Aula 2 - análise vetorial

Definições:

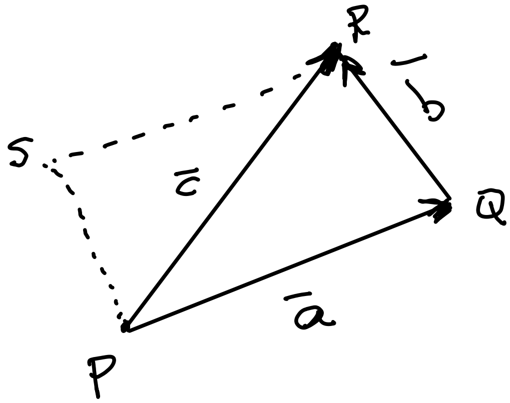
Escalar: quantidade caracterizada por sua magnitude. Ex.: massa, tempo, volume, etc

Vetor: quantidade caraterizada por sua magnitude e direção. Ex.: velocidade, aceleração, força, etc.

$\bar{a} = \overline{PQ} \equiv \overline{SR}$

$\bar{b} = \overline{QR} \equiv \overline{PS}$

$\bar{c} = \overline{PR}$



$\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$ comutativa

$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b})+c$ associativa

$\bar{a}\,(a_x, a_y, a_z)$

$\bar{b}\,(b_x, b_y, b_z)$

$\bar{c}\,(c_x, c_y, c_z)$

$\bar{a}+\bar{b} = (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$

Se $\hat{n}$ é um escalar, o produto de um escalar e um vetor é dado por

$n\bar{a} = (n a_x, n a_y, n a_z)$

$n(\bar{a}+\bar{b}) \quad n\bar{a}+n\bar{b}$

Multiplicação

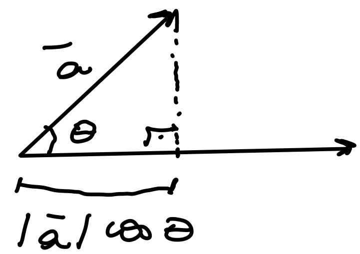
Existe duas formas de multiplicar dois vetores, conhecidas como produto escalar e produto vetorial.

Produto Escalar - Algebricamente, o produto escalar de dois vetores é formado pela multiplicação de seus componentes correspondentes e pela soma dos produtos resultantes. Geometricamente, é o produto das magnitudes dos dois vetores e o cosseno do ângulo entre eles.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ou

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\theta$$

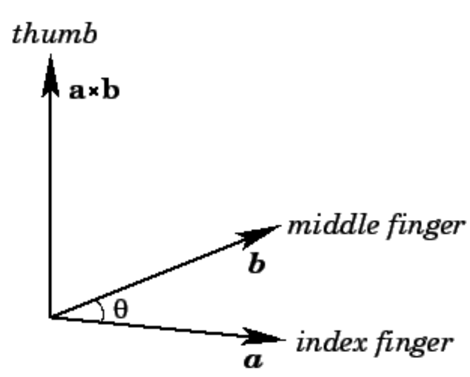


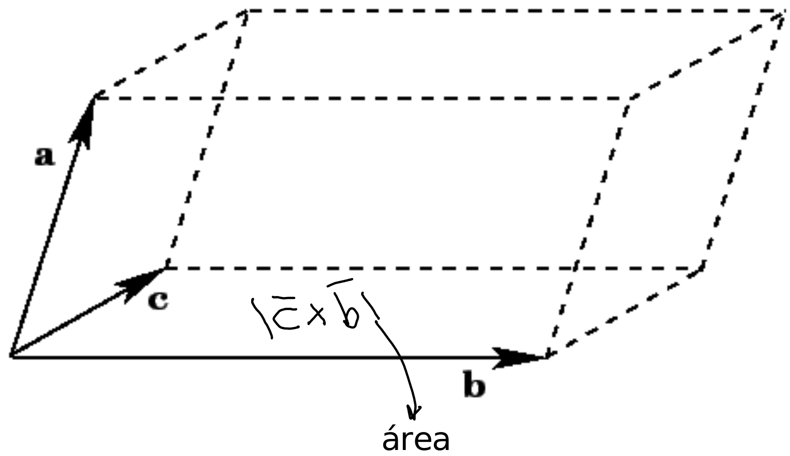
Produto Vetorial: uma operação binária sobre dois vetores em um espaço vetorial tridimensional.
O produto vetorial é um vetor perpendicular aos vetores.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= a_y b_z i + a_z b_x j + a_x b_y k$$
$$- a_z b_y i - a_x b_z j - a_y b_x k$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$





$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} \rightsquigarrow$ volume

$$\left.\begin{aligned} &\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = -\bar{a} \cdot \bar{c} \times \bar{b} \\ &\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b}\,(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a} \cdot \bar{b}) \end{aligned}\right\}$$

