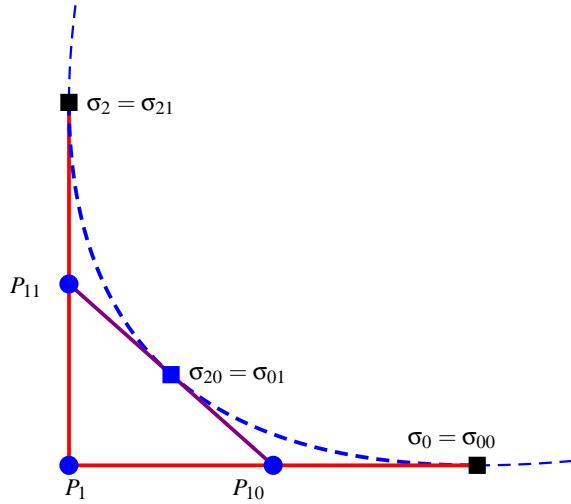


Figure 3: Une itération d'une construction itérative d'un arc de conique γ sur \mathbb{P}^4 , d'extrémités σ_0 et σ_2 et ayant pour tangentes les droites $(\sigma_0 P_1)$ et $(\sigma_2 P_1)$ où $(P_1; \omega_1)$ est un point pondéré avec la condition $\omega_1 > -1$.

4.1 Homographie h_0

Nous avons :

$$h_0(u) = \frac{a_0(1-u) + b_0u}{c_0(1-u) + d_0u}$$

$\|\$. Si la conique à centre est vue comme un cercle, la droite $(\sigma_0 P_1)$ est une médiatrice pour la forme quadratique considérée.

$\|\|$. Parfois, nous aurons l'un des quatre derniers poids nul lorsque nous obtenons un vecteur pur.

et devons résoudre :

$$\begin{cases} h_0(0) = 0 \\ h_0(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ d_0 = 2b_0 \end{cases}$$

d'où :

$$h_0(u) = \frac{b_0 u}{c_0 (1-u) + 2b_0 u} \quad (24)$$

La dérivée h'_0 de h_0 est du signe de :

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 \\ 2b_0 - c_0 & c_0 \end{vmatrix} = b_0 c_0$$

qui doit être strictement positif. Dans tous les cas, nous prenons ces deux nombres positifs.

Si γ est la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ alors $\gamma \circ h_0$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$, incluse dans γ , avec :

$$\begin{cases} (Q_0; \varpi_0) = c_0^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ (Q_1; \varpi_1) = c_0 b_0 \odot (P_0; \omega_0) \oplus b_0 c_0 \odot (P_1; \omega_1) \\ (Q_2; \varpi_2) = b_0^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2b_0^2 \odot (P_1; \omega_1) \\ \quad \oplus b_0^2 \odot (P_2; \omega_2) \end{cases} \quad (25)$$

et nous pouvons remarquer que : **pour que le premier point de contrôle soit inchangé, nous avons $c_0 = 1$; le choix adéquat de b_0 permet d'obtenir soit la valeur souhaitée de ϖ_2 (si $\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2 \neq 0$), soit une première ou dernière composante de \vec{Q}_2 pseudo-unitaire (i.e. 1 ou -1) dans un 2-plan de $\widetilde{L}_{4,1}$ ou un norme donnée dans le plan euclidien.**

4.2 Homographie h_1

De même, nous avons :

$$h_1(u) = \frac{a_1 (1-u) + b_1 u}{c_1 (1-u) + d_1 u}$$

et devons résoudre :

$$\begin{cases} h_1(0) = \frac{1}{2} \\ h_1(1) = 1 \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} c_1 = 2a_1 \\ d_1 = b_1 \end{cases}$$

d'où :

$$h_1(u) = \frac{a_1 (1-u) + b_1 u}{2a_1 (1-u) + b_1 u} \quad (26)$$

La dérivée h'_1 de h_1 est du signe de :

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & a_1 \\ b_1 - 2a_1 & 2a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & a_1 \\ -b_1 & 0 \end{vmatrix} = b_1 a_1$$

qui doit être strictement positif. Dans tous les cas, nous prenons ces deux nombres positifs.

Si γ est la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ alors $\gamma \circ h_1$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$, incluse dans γ , avec :

$$\begin{cases} (Q_0; \varpi_0) = a_1^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ \quad \oplus 2a_1^2 \odot (P_1; \omega_1) \oplus a_1^2 \odot (P_2; \omega_2) \\ (Q_1; \varpi_1) = a_1 b_1 \odot (P_0; \omega_0) \oplus a_1 b_1 \odot (P_2; \omega_2) \\ (Q_2; \varpi_2) = b_1^2 \odot (P_2; \omega_2) \end{cases} \quad (27)$$

et nous pouvons remarquer que : **pour que le dernier point de contrôle soit inchangé, nous avons $b_1 = 1$; le choix adéquat de a_1 permet d'obtenir la valeur souhaitée de ϖ_0 (si $\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2 \neq 0$), sinon a_1 est calculé de tel façon que la première ou dernière composante du vecteur lumière $(\vec{Q}_0; 0)$ soit 1 ou -1 dans un 2-plan de $\widetilde{L}_{4,1}$ ou un norme donnée dans le plan euclidien.**

4.3 Cas avec trois points pondérés :

$$(\omega_0; \omega_1; \omega_2) \in \{1\} \times \mathbb{R}^* \times \{1\}$$

Dans ce paragraphe, les trois points de contrôle sont des points pondérés, nous pouvons avoir n'importe laquelle des trois coniques propres euclidiennes mais nous devons distinguer trois cas selon le signe de $\omega_1 + 1$: $\omega_1 + 1 > 0$ implique que l'arc à subdiviser est connexe sans trou ; $\omega_1 + 1 = 0$ implique que l'arc à subdiviser est connexe avec un trou (arc de parabole non borné) ; $\omega_1 + 1 < 0$ implique que l'arc à subdiviser n'est pas connexe et contient une branche.

