Modellierung und Simulation
WS 17/18

1	2	$\sum$

Floyd Kretschmar
Florence Lopez 3878792

Blatt 1

(Abgabe am 25. Oktober 2017)

Problem 1.1

Aufgabe 1

a.) empirische Wahrscheinlichkeit eines Gewinns: $P(X = i) = x(i) = \begin{cases} \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} & \text{für i = 1} \\ (1 - \frac{1}{8}) = \frac{7}{8} & \text{für i = 0} \end{cases}$

b.) Laplace-Wahrscheinlichkeit eines Gewinns: $P(A_i) = \frac{m_i}{m} = \frac{283.789}{2.300.000} \approx 0.12 \rightarrow 12\%$

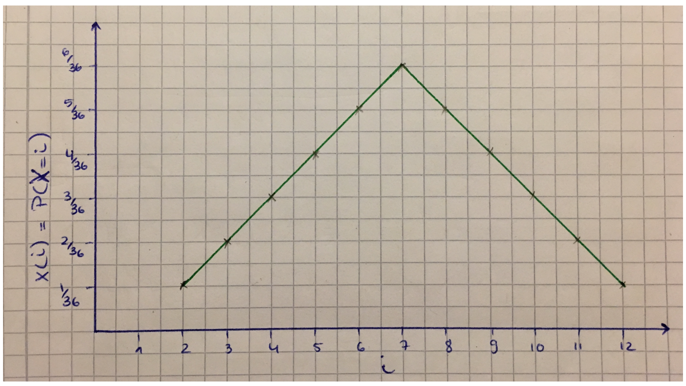
Aufgabe 2

X_{sum}:

1. Wertebereich: X hat diskreten Wertebereich mit $X \in \{2, \dots, 12\}$

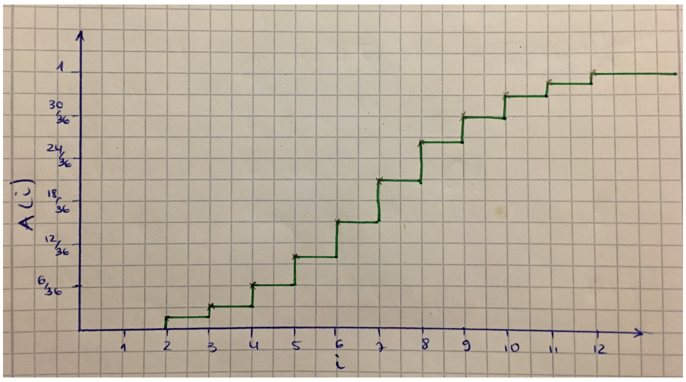
2. Verteilung: Die Bestimmung der Verteilung fand über die Bestimmung aller Möglichkeiten für jede Summe von $\{2, \dots, 12\}$ statt und sieht folgendermaßen aus:
$x(2) = P(2) = \frac{m_i}{m} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$,
$x(3) = \frac{2}{36}$, $x(4) = \frac{3}{36}$, $x(5) = \frac{4}{36}$, $x(6) = \frac{5}{36}$, $x(7) = \frac{6}{36}$, $x(8) = \frac{5}{36}$, $x(9) = \frac{4}{36}$, $x(10) = \frac{3}{36}$, $x(11) = \frac{2}{36}$, $x(12) = \frac{1}{36}$.

Abbildung 1: Zeichnung der Verteilungfunktion



3. Verteilungsfunktion: Die Bestimmung der Verteilungsfunktion fand über Addition der einzelnen Verteilungen statt.
$A(2) = P(A \leq 2) = P(2) = \frac{1}{36}$,
$A(3) = \frac{3}{36}$, $A(4) = \frac{6}{36}$, $A(5) = \frac{10}{36}$, $A(6) = \frac{15}{36}$, $A(7) = \frac{21}{36}$, $A(8) = \frac{26}{36}$, $A(9) = \frac{30}{36}$, $A(10) = \frac{33}{36}$, $A(11) = \frac{35}{36}$, $A(12) = \frac{36}{36} = 1$.

Abbildung 2: Zeichnung der Verteilungfunktion



4. Erwartungswert: $E[X] = m_1 = \sum_i i * x(i) = 2 * \frac{1}{36} + 3 * \frac{2}{36} + 4 * \frac{3}{36} + 5 * \frac{4}{36} + 6 * \frac{5}{36} + 7 * \frac{6}{36} + 8 * \frac{5}{36} + 9 * \frac{4}{36} + 10 * \frac{3}{36} + 11 * \frac{2}{36} + 12 * \frac{1}{36} = 7$.

