Mathematische Software:

MAPLE : *Symbolisches* Berechnungswerkzeug
(sog. Computeralgebra-System)

MATLAB: *Numerisches* Berechnungswerkzeug (**MAT**rix **LAB**oratory)

Datenstruktur in MATLAB:

Die *Matrix* : $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ **sog. ($n \times m$)-Matrix**

Zahlen sind (1×1)-Matrizen!

MATLAB kann nur *endlich viele* Zahlen darstellen

(sog. Maschinenzahlen) $\Rightarrow$ Rundungsfehler!

Beispiel: 1,2 – 0,4 – 0,4 – 0,4 = 0 . **Ergebnis in MATLAB:**
`ans = –1.1102e-016`.

Ursache: $0{,}4 \underset{dual}{=} 0{,}\overline{0110}$ $\Rightarrow$ **0,4 nur *näherungsweise* darstellbar**

Maschinengenauigkeit in MATLAB: **`eps = 2.2204e-016`**

Maschinengenauigkeit = Abstand von 1 zur nächsthöheren Maschinenzahl.

Lineares Gleichungssystem **in allgemeiner Schreibweise:**

$$2x + 4y - 4z = 1$$
$$3x + 6y + 7z = 3$$
$$2x + 4y - 9z = 0$$

Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \textbf{j -te Spalte} \\
\textbf{k-te Zeile} & \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\ell} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ell} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} * \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}
\end{array}$$

Rang(A) = Anzahl linear unabhängiger Spalten von A

A x = b **lösbar** $\Leftrightarrow$ **Rang (A) = Rang (A , b)**

Null(A) = Kern(A) = $\{x \,/\, A\,x = 0\}$

Lösungsmenge L von A x = b :

$A\,x_0 = b \;\Rightarrow\; \mathrm{L} = x_0 + \mathrm{Kern(A)} = \{x_0 + x \,/\, A\,x = 0\}$

Lösungsmenge linearer Gleichungen

Beispiel 1 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

A x = b $\Rightarrow$ x = A^{-1} b

Spezielle Lösung:

```
>> xo = pinv(A)*b
```

Lösungsmenge von A x = 0

```
>> Kern_A = null(A)
```

```
xo =
  -0.1204
 -0.3600
  0.7400
 -0.3438
 -0.2600
```

```
Kern_A =
   -0.8425    0.3271
    0.1987    0.6587
    0.2193    0.4668
    0.3932   -0.1526
    0.2193    0.4668
```

Lösungsmenge von A x = b:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -0.1204 \\ -0.3600 \\ 0.7400 \\ -0.3438 \\ -0.2600 \end{pmatrix}}_{\mathbf{xo}} + \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} -0.8425 \\ 0.1987 \\ 0.2193 \\ 0.3932 \\ 0.2193 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0.3271 \\ 0.6587 \\ 0.4668 \\ -0.1526 \\ 0.4668 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Kern\ (A)}}$$

C_1 und C_2 beliebig wählbar.

Lösungsmenge linearer Gleichungen

Beispiel 2 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

Matrix A quadratisch!

⇒ det(A) existiert

```
>> det_A=det(A)
det_A = -364
```

```
>> x = inv(A)*b
```
oder:
```
>> x = A\b
```
"Backslash-Division"

Ergebnis `x =`

```
 -10.758
-0.45055
  2.1758
   3.033
```

Beispiel 3:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

Gleichungssystem nicht lösbar!

Trotzdem:

```
>> x = pinv(A)*b
```
oder: `>> x = A\b` **liefert Ergebnis** `x =`

```
 0.48109
-0.22987
```

MATLAB berechnet die

"beste Näherung" für Ax = b

Rundungsfehler

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0000001 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}0000001 \end{pmatrix}}_{b}$$

Lösung: $x_1 = x_2 = 1$ **mit det(A) = 0,0000001 ≠ 0 (!!)**

Mit MATLAB:

format short	format long
x =	x =
1.0000	1.000000002220446
1.0000	0.999999997779554

"Kondition" eines Gleichungssystems (der Matrix A)

```
cond(A) =  4.000000195305916e+007
```

Der Gauß-Algorithmus

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= 1 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ - x_2 - 7x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= -5 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{0} & -1 & -7 \\ \color{red}{0} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ - x_2 - 7x_3 &= 1 \\ -13x_3 &= -3 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{0} & -1 & -7 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -13 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{c}$$

Ergebnis:

$$x_3 = 0,230769\ldots \quad\Rightarrow\quad x_2 = -2,61538\ldots \quad\Rightarrow\quad x_1 = 6,53846\ldots$$

Gauß-Algorithmus: Gleichungssystem mit Dreiecksmatrix

$$\left.\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 &= c_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 &= c_2 \\ u_{33}x_3 + u_{34}x_4 &= c_3 \\ u_{44}x_4 &= c_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{u_{11}}\left(c_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4\right) \\ x_2 &= \frac{1}{u_{22}}\left(c_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4\right) \\ x_3 &= \frac{1}{u_{33}}\left(c_3 - u_{34}x_4\right) \\ x_4 &= \frac{1}{u_{44}}c_4 \end{aligned}\right.$$

In Matrixschreibweise:

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}}\left[c_1 - \begin{pmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{u_{22}}\left[c_2 - \begin{pmatrix} u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right]$$

$$x_3 = \frac{1}{u_{33}}\left[c_3 - \left(u_{34}\right)\left(x_4\right)\right]$$

$$x_4 = \frac{1}{u_{44}}\, c_4$$

Allgemein:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underbrace{x_k = \frac{1}{u_{kk}}\left[c_k - \begin{pmatrix} u_{k,k+1} & \dots & u_{k,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]}_{\text{für } k\,=\,1\,,\;2\,,\;\dots\,,\;n-1} \\ &x_n = \frac{c_n}{u_{nn}} \end{aligned}}$$

Gauss-Verfahren

$G1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad G2 - \lambda \times G1$, wo $a_{21} - \lambda a_{11} = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = a_{21}/a_{11}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} G2: \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & G2 - \left(a_{21}/a_{11}\right) \times G1 \\ \vdots & \vdots \\ Gn: \; a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & Gn - \left(a_{n1}/a_{11}\right) \times G1 \end{array}}$$

1-ter Eliminations-Schritt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix}$$

1-ter Eliminations-Schritt als Matrix-Multiplikation *L A x = L b* :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = L \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}}_{LA \underset{\text{rename}}{=} A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix}}_{Lb \underset{\text{rename}}{=} b}$$

Äquivalentes Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A\,x = b}$$

nach dem 1. Eliminationsschritt

Der Eliminationsschritt in MATLAB

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31}/a_{11} & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}/a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ a_{21}/a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1}/a_{11} \end{pmatrix}}_{m} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{e} \Rightarrow \begin{cases} L = E - me \\ LA = A - meA \end{cases}$$

$$LA = A - meA = A - m(1\ 0\ \ldots\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

in MATLAB: $= \boxed{A - m * A(1\ ,\ \ :)\ \underset{\text{rename}}{=}\ A}$

$$Lb = b - meb = b - m(1\ 0\ \ldots\ 0)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

in MATLAB: $= \boxed{b - m * b(1\ ,1)\ \underset{\text{rename}}{=}\ b}$

wobei:

$\boldsymbol{m}$ **= A(: , 1) / A (1 , 1)**

$\boldsymbol{m}$ **(1,1) = 0**

Im 2-ten Eliminations-Schritt Zugriff nur auf:

$$\begin{pmatrix} a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a^*_{n2} & \cdots & a^*_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

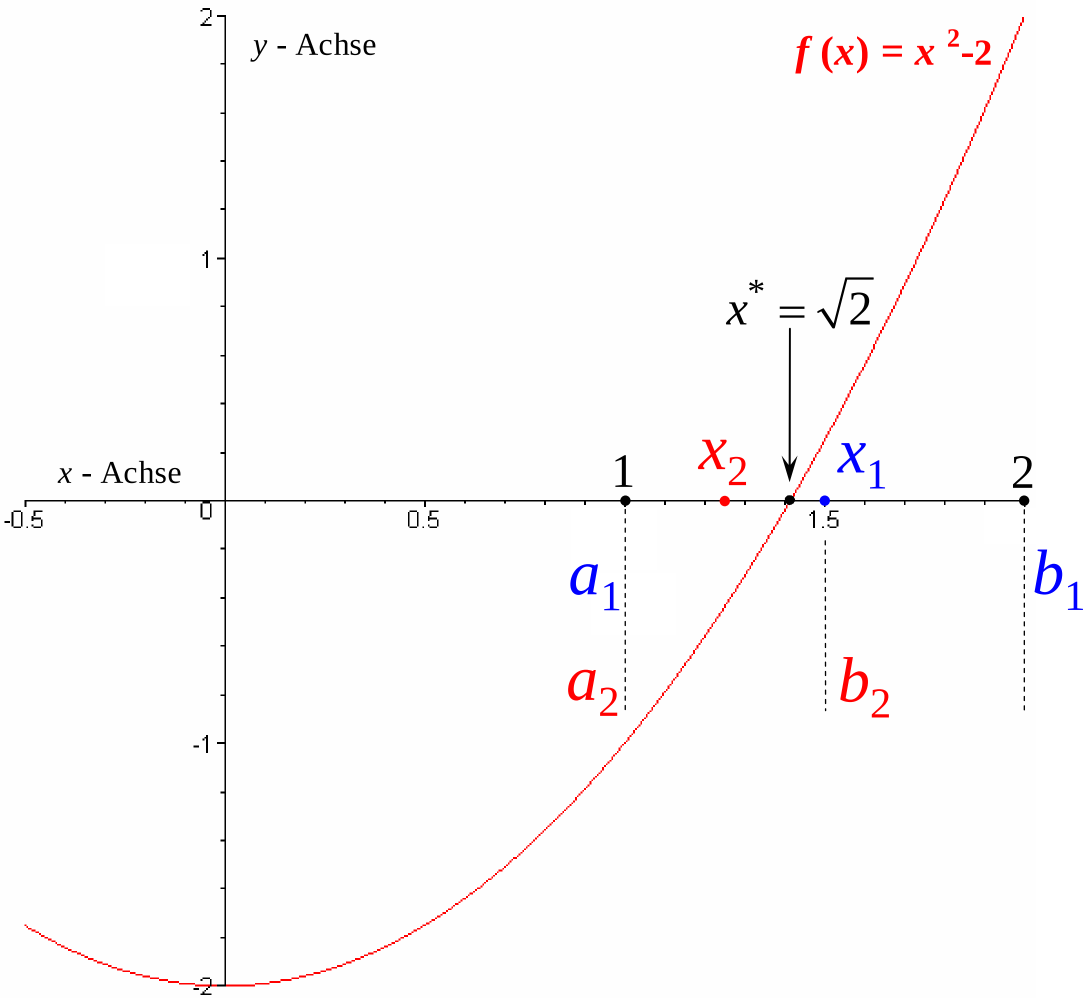
Beispiel $n = 4$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{\textbf{A(1:end,1:end)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}}_{\textbf{b(1:end,1)}} \xrightarrow[\text{1.Schritt}]{\text{Gauss\_Elimination}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & a^*_{24} \\ 0 & a^*_{32} & a^*_{33} & a^*_{34} \\ 0 & a^*_{42} & a^*_{43} & a^*_{44} \end{pmatrix}}_{\textbf{A(1:end,1:end)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b^*_2 \\ b^*_3 \\ b^*_4 \end{pmatrix}}_{\textbf{b(1:end,1)}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & a^*_{24} \\ 0 & a^*_{32} & a^*_{33} & a^*_{34} \\ 0 & a^*_{42} & a^*_{43} & a^*_{44} \end{pmatrix}}_{\textbf{A(2:end,2:end)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b^*_2 \\ b^*_3 \\ b^*_4 \end{pmatrix}}_{\textbf{b(2:end,1)}} \xrightarrow[\text{2.Schritt}]{\text{Gauss\_Elimination}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & a^*_{24} \\ 0 & 0 & a^{**}_{33} & a^{**}_{34} \\ 0 & 0 & a^{**}_{43} & a^{**}_{44} \end{pmatrix}}_{\textbf{A(2:end,2:end)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b^*_2 \\ b^{**}_3 \\ b^{**}_4 \end{pmatrix}}_{\textbf{b(2:end,1)}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & a^*_{24} \\ 0 & 0 & a^{**}_{33} & a^{**}_{34} \\ 0 & 0 & a^{**}_{43} & a^{**}_{44} \end{pmatrix}}_{\textbf{A(3:end,3:end)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b^*_2 \\ b^{**}_3 \\ b^{**}_4 \end{pmatrix}}_{\textbf{b(3:end,1)}} \xrightarrow[\text{3.Schritt}]{\text{Gauss\_Elimination}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & a^*_{24} \\ 0 & 0 & a^{**}_{33} & a^{**}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a^{***}_{44} \end{pmatrix}}_{\substack{\textbf{A(3:end,3:end)} \\ \textbf{ObereDreiecksmatrix}}}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b^*_2 \\ b^{**}_3 \\ b^{***}_4 \end{pmatrix}}_{\textbf{b(3:end,1)}}$$

Iterationsverfahren: Intervallschachtelungsverfahren (sog. Bisektionsverfahren)



Startintervall $[\, a_1 , b_1 \,]$
mit $f(a_1)\, f(b_1) < 0$,
also $x^* \in \,]\, a_1 , b_1 \,[$.