Reitz
Milford
1960

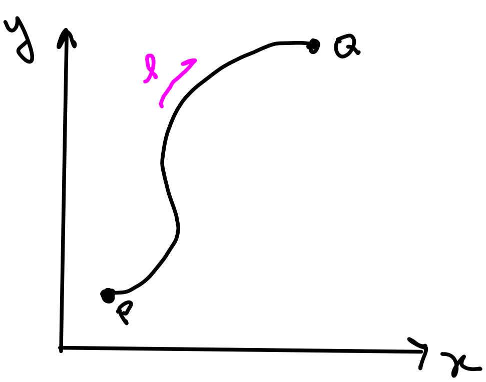
Integração

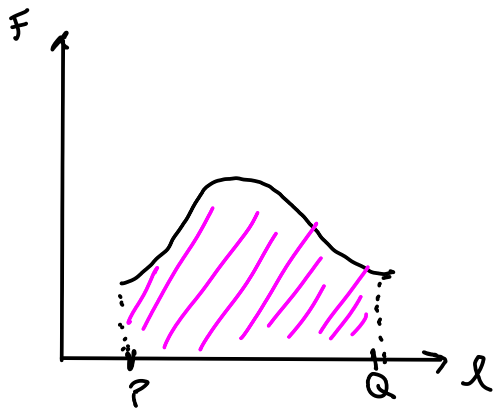
Integral de linha

$$\int_C \vec{F}\cdot d\ell$$

C curva de integração

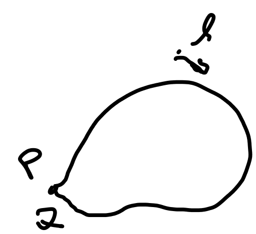
$d\ell$ elemento infinitesimal de deslocamento ao longo de C





$$\int_P^Q \vec{F}\cdot d\ell = \int_P^Q \left(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\right) \rightarrow \underline{\text{escalar}}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\ell \rightarrow \text{circuito fechado}$$



Integral de superfície

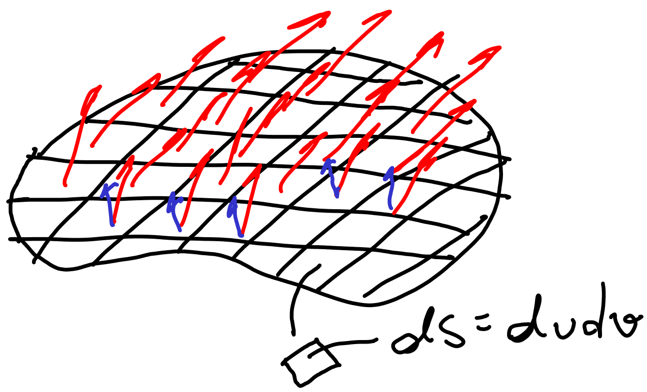
É uma integral em que a função a ser integrada é calculada ao longo de uma superfície.

$$\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} \, ds$$

da elemento de área

$\bar{n}$ vetor unitario normal à da

Integrais desta natureza representam a grandeza chamada fluxo de um campo vetorial F através de uma superfície S, ou simplesmente fluxo.



Integral de volume

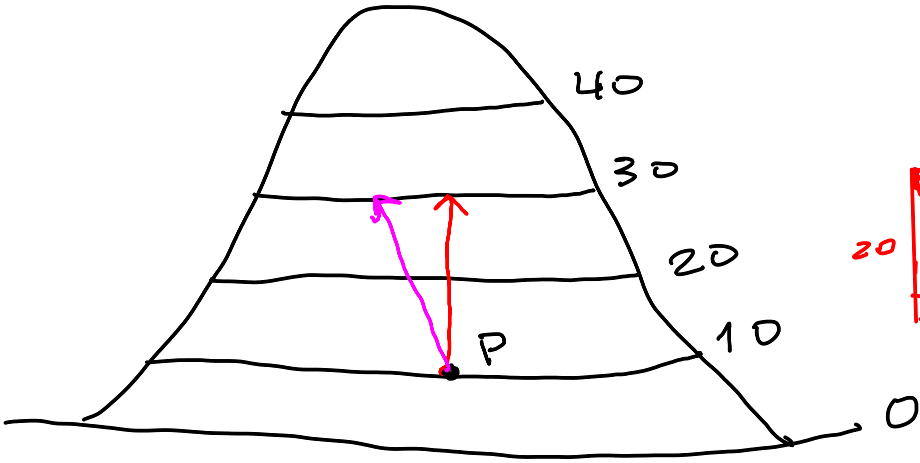
Se refere a uma integral em um domínio tridimensional.

