Algorithmen und Datenstrukturen
3. Übungsserie

Florian Ludewig (185722)

26. Mai 2020

Aufgabe 1

a)

`STOOGE-SORT` funktioniert für Felder mit 0, 1 oder 2 Elementen:

- **0 Elemente**
  Das Feld ist bereits sortiert.
- **1 Element**
  Das Feld ist bereits sortiert.
- **2 Elemente**
  Sei `A=[x,y]`, dann ist `i=0` und `j=1`. Getauscht wird, wenn $y < x$, wodurch das Feld in jedem Fall korrekt sortiert ist.
  Außerdem ist $l = j - i + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$ und $2 \not> 2$ wodurch der Algorithmus terminiert.

Angenommen `STOOGE-SORT` funktioniert für alle Felder der Länge $n - 1$ oder kleiner.
Betrachten eines Feldes `A` der Länge n. Der Algorithmus arbeitet drei Schritte ab:

1. `STOOGE-SORT(i,j-k)`
   Hier wird `STOOGE-SORT` rekursiv mit $i = 0$ und $j = (n-1) - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ aufgerufen. Weil wir davon ausgehen, dass der Algorithmus für Felder mit kleineren Längen funktioniert, sind nach diesem rekursiven Aufruf alle Zahlen im ersten Drittel des Feldes $[0, ..., \lfloor \frac{n}{3} \rfloor]$ kleiner als im zweiten Drittel $[\lceil \frac{n}{3} \rceil, ..., n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor]$.
2. `STOOGE-SORT(i+k,j)`
   Nun wird `STOOGE-SORT` rekursiv mit $i = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ und $j = n - 1$ aufgerufen. Danach sind mit Sicherheit alle Zahlen im zweiten Drittel des Feldes $[\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, ..., n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor]$ kleiner als die Zahlen im letzten Drittel des Feldes $[n - \lceil \frac{n}{3} \rceil, ..., n-1]$.

Demnach befinden sich an diesem Punkt die größten Zahlen im letzten Drittel des Feldes.

3. `STOOGE-SORT(i,j-k)`
   Zum Schluss wird `STOOGE-SORT` nochmal rekursiv mit $i = 0$ und $j = (n - 1) - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ aufgerufen, wodurch das Feld in den ersten beiden Dritteln sortiert wird. Weil die größten Zahlen sich bereits im letzten Drittel befinden ist das Feld nach diesem Schritt vollständig sortiert.

b)

`STOOGE-SORT` ist ein rekursiver Algorithmus und seine Laufzeit kann durch folgendes rekursives Schema beschrieben werden:

$$T(0) = 1, T(1) = 1, T(2) = 1$$

$$T(n) = 3 \cdot T(\frac{2}{3}n) + O(1) = 3 \cdot T(\frac{n}{1.5}) + O(1)$$

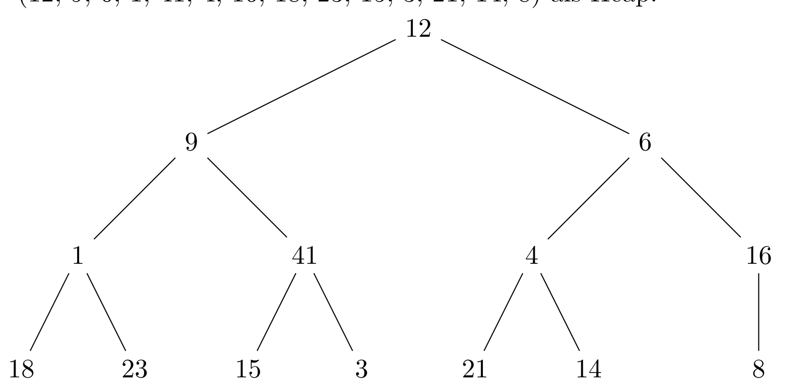
Weil der Algorithmus sich selbst **drei** mal Aufruft und jedes mal **zwei Drittel** des Feldes sortiert. Mithilfe des ersten Falles des Mastertheorems lässt sich dann die Laufzeit bestimmen:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_{\frac{3}{2}} 3}) \approx \Theta(n^{2.7})$$