1. Näherungswert

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

1. Fall: $f(x_1) = 0$
$\Rightarrow\; x_1 = x^*$

2. Fall: $f(a_1)\, f(x_1) < 0$
$\Rightarrow\; x^* \in \,]\, a_1 , x_1 \,[$

Setze $[a_2 \,,\, b_2] \underset{def.}{=} [a_1 \,,\, x_1]$

3. Fall: $f(a_1)\, f(x_1) > 0$
$\Rightarrow\; f(x_1)\, f(b_1) < 0$
$\Rightarrow\; x^* \in \,]\, x_1 , b_1 \,[$

Setze $[a_2 \,,\, b_2] \underset{def.}{=} [x_1 \,,\, b_1]$

Wiederhole Verfahren am Intervall $[\, a_2 , b_2 \,]$:

2. Näherungswert: $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ **usw.** $\Rightarrow$

$$\boxed{x_k = \frac{a_k + b_k}{2} \;,\quad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

Fehlerabschätzung beim Bisektionsverfahren

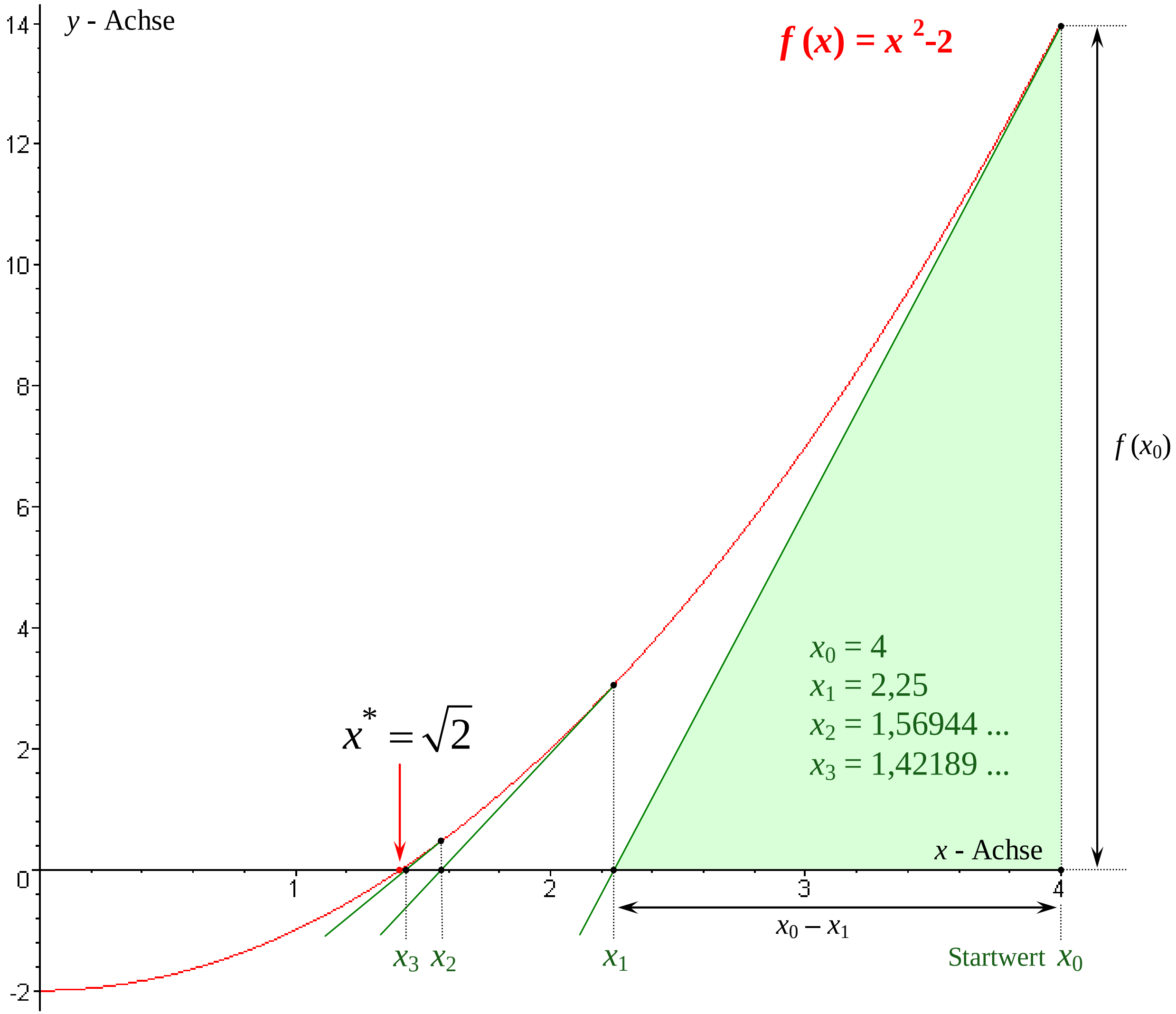
$$\left| x_1 - x^* \right| < \frac{b_1 - a_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left| x_2 - x^* \right| < \frac{b_2 - a_2}{2} \quad = \frac{1}{2}\frac{b_1 - a_1}{2} \quad = \frac{b_1 - a_1}{2^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left| x_k - x^* \right| < \frac{b_k - a_k}{2} \quad = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} \quad = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \leq \varepsilon$$

Vorteil des Bisektionsverfahrens: **Konvergenz stets gesichert.**

Nachteil des Bisektionsverfahrens: **Konvergenz sehr langsam.**

Das Newtonverfahren



Löse die Gleichung

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

Wähle Startwert x_0 mit Tangente an Graph f

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Newtonsche Rekursionsformel

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Hier: $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k} \quad , \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Rekursionsformel:

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k} \quad , \; k = 0, 1, 2, 3, \; \ldots}$$

Startwert $x_0 = 2$:

$$x_1 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad x_2 = \frac{1,5}{2} + \frac{1}{1,5} = \frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$$

$$x_3 = \frac{17/12}{2} + \frac{1}{17/12} = \frac{577}{408} = 1,41421568\ldots$$

$$x_4 = \frac{577/408}{2} + \frac{1}{577/408} = \frac{665857}{470832} = 1,41421356237469\ldots$$

Vorteil des Newtonverfahrens: **Konvergenz sehr schnell.**

Nachteil des Newtonverfahrens: **Konvergenz nicht gesichert.**

Beispiel $x_0 = 0 \;\Rightarrow\; x_k = \infty$ für alle k

Fixpunktgleichung:

Newtonverfahren: $x_{k+1} = F(x_k)$ mit $F(x_k) \underset{def.}{=} x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Newtonverfahren konvergent: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

$\Rightarrow \quad x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_k) = F(x^*)$ **(letzteres wenn *F* stetig)**

$\Rightarrow$ **Newtonverfahren konvergent gegen** x^* **wenn** $\underbrace{F(x^*) = x^*}$

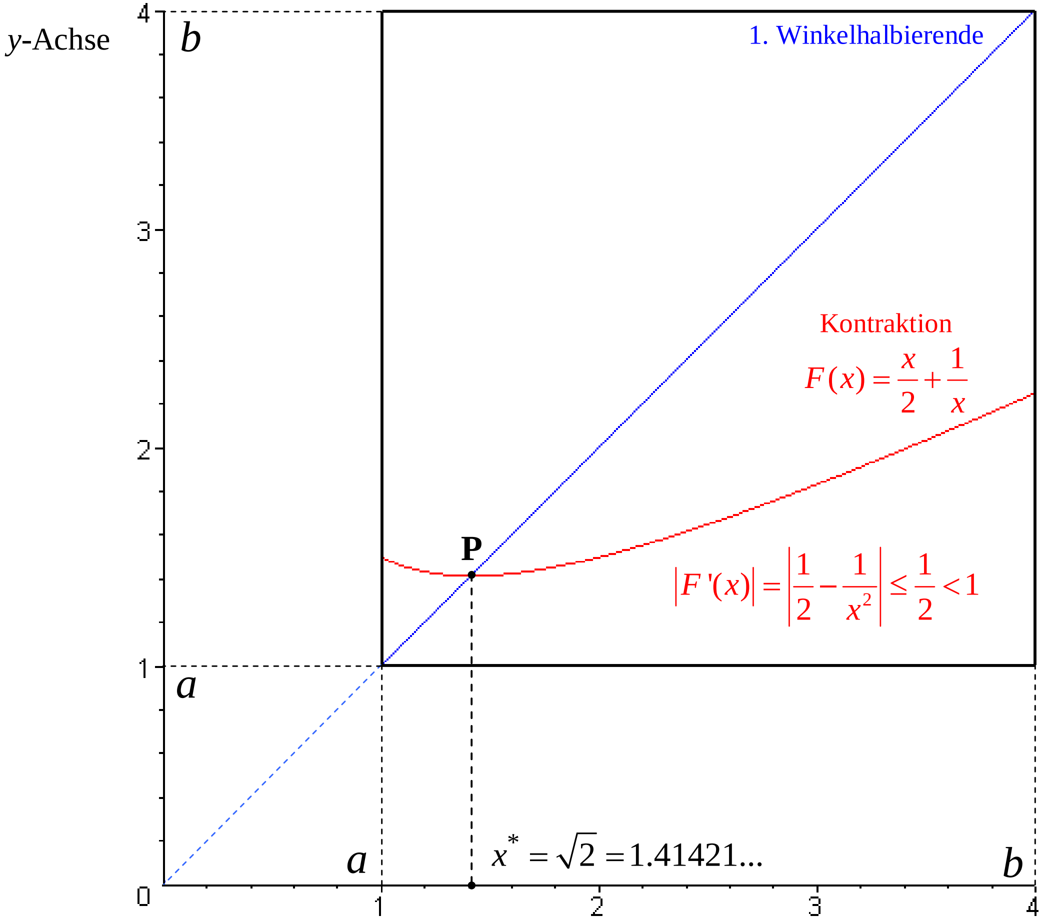
sog. *Fixpunktgleichung*

x* **heißt *Fixpunkt* von *F***

Frage:

Wann hat die Gleichung $F(x^*) = x^*$ eine Lösung? (also einen Fixpunkt?)