4.3.1 Premier cas : $\omega_1 > -1$

Théorème 3 : Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_0 définie par :

$$h_0 : u \mapsto \frac{\frac{1}{\sqrt{2+2\omega_1}} u}{(1-u) + 2 \frac{1}{\sqrt{2+2\omega_1}} u} \quad (28)$$

alors $\gamma \circ h_0$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\sigma_{00}; 1)$, $(P_{10}; \varpi_{10})$ et $(\sigma_{20}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\begin{cases} (\sigma_{00}; 1) = (\sigma_0; 1) \\ (P_{10}; \varpi_{10}) = \left(\text{bar} \{(\sigma_0; 1); (P_1; \omega_1)\}; \sqrt{\frac{1+\omega_1}{2}} \right) \\ (\sigma_{20}; 1) = (\text{bar} \{(\sigma_0; 1); (P_1; 2\omega_1); (\sigma_2; 1)\}; 1) \end{cases} \quad (29)$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser les relations de la formule (25) avec $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2+2\omega_1}}$ et $c_0 = 1$.

■

Notons que nous retrouvons, $\varpi_1 = \sqrt{\frac{1+\omega_1}{2}}$ qui est la formule de récurrence classique dans le cas euclidien. Par symétrie, nous pouvons énoncer :

Théorème 4 : Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_1 définie par :

$$h_1 : u \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2+2\omega_1}}(1-u) + u \\ 2\frac{1}{\sqrt{2+2\omega_1}}(1-u) + u \end{cases} \quad (30)$$

alors $\gamma \circ h_1$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\sigma_{01}; 1)$, $(P_{11}; \varpi_{11})$ et $(\sigma_{21}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{01}; 1) = (\text{bar}\{(\sigma_0; 1); (P_1; 2\omega_1); (\sigma_2; 1)\}; 1) \\ (P_{11}; \varpi_{11}) = \left(\text{bar}\{(P_1; \omega_1); (\sigma_2; 1)\}; \sqrt{\frac{1+\omega_1}{2}} \right) \\ (\sigma_{21}; 1) = (\sigma_2; 1) \end{array} \right. \quad (31)$$

La figure 3 illustre une itération de subdivision en utilisant les théorèmes 3 et 4 et nous avons $\sigma_{20} = \sigma_{01}$.

4.3.2 Deuxième cas : $\omega_1 = -1$

Dans ce paragraphe, la CBRQ est le complémentaire d'un arc borné d'une parabole et nous avons :

$$\begin{aligned} B_0(t) - B_1(t) + B_2 &= 1 - 2t + t^2 - 2t + 2t^2 + t^2 \\ &= 1 - 4t + 4t^2 \\ &= (1 - 2t)^2 \end{aligned}$$

ce que fait que, quels que soient les points de contrôle, le vecteur de la CBRQ est obtenu pour $t = \frac{1}{2}$.

Dans la formule (32) et les suivantes, nous pouvons remplacer -1 par 1 au numérateur, mais, du point de vue pédagogique, le -1 permet de faire allusion au fait que nous voulons récupérer la première ou la dernière composante du vecteur et que nous avons $\vec{e}_o \cdot \vec{e}_\infty = -1$.

Théorème 5 : Changement de paramètre homographique
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; -1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Si $(\vec{P}_1\sigma_0 + \vec{P}_1\sigma_2) \cdot \vec{e}_\infty = 0$ alors nous posons $\vec{e}_{o\vee\infty} = \vec{e}_o$, sinon $\vec{e}_{o\vee\infty} = \vec{e}_\infty$.

Posons :

$$b_0 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(\vec{P}_1\sigma_0 + \vec{P}_1\sigma_2) \cdot \vec{e}_{o\vee\infty}} \right|} \quad (32)$$

Soit h_0 définie par :

$$h_0 : u \mapsto \frac{b_0 u}{(1-u) + 2b_0 u} \quad (33)$$

alors $\gamma \circ h_0$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\sigma_{00}; 1)$, $(\vec{P}_{10}; 0)$ et $(\vec{m}_{20}; 0)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{00}; 1) = (\sigma_0; 1) \\ (\vec{P}_{10}; 0) = (b_0 \vec{P}_1 \sigma_0; 0) \\ (\vec{m}_{20}; 0) = (b_0^2 (\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2); 0) \end{array} \right. \quad (34)$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser les relations de la formule (25) avec b_0 et $c_0 = 1$ et nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_0; 1) = (\sigma_0; 1) \\ (\vec{P}_{10}; 0) = b_0 \square (\sigma_0; 1) \boxplus b_0 \square (P_1; -1) = (b_0 \vec{P}_1 \sigma_0; 0) \\ (\vec{m}_{20}; 0) = b_0^2 \square (\sigma_0; 1) \boxplus 2b_0^2 \square (P_1; -1) \boxplus b_0^2 \square (\sigma_2; 1) \\ = (b_0^2 (\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2); 0) \end{array} \right.$$

et deux cas sont à distinguer.

- Si $(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_\infty = 0$ alors le vecteur lumière $\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2$ est colinéaire à \vec{e}_∞ et sa composante selon ce dernier est :

$$-(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_\infty$$

et nous avons :

$$b_0 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_o} \right|}$$

d'où :

$$\vec{m}_{20} = \sqrt{\left| \frac{-1}{(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_o} \right|} (\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2)$$

ce qui conduit soit à $\vec{m}_{20} = \vec{e}_\infty$, soit à $\vec{m}_{20} = -\vec{e}_\infty$.

- Si $(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_\infty \neq 0$, alors le vecteur lumière \vec{m}_{20} , colinéaire à $\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2$ doit avoir -1 ou 1 comme composante selon \vec{e}_o d'où :

$$b_0 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_\infty} \right|}$$

d'où :

$$\vec{m}_{20} = \sqrt{\left| \frac{-1}{(\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2) \cdot \vec{e}_\infty} \right|} (\vec{P}_1 \sigma_0 + \vec{P}_1 \sigma_2)$$

et le première composante de \vec{m}_{20} est 1 ou -1 .