5. Varianz: $VAR[X] = m_2 + m_1^2$
$m_2 = E[X^2] = \sum_i i^2 * x(i) = 4 * \frac{1}{36} + 9 * \frac{2}{36} + 16 * \frac{3}{36} + 25 * \frac{4}{36} + 36 * \frac{5}{36} + 49 * \frac{6}{36} + 64 * \frac{5}{36} + 81 * \frac{4}{36} + 100 * \frac{3}{36} + 121 * \frac{2}{36} + 144 * \frac{1}{36} \approx 54.83$.
$\rightarrow VAR[X] = 54.83 - 49 = 5.83$.

X_{min}:

1. Wertebereich: X hat diskreten Wertebereich mit $X \in \{1, \ldots, 6\}$

2. Verteilung: Die Bestimmung der Verteilung fand über die Bestimmung aller Möglichkeiten für jede Augenzahl von $\{1, \ldots, 6\}$ statt und sieht folgendermaßen aus:
$$x(i) = \begin{cases} \frac{11}{36} & \text{wenn } i = 1 \\ \frac{9}{36} & \text{wenn } i = 2 \\ \frac{7}{36} & \text{wenn } i = 3 \\ \frac{5}{36} & \text{wenn } i = 4 \\ \frac{3}{36} & \text{wenn } i = 5 \\ \frac{1}{36} & \text{wenn } i = 6 \end{cases}$$
oder
$x(i) = \frac{1+(2*(6-i))}{36}$

3. Verteilungsfunktion: Die Bestimmung der Verteilungsfunktion fand über Addition der einzelnen Verteilungen statt.
$$A(i) = P(X \leq i) = \sum_{t=0}^{i} \frac{1+(2*(t-1))}{36} = \begin{cases} \frac{11}{36} & \text{wenn } i = 1 \\ \frac{20}{36} & \text{wenn } i = 2 \\ \frac{27}{36} & \text{wenn } i = 3 \\ \frac{32}{36} & \text{wenn } i = 4 \\ \frac{35}{36} & \text{wenn } i = 5 \\ \frac{36}{36} & \text{wenn } i = 6 \end{cases}$$

Abbildung 3: Zeichnung der Verteilung

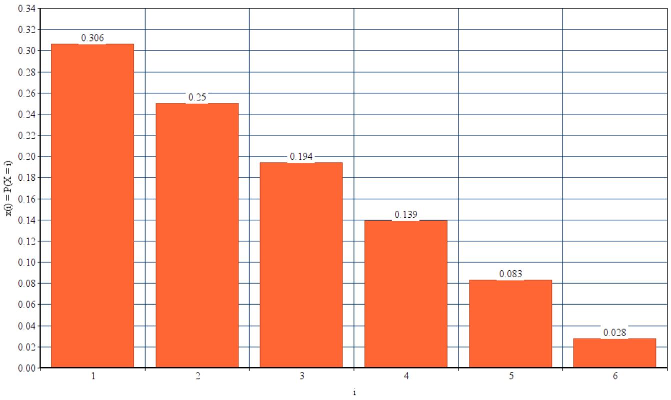
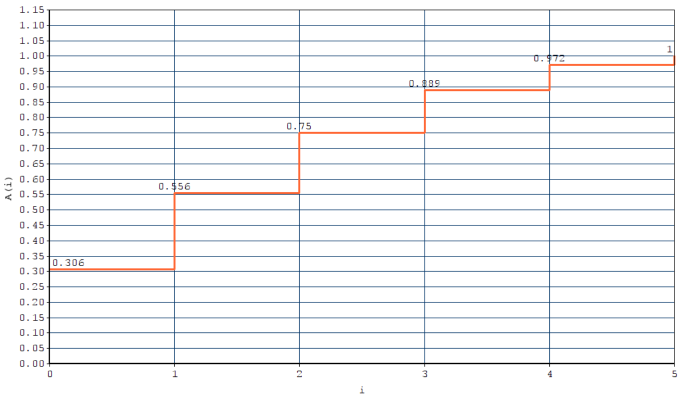