Kontrahierende Funktionen:



$F:[a,b]\to\mathbb{R}$
heißt ***kontrahierend*** auf $[a\,,b]$,
wenn mit $L\in\,]0\,,1[$ gilt:

1. $F(x)\in[a,b]$ für $x\in[a,b]$
2. $\dfrac{|F(x)-F(y)|}{|x-y|}\le L$ für $x,y\in[a,b]$

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$
ist ***kontrahierend*** auf $[a\,,b]$, falls:

1. $F(x)\in[a,b]$ für $x\in[a,b]$
2. $|F'(x)|\le L<1$ für $x\in[a,b]$

Beweis: Sei o.B.d.A. $a\le x<y\le b$.
Mittelwertsatz:

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y}=F'(\vartheta)\ ,\ x<\vartheta<y$$

$$\Rightarrow\ \frac{|F(x)-F(y)|}{|x-y|}=|F'(\vartheta)|\le L<1$$

Fixpunktsatz von Banach:

Sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine **Kontraktion. Dann gilt**

1. $x^*=F(x^*)$ für **genau ein** $x^*\in[a,b]$
2. $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}F(x_k)=x^*$ für **jeden Startwert** $x_0\in[a\,,b]$

Fixpunktsatz von Banach:

Sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine **Kontraktion**. **Dann gilt**

1. $x^* = F(x^*)$ für **genau ein** $x^* \in [a,b]$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_k) = x^*$ für **jeden Startwert** $x_0 \in [a\,,b]$

Beweisskizze: **Die Existenz von x^* sei vorausgesetzt.**

$$\left|x_k - x^*\right| = \left|F\left(x_{k-1}\right) - F\left(x^*\right)\right| \le L\left|x_{k-1} - x^*\right| \text{ , weil } F \text{ kontrahierend ist}$$

$$= L\left|F\left(x_{k-2}\right) - F\left(x^*\right)\right| \le L^2\left|x_{k-2} - x^*\right| \text{ , weil } F \text{ kontrahierend ist}$$

$$\le \quad \ldots \quad \le L^k\left|x_0 - x^*\right| .$$

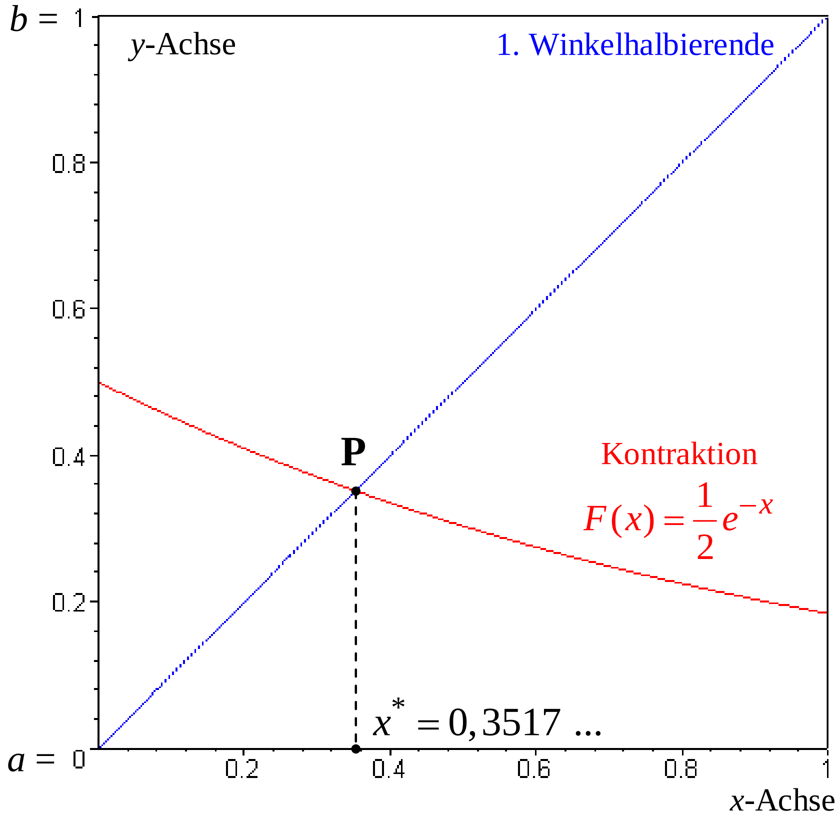
Wegen 0 < L < 1 : $\lim\limits_{k\to\infty} L^k = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k\to\infty} L^k\left|x_0 - x^*\right| = 0$

$$\underset{\text{erst recht}}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty}\left|x_k - x^*\right| = 0 \quad \text{also} \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x^* .$$

Eindeutigkeit von x^* : **Annahme $y^* \ne x^*$ ist auch Fixpunkt**

$$\Rightarrow \left|y^* - x^*\right| = \left|F\left(y^*\right) - F\left(x^*\right)\right| \le L\left|y^* - x^*\right| \underset{L\,<\,1}{<} \left|y^* - x^*\right| \Rightarrow \underbrace{\left|y^* - x^*\right| \underset{\ne}{\le} \left|y^* - x^*\right|}_{\textbf{Widerspruch!}}$$

Beispiel Banachiteration: Löse die Gleichung $2\,x\,e^{x} = 1$. Äquivalente Gleichung: $x = \frac{1}{2}e^{-x} \underset{def.}{=} F(x)$



F **ist stetig und es gilt**

$F([0,1]) \subseteq [0,1]$ **und** $|F'(x)| = \left| -\frac{1}{2}e^{-x} \right| \le \frac{1}{2} < 1\,,\ x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ ***F*** **ist eine** ***Kontraktion*** **auf [0 , 1]**

$\Rightarrow\ x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_{k-1}) \underset{F\ \text{stetig}}{=} F(x^*)$

für ***jeden*** **Startwert** $x_0 \in [0\,,1]$

Banachiteration in MATLAB:

```
X=[];K=[];
x=1;x_vorher=0;k=0;
Eps=1e-5; %Genauigkeit
while abs(x-x_vorher)>=Eps
    x_vorher=x;
    K=[K,k];
    X=[X,x];
    x=exp(-x)/2;
    k=k+1;
end
```

Ablauf:

1. Schleife: | x – x_vorher | = 1
x_vorher = x_0
K=[0]   X=[x_0]   x = x_1 k = 1

2. Schleife: | x – x_vorher | = | $x_1 - x_0$ |
x_vorher = x_1
K=[0,1]   X=[x_0 , x_1]   x = x_2 k = 2

3. Schleife: | x – x_vorher | = | $x_2 - x_1$ |
x_vorher = x_2
K=[0,1,2]   X=[x_0 , x_1 , x_2]   x = x_3 k = 3

usw.

Löse $2\,x\,e^{x} = 1$ mit Newtoniteration. Äquivalente Gleichung: $f(x) \underset{def.}{=} 2xe^{x} - 1 = 0$

Newtoniteration: $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{2xe^{x}-1}{2e^{x}+2xe^{x}}$. **Banachiteration:** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$.

***F* ist stetig und es gilt:**

$F([0.2\ ,\ 1]) \subseteq [0.2\ ,\ 1],\ \ \left|F'(x)\right| \le 0.8 < 1$

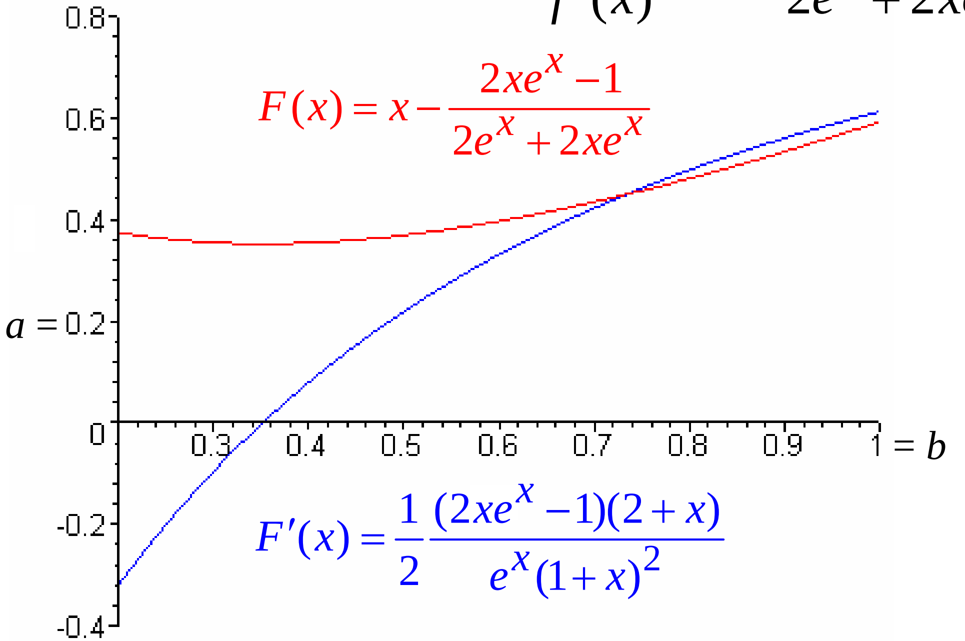
$\Rightarrow$ ***F* ist eine *Kontraktion* auf [0.2 , 1]**

$\Rightarrow\ x^{*} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_{k-1}) \underset{F\ \text{stetig}}{=} F(x^{*})$

für *jeden* Startwert $x_0 \in [\,0.2\ ,\ 1\,]$

<u>Banachiteration in MATLAB</u>:

```
X=[];K=[];
x=1;x_vorher=0;k=0;
Eps=1e-5; %Genauigkeit
while abs(x-x_vorher)>=Eps
    x_vorher=x;
    K=[K,k];
    X=[X,x];
    x=x-(2*x*exp(x)-1)/...
    (2*exp(x)+2*x*exp(x));
    k=k+1;
end
```



Die Konvergenz der Banachiteration ist *linear*:

$$\left|x_{k+1} - x^{*}\right| = \left|F\left(x_k\right) - F\left(x^{*}\right)\right| \le L\left|x_k - x^{*}\right|\ ,\ L < 1$$

Die Konvergenz der Newtoniteration ist *quadratisch*:

$$\left|x_{k+1} - x^{*}\right| \le K\ \left|x_k - x^{*}\right|^{2},\ K > 0$$ **also schneller.**

Satz zur Newtoniteration:

Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.
Sei $x^* \in]c, d[$ ***einfache Nullstelle*** von f also $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$

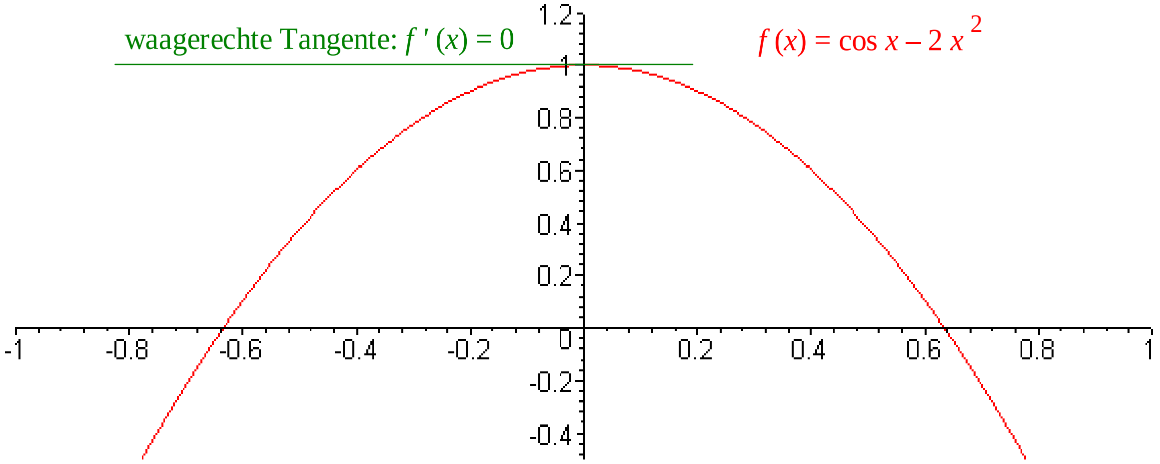
1. Liegt der Startwert $x_0 \in]c, d[$ *nahe genug* bei x^*, so konvergiert die

   Iterationsfolge $x_{k+1} \underset{def.}{=} x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ gegen x^*.

2. Ferner gilt $|x_{k+1} - x^*| \leq K\, |x_k - x^*|^2$, $K > 0$ (***quadratische Konvergenz***)

Beispiel: Löse $f(x) = \cos x - 2x^2 = 0$
mit Newtoniteration

$$\Rightarrow F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos x - 2x^2}{-\sin x - 4x}.$$



Startwert $x_0 = 0$
$\Rightarrow$ **Iteration versagt**

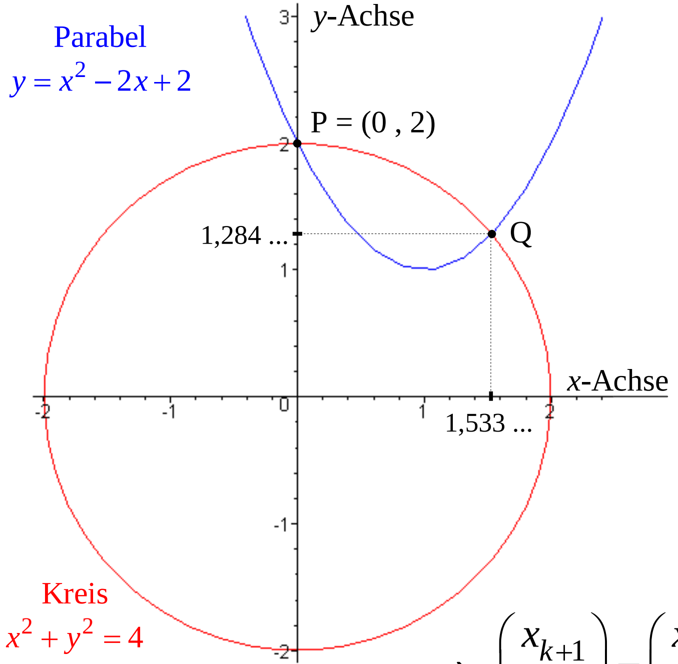
Startwert $x_0 > 0$
$\Rightarrow$ **$x^* = 0.6345$ ...**

Startwert $x_0 < 0$
$\Rightarrow$ **$x^* = - 0.6345$ ...**

Das Newtonverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen

Beispiel: $\left\{\begin{matrix} x^2-2x-y+2=0 & \textbf{Parabel} \\ x^2+y^2-4=0 & \textbf{Kreis} \end{matrix}\right\} \;\Leftrightarrow\; f(x,y) \underset{def.}{=} \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-2x-y+2 \\ x^2+y^2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesucht: Nullstellen $(x\,,y)$ von f .