■

Dans le repère canonique $(O_5; \vec{e}_-, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_+)$ de l'espace de Lorentz, un point à pour coordonnée $(x_-; x_1; x_2; x_3; x_+)$ tandis que dans le repère $(O_5; \vec{e}_o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_\infty)$ un point à pour coordonnée $(x_o; x_1; x_2; x_3; x_\infty)$.

Le vecteur $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}}$ désigne soit le vecteur $\overrightarrow{e_o}$ soit le vecteur $\overrightarrow{e_\infty}$ afin de récupérer la composante de $(\overrightarrow{P_1\sigma_0} + \overrightarrow{P_1\sigma_2})$ selon le vecteur $\overrightarrow{e_\infty}$ ou le vecteur $\overrightarrow{e_o}$. Si nous devons combler la courbe de Bézier par un vecteur lumière représentant un point de \mathcal{E}_3 , deux cas sont à distinguer : si localement, les sphères ont un rayon positif, nous sommes dans le demi-espace d'équation $x_+ = 2x_\infty - x_o > 0$ et le vecteur lumière doit avoir une composante de 1 selon $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}}$ tandis que si les sphères ont un rayon négatif, nous sommes dans le demi-espace d'équation $x_+ = 2x_\infty - x_o < 0$ et le vecteur lumière doit avoir une composante de -1 selon $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}}$.

Par symétrie, nous pouvons énoncer :

Théorème 6 : Changement de paramètre homographique
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Si $(\overrightarrow{P_1\sigma_0} + \overrightarrow{P_1\sigma_2}) \cdot \overrightarrow{e_\infty} = 0$ alors nous posons $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}} = \overrightarrow{e_o}$, sinon $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}} = \overrightarrow{e_\infty}$.

Posons :

$$a_1 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(\overrightarrow{P_1\sigma_0} + \overrightarrow{P_1\sigma_2}) \cdot \overrightarrow{e_{o\vee\infty}}} \right|}$$

Soit h_1 définie par :

$$h_1 : u \longmapsto \frac{a_1(1-u) + u}{2a_1(1-u) + u} \quad (35)$$

alors $\gamma \circ h_1$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_{01}}; 0)$, $(\overrightarrow{P_{11}}; 0)$ et $(\sigma_{21}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{m_{01}}; 0) = (a_1^2 (\overrightarrow{P_1\sigma_0} + \overrightarrow{P_1\sigma_2}); 0) \\ (\overrightarrow{P_{11}}; 0) = (a_1 \overrightarrow{P_1\sigma_2}; 0) \\ (\sigma_{21}; 1) = (\sigma_2; 1) \end{cases} \quad (36)$$

Notons que si la cyclide de Dupin est représentée par une parabole (elle n'a qu'un point singulier ou ne contient que le point à l'infini comme le cylindre de révolution), les rayons des sphères ont un signe constant : soit toujours positif ou nul, soit toujours négatif ou nul. La figure 4 illustre une itération de subdivision en utilisant les théorèmes 5 et 6 et nous avons $\overrightarrow{m_{01}} = \overrightarrow{m_{20}}$ qui est un vecteur directeur de l'axe de la parabole.

Dans toute la suite, la notation $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}}$ désigne toujours soit le vecteur $\overrightarrow{e_o}$, soit le vecteur $\overrightarrow{e_\infty}$ avec la condition qui lui est associée c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{e_{o\vee\infty}}$ permet de récupérer la première composante (celle de $\overrightarrow{e_o}$), si elle est non nulle, d'un vecteur lumière, soit la dernière composante (celle de $\overrightarrow{e_\infty}$ si la composante du vecteur lumière selon $\overrightarrow{e_o}$ est nulle).

4.3.3 Troisième cas : $\omega_1 < -1$

Dans ce cas, la courbe est le complémentaire d'un arc borné d'un cercle qui se trace comme une hyperbole, le dénominateur de la courbe de Bézier est de degré 2 et admet deux racines t_1 et t_2 définies par :

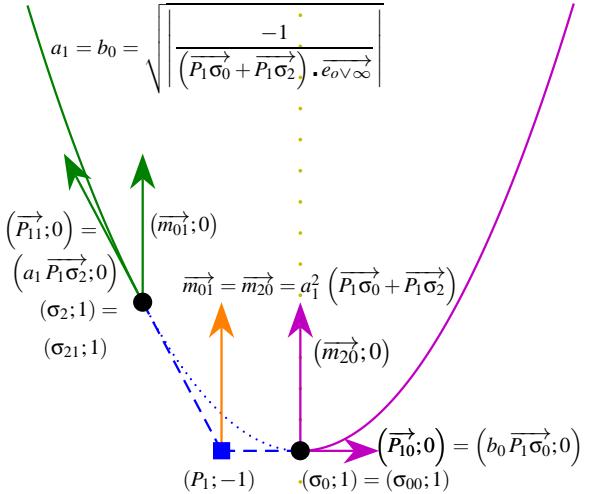


Figure 4: Une itération d'une construction itérative d'un arc de parabole γ sur Λ^4 , d'extrémités $(\sigma_0; 1)$ et $(\sigma_2; 1)$ et ayant pour tangentes les droites $(\sigma_0 P_1)$ et $(\sigma_2 P_1)$ avec $(P_1; -1)$. Si le vecteur $\overrightarrow{m_{20}}$ représente un point de \mathcal{E}_3 , sa composante selon $\overrightarrow{e_o}$ et pseudo-unitaire et du signe du rayon des sphères de la surface canal. Si le vecteur $\overrightarrow{m_{20}}$ représente le point à l'infini de \mathcal{E}_3 , si les rayons des sphères sont positifs, nous avons $\overrightarrow{m_{20}} = \overrightarrow{e_\infty}$, sinon, nous avons $\overrightarrow{m_{20}} = -\overrightarrow{e_\infty}$. —————

