Exercícios - Análise vetorial

1. Os vetores desde a origem até os pontos A, B, C, D são:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{k} - \mathbf{j}.$$

Mostre que as linhas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas e encontr a razão dos seus comprimentos.

2. Mostre que os seguintes vetores são perpendiculares:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

3. Mostre que os vetores a seguir formam os lados de um triângulo retângulo.

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

4. Elevando ao quadrado os dois lados da equação abaixo, e interpretando o resultado geometricamente, prove a lei dos cossenos.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$$

5. Mostre que

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i} \cos \beta + \mathbf{j} \sin \beta$$

são vetores unitários no plano xy formando ângulos α , β com o eixo x.

6. Encontre o divergente e o rotacional do vetor

$$\mathbf{i}(x^2 + yz) + \mathbf{j}(y^2 + zx) + \mathbf{k}(z^2 + xy).$$

7. Se $\bar{r}$ é um vetor desde a origem até o ponto (x, y, z), prove as equações a seguir:

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3; \qquad \mathbf{curl}\, \mathbf{r} = 0; \qquad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

Nota: $\bar{u}$ é um vetor unitário.

8. Demonstre a seguinte identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$