Newtonverfahren für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **:** $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \;,\; k \geq 0$

Übertragung auf $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **:**

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_k,y_k) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_k,y_k) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_k,y_k) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_k,y_k) \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix}}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_k,y_k) \\ f_2(x_k,y_k) \end{pmatrix} \;,\; k \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2x_k-2 & -1 \\ 2x_k & 2y_k \end{pmatrix}^{-1}} \begin{pmatrix} (x_k-1)^2 - y_k + 1 \\ x_k^2 + y_k^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \overbrace{\frac{1}{2y_k(2x_k-2)+2x_k} \begin{pmatrix} 2y_k & 1 \\ -2x_k & 2x_k-2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} (x_k-1)^2 - y_k + 1 \\ x_k^2 + y_k^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = F(x_k,y_k) \underset{def.}{=} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{4y_k(x_k-1)+2x_k} \begin{pmatrix} 2y_k & 1 \\ -2x_k & 2(x_k-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_k-1)^2 - y_k + 1 \\ x_k^2 + y_k^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$x_{k+1} = F_1(x_k, y_k) \underset{def.}{=} x_k - \frac{2y_k\left(\left(x_k-1\right)^2 - y_k + 1\right) + x_k^2 + y_k^2 - 4}{4y_k(x_k-1) + 2x_k}$$

$$y_{k+1} = F_2(x_k, y_k) \underset{def.}{=} y_k - \frac{-2x_k\left(\left(x_k-1\right)^2 - y_k + 1\right) + 2(x_k-1)\left(x_k^2 + y_k^2 - 4\right)}{4y_k(x_k-1) + 2x_k}$$

```
X=0;Y=1;Eps=1e-10; %Startwerte xo und yo und Genauigkeit
for k=0:100
    x=X;y=Y  %x=xk und y=yk im k-ten Schritt
    X=F1(x,y);Y=F2(x,y); %X=xk+1 und Y=yk+1 als Nachfolger
    if max(abs(X-x),abs(Y-y))<Eps
        break   %Abbruch, wenn Genauigkeit erreicht
    end
end
fprintf('Es waren %u Iterationen nötig: \n',k)
fprintf('x = %.9f  und  y = %.9f\n',X,Y)
```

```
function [X]=F1(x,y)
X=x-(2*y*((x-1)^2-y+1)+x^2+y^2-4)/(4*y*(x-1)+2*x);
```

```
function [Y]=F2(x,y)
Y=y-(-2*x*((x-1)^2-y+1)+2*(x-1)*(x^2+y^2-4))/(4*y*(x-1)+2*x);
```

Newton-Raphson-Iteration

Newton-Iteration:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix } \mathbf{J}(x_k,\, y_k)}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

Schreibe um:

$$\begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \end{pmatrix} \underset{def.}{=} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k) \\ -f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\boxed{f_1(x,y) = \frac{1}{2}\sin(xy) - x = 0 \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = 2y - e^{-x} - 4 = 0}$

$$f_{11}(x,y) \underset{def.}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} y\cos(xy) - 1 \qquad f_{12}(x,y) \underset{def.}{=} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} x\cos(xy)$$

$$f_{21}(x,y) \underset{def.}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = e^{-x} \qquad f_{22}(x,y) \underset{def.}{=} \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2$$

$$\begin{pmatrix} h_{1k} \\ h_{2k} \end{pmatrix} \underset{def.}{=} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_k \cos(x_k y_k) - 1 & \frac{1}{2} x_k \cos(x_k y_k) \\ e^{-x_k} & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}\sin(x_k y_k) - x_k\right) \\ -\left(2y_k - e^{-x_k} - 4\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + h_{1k} \quad \text{und} \quad y_{k+1} = y_k + h_{2k}$$

```
function Newton_Raphson(X,Y,f_1,f_2,f11,f12,f21,f22)
Eps=1e-10;
for k=0:100
    x=X;y=Y; .
    J=[f11(x,y) f12(x,y);f21(x,y) f22(x,y)];b=[-f1(x,y);-f2(x,y)];
    h=J\b;X=X+h(1);Y=Y+h(2);
    if max(abs(X-x),abs(Y-y))<Eps
        break
    end
end
fprintf('Es wurden %u Iterationen benötigt. Die Lösungen: \n',k)
fprintf('x = %.9f  und  y = %.9f\n',X,Y)
```

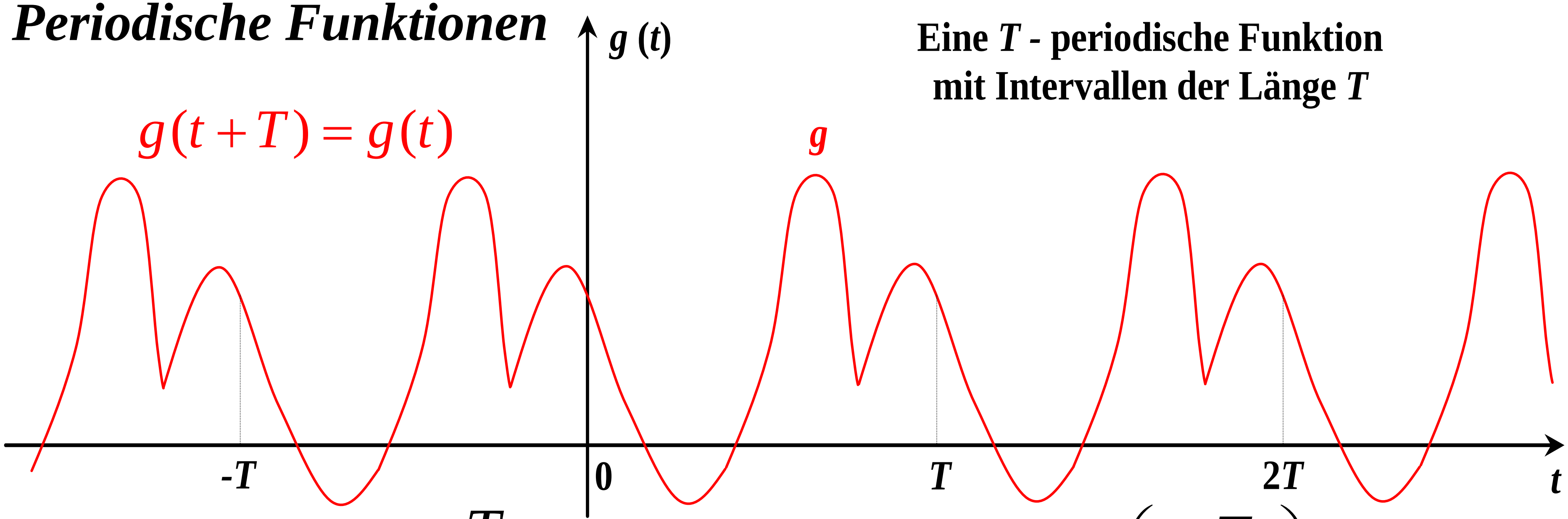
```
function [J11]=f11(x,y)
J11=y*cos(x*y)/2-1;
function [J21]=f21(x,y)
J21=exp(-x);
function [b1]=f1(x,y)
b1=sin(x*y)/2-x;
```

```
function [J12]=f12(x,y)
J12=x*cos(x*y)/2;
function [J22]=f22(x,y)
J22=2;
function [b2]=f2(x,y)
b2=2*y-exp(-x)-4;
```

Periodische Funktionen

$$g(t+T)=g(t)$$

Eine *T* - periodische Funktion mit Intervallen der Länge *T*

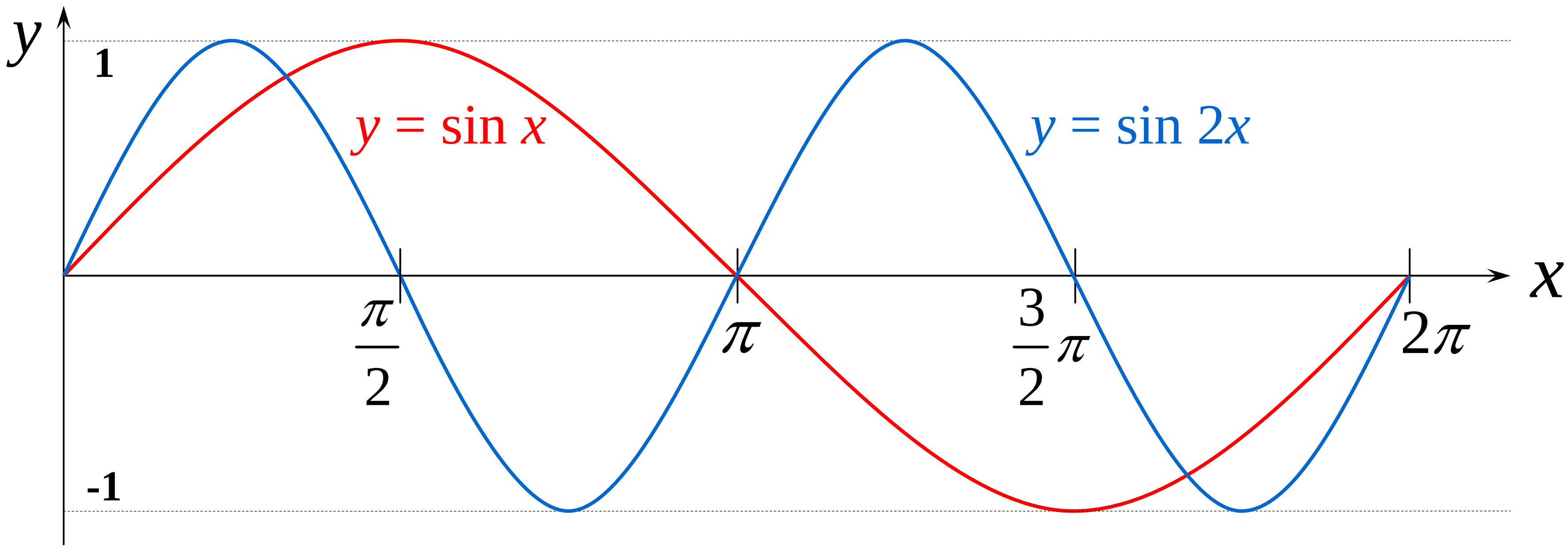


Substitution: $t = x\dfrac{T}{2\pi}$ **Definiere:** $f(x) \underset{def.}{=} g\left(x\dfrac{T}{2\pi}\right)$