$$t_1 = \frac{1 - \omega_1 - \sqrt{\omega_1^2 - 1}}{2(1 - \omega_1)} \quad t_2 = \frac{1 - \omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 - 1}}{2(1 - \omega_1)} \quad (37)$$

et le fait que nous ayons $\omega_1 < -1 < 0$ implique que les racines t_1 et t_2 appartiennent à $[0; 1]$ et $t_1 < t_2$. Nous allons définir trois homographies h_0 , h_1 et h_2 tel que :

$$h_0([0; 1]) = [0; t_1] \quad h_1([0; 1]) = [t_1; t_2] \quad h_2([0; 1]) = [t_2; 1]$$

et l'utilisation des racines du dénominateur permet d'obtenir directement des vecteurs lumière représentant des points singuliers de la cyclide de Dupin. Nous avons choisi ces homographies afin de limiter le nombre de cas et nous ramener à des cas canoniques, paragraphes 4.4.1 et 4.4.2, l'homographie h_1 permet d'obtenir toute une branche du cercle.

Théorème 7 : Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_0 définie par :

$$\begin{aligned} h_0 : [0; 1] &\longrightarrow [0; t_1] \\ u &\longmapsto \frac{d_0 t_1 u}{(1-u) + d_0 u} \end{aligned} \quad (38)$$

alors $\gamma \circ h_0$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\sigma_{00}; 1)$, $(P_{10}; \omega_{10})$ et $(\overrightarrow{m_{20}}; 0)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{00}; 1) = (\sigma_0; 1) \\ P_{10} = \text{bar} \{(\sigma_0; 1 - t_1); (P_1; t_1 \omega_1)\} \\ \varpi_{10} = d_0 (1 + (\omega_1 - 1) t_1) \\ (\vec{m}_{20}; 0) = \left(d_0^2 \left(B_0(t_1) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_1) \vec{P_1 \sigma_2} \right); 0 \right) \end{array} \right. \quad (39)$$

où :

$$d_0 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(B_0(t_1) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_1) \vec{P_1 \sigma_2}) \cdot \vec{e_{\sigma \vee \infty}}} \right|}$$

Démonstration : Laissée au lecteur. ■

Le théorème suivant permet d'obtenir toute la branche de la courbe BR initiale.

Théorème 8 : Changement de paramètre homographique
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_1 définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 : [0; 1] \longrightarrow [t_1; t_2] \\ u \longmapsto \frac{t_1(1-u) + d_0 t_2 u}{(1-u) + d_0 u} \end{array} \right. \quad (40)$$

alors $\gamma \circ h_1$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\vec{m}_{01}; 0)$, $(Q_{11}; \varpi_{11})$ et $(\vec{m}_{21}; 0)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{m}_{01}; 0) = \left(c_1^2 \left(B_0(t_1) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_1) \vec{P_1 \sigma_2} \right); 0 \right) \\ (\Omega_{11}; \varpi_{11}) = (G_{11}; c_1 d_1 (1 + \omega_1)) \\ (\vec{m}_{21}; 0) = \left(d_1^2 \left(B_0(t_2) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_2) \vec{P_1 \sigma_2} \right); 0 \right) \end{array} \right. \quad (41)$$

où G_{11} st le barycentre de $\left(\sigma_0; \frac{1}{2(1-\omega_1)} \right)$, $\left(P_1; \frac{-\omega_1^2}{1-\omega_1} \right)$ et $\left(\sigma_2; \frac{1}{2(1-\omega_1)} \right)$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(B_0(t_1) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_1) \vec{P_1 \sigma_2}) \cdot \vec{e_{\sigma \vee \infty}}} \right|} \\ d_1 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(B_0(t_2) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_2) \vec{P_1 \sigma_2}) \cdot \vec{e_{\sigma \vee \infty}}} \right|} \end{array} \right.$$

De plus, Ω_{11} est le centre du cercle défini par la courbe BR.

Démonstration : Laissée au lecteur. ■

Dans les théorèmes 7 et 8, les vecteurs lumière \vec{m}_{20} et \vec{m}_{01} sont les mêmes, mais, dans le théorème 8, le poids du centre Ω_{11} est négatif ce qui fait que les deux courbes BR ne sont pas sur la même branche de cercle. Il est possible de se ramener à un poids positif pour le cercle en prenant $(-\vec{m}_{01}; 0)$, $(\Omega_{11}; -\varpi_1)$ et $(-\vec{m}_{21}; 0)$ comme points massiques de contrôle. Montrons que le point P_{10} est un point de l'une des deux asymptotes au cercle :

Proposition 1 :

Soit Ω_{11} le centre du cercle construit par le théorème 8.

Soit P_{10} et \vec{m}_{20} construit par le théorème 7.

Les vecteurs \vec{m}_{20} et $\vec{P_{10} \Omega_{11}}$ sont non nuls et colinéaires (ce qui implique que P_{10} appartient à l'une des deux asymptotes du cercle).

Démonstration : laissée au lecteur. ■

Il reste le dernier cas :

Théorème 9 : Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\sigma_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_2 définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2 : [0; 1] \longrightarrow [t_2; 1] \\ u \longmapsto \frac{c_2 t_2 (1-u) + u}{c_2 (1-u) + u} \end{array} \right. \quad (42)$$

alors $\gamma \circ h_2$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\vec{m}_{20}; 0)$, $(P_{12}; \varpi_{12})$ et $(\sigma_{22}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{m}_{20}; 0) = \left(c_2^2 \left(B_0(t_2) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_2) \vec{P_1 \sigma_2} \right); 0 \right) \\ P_{12} = \text{bar} \{ (P_1; (1-t_2) \omega_1); (\sigma_2; t_2) \} \\ \varpi_{12} = c_2 (\omega_1 + (1 - \omega_1) t_2) \\ (\sigma_{22}; 1) = (\sigma_2; 1) \end{array} \right. \quad (43)$$

où :

$$c_2 = \sqrt{\left| \frac{-1}{(B_0(t_2) \vec{P_1 \sigma_0} + B_2(t_2) \vec{P_1 \sigma_2}) \cdot \vec{e_{\sigma \vee \infty}}} \right|}$$

Démonstration : Laissée au lecteur. ■

En adaptant la démonstration de la proposition 1, nous montrerions que les vecteurs \vec{m}_{02} et $\vec{P_{12} \Omega_{11}}$ sont non nuls et colinéaires c'est-à-dire que le point P_{12} est un point de l'une des deux asymptotes au cercle.