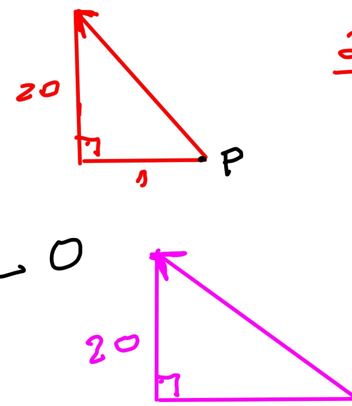
$$\iiint_V \bar{F} \, dV = \iiint_V F(x,y,z) \, dV$$

V volume de integração

$dV = dx\,dy\,dz$ elemento de volume

Gradiente





$$\frac{20}{1}$$

$$\frac{20}{2} = 10$$

Gradiente ou vetor gradiente é um vetor que indica o sentido de maior alteração ou maior taxa de variação no valor de uma quantidade por unidade de espaço

$$h(x,y,z)$$

$$\overline{\text{grad}}\ h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

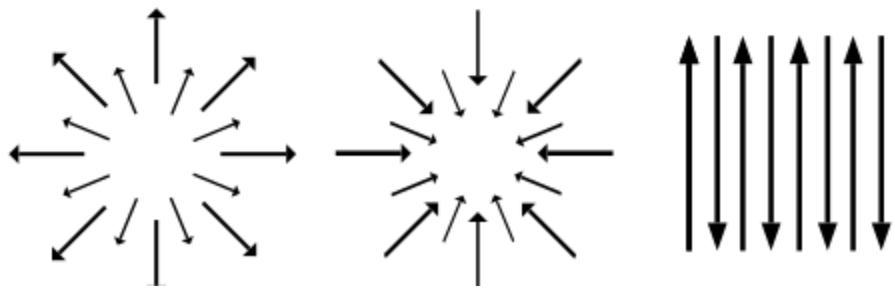
$$\overline{\nabla} h = \quad ''$$

$$\overline{\nabla}(\phi \varphi) = \phi \overline{\nabla} \varphi + \varphi \overline{\nabla} \phi$$

Divergente

É um operador que mede a magnitude de "fonte" ou "poço/sorvedouro" de um campo vetorial em um dado ponto, isto é, ele pode ser entendido como um escalar que mede a dispersão ou divergência dos vetores do campo num determinado ponto.

O operador divergência é definido como a variação do fluxo do campo vetorial através de uma superfície de um volume em uma região.



$$\operatorname{div} \bar{F} = \lim_{V \to 0} \iint_S \frac{\bar{F} \cdot \bar{n}}{V} \, dS$$

$$\operatorname{div} \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

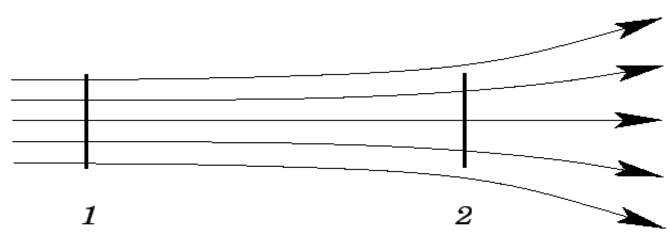


Figure 21:

Às vezes, é útil representar um campo vetorial de $\bar{F}$ por linhas de força ou linhas de campo. A direção de uma linha de força em qualquer ponto é a mesma que a direção de $\bar{F}$. A densidade de linhas (isto é, o número de linhas que cruzam uma superfície unitária perpendicular a $\bar{F}$) é igual a $|\bar{F}|$. Por exemplo, na Fig. 21, $|\bar{F}|$ é maior no ponto 1 do que no ponto 2. O número de linha que cruzam um elemento de superfície dS é $\bar{F} \cdot dS$. Portanto, o número de linhas que saem de uma superfície fechada é

$$\oint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_V \operatorname{div} \bar{F} \, dV$$

Rotacional

É um operador vetorial que descreve a circulação infinitesimal de um campo vetorial no espaço euclidiano tridimensional. O rotacional em um ponto do campo é representado por um vetor cujo comprimento e direção denotam a magnitude e o eixo da circulação máxima. O rotacional de um campo é formalmente definido como a densidade de circulação em cada ponto do campo.

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \mathrm{rot}\,\bar{F} = \mathrm{curl}\,\bar{F}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \lim_{dS \to 0} \oint \frac{\bar{F} \cdot dl}{dS}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\,\hat{i} + \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\,\hat{j} + \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\,\hat{k}$$

Operações com divergente, rotacional e gradiente

Laplaciano

Operador de segunda ordem, definido como o divergente do gradiente de um campo escalar. Equivalentemente, o laplaciano é a soma de todas as derivadas parciais simples de segunda ordem.

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \bar{F} = \bar{\nabla}^2 \bar{F} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Rotacional do gradiente

O rotacional do gradiente de qualquer campo escalar é zero. Define campos conservativos.

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \bar{F} = 0$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Divergente do rotacional

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) \ldots = 0$$

Rotacional do rotacional

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{\nabla}\left(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}\right) - \bar{\nabla}^2 \bar{F}$$