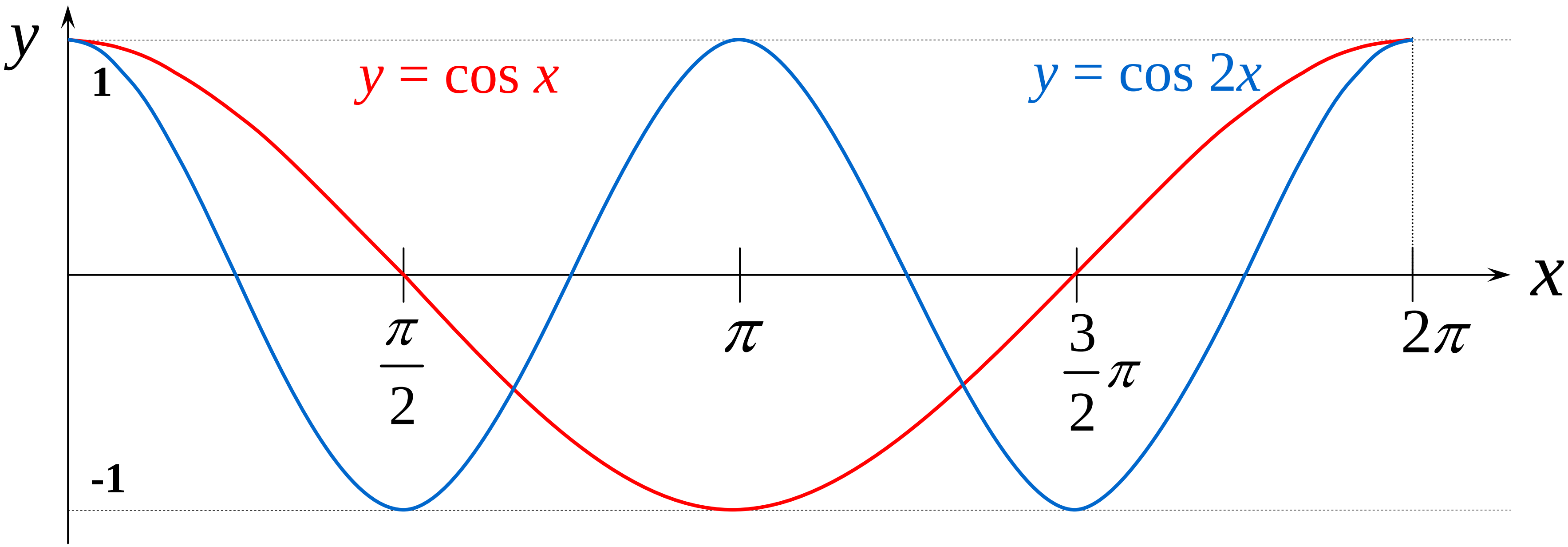
Dann:

$$f(x+2\pi) = g\left((x+2\pi)\frac{T}{2\pi}\right) = g\left(x\frac{T}{2\pi}+T\right) = g\left(x\frac{T}{2\pi}\right) = f(x)$$

Daher Beschränkung auf 2π - *periodische* Funktionen



$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\left[\cos kx\right]_0^{2\pi} = 0\ ,\quad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}\left[\sin kx\right]_0^{2\pi} = 0\ ,\ k = 1, 2, 3,\ \ldots$$



Die Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Darstellungsform: $\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)}$ **sog. "*Fourierreihe*" von *f***

Bestimme die "Fourierkoeffizienten" a_0 und a_k, b_k für $k\geq 1$

Sei $m\geq 1$ und $k\geq 1$ stets ganzzahlig. **Bestimme b_k:**

$$f(x)\sin mx=\frac{a_0}{2}\sin mx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\sin mx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\sin mx$$

Integration:

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\,dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin mx\,dx}_{=0}+\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\sin mx\right)dx+\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\sin mx\right)dx$$

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\sin mx\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\sin mx\,dx$$

Additionstheoreme für den Sinus: sin (α + β) = sin α cos β + sin β cos α .

$$\Rightarrow\quad\cos kx\sin mx=\frac{1}{2}\left[\sin(m-k)x+\sin(m+k)x\right]$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos kx\sin mx\,dx}_{=0}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(m-k)x\,dx}_{=0}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(m+k)x\,dx}_{=0}\right)\quad\mathbf{=0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\ dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx\ dx$$

Additionstheor me für den Cosinus: cos (α+β) = cos α cos β - sin α sin β .

$$\Rightarrow \sin kx \sin mx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-k)x - \cos(m+k)x\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx\ dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-k)x\ dx}_{\mathbf{=2\pi\ \text{für}\ k=m,\ \text{sonst}\ =0}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+k)x\ dx}_{\mathbf{=0}} \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\ dx = \frac{1}{2} b_m \int_0^{2\pi} dx = \pi b_m \quad \textbf{für alle} \quad m \geq 1$$

Also :

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\ dx \quad \textbf{für alle} \quad k \geq 1}$$

Sei $m \geq 0$ und $k \geq 1$ stets ganzzahlig! **Bestimme a_k :**

Multipliziere Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$ **mit** $\cos mx$ **und integriere:**

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx}_{= 0 \text{ für } m \geq 1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx \, dx}_{= 0}$$

Additionstheoreme für den Cosinus: cos (α+β) = cos α cos β - sin α sin β .

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2} \left[\cos(m-k)x + \cos(m+k)x \right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m-k)x \, dx}_{= 2\pi \text{ für } k = m \text{, sonst } = 0} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m+k)x \, dx}_{= 0} = 0 \quad \text{für } k \neq m$$

Also zunächst für $k = m \geq 1$:

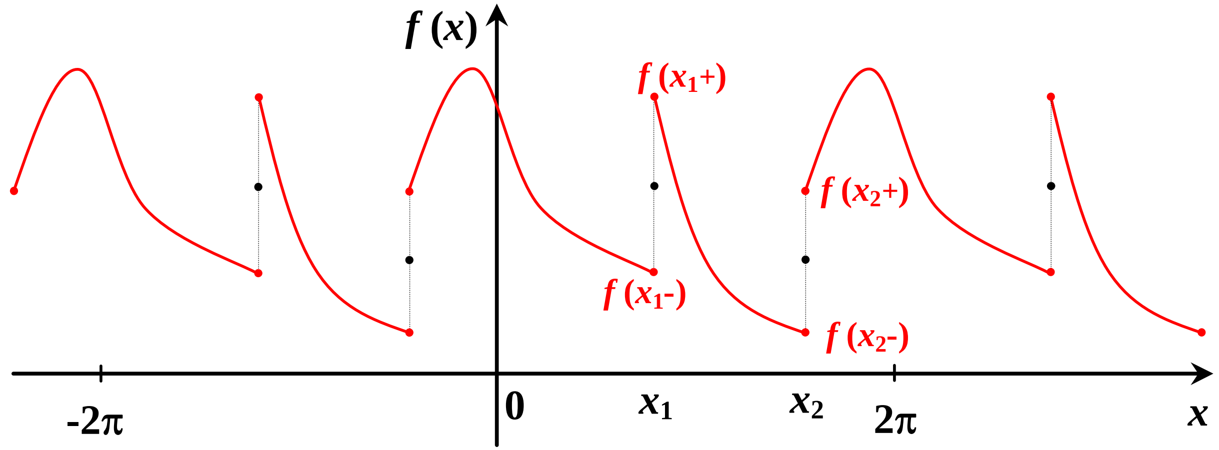
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_m \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = a_m \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = a_m \, \pi$$

Und für $m = 0$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx = \pi \, a_0$$

Ergebnis: $\boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{für alle } k \geq 0}$

Stückweise glatte 2π - periodische Funktion (Satz von Fourier)



Sei f 2π - periodisch sowie

(1) f ***stetig differenzierbar*** **auf [0 , 2π] ausgenommen** $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

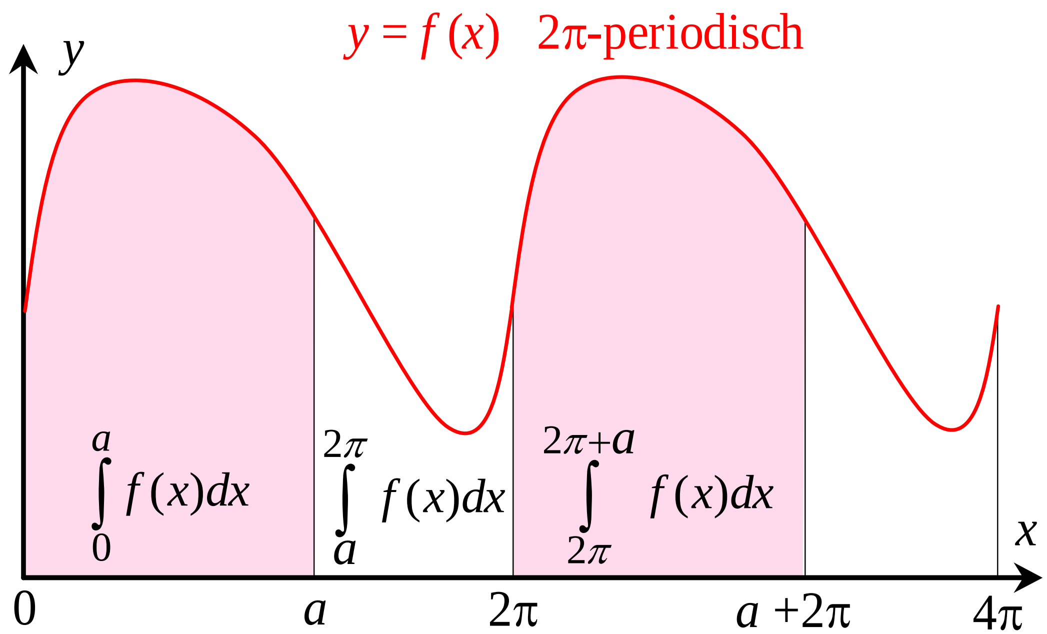
(2) $f(x_i-) = \lim\limits_{0<h\to 0} f(x_i - h)$ **und** $f(x_i+) = \lim\limits_{0<h\to 0} f(x_i + h)$

(3) $|f'(x)| \le M$

Dann:
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_i \\ \frac{1}{2}\left(f(x_i-) + f(x_i+)\right) & \text{für } x = x_i \end{cases}$$

wobei: $\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx}$ für $k \ge 0$ **und** $\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx}$ für $k \ge 1$

Berechnung der Fourierkoeffizienten a_k und b_k :

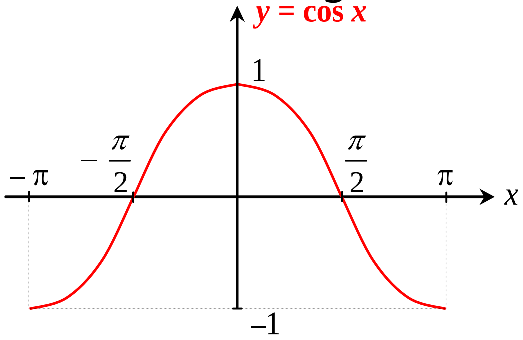


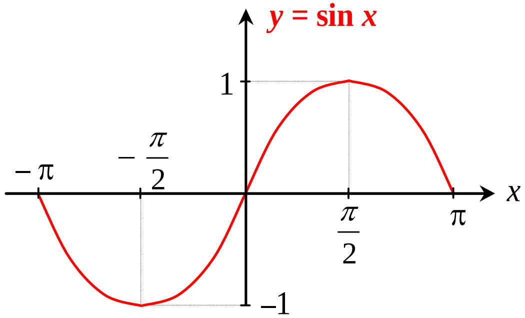
$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)dx
&= \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2\pi} f(x)dx \\
&= \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x)dx + \int_a^{2\pi} f(x)dx \\
&= \boxed{\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx}
\end{aligned}
$$

Also gilt auch: $\boxed{a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx}$ **und** $\boxed{b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx}$