La figure 5 illustre une itération de subdivision en utilisant les théorèmes 7, 8 et 9 et nous avons $\vec{m}_{20} = \vec{m}_{01}$ d'une part et $\vec{m}_{21} = \vec{m}_{02}$ d'autre part et ϖ_{11} est strictement négatif.

4.4 Cas de cercles à deux composantes connexes

Dans le paragraphe 4.3.1, nous avons établi les théorèmes 3 et 4 permettant de subdiviser un arc borné d'un cercle ayant deux composantes connexes, dans le paragraphe 4.3.3 nous avons établi les théorèmes 7, 8 et 9 et permettant de subdiviser le complémentaire d'un arc borné d'un cercle ayant deux composantes connexes. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux autres cas « canoniques » d'arcs de cercles ayant deux composantes connexes : le cas d'une branche dans le paragraphe 4.4.1, le cas d'un arc connexe non borné dans le paragraphe 4.4.2.

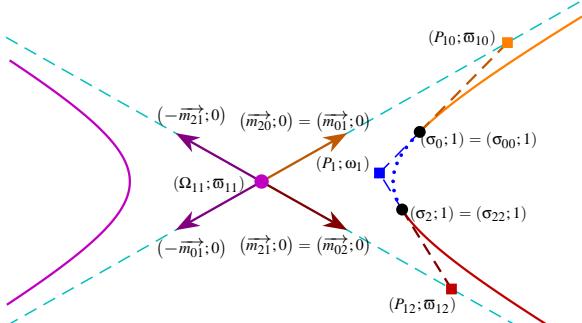


Figure 5: Une itération d'une construction itérative d'un arc de conique γ sur Λ^4 , d'extrémités σ_0 et σ_2 et ayant pour tangentes les droites $(\sigma_0 P_1)$ et $(\sigma_2 P_1)$ avec $(P_1; \omega_1)$ et $\omega_1 < -1$. De plus, nous avons $\omega_{11} < 0$.

4.4.1 Cas où $(\omega_0; \omega_1; \omega_2) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{+*} \times \{0\}$

Les points massiques de contrôle extrémaux sont des vecteurs tandis que le point de contrôle intermédiaire est un point pondéré de poids ω_1 strictement positif (si ω_1 est strictement négatif, il suffit de multiplier tous les points massiques par -1 ce qui revient à prendre les opposés des deux vecteurs extrémaux et du poids intermédiaire) et, la courbe est une branche d'hyperbole euclidienne de centre Ω_1 représentée par la courbe BR γ de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(\Omega_1; \omega_1)$ et $(\vec{m}_2; 0)$.

Théorème 10 : Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(\Omega_1; \omega_1)$ et $(\vec{m}_2; 0)$ de support la conique C.

Soit h_0 définie par :

$$h_0 : u \mapsto \frac{\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}u}{(1-u) + 2\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}u} \quad (44)$$

alors $\gamma \circ h_0$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\vec{m}_{00}; 0)$, $(P_{10}; \omega_{10})$ et $(\sigma_{20}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\begin{cases} (\vec{m}_{00}; 0) = (\vec{m}_0; 0) \\ (P_{10}; \omega_{10}) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1} \vec{m}_0}(\Omega_1); \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} \right) \\ (\sigma_{20}; 1) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1} (\vec{m}_0 + \vec{m}_2)}(\Omega_1); 1 \right) \end{cases} \quad (45)$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser les relations de la formule (25) avec $c_0 = 1$ et $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}$.

■

Pour obtenir la seconde partie de la subdivision, pour des raisons de symétrie, il suffit d'utiliser les relations de la formule (27) avec $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}$ et $b_1 = 1$ et nous pouvons énoncer :

Théorème 11 : Changement de paramètre homographique
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(\Omega_1; \omega_1)$ et $(\vec{m}_2; 0)$ de support la conique C.

Soit h_1 définie par :

$$h_1 : u \mapsto \frac{\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}(1-u) + u}{2\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}(1-u) + u} \quad (46)$$

alors $\gamma \circ h_1$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\sigma_{01}; 1)$, $(P_{11}; \omega_{11})$ et $(\vec{m}_{21}; 0)$ de support la conique C avec :

$$\begin{cases} (\sigma_{01}; 1) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{2\omega_1} (\vec{m}_0 + \vec{m}_2)}(\Omega_1); 1 \right) \\ (P_{11}; \omega_{11}) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1} \vec{m}_2}(\Omega_1); \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} \right) \\ (\vec{m}_{21}; 0) = (\vec{m}_2; 0) \end{cases} \quad (47)$$

La figure 6 illustre une itération de subdivision en utilisant les théorèmes 10 et 11 et nous avons $\sigma_{20} = \sigma_{01}$.

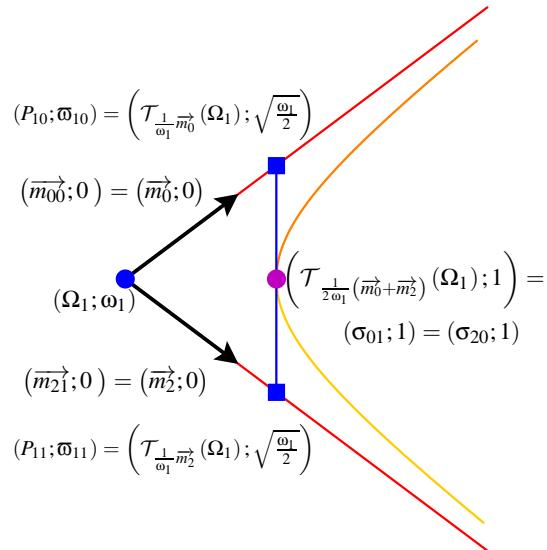


Figure 6: Une itération d'une construction itérative, sur l'espace des sphères, d'une branche de cercle non connexe.