Abbildung 4: Zeichnung der Verteilungfunktion



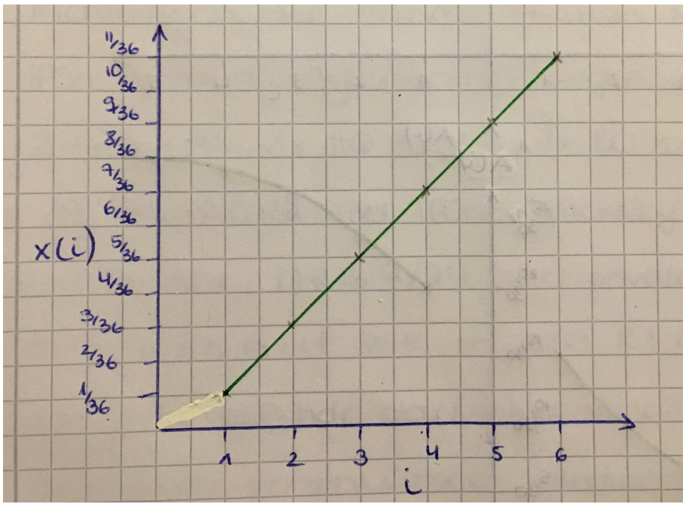
4. Erwartungswert: $E[X] = m_1 = \sum_i i * x(i) = \sum_i i * \frac{1+(2*(i-1))}{36} = 1 * \frac{11}{36} + 2 * \frac{9}{36} + 3 * \frac{7}{36} + 4 * \frac{5}{36} + 5 * \frac{3}{36} + 6 * \frac{1}{36} = \frac{91}{36} \approx 2,53$

5. Varianz: $E[X^2] = m_2 = \sum_i i^2 * x(i) = \sum_i i^2 * \frac{1+(2*(i-1))}{36} = 1^2 * \frac{11}{36} + 2^2 * \frac{9}{36} + 3^2 * \frac{7}{36} + 4^2 * \frac{5}{36} + 5^2 * \frac{3}{36} + 6^2 * \frac{1}{36} = \frac{301}{36} \approx 8.36$
   $VAR[X] = m_2 - m_1^2 = \frac{301}{36} - (\frac{91}{36})^2 \approx 1,97$

X_{max}:

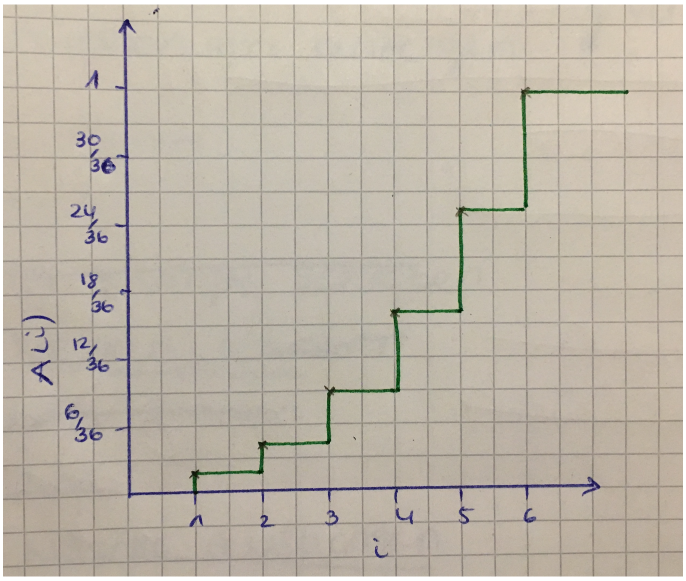
1. Wertebereich: X hat diskreten Wertebereich mit $X \in \{1, \ldots, 6\}$
2. Verteilung: Die Bestimmung der Verteilung fand über die Bestimmung aller Möglichkeiten für jede Augenzahl von $\{1, \ldots, 6\}$ statt und sieht folgendermaßen aus:
   $x(1) = P(1) = \frac{m_i}{m} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$,
   $x(2) = \frac{3}{36}$, $x(3) = \frac{5}{36}$, $x(4) = \frac{7}{36}$, $x(5) = \frac{9}{36}$, $x(6) = \frac{11}{36}$.
3. Verteilungsfunktion: Die Bestimmung der Verteilungsfunktion fand über Addition der einzelnen Verteilungen statt.

