Equações de Maxwell

A propagação e atenuação dos campos EM são governadas pelas equações de Maxwell.

Em suas formas diferenciais, são dadas por:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot D = q \quad (3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (4)$$

em que E representa o campo elétrico em V/m, B representa a densidade de de fluxo magnético (Wb/m²), H é o campo magnético (A/m), J é a densidade de co rente (A/m²), D é a corrende de deslocamento elétrico (C/m²) e q é a carga elétrica.

O operador $\nabla \times$ é descrito na forma matricial como:

$$\nabla \times v = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix} \quad (5)$$

$v = E, H$

$$J = \sigma E \quad (6)$$

$$D = \varepsilon E \quad (7)$$

$$B = \mu H \quad (8)$$

O objetivo é combinar essas equações para obter uma equação que dependa apenas de E ou H.

$$\nabla \times (\nabla \times E) = - \nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} \qquad (9)$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = - \nabla \times \frac{\partial}{\partial t}(\mu H) \qquad (10)$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = - \mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H) \qquad (11)$$

Substituindo (2) em (11)

$$\nabla \times (\nabla \times E) = - \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(J + \frac{\partial}{\partial t} D\right) \qquad (12)$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = - \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(J + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E\right) \qquad (13)$$

$J = \sigma E$

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times E)}_{-\nabla^2 E} = - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} E - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon E$$

$$\nabla \times \nabla \times a = \nabla \nabla \cdot a - \nabla^2 a$$

$$\nabla^2 E - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} E - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon E = 0 \qquad (14$$

De forma análoga para o campo magnético, temos:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times J + \nabla \times \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (15)$$

(6) e (7) $\rightarrow$ (15)

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times (\sigma E) + \times \left(\frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial t} \right) \qquad (16)$$

(1) $\longrightarrow$ (16)

$$\nabla \times (\nabla \times H) = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad (17)$$

$$\nabla^2 H = -\mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad (18)$$

As equações 14 e 18 representam as equações da onda para o campo elétrico e magnético, respectivamente. As equações mostram que os campos E e H se propagam como ondas e também estão sujeitos a difusão.

Premissas para o caso MT:

1) Ondas planas

2) Os campos elétrico e magnético podem ser descritos da seguinte forma:

$$\bar{E} = \underbrace{E_0}\, e^{i\omega t} \qquad (19)$$

$$H = \underbrace{H_0}\, e^{i\omega t} \qquad (20)$$

Amplitudes

ω = freq. angular

3) A corrente de deslocamento na Terra é quasi-estática e portanto a variação de D no tempo é insignificante em comparação à variaçãoda corrente de condução J

Assim a dependência de ε desaparece e o comportamento do campo EM é descrito como difusão.

No domínio da frequência temos que a derivada $\frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow \omega^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \times E = -i\omega\mu H \\ \nabla \times H = \sigma E \end{array}\right\} \text{considerado quasi-estático} \qquad \begin{array}{l}(21)\\(22)\end{array}$$

$$\nabla^2 E - i\omega\mu\sigma E = 0 \qquad (23) \qquad k^2 = -i\omega\mu\sigma$$

$$\nabla^2 H - i\omega\mu\sigma H = 0 \qquad (24)$$

Ondas planas em meios homogêneos

$\nabla^2 = \nabla \cdot (\nabla \vec{v})$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(z, \omega) \qquad (26)$$

não depende de x, y

A solução geral para a equação 26 é dada por

$$\mathbf{E} = \bar{E}_0^{-} e^{i(kz - \omega t)} + E_0^{+} e^{-i(kz + \omega t)} \qquad (27)$$

$\bar{E}_0^{-}, \bar{E}_0^{+}$ são vetores de amplitude das ondas que descem e sobem e $e^{-i\omega t}$ controla a fase temporal

Para obter o campo magnético a partir do campo elétrico, basta utilizar a equação de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu H$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x \hat{j} + i\omega\mu H_y = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} E_y \hat{i} + i\omega\mu H_x = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = ik\bar{E}_{x,0}\, e^{ikz}$$

$$-ikE_x = i\omega\mu H_y$$

$$H_y = \frac{-K}{\omega\mu} E_x$$

$$\bar{E}_x = \underbrace{\frac{-\omega\mu}{K}}_{\text{Impedância } Z_{xy}} H_y$$

Fase

$$\phi_{xy} = \tan^{-1}\left(\frac{Im\, Z_{xy}}{Re\, Z_{xy}}\right)$$

$$\rho_{app\,xy} = \frac{|Z_{xy}|^2}{\omega\mu}$$

OBS

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}$$

$$1D \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Z_{xy} = -Z_{yx}$$

$$Z_{xx} = Z_{yy} = 0$$

2D $\quad z_{xx} = z_{yy}$

$z_{xy} \neq z_{yx}$

3D $\quad z_{xx} \neq z_{yy}$

$z_{xy} \neq z_{yx}$