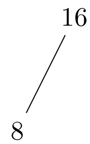
Aufgabe 2

a)

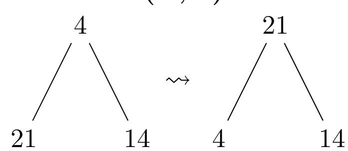
A = (12, 9, 6, 1, 41, 4, 16, 18, 23, 15, 3, 21, 14, 8) als Heap:



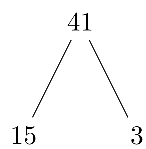
- **HEAPIFY(A, 7)**



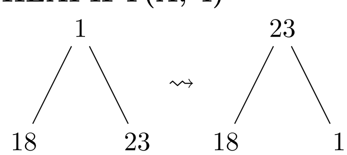
- **HEAPIFY(A, 6)**



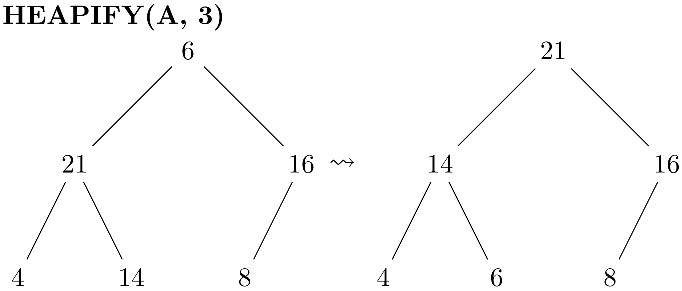
- **HEAPIFY(A, 5)**



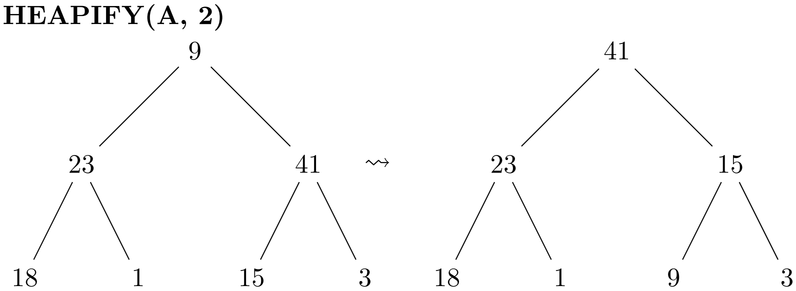
- **HEAPIFY(A, 4)**