Abbildung 5: Zeichnung der Verteilung



$A(1) = P(A \leq 1) = P(1) = \frac{1}{36}$,
$A(2) = \frac{4}{36}$, $A(3) = \frac{9}{36}$, $A(4) = \frac{16}{36}$, $A(5) = \frac{25}{36}$, $A(6) = \frac{36}{36} = 1$.

Abbildung 6: Zeichnung der Verteilung



4. Erwartungswert: $E[X] = m_1 = \sum_i i * x(i) = 1*\frac{1}{36}+2*\frac{3}{36}+3*\frac{5}{36}+4*\frac{7}{36}+5*\frac{9}{36}+6*\frac{11}{36} \approx 4.472$.

5. Varianz: $VAR[X] = m_2 + m_1^2$
   $m_2 = E[X^2] = \sum_i i^2 * x(i) = 1 * \frac{1}{36} + 4 * \frac{3}{36} + 9 * \frac{5}{36} + 16 * \frac{7}{36} + 25 * \frac{9}{36} + 36 * \frac{11}{36} \approx 21.972$.
   $\rightarrow VAR[X] = 21.972 - (4.472)^2 = 1.982$.

X_{diff_1}:

1. Wertebereich: X hat diskreten Wertebereich mit $X \in \{0, \ldots, 5\}$

2. Verteilung: Die Bestimmung der Verteilung fand über die Bestimmung aller Möglichkeiten

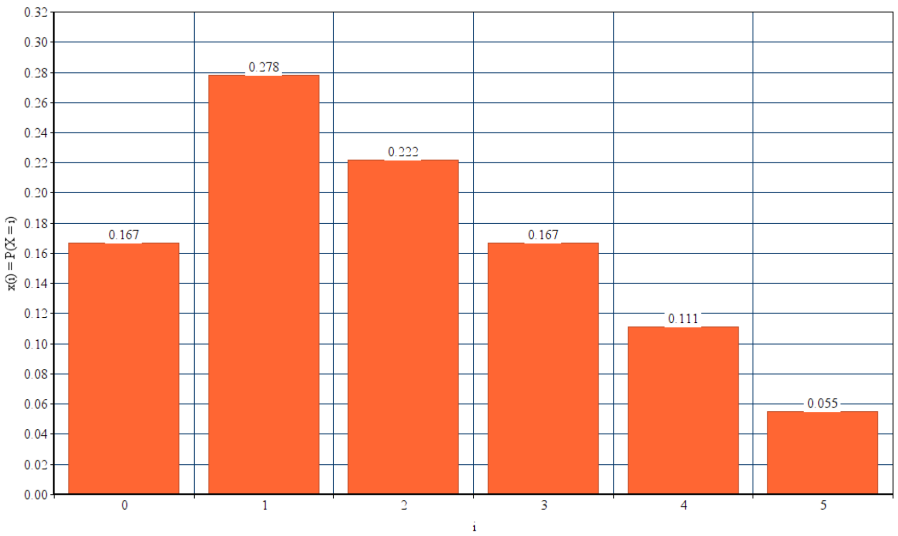
für jede Summe von $\{0,\ldots,5\}$ statt und sieht folgendermaßen aus:

$$x(i) = \begin{cases} \frac{6}{36} = \frac{1}{6} & \text{wenn } i = 0 \\ \frac{10}{36} = \frac{5}{18} & \text{wenn } i = 1 \\ \frac{8}{36} = \frac{2}{9} & \text{wenn } i = 2 \\ \frac{6}{36} = \frac{1}{6} & \text{wenn } i = 3 \\ \frac{4}{36} = \frac{1}{9} & \text{wenn } i = 4 \\ \frac{2}{36} = \frac{1}{18} & \text{wenn } i = 5 \end{cases}$$

oder

$$x(i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{wenn } i = 0 \\ \frac{2*(6-i)}{36} & \text{sonst} \end{cases}$$