4.4.2 Cas où $(\omega_0; \omega_1; \omega_2) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{+*} \times \{1\}$

Si ω_1 est strictement positif, nous utilisons le corollaire 1 avec $c = -1$ et $b = 1$ et nous obtenons le complémentaire de l'arc. ainsi, dans tout ce paragraphe, ω_1 est strictement positif, le premier point de contrôle est un vecteur tandis que les deux autres sont des points pondérés, la courbe est un arc d'hyperbole euclidienne.

Théorème 12 : Changement de paramètre homographique
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_0 définie par :

$$h_0 : u \mapsto \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2\omega_1}}u}{(1-u) + 2\frac{1}{\sqrt{1+2\omega_1}}u} \quad (48)$$

alors $\gamma \circ h_0$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_{10}; \omega_{10})$ et $(\sigma_{20}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\begin{cases} (\vec{m}_0; 0) &= (\vec{m}_0; 0) \\ (P_{10}; \omega_{10}) &= \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1}\vec{m}_0}(P_1); \frac{\omega_1}{\sqrt{1+2\omega_1}} \right) \\ (\sigma_{20}; 1) &= \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{2\omega_1}\vec{m}_0}(G_3); 1 \right) \end{cases} \quad (49)$$

où $G_3 = \text{bar}\{(P_1; 2\omega_1); (\sigma_2; 1)\}$.

Démonstration : Laissée au lecteur. ■

Notons que nous retrouvons la formule de récurrence $\omega_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1+2\omega_1}}$ donnée dans [DGL13].

Théorème 13 : Changement de paramètre homographique Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$ de support la conique C.

Soit h_1 définie par :

$$h_1 : u \mapsto \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2\omega_1}}(1-u)+u}{2\frac{1}{\sqrt{1+2\omega_1}}(1-u)+u} \quad (50)$$

alors $\gamma \circ h_1$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(\sigma_{01}; 1)$, $(P_{11}; \omega_{11})$ et $(\sigma_{21}; 1)$ de support la conique C avec :

$$\begin{cases} (\sigma_{01}; 1) &= \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{1+2\omega_1}\vec{m}_0}(G_3); 1 \right) \\ (P_{11}; \omega_{11}) &= \left(G_4; \frac{1+\omega_1}{\sqrt{1+2\omega_1}} \right) \\ (\sigma_{21}; 1) &= (\sigma_2; 1) \end{cases} \quad (51)$$

où $G_3 = \text{bar}\{(P_1; 2\omega_1)(\sigma_2; 1)\}$ et $G_4 = \text{bar}\{(P_1; \omega_1)(\sigma_2; 1)\}$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les relations de la formule (27) avec $a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+2\omega_1}}$ et $b_1 = 1$. ■

La figure 7 illustre une itération de subdivision en utilisant les théorèmes 12 et 13 et nous avons $\sigma_{20} = \sigma_{01}$.

Donnons quelques applications. Dans le premier exemple, nous réalisons des subdivisions itératives d'un cercle non connexe dans un plan de type temps.

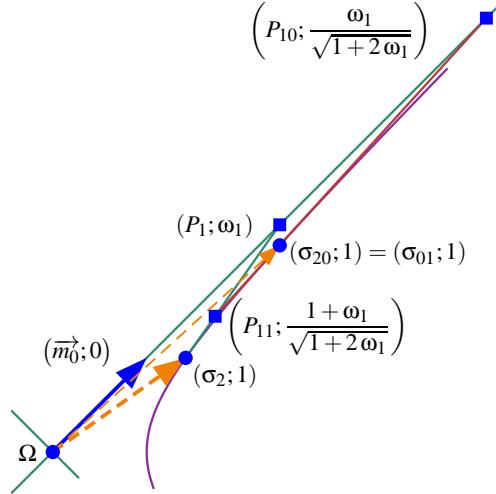


Figure 7: Une itération de construction itérative d'un arc de cercle à partir de trois points massiques $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(\sigma_2; 1)$.

4.5 Premier exemple dans un 2-plan de $\widetilde{L_{4,1}}$

Nous choisissons une CD4E définie par une sphère et deux points singuliers. Cette CD4E est représentée naturellement par un cercle C_1 comportant deux branches ce qui permet d'utiliser les théorèmes 10 à 13.

La cyclide de Dupin est définie par deux points singuliers M_0 et M_2 et une sphère S_0 . Sur Λ^4 , le cercle non connexe est l'intersection entre Λ^4 et le plan \mathcal{P} défini par les vecteurs lumière $(\vec{m}_0; 0)$ et $(\vec{m}_2; 0)$ représentant les points M_0 et M_2 et le point Ω_0 représentant la sphère S_0 . Le point Ω_1 est la projection orthogonale de O_5 sur le plan \mathcal{P} .

La première étape de la subdivision itérative consiste, via le théorème 10, à transformer la courbe BR de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(\Omega_1; \omega_1)$ et $(\vec{m}_2; 0)$ en deux courbes BR de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_{10}; \omega_{10}) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1}\vec{m}_0}(\Omega_1); \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} \right)$ et $(\sigma_{20}; 1)$ d'une part, et $(\sigma_{01}; 1)$, $(P_{11}; \omega_{11}) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1}\vec{m}_2}(\Omega_1); \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} \right)$ et $(\vec{m}_{21}; 0)$ d'autre part, et nous obtenons, dans \mathcal{E}_3 , le cercle rouge de la figure 8.