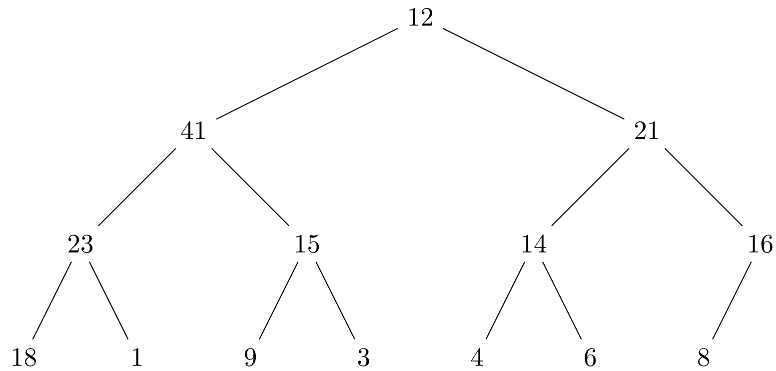
- **HEAPIFY(A, 3)**



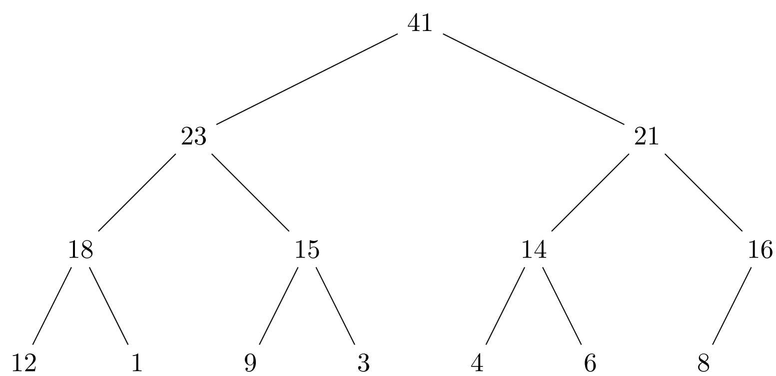
- **HEAPIFY(A, 2)**



- **HEAPIFY(A, 1)**

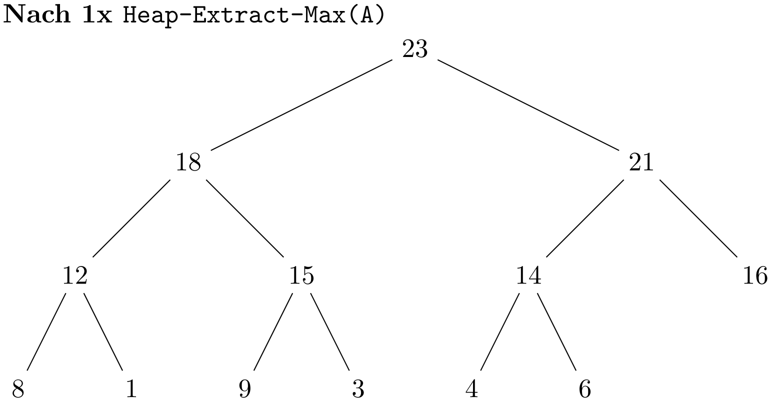


$\rightsquigarrow$

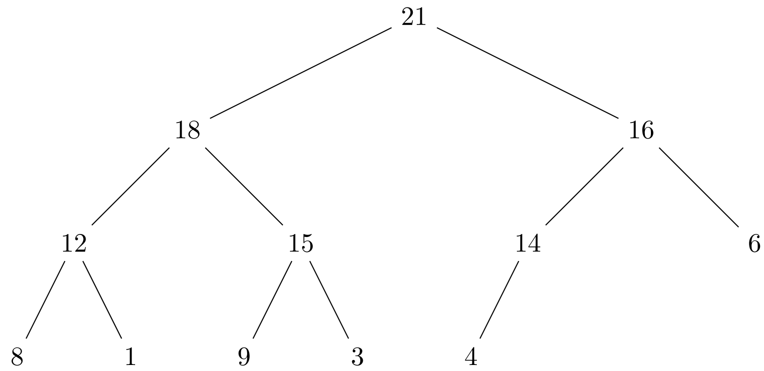


b)

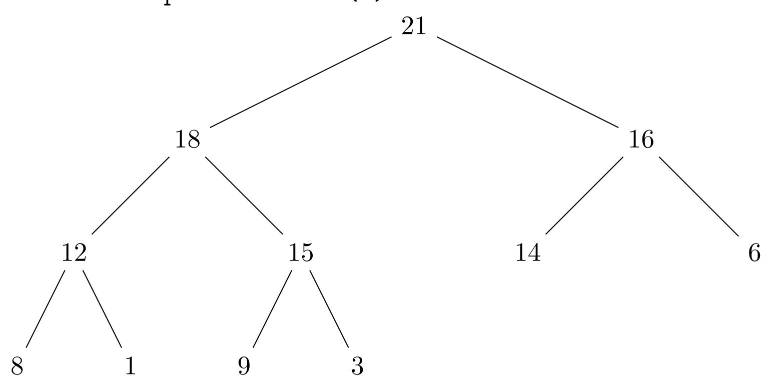
- **Nach 1x** `Heap-Extract-Max(A)`



- **Nach 2x** `Heap-Extract-Max(A)`



- **Nach 3x** `Heap-Extract-Max(A)`



Aufgabe 3

a)