Abbildung 7: Zeichnung der Verteilung



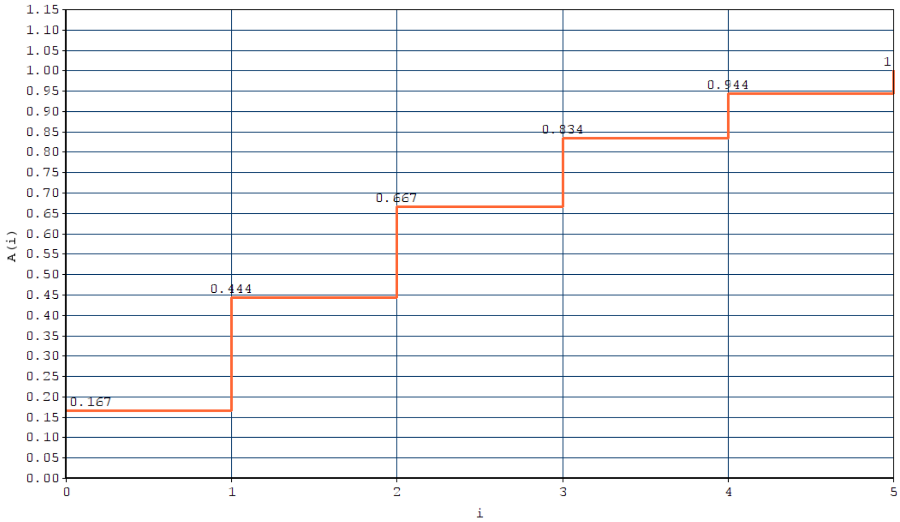
3. Verteilungsfunktion: Die Bestimmung der Verteilungsfunktion fand über Addition der einzelnen Verteilungen statt.

$$A(i) = P(X \leq i) = \begin{cases} \frac{6}{36} & \text{wenn } i = 0 \\ \frac{16}{36} & \text{wenn } i = 1 \\ \frac{24}{36} & \text{wenn } i = 2 \\ \frac{30}{36} & \text{wenn } i = 3 \\ \frac{34}{36} & \text{wenn } i = 4 \\ \frac{36}{36} & \text{wenn } i = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Erwartungswert: $E[X] = m_1 = \sum_i i*x(i) = \sum_i i* = 0*\frac{6}{36}+1*\frac{10}{36}+2*\frac{8}{36}+3*\frac{6}{36}+4*\frac{4}{36}+5*\frac{2}{36} = \frac{35}{18} \approx 1,94$.

5. Varianz: $VAR[X] = m_2 + m_1^2$
$E[X^2] = m_2 = \sum_i i^2 * x(i) = 0^2 * \frac{6}{36} + 1^2 * \frac{10}{36} + 2^2 * \frac{8}{36} + 3^2 * \frac{6}{36} + 4^2 * \frac{4}{36} + 5^2 * \frac{2}{36} = \frac{35}{6} \approx 5,83$

Abbildung 8: Zeichnung der Verteilungfunktion



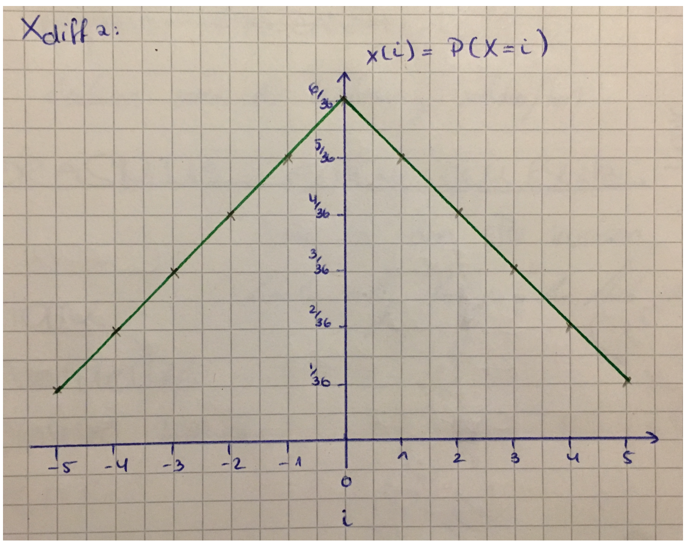
$VAR[X] = m_2 - m_1^2 = \frac{35}{6} - (\frac{35}{18})^2 \approx 2,05$.

X_{diff_2}:

1. Wertebereich: X hat diskreten Wertebereich mit $X \in \{-5, \ldots, 5\}$

2. Verteilung: Die Bestimmung der Verteilung fand über die Bestimmung aller Möglichkeiten für jede Differenz von $\{-5, \ldots, 5\}$ statt und sieht folgendermaßen aus:
   $x(-5) = P(-5) = \frac{m_i}{m} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$,
   $x(-4) = \frac{2}{36}$, $x(-3) = \frac{3}{36}$, $x(-2) = \frac{4}{36}$, $x(-1) = \frac{5}{36}$, $x(0) = \frac{6}{36}$, $x(1) = \frac{5}{36}$, $x(2) = \frac{4}{36}$, $x(3) = \frac{3}{36}$, $x(2) = \frac{2}{36}$, $x(1) = \frac{1}{36}$.