Pour des raisons de symétrie, nous ne détaillons que les itérations concernant $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_{10}; \omega_{10})$ et $(\sigma_{20}; 1)$ et nous obtenons : deux courbes BR de points massiques de contrôle $(\vec{m}_0; 0)$, $(P_{100}; \omega_{100})$ et $(\sigma_{200}; 1)$ d'une part et $(\sigma_{001}; 1)$, $(P_{101}; \omega_{101})$ et $(\sigma_{201}; 1)$ d'autre part avec $\sigma_{20} = \sigma_{01}$ et nous cercles bleus dans la figure 8.

La figure 8 qui montre trois itérations en utilisant les théorèmes 3 et 4 et les théorèmes 10 à 12. Lors de la troisième itération, nous obtenons les cercles en magenta.

4.6 Deuxième exemple dans un 2-plan de $\widetilde{L_{4,1}}$

Dans cet exemple, nous modélisons une cyclide de Dupin à croissant externe définie par :

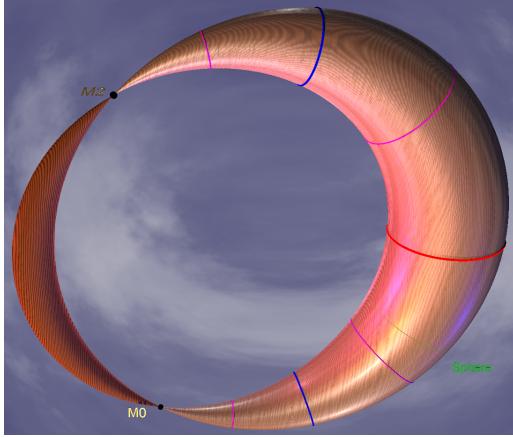


Figure 8: Trois itérations de subdivision d'une courbe de Bézier à points massiques de contrôle sur l'espace des sphères Λ^4 permettant d'obtenir, dans \mathcal{E}_3 , des cercles caractéristiques d'une cyclide de Dupin à croissant non nul.

- les deux sphères extrémiales S_0 et S_2 de centres respectifs $O_0(0;4;0)$ et $O_2(-5;0;0)$ et de rayons respectifs $\rho_0 = 1$ et $\rho_2 = 4$;
- la sphère intermédiaire S_1 de centre $O_1\left(-\frac{5}{2};2\sqrt{3};0\right)$ et de rayon $\rho_1 = \frac{5}{2}$.

Dans la figure 9, les sphères S_0 et S_2 sont en texture « bozo » tandis que la sphère S_1 en texture rouge rosée à bandes noires.

Les sphères S_0 , S_1 et S_2 sont représentées sur Λ^4 par les trois points $\sigma_0\left(1,0,4,0,\frac{15}{2}\right)$, $\sigma_1\left(\frac{2}{5},-1,\sqrt{3}\cdot 4\cdot \frac{1}{5},0,\frac{12}{5}\right)$ et $\sigma_2\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{4},0,0,\frac{9}{8}\right)$. L'arc de cercle modélisant le morceau de cyclide de Dupin est défini par la CBRQ de points massiques de contrôle $(\sigma_0;1)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(\sigma_2;1)$ avec :

$$\begin{cases} P_1\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{4};1;0;\frac{9}{8}\right) \\ \omega_1=\sqrt{2} \end{cases}$$

Les sphères dérivées de σ_0 et σ_2 sont respectivement :

$$\begin{cases} \sigma_0\left(-\frac{3}{4},-\frac{5}{4},-3,0,-\frac{51}{8}\right) \\ \sigma_2\left(0;0;-1;0;0\right) \end{cases}$$

et nous obtenons les cercles caractéristiques extrémaux des deux morceaux de cyclide de Dupin.

Les racines de $B_0(t) + \omega_1 B_1(t) + B_2(t)$ sont :

$$\begin{cases} t_1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,293 \\ t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,707 \end{cases}$$

Les théorèmes 7, 8 et 9 permettent d'amorcer la subdivision du complémentaire de l'arc précédent c'est-à-dire la

CBRQ de points massiques de contrôle $(\sigma_0;1)$, $(P_1;-\omega_1)$ et $(\sigma_2;1)$. Ainsi :

• Théorème 7

Nous obtenons $\sigma_{00}=\sigma_0$, $d_0=\frac{2\sqrt{6}}{3}\simeq 1,633$ d'où :

$$\begin{cases} P_{10}=\left(\frac{3\sqrt{2}+4}{4};\frac{5\sqrt{2}}{4};4+3\sqrt{2};0;\frac{51\sqrt{2}+60}{8}\right) \\ \omega_{10}=\frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

et :

$$(\overrightarrow{m_{20}};0)=\left(\left(1;\frac{5}{3};8\frac{\sqrt{2}}{3};0;\frac{17}{2}\right);0\right)$$

et la partie de la cyclide de Dupin entre le cercle caractéristique en magenta et le point singulier en rouge est modélisée par la CBRQ de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_{20}};0)$, $(P_{10};\omega_{10})$ et $(\sigma_{00};1)$. Les subdivisions suivantes se feraient en utilisant les théorèmes 12 et 13.

• Théorème 8

Nous avons $c_1=d_0$, $(\overrightarrow{m_{20}};0)=(\overrightarrow{m_{01}};0)$ et :

$$d_1=\frac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{3}\simeq 3,942$$

d'où :

$$(\Omega_{11};\omega_{11})=\left(\left(-\frac{1}{8};-\frac{15}{8};0;0;-\frac{33}{16}\right);-\frac{8}{3}\right)$$

et :

$$(\overrightarrow{m_{21}};0)=\left(\left(1;\frac{5}{3};-8\frac{\sqrt{2}}{3};0;\frac{17}{2}\right);0\right)$$

et la partie de la cyclide de Dupin entre les deux points singuliers est modélisée par la CBRQ de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_{01}};0)$, $(\Omega_{11};\omega_{11})$ et $(\overrightarrow{m_{21}};0)$. Les subdivisions suivantes se feraient en utilisant les théorèmes 10 et 11 en prenant $(-\overrightarrow{m_{01}};0)$, $(\Omega_{11};-\omega_{11})$ et $(-\overrightarrow{m_{21}};0)$ comme points massiques de contrôle afin que le centre du cercle ait un poids positif.