$k \geq 0$ $\qquad$ $k > 0$

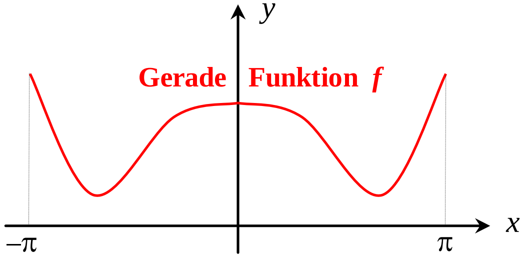
Gerade und ungerade Funktion



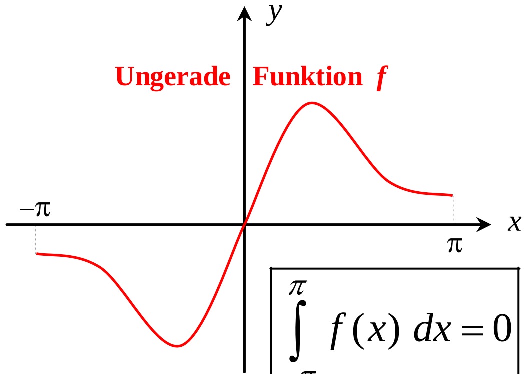


Gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$

Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$



$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx}$$



$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0}$$

***f*, *g* gerade** $\Rightarrow$ ***f·g* gerade**

denn: $f(-x)\, g(-x) = f(x)\, g(x)$

***f*, *g* ungerade** $\Rightarrow$ ***f·g* gerade**

denn: $f(-x)\, g(-x) = (-f(x))(-g(x))$

$= f(x)\, g(x)$

***f* ungerade, *g* gerade**

$\Rightarrow$ ***f·g* ungerade**

denn: $f(-x)\, g(-x) = -f(x)\, g(x)$

***f* gerade** $\Rightarrow$ ***f* Cosinusreihe**

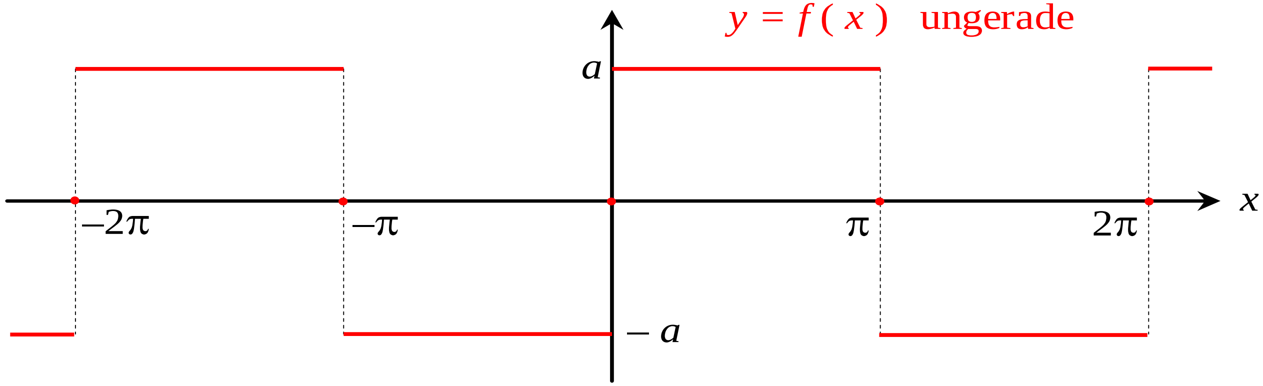
***f* ungerade** $\Rightarrow$ ***f* Sinusreihe**

$$f \text{ gerade} \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos kx}_{\text{gerade}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx\,,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin kx}_{\text{ungerade}}\, dx = 0$$

$$f \text{ ungerade} \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos kx}_{\text{ungerade}}\, dx = 0,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin kx}_{\text{gerade}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Beispiel 1: Rechtecksignal

Sei $a \neq 0$ und $f(x) = \begin{cases} a & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = 0 \,,\; x = \pi \\ -a & \text{für } -\pi < x < 0 \end{cases}$



f **ist eine** ***Sinusreihe*** **:**

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \sin kx \right)$$

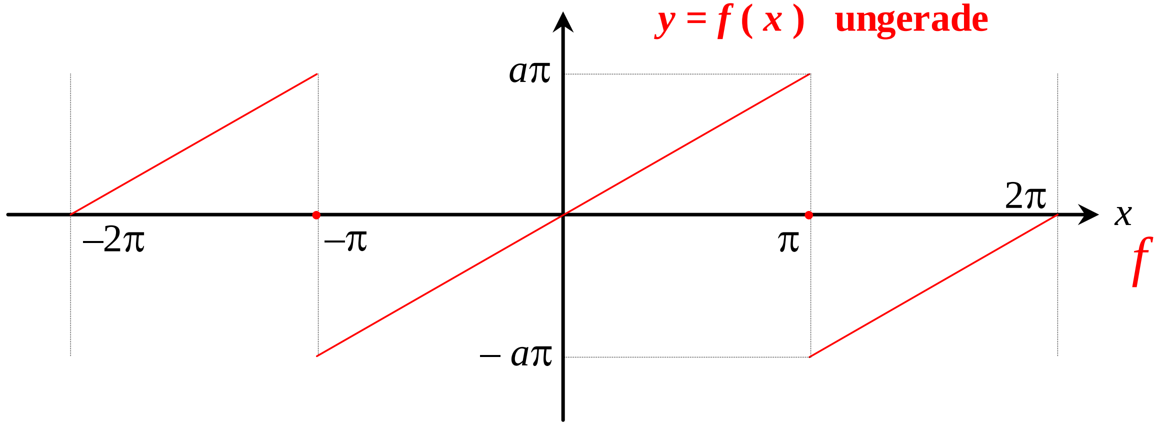
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \sin kx \, dx = -\frac{2a}{\pi} \left[\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = -\frac{2a}{\pi k} \left[\cos(k\pi) - 1 \right]$$

$$= -\frac{2a}{\pi k} \begin{cases} 0 & \text{, wenn } k \text{ gerade} \\ -2 & \text{, wenn } k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } k \text{ gerade} \\ \dfrac{4a}{k\pi} & \text{, wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \sin kx \right) = \frac{4a}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{4a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1) x \right)}{2k+1} = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots \right)$$

Beispiel 2: Sägezahnsignal

Sei $a > 0$ und $f(x) = \begin{cases} a\,x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}$



f ist eine

Sinusreihe

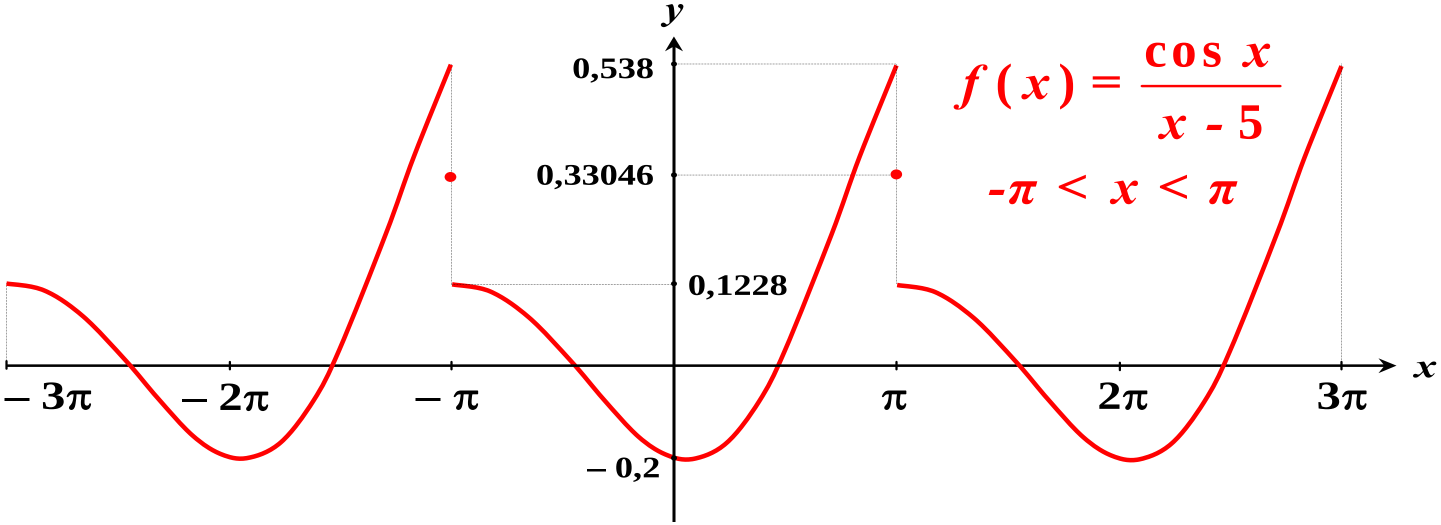
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \sin kx\right)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2a}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kx)}{k}\,dx\right)$$

$$= \frac{2a}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k}\cancel{\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi}}\right) = -\frac{2a}{k}\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} = \frac{2a(-1)^{k+1}}{k}$$

$$f(x) = 2a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\right) = 2a\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \;\dots\right)$$

Eine 2π-periodische Funktion, die *weder gerade noch ungerade* ist



$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)}$$

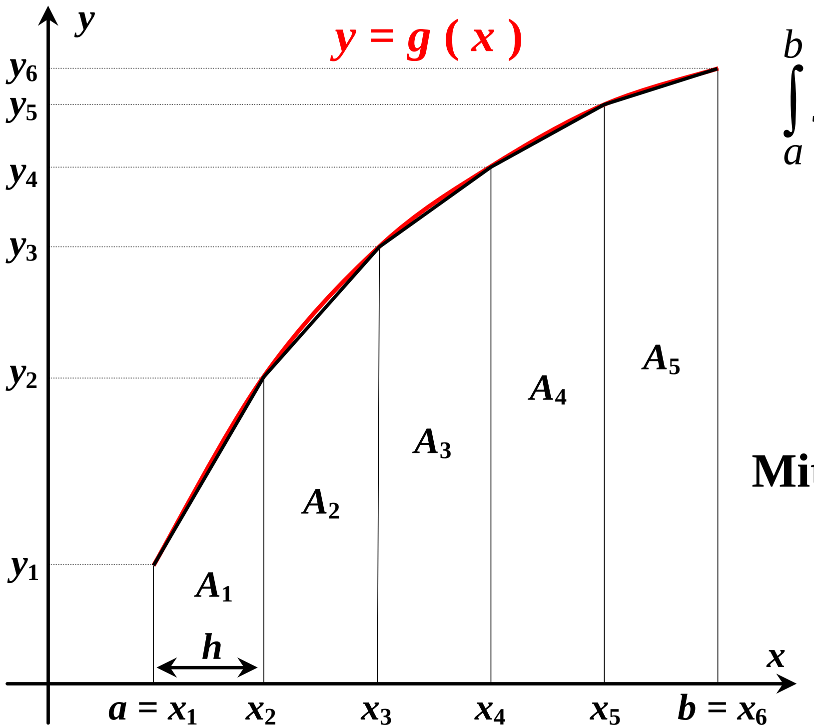
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{x-5}\cos kx \;\; dx \quad \text{für } \; k = 0,1,2,3 \ldots$$

nicht elementar integrierbar!

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{x-5}\sin kx \;\; dx \quad \text{für } \; k = 1,2,3, \; \ldots$$

Numerische Integration: *Das Trapezverfahren*

Schrittweite: $h = \dfrac{b-a}{5}$



$$\int_a^b g(x)\,dx \approx h\frac{y_1+y_2}{2} + h\frac{y_2+y_3}{2} + h\frac{y_3+y_4}{2} + h\frac{y_4+y_5}{2} + h\frac{y_5+y_6}{2}$$
$$= \frac{1}{2}h\left(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6\right)$$

Mit $m = 5$:

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx \frac{1}{2}h\left(y_1 + 2\sum_{k=2}^{m} y_k + y_{m+1}\right) = \frac{1}{2}h\left(g(a) + 2\sum_{k=2}^{m} y_k + g(b)\right)$$

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,dx = h\left(\frac{g(a)+g(b)}{2} + \sum_{k=2}^{m} g\left(x_k\right)\right) + R(h)}$$

Trapezregel

In Matlab: ***h* = (*b* - *a*) /*m* ; *x* = *a* : *h* : *b* ; *y* = g(*x*) ; Matrixpunktoperation!**

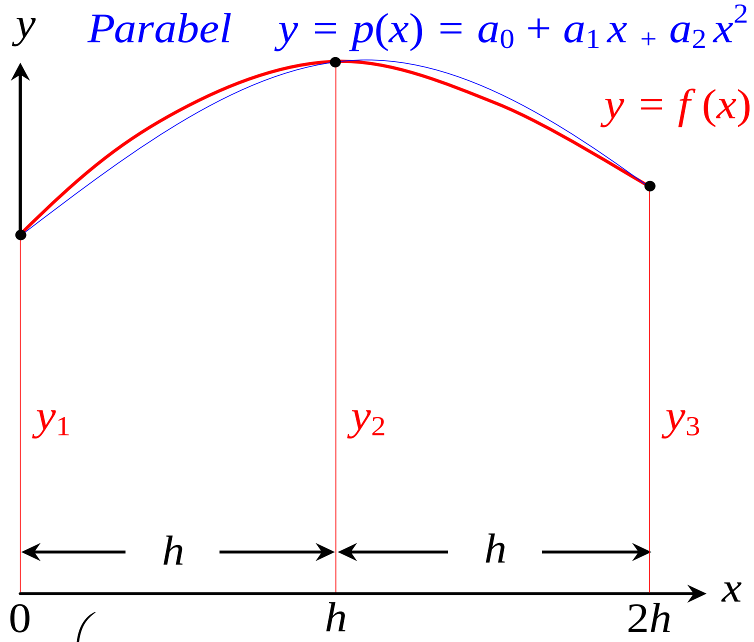
Dann: $\boxed{\textbf{Integral} = h * [\,(y(1) + y(\text{end}))/2 + (\text{sum}(y) - y(1) - y(\text{end}))\,]}$