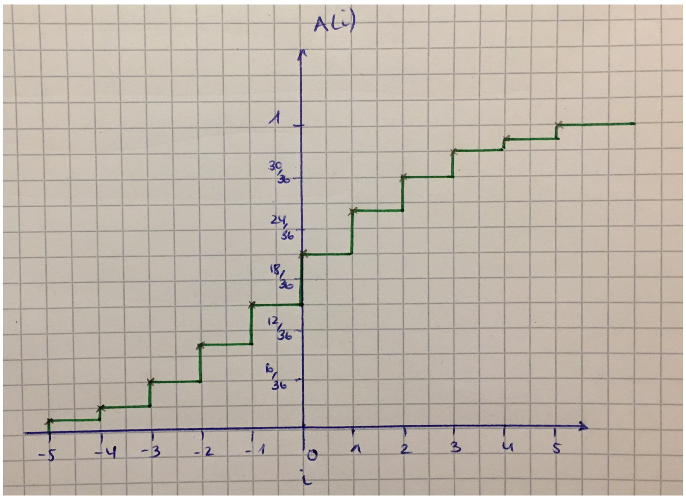
Abbildung 9: Zeichnung der Verteilung



3. Verteilungsfunktion: Die Bestimmung der Verteilungsfunktion fand über Addition der einzelnen Verteilungen statt.

$A(-5) = P(A \leq -5) = P(-5) = \frac{1}{36}$,
$A(-4) = \frac{3}{36}$, $A(-3) = \frac{6}{36}$, $A(-2) = \frac{10}{36}$, $A(-1) = \frac{15}{36}$, $A(0) = \frac{21}{36}$, $A(1) = \frac{26}{36}$, $A(2) = \frac{30}{36}$, $A(3) = \frac{33}{36}$, $A(4) = \frac{35}{36}$, $A(1) = \frac{36}{36} = 1$.

Abbildung 10: Zeichnung der Verteilung



4. Erwartungswert: $E[X] = m_1 = \sum_i i * x(i)$. Da sich die einzelnen Summanden in der Berechnung des Erwartungswertes gegenseitig aufheben und da $0 * \frac{6}{36} = 0$ ist, ist $E[X] = 0$.

5. Varianz: $VAR[X] = m_2 + m_1^2$
$m_2 = E[X^2] = \sum_i i^2 * x(i) = 25 * \frac{1}{36} * 2 + 16 * \frac{2}{36} * 2 + 9 * \frac{3}{36} * 2 + 4 * \frac{4}{36} * 2 + 1 * \frac{5}{36} * 2 + 0 * \frac{6}{36} = \frac{35}{6} \approx 5.83$.
$\rightarrow VAR[X] = 5.83 - 0^2 = 5.83$.

Aufgabe 3

a.) Wertebereich: X hat den Wertebereich mit $X \in \{1, \ldots, \infty\}$.

b.) Die Zufallsvariable X ist nach der geometrischen Verteilung verteilt, allerdings mit einer kleinen Abwandlung: In dem Skript der Vorlesung beschreibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Fehlversuche bis zu einem gewünschten Erfolg, in der Aufgabe beschreibt die Zufallsvariable X jedoch die Anzahl aller Würfe bis zum gewünschten Erfolg, also im Allgemeinen immer einen Wurf mehr. Die Verteilungsfunktion für X lautet dann: $P(X \leq t) = p * \sum_i^t (1-p)^{i-1}$, wobei t das Ereignis ist, das maximal auftritt, p die Erfolgswahrscheinlichkeit und i die Zählvariable bis t.