• Théorème 9

Nous obtenons $\sigma_{22}=\sigma_2$, $c_2=d_1$ et $(\overrightarrow{m_{02}};0)=(\overrightarrow{m_{21}};0)$ d'où :

$$(P_{12};\omega_{12})=\left(\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{4};-\sqrt{2};0;\frac{9}{8}\right);\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

et la partie de la cyclide de Dupin entre le point singulier en vert et le cercle caractéristique en rose est modélisée par la CBRQ de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_{21}};0)$, $(P_{12};\omega_{12})$ et $(\sigma_{22};1)$. Les subdivisions suivantes se feraient en utilisant les théorèmes 12 et 13.

La figure 9 illustre une itération de subdivision en utilisant les théorèmes 7, 8 et 9. La partie en texture « Or » correspond à une branche de cercle, les deux autres arcs de cercles permettent de visualiser les parties en bois foncé et en bois clair.

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons donné des algorithmes permettant de subdiviser des courbes de Bézier rationnelles quadratiques en utilisant la théorie des points massiques. Afin de

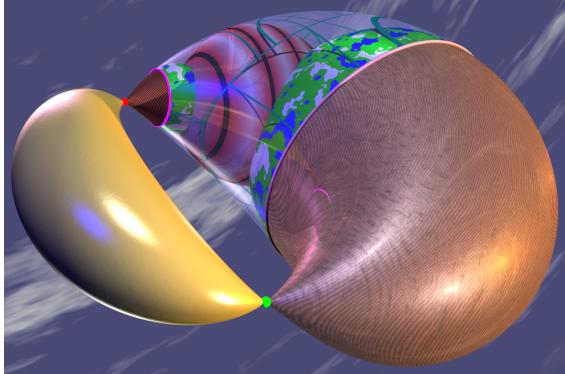


Figure 9: Une itération d'une construction itérative d'un arc de cercle γ , possédant deux branches, sur Λ^4 , d'extrémités σ_0 et σ_2 et ayant pour tangentes les droites $(\sigma_0 P_1)$ et $(\sigma_2 P_1)$ avec $(P_1; \omega_1)$ et $\omega_1 < -1$.

montrer la robustesse de ces algorithmes, nous nous sommes placés sur l'espace des sphères de l'espace de Lorentz $L_{4,1}$ où une conique représente une cyclide de Dupin. Les points singuliers d'une cyclide de Dupin sont des vecteurs de $L_{4,1}$ tandis que les sphères non réduites à un point sont des points sur la sphère unité de $L_{4,1}$.

Nous comptons définir une algèbre géométrique conforme incluant les points massiques de \mathbb{R}^5 : l'espace vectoriel de départ est donc de dimension 6. Nous comptons aussi définir les matrices de transformations massiques afin de manipuler simultanément les transformations affines et leurs endomorphismes associés. Nous comptons aussi définir une algèbre géométrique des nombres complexes massiques.

Références

- [Alb01] ALBRECHT G. : Determination of geometrical invariants of rationally parametrized conic sections. 15–24.
- [BCR07] BECCARI C., CACIOLA G., ROMANI L. : A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics. *Comput. Aided Geom. Des.*. Vol. 24, Num. 1 (2007), 1–9.
- [BG14] BÉCAR J. P., GARNIER L. : Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014* (Lyon, 26 au 27 mars 2014).
- [Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [Béz86] BÉZIER P. : *Courbe et surface*, 2ème ed., vol. 4. Hermès, Paris, Octobre 1986.
- [Cas85] CASTELJAU P. D. : *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermès, 1985.
- [DFM07] DORST L., FONTIJNE D., MANN S. : *Geometric Algebra for Computer Science : An Object Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kauffmann Publishers, 2007.
- [DGL13] DRUOTON L., GARNIER L., LANGEVIN R. : Iterative construction of Dupin cyclide characteristic circles using non-stationary Iterated Function Systems (IFS). *Computer-Aided Design*. Vol. 45, Num. 2 (February 2013), 568–573. Solid and Physical Modeling 2012, Dijon.
- [Dru13] DRUOTON L. : *Recoulements de morceaux de cyclides de Dupin pour la modélisation et la reconstruction 3D*. PhD thesis, Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, avril 2013.
- [FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.
- [Gar07] GARNIER L. : *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [Gar10] GARNIER L. : Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. affines non stationnaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*. Vol. 4, Num. 1 (2010), 21–56.
- [GDB15] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J. P. : Points massiques, espace des sphères et « hyperbole ». In *G.T.M.G. 2015* (Poitiers, Avril 2015). http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme_details.
- [Gol04] GOLDMAN R. : The Fractal Nature of Bézier Curves. *Geometric Modeling and Processing*. Vol. 0 (2004), 3.
- [GW04] GOLDMAN R. N., WANG W. : Using invariants to extract geometric characteristics of conic sections from rational quadratic parameterizations. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*. Vol. 14, Num. 3 (2004), 161–187.
- [LSD*14] LANGEVIN R., SIFRE J.-C., DRUOTON L., GARNIER L., PALUSZNY M. : Finding a cyclide given three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics* (2014), 1–18.
- [LW08] LANGEVIN R., WALCZAK P. : Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*. Vol. 132, Num. 5 (2008), 135–178.
- [MWW01] MORIN G., WARREN J. D., WEIMER H. : A subdivision scheme for surfaces of revolution. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 18, Num. 5 (2001), 483–502.
- [Zai98] ZAÏR C. E. : *Formes fractales à pôles basées sur une généralisation des I.F.S.* PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON - 1, 1998.