FUNCIONES

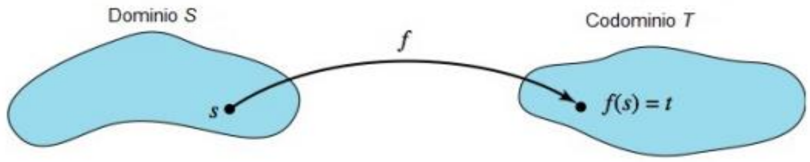
TERMINOLOGÍA

Una función tiene:

- Un conjunto de valores de partida.
- Un conjunto de valores para asociar (con los primeros).
- La asociación en sí misma.
- Una función es una relación uno-a-uno o muchos-a-uno.

Dominio: es el conjunto de valores de partida
Codominio: es el conjunto de valores disponibles para asociar con los primeros

$f: S \to T$, S es el dominio y T es el codominio de la función.



- Todo miembro de S debe tener uno y solo un valor de T asociado a él pero puede haber más de una o ninguna pre-imagen para t.

Imagen: t es la imagen de s bajo f
Pre-imagen: s es una pre-imagen de t bajo f y f mapea s a t.
Rango: el conjunto de todas las imágenes de una función

FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Ejemplo: Sea $f: Z \times N \times \{1, 2\} \to Z$ donde $f(x, y, z) = x^Y + z$.
Entonces, $f(-4, 3, 1) = (-4) 3 + 1 = -64 + 1 = -63$

MÁS EJEMPLOS

La función Piso $\lfloor x \rfloor$ asocia a cada número real *x* *el mayor entero menor o igual a x*.
La función Techo $\lceil x \rceil$ asocia a cada número real *x* *el menor entero mayor o igual a x*.

$$\lfloor 2.8 \rfloor = 2,\ \lceil 2.8 \rceil = 3,\ \lfloor -4.1 \rfloor = -5,\ \lceil -4.1 \rceil = -4$$

IGUALDAD DE FUNCIONES

Dos funciones son iguales si tiene el mismo codominio

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

1. Funciones Sobreyectivas: son Sobreyectivas si el rango de f es igual al codominio de f.
   Para probar que una función es Sobreyectiva:

Ejemplo: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $g(x) = x^3$ es una función Sobreyectiva.

Para probar que $g(x)$ es *sobreyectiva*, sea r un número real arbitrario del codominio y sea $x = \sqrt[3]{r}$.

Luego, x es un número real, x pertenece al dominio de g y $g(x) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$.
Por lo tanto, cualquier miembro del codominio es la imagen bajo g de algún miembro del dominio.

2. Funciones uno a uno, o Inyectivas: La idea de 'Uno-a-Uno' aquí es la misma que para relaciones binarias, excepto que todo elemento de S debe aparecer como un primer componente en un par ordenado.

Para probar que una función es Inyectiva:

Ejemplo: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $g(x) = x^3$ es una función Inyectiva.

Para probar que $g(x)$ es *Inyectiva*, sean x e y dos números reales tales que $g(x) = g(y)$.

Luego, como $g(x) = g(y)$, entonces $x^3 = y^3$ y esto implica que $x = y$.

RESUMEN DE SOBRE Y UNO A UNO

FUNCIONES BIYECTIVAS

Es biyectiva cuando es sobreyectiva e Inyