Estimation distribuée d'une espérance conditionnelle

Igor Colin

30 juin 2014

Rappels

Estimation de fonction

Objectif et formulation

- Objectif : regrouper les utilisateurs par centres d'intérêts communs
- Notations :
  - $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$: caractéristiques des utilisateurs (musiques, historique des conversations, etc.)
  - $D : (X, Y) \mapsto D(X, Y)$: fonction de dissimilarité entre deux vecteurs de caractéristiques
  - P : partition des utilisateurs
  - Φ_P : fonction d'appartenance au même *cluster*

Problème

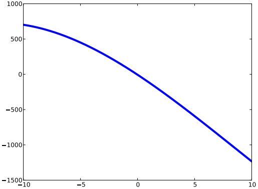
- Nouvel objectif : trouver la solution du problème

$$\min_P w(P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D(X_i, X_j)\Phi_P(X_i, X_j)$$

- Idée : estimer $f : x \mapsto \mathbb{E}[D(x, X)\Phi_P(x, X)]$
- Contrainte : les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ ne sont pas simultanément accessibles

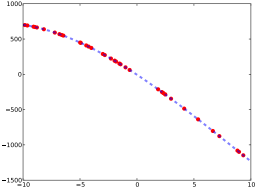
Méthode générale de regression

- Notations :
  - f : fonction à estimer



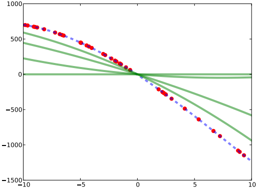
Méthode générale de regression

- Notations :
  - f : fonction à estimer
  - $\{(x_i, f(x_i))\}_{1 \leq i \leq n}$: observations



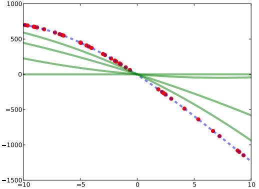
Méthode générale de regression

- Notations :
  - f : fonction à estimer
  - $\{(x_i, f(x_i))\}_{1 \leq i \leq n}$: observations
  - $\hat{f} : (x;\theta) \mapsto \hat{f}(x;\theta)$: estimateur



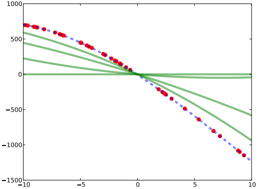
Méthode générale de regression

- Notations :
  - f : fonction à estimer
  - $\{(x_i, f(x_i))\}_{1 \leq i \leq n}$: observations
  - $\hat{f} : (x; \theta) \mapsto \hat{f}(x; \theta)$: estimateur
  - $\hat{R} : \theta \mapsto \hat{R}(\theta)$: risque empirique



Méthode générale de regression

- Notations :
  - f : fonction à estimer
  - $\{(x_i, f(x_i))\}_{1 \leq i \leq n}$: observations
  - $\hat{f} : (x; \theta) \mapsto \hat{f}(x; \theta)$: estimateur
  - $\hat{R} : \theta \mapsto \hat{R}(\theta)$: risque empirique



- Objectif : trouver θ^* solution de

$$\min_{\theta \in \Theta} \hat{R}(\theta)$$

Exemple

- Exemple : estimation polynomiale
  - $\hat{f} : (x; \theta) \mapsto \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$,
  - $\hat{R}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{f}(x_i) - f(x_i) \right)^2$
- Qualité dépendante du choix de $\hat{f}$

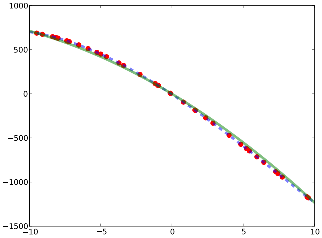


FIGURE: $\hat{f}$ adaptée.

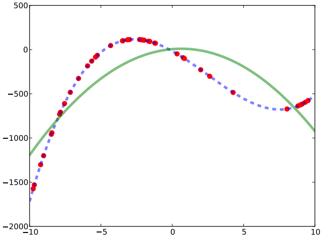


FIGURE: $\hat{f}$ non adaptée.

Application au problème initial

- Fonction à estimer : $f : x \mapsto \mathbb{E}\left[D(x, X)\Phi_P(x, X)\right]$
- Risque empirique : moindres carrés
- Estimateur à noyaux :

$$\hat{f}(x; \theta, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{K} w_k h(x - \theta_k)$$

où h est un noyau gaussien.

`Ajout figures noyaux 1D/2D`