Trapezverfahren in Matlab:

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx h\left(\frac{g(a)+g(b)}{2}+\sum_{k=2}^{m} g\left(x_k\right)\right) = h\left(\frac{y_1+y_{m+1}}{2}+\sum_{k=2}^{m} y_k\right)$$

```
function Integral=Trapezintegration(a,b,m)
h = (b-a)/m ;       %Schrittweite h
x = a:h:b ;         %x-Wertematrix
y = x.*sin(x);      %y-Wertematrix mit Punktoperation
Integral=h*((y(1)+y(end))/2+sum(y)-y(1)-y(end));
```

Numerische Integration mit der Simpsonregel



$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx \int_0^{2h} p(x)\,dx$$

$$= \int_0^{2h} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)\,dx$$

$$= \left[a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3\right]_0^{2h}$$

$$= 2a_0 h + 2a_1 h^2 + \frac{8}{3} a_2 h^3$$

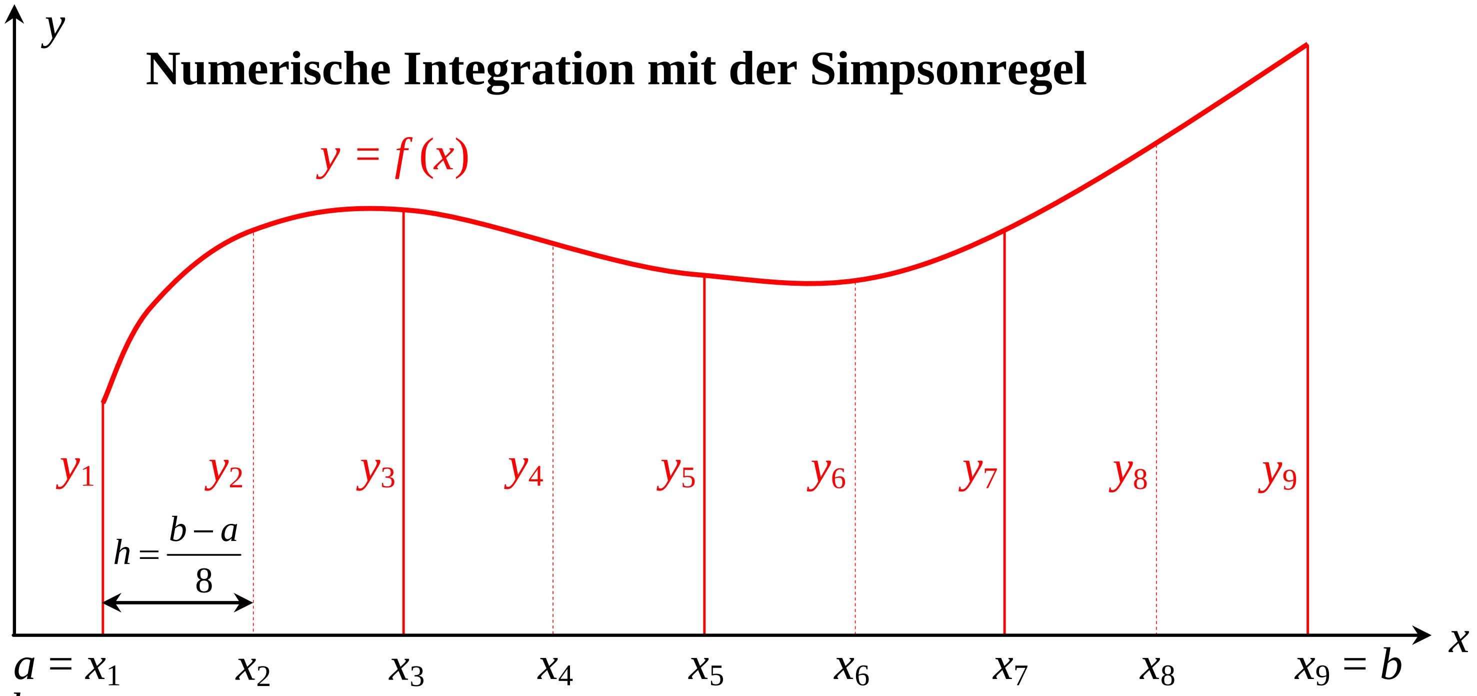
$$= \frac{h}{3}\left(6a_0 + 6a_1 h + 8a_2 h^2\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\underbrace{a_0}_{p(0)} + \underbrace{4a_0 + 4a_1 h + 4a_2 h^2}_{4(a_0 + a_1 h + a_2 h^2) = 4p(h)} + \underbrace{a_0 + a_1 \cdot 2h + a_2 \cdot (2h)^2}_{p(2h)}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(p(0) + 4p(h) + p(2h)\right)$$

$$\underset{s.o.}{=} \frac{h}{3}\left(y_1 + 4y_2 + y_3\right)$$

Numerische Integration mit der Simpsonregel



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+y_3\right)+\frac{h}{3}\left(y_3+4y_4+y_5\right)+\frac{h}{3}\left(y_5+4y_6+y_7\right)+\frac{h}{3}\left(y_7+4y_8+y_9\right)$$

$$=\frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+4y_6+2y_7+4y_8+y_9\right) \quad \text{für} \quad m=8$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+\ldots+4y_{m-2}+2y_{m-1}+4y_m+y_{m+1}\right)$$

Simpsonverfahren mit Matlab:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \ldots + 4y_{m-2} + 2y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}\right) \quad \textbf{\textit{m} gerade}$$

```
function Integral=Simpsonintegration(a,b,m)
h = (b-a)/m ;      %Schrittweite h: m muss gerade sein!
x = a:h:b;         %x-Wertematrix
y = x.*sin(x);     %y-Wertematrix mit Punktoperation
%Zunächst wird S=y1+2y2+2y3+2y4+...+2ym+ym+1 berechnet:
S=2*sum(y)-y(1)-y(end);
%Zu S nun noch 2y2,2y4,2y6,...,2ym hinzuaddieren
for j=2:2:m
    S=S+2*y(j);%Ergebnis:S=y1+4y2+2y3+4y4+...+4ym+ym+1
end
Integral=S*h/3;
```

Parameteroptimierung: Gegeben $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}$ **, x = Parametervektor**

Gesucht $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots x_n^*)$ mit $f(\mathbf{x}^*) = f(x_1^*, \ldots x_n^*) =$ Minimum

Fall *n* =1: $y = f(x),\ f'(x^*) = 0,\ f''(x^*) > 0 \Rightarrow f(x^*) = \text{Minimum}$

Fall *n* =2: $z = f(x, y)\ ,\ f_x(x^*, y^*) = 0\ ,\ f_y(x^*, y^*) = 0$

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x^*, y^*) & f_{xy}(x^*, y^*) \\ f_{yx}(x^*, y^*) & f_{yy}(x^*, y^*) \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \boldsymbol{D > 0} \Rightarrow (x^*, y^*) & \textbf{ist ein Extremum} \\ \boldsymbol{D < 0} \Rightarrow (x^*, y^*) & \textbf{ist } \textbf{\textit{kein}} \textbf{ Extremum} \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{D > 0} \text{ und } f_{xx}(x^*, y^*) > 0 < f_{yy}(x^*, y^*) \Rightarrow f(x^*, y^*) = \text{Minimum}}$$

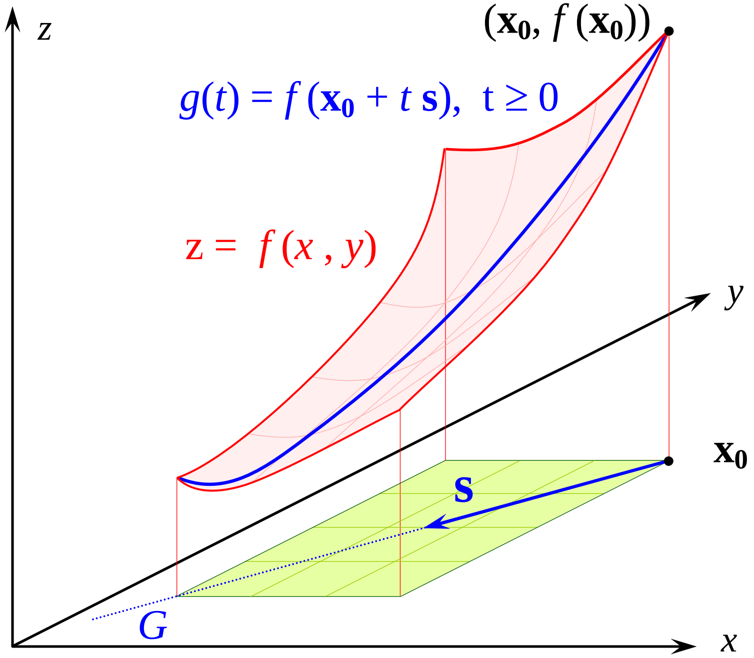
Bsp.1: $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - y \Rightarrow \begin{cases} f_x(x, y) = 2x - 2y = 0 \\ f_y(x, y) = -2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^* = y^* = \frac{1}{2}$

$$f_{xx} = 2 > 0\ ,\ f_{yy} = 4 > 0\ ,\ f_{xy} = f_{yx} = -2 < 0\ ,\ D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} = \text{Min.}$$

Bsp.2: $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2 - y \Rightarrow \begin{cases} f_x(x, y) = 2x - 4y = 0 \\ f_y(x, y) = -4x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^* = -\frac{1}{2}\ ,\ y^* = -\frac{1}{4}$

$$f_{xx} = 2 > 0\ ,\ f_{yy} = 4 > 0\ ,\ f_{xy} = f_{yx} = -4 < 0\ ,\ D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0 \Rightarrow f\underbrace{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)}_{\textbf{Sattelpunkt}} = \frac{1}{8}$$

Gradienten-Verfahren



$$\text{grad } f(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} f_x(\mathbf{x_0}) \\ f_y(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$ **= "Ableitung" von f in $\mathbf{x_0}$**

Geometrische Bedeutung des Gradienten

Betrachte f längs G: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{s}$, $|\mathbf{s}| = 1$, $t \in \mathbb{R}$

Definiere: $g(t) \underset{def.}{=} f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{s})$, $t \geq 0$

$$\frac{dg}{dt}(t) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}$$

$$\frac{dg}{dt}(0) = \text{grad } f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{s}$$ $\left\{\right.$ ***Richtungsableitung* von f in $\mathbf{x_0}$ in Richtung s**

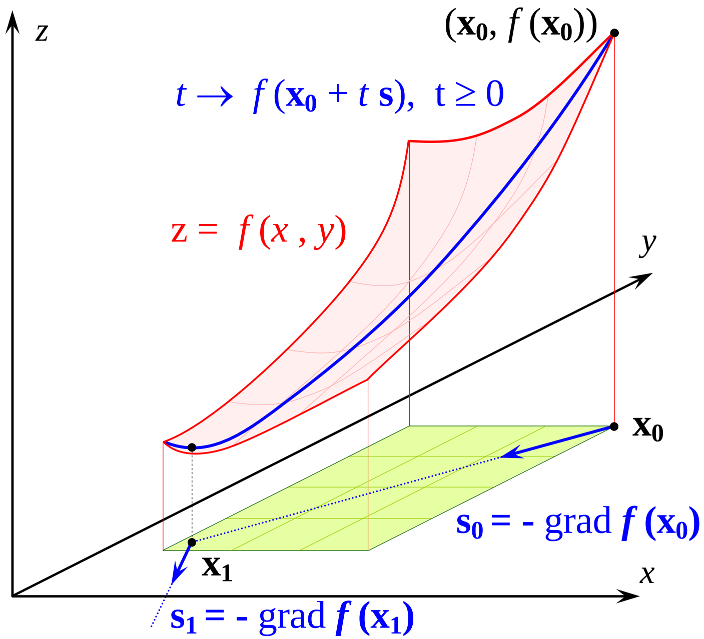
$$= |\text{grad } f(\mathbf{x_0})| \cdot \underbrace{|\mathbf{s}|}_{=1} \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dg}{dt}(0)\right| = |\text{grad } f(\mathbf{x}_0)| \cdot \underbrace{|\cos\varphi|}_{\leq 1} \leq |\text{grad } f(\mathbf{x}_0)| \quad .$$

s weise <u>in Richtung von</u> grad $f(\mathbf{x_0})$ $\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \dfrac{dg}{dt}(0) = |\text{grad } f(x_0)| > 0$

$\Rightarrow$ grad $f(\mathbf{x}_0)$ **weist in Richtung des <u>steilsten Anstiegs</u> von** f.