- `HeapDelete(A,i)`
  $A[i] \Leftarrow A[\text{heapsize}[A]]$
  $\text{heapsize}[A] \Leftarrow \text{heapsize}[A] - 1$
  $\text{MaxHeapify}(A, i)$

  `MaxHeapify` hat eine Laufzeit von $\mathrm{O}(\log n)$. Somit hat dieser `HeapDelete` Algorithmus ebenfalls eine Laufzeit von $\mathrm{O}(\log n)$.

b)

- `FindMin(A,i)`

  $min \Leftarrow A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1]$
  for $i \Leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ **to** n **do**
      if $A[i] < min$ **then**
          $min \Leftarrow A[i]$
      end if
  end for
  return min

  `FindMin` braucht höchstens $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Schritte und hat somit eine Laufzeit von $O(n)$.

Aufgabe 4

a)

$$T(n) = 5 \cdot T(\frac{n}{2}) + n\sqrt{n} \leadsto a = 5, b = 2, f(n) = n\sqrt{n}$$

$$n^{log_b a} = n^{log_2 5} \approx n^{2.3} > n^{1.5} = n \cdot n^{0.5} = f(n)$$

$$\text{Fall 1, weil } f(n) \in O(n^{log_b(a)-\epsilon}) \approx O(n^{2.3-\epsilon})$$

$$\implies T(n) \in \Theta(n^{log_2 5})$$

b)

$$T(n) = 16 \cdot T(\frac{n}{8}) + n^{\frac{4}{3}} \leadsto a = 16, b = 8, f(n) = n^{\frac{4}{3}}$$

$$n^{log_b a} = n^{log_8 16} = n^{\frac{4}{3}} = f(n)$$

$$\text{Fall 2, weil } f(n) \in \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^{\frac{4}{3}})$$

$$\implies T(n) \in \Theta(n^{\frac{4}{3}} \cdot \log n)$$

c)

$$T(n) = 5 \cdot T(\frac{n}{7}) + n \text{ log } n \rightsquigarrow a = 5, b = 7, f(n) = n \text{ log } n$$

$$n^{log_b a} = n^{log_7 5} \approx n^{0.8} < n^1 < f(n)$$

$$\text{Fall 3, weil } f(n) \in \Omega(n^{log_b a + \epsilon}) \approx \Omega(n^{0.8+\epsilon})$$

$$\text{Regularitätsbedingung prüfen:}$$

$$a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n) \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{n}{7} \text{log } \frac{n}{7} \leq c \cdot n \text{ log } n;$$

$$\implies c \geq \frac{5}{7} \cdot 1 - \text{log}_n 7; \quad n > 1$$

$$\implies T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n \text{ log } n)$$

d)

$$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{4}) + 3n^{\frac{1}{4}} + \text{ log } n \rightsquigarrow a = 2, b = 4, f(n) = 3n^{\frac{1}{4}} + \text{ log } n$$

$$n^{log_b a} = n^{log_4 2} = n^{\frac{1}{2}} > f(n)$$

$$\text{Fall 1, weil } f(n) \in \mathrm{O}(n^{\frac{1}{2}-\epsilon})$$

$$\implies T(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$$

e)

$$T(n) = 16 \cdot T(\frac{n}{4}) + n^2 \text{ log } n \rightsquigarrow a = 16, b = 4, f(n) = n^2 \text{ log } n$$

$$n^{log_b a} = n^{log_4 16} = n^2 < f(n)$$

$$\text{Fall 3, weil } f(n) \in \Omega(n^{2+\epsilon})$$

$$\text{Regularitätsbedingung prüfen:}$$

$$a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n) \Leftrightarrow 16 \cdot (\frac{n}{4})^2 \text{ log } \frac{n}{4} \leq c \cdot n^2 \text{ log } n$$

$$\implies c \geq 1 - 2 \cdot \text{log}_n 2; \quad n > 1$$

Es gibt kein n für welches die Regularitätsbedingung gilt.

Das Mastertheorem kann also nicht angewendet werden!