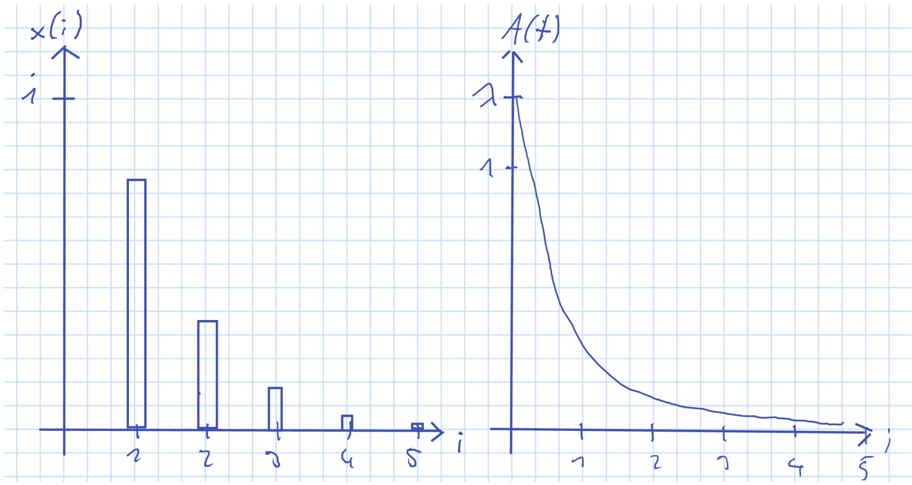
c.) Wahrscheinlichkeit höchstens 4 Würfe bis 6 zu brauchen:
$P(X \leq 4) = \frac{1}{6} * \sum_{i=1}^4 (\frac{5}{6})^{i-1} = \frac{1}{6} * (\frac{5}{6}^0 + \frac{5}{6}^1 + \frac{5}{6}^2 + \frac{5}{6}^3) \approx 0.52 \rightarrow 52\%$.

Problem 1.2

Aufgabe 1

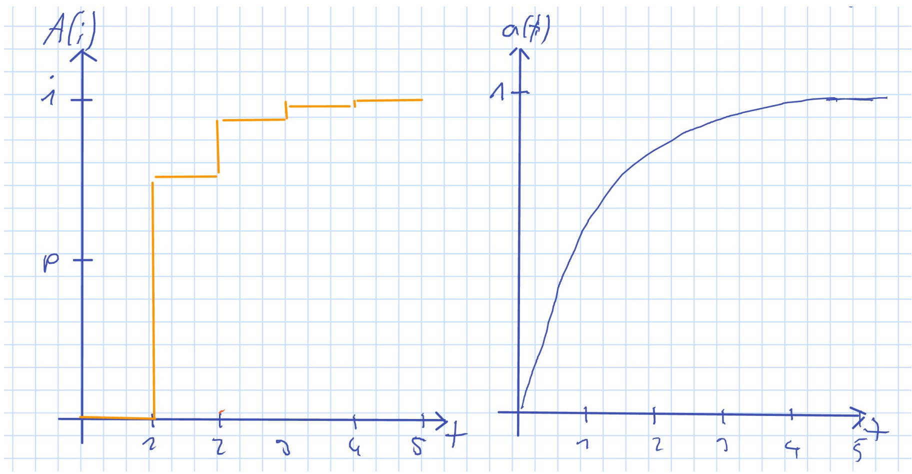
Hauptunterschied: Während bei der diskreten geometrischen Verteilung sogenannte Sprünge (diskrete Schritte) in der Verteilungsfunktion erkennbar sind, ist die Verteilungsfunktion der exponentiellen Verteilung eine geglättete kontinuierliche Kurve.

Abbildung 11: Verteilungsfunktionen von geometrischer und Verteilungsdichtefunktion exponentieller Verteilung



Aufgabe 2

Abbildung 12: Verteilung der geometrischen Verteilung und Verteilungsfunktion der exponentiellen Verteilung



Hauptunterschied: Bei der exponentiellen Verteilung kann man den Wert der Verteilungsfunktion nicht direkt an der Kurve ablesen, sondern muss dafür das Integral berechnen. Bei der geometrischen Verteilung hingegen kann man den Wert der Verteilungsfunktion direkt an der Kurve ablesen.

Aufgabe 3

Wahrscheinlichkeit für $P(X \leq 1)$ bei der geometrischen Verteilung:
$P(X \leq 1) = p * \sum_{i=1}^{1}(1-p)^i = p * (1-p) = p - p^2$.

Wahrscheinlichkeit für $P(X \leq 1)$ bei der exponentiellen Verteilung:
$P(X \leq 1) = \int_0^1 a(\tau)d\tau = [a(t)]_0^1 = [\lambda * e^{-\lambda} * t]_0^1 = A(1) - A(0) = (1 - e^{-\lambda * 1}) - (1 - e^{-\lambda * 0}) = 1 - e^{-\lambda} - 1 + 1 = 1 - e^{-\lambda}$