$\Rightarrow$ $\boxed{-\text{ grad } f(\mathbf{x}_0) \text{ weist in Richtung des steilsten } \textit{Abstiegs} \text{ von } f.}$



Steepest-Descent-Verfahren:

(1) Wähle einen Startpunkt $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$

(2) Steilste Abstiegsrichtung: $\mathbf{s_0} = -\,\mathrm{grad}\ f(\mathbf{x_0})$

(3) Bestimme Minimumstelle $\mathbf{x_1}$ von $\{ f(\mathbf{x_0} + t\,\mathbf{s_0}) \,/\, t \geq 0 \}$

(4) Wähle in (1) $\mathbf{x_0} = \mathbf{x_1}$ und wiederhole (2) und (3)
In Schritt (2): $\mathbf{s_1} = -\,\mathrm{grad}\ f(\mathbf{x_1})$
In Schritt (3): Minimumstelle $\mathbf{x_2}$
von $\{ f(\mathbf{x_1} + t\,\mathbf{s_1}) \,/\, t \geq 0 \}$ usw.

Dichotome 1-dimensionale Minimumsuche:

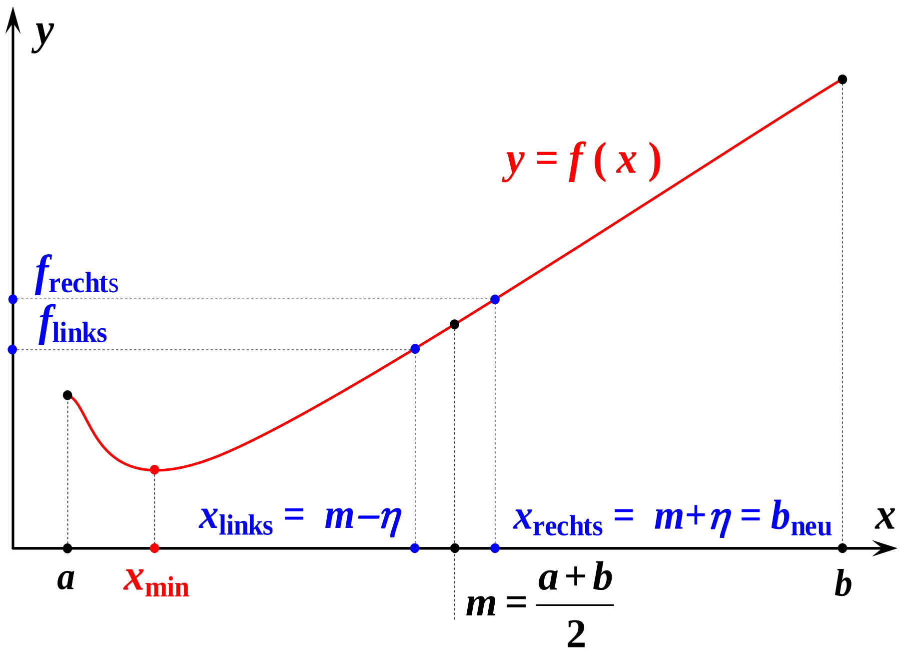
(1) Bilde $m = (a + b) / 2$

(2) Wähle "Trennschärfe" $\eta > 0$ und setze
$\boldsymbol{x}_{\text{links}} = \boldsymbol{m} - \eta$, $\boldsymbol{x}_{\text{rechts}} = \boldsymbol{m} + \eta$

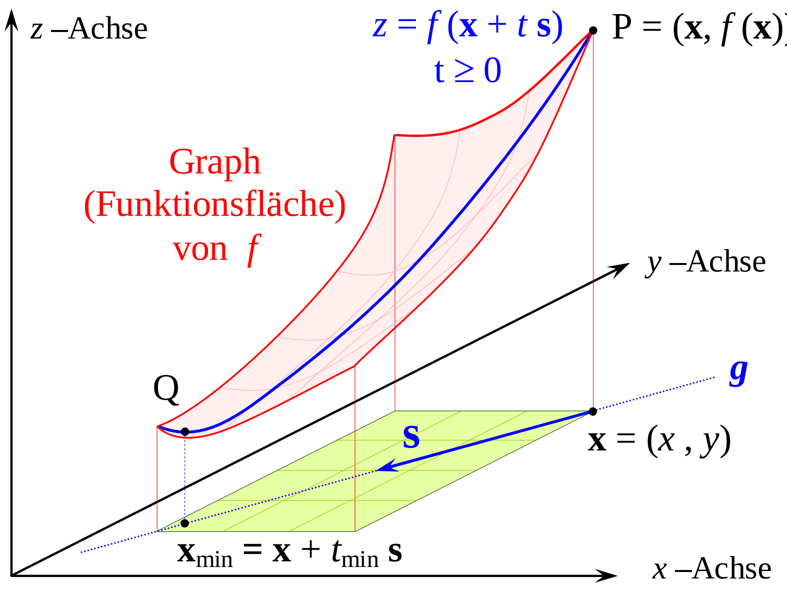
(3) Berechne $\boldsymbol{f}_{\text{links}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{links}})$, $\boldsymbol{f}_{\text{rechts}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{rechts}})$

(4) Wenn $\boldsymbol{f}_{\text{links}} \leq \boldsymbol{f}_{\text{rechts}} \Rightarrow$ Setze $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_{\text{rechts}}$
Wenn $\boldsymbol{f}_{\text{links}} > \boldsymbol{f}_{\text{rechts}} \Rightarrow$ Setze $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_{\text{links}}$

(5) Wiederhole (1) mit aktualisiertem a und b
Durchlaufe alle Schritte erneut.



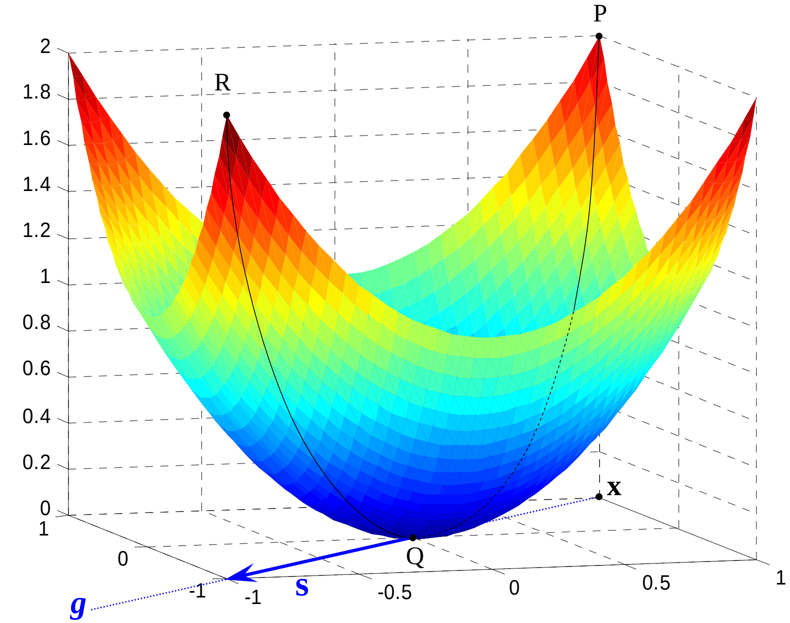
Implementierung des Steepest-Descent-Algorithmus



Dichotome 1-dimensionale Minimumsuche:
Anwendung auf $t \to f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{s}),\ t \geq 0$ **.**
Bestimme $t = t_{min}$ **so, dass** $f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{s}) = \text{Min.}$
Tiefster Punkt $Q = (\mathbf{x}_{min}, f(\mathbf{x}_{min}))$
mit $\mathbf{x}_{min} = \mathbf{x} + t_{min}\,\mathbf{s}$ **.**

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$$



$g = \{\, \mathbf{x} + t\,\mathbf{s},\ t \in [0, 2] \,\},\ \mathbf{x} = (1, 1),\ \mathbf{s} = (-1, -1)$

Parabel durch PQR:

$$\{\, \mathbf{x} + t\,\mathbf{s},\ f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{s}),\ t \in [0, 2] \,\}$$

Ableitungsfreie Verfahren: Der Hooke-Jeeves-Algorithmus

Gegeben: $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n) \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Es sei} & \mathbf{x_0} \text{ ein Startvektor} \\ & h \text{ die Schrittweite} \\ & \mathbf{x_k} \text{ das } k\text{-te Folgenglied der Iterationsfolge } \mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots \end{array}\right\} \text{Bestimme } \mathbf{x_{k+1}}.$$

1. Schritt: Tastphase

(1) Setze $\mathbf{z} = \mathbf{x_k}$ und $\begin{cases} \mathbf{z_+} = \mathbf{z} + h\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{z_-} = \mathbf{z} - h\mathbf{e}_1 \quad \text{mit } \mathbf{e}_1 = (\underbrace{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{n \text{ Komponenten}}) \end{cases}$ **sowie** $\begin{cases} f_- = f(\mathbf{z_-}) \\ f_0 = f(\mathbf{z}) \\ f_+ = f(\mathbf{z_+}) \end{cases}$

(2) Aktualisiere $\boldsymbol{f_0} \underset{def.}{=} \min\{\boldsymbol{f_-}, \boldsymbol{f_0}, \boldsymbol{f_+}\}$ und $\boldsymbol{z} \underset{def.}{=} \arg(\boldsymbol{f_0})$.

Mit aktualisiertem **z** : Wiederhole (1) mit $\mathbf{e_2} = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$ und erhalte neue Werte $\boldsymbol{f_-}, \boldsymbol{f_0}, \boldsymbol{f_+}$.

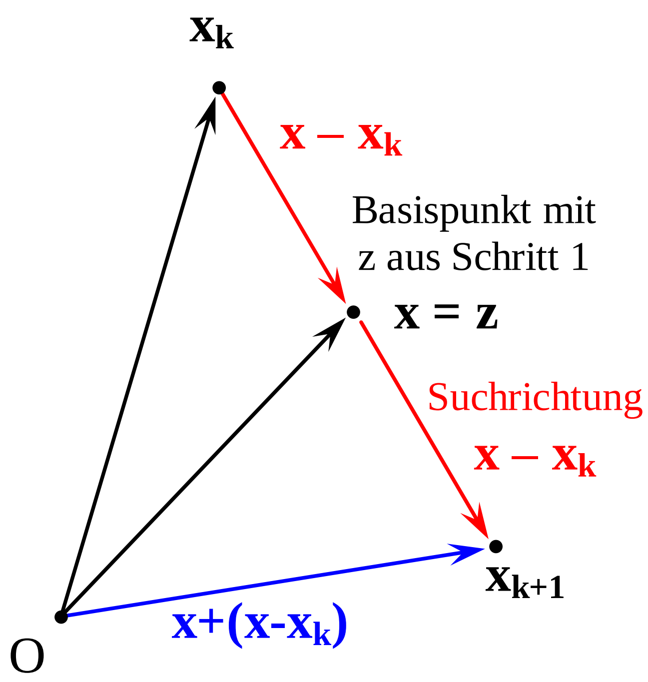
Aktualisiere abermals z gemäß (2) .

Aktualisiere **z** schrittweise in Richtung $\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \dots, \mathbf{e}_n$.

Endergebnis: "Bestes" **z** mit $f_0 = f(\mathbf{z}) \le f(\mathbf{x_k})$.

Falls $\mathbf{z} = \mathbf{x_k}$ **:** Wiederhole Vorgehen mit Schrittweite $h/2$, **sonst:** setze **Basispunkt** $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ **.**

2. Schritt: Extrapolationsschritt



Basispunkt $\mathbf{x}$ aus Schritt 1:

Definiere schließlich: $\mathbf{z} \underset{def.}{=} \mathbf{x} + (\mathbf{x} - \mathbf{x_k})$

und setze: $f_1 \underset{def.}{=} f(\mathbf{z})$

Falls $f_1 < f_0$ aus Schritt 1,

dann endgültig $f_0 \underset{def.}{=} f_1$ und $\mathbf{x_{k+1}} \underset{def.}{=} \mathbf{z}$

sonst $\mathbf{x_{k+1}} \underset{def.}{=} \mathbf{x}$