Rapport Préliminaire Math 2019

Florian Fziaine
Ian Gruson

December 2019

1 Introduction

Pour ce projet nous devons résoudre des équations de degré 3 à 5 en utilisant le solveur de bernstein et en comparant les résultats obtenues avec cette méthode et les méthodes usuelles. Le solveur de Bernstein est principalement utiliser en informatique graphique comme par exemple dans les logiciels de lancer de rayon. Cette méthode permet de calculer l'intersection entre un rayon et une forme.
Dans un premier temps nous décrirons les méthodes usuelles puis nous verrons le fonctionnement du solveur de Bernstein.

2 Methodes Usuelles

Dans cette partie nous verrons comment trouver les racines d'un polynôme de degré 3 et 4, les polynômes de degré 5 n'étant pas resolubles par radicaux il n'existe pas de résolution général.

2.1 Méthode de Cardan

La méthode de cardan est utilisée afin de trouver les racines des polynômes de degré 3.
Cette méthode consiste a transformer notre équation de la forme:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

A la forme:

$$z^3 + pz + q = 0$$

p et q sont 2 réels.
Cette équation a donc de 1 a 3 solutions z_k avec:

$$z_k = u_k + v_k$$

et:

$$u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$$

$$u_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$$

où $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
on a 3 solutions:

- $\Delta > 0$: 3 soltions réeles:

$$\begin{cases} z_0 = u + \bar{u} \\ z_1 = ju + \bar{j}u \\ z_2 = j^2u + \bar{j^2}u \end{cases}$$

- $\Delta = 0$: 2 soltions réeles dont 1 multiple

$$\begin{cases} z_0 = \frac{3q}{p} \\ z_1 = z_2 = \frac{-3q}{2p} \end{cases}$$

- $\Delta < 0$: 1 soltion réele et 2 solutions imaginaires

$$\begin{cases} z_0 = u + v \\ z_1 = ju + \bar{j}v \\ z_2 = j^2u + \bar{j^2}v \end{cases}$$

2.2 Méthode de Ferrari

Pour les polynômes de degré 4 il existe plusieurs mtéhodes pour trouver les racines, nous verrons la Méthode de Ferrari.

3 Methode informatique

Afin de résoudre informatiquement des polynômes de degrés 3 a 5 nous allons utiliser le solveur de Berstein: pour cela nous devons, dans un premier temps, passer notre polynôme dans la base de Bernstein. Nous devrons ensuite utiliser l'algorithme de De Casteljeau afin de trouver les racines.

3.1 Polynômes de Bernstein

Nous devons tout d'abord convertir notre fonction dans la base de bernstein or nous savons que:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} P_i B_i^m(x) \tag{1}$$

avec:

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \tag{2}$$

on procède ensuite par identification.

3.1.1 Cas d'un polyome de degré 3

Dans le cas d'un polynomes de degré 3 on a:

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Or:

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}$$

donc:

$$\begin{aligned}
B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\
&= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\
B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2 \\
&= 3t(1-2t+t^2) \\
&= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\
B_2^3(t) &= 3t^2(1-t) \\
&= 3t^2 - 3t^3 \\
B_3^3(t) &= t^3
\end{aligned}$$

On peut donc en deduire que:

$$\begin{aligned}
t^3 &= B_3^3 \\
t^2 &= \frac{B_2^3}{3} + B_3^3 \\
t &= \frac{B_1^3}{3} + \frac{2B_2^3}{3} + B_3^3 \\
1 &= B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3
\end{aligned}$$

On remplace ensuite dans f(t) pour obtenir:

$$\begin{aligned}
f(t) &= a(B_3^3) + b(\frac{B_2^3}{3} + B_3^3) + c(\frac{B_1^3}{3} + \frac{2B_2^3}{3} + B_3^3) + d(B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \\
&= B_0^3 d + B_1^3(\frac{c}{3} + d) + B_2^3(\frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + d) + B_3^3(a + b + c + d)
\end{aligned}$$

par identification on peut en deduire que:

$$\begin{aligned}
P_0 &= d \\
P_1 &= \frac{c}{3} + d \\
P_2 &= \frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + d \\
P_3 &= a + b + c + d
\end{aligned}$$

3.2 Algorithme de De Casteljeau

Maintenant que nous connaissons les coordonnées de points de contrôles nous allons utiliser l'algorithme de De Casteljeau afin de déterminer les racines du polynôme. Cet algorithme permet, de manière récursive, de diviser la courbe en 2 et de recalculer les points de contrôle pour chaque partie de la courbe. L'algorithme s'arrête après un certain nombre de récursion que nous pouvons choisir en fonction de la précision souhaité.
Les points de contrôles déterminés précédemment permettent de savoir si un portion de courbe contiens 0.
En effet, dans le cas d'un polynôme de degré 3, nous avons 4 points de contrôles, si l'un d'eux ne se trouve pas du coté de l'axe des axis alors il se peut que la courbe s'annule dans l'intervalle $[P_0; P_3]$, mais nous ne pouvons être sûr de cela que si ce sont dans les points de contrôle P_0 et P_3 qui se trouvent de part et d'autre de la courbe. Dans le cas de P_1 ou P_2 une recherche plus approfondi sera nécessaire.
Pour les portions de courbe dont les points de contrôles se trouvent tous du même coté nous pouvons être sûr qu'elles ne contiennent pas 0 et nous pouvons donc les exclure de la recherche. Nous allons donc utiliser l'algorithme de De Castlejeau afin d'éliminer les portions de courbes qui ne contiennent pas 0 jusqu'à un certain degré de précision. Une fois le degré de précision atteint on peut prendre le milieu du segment obtenu comme racine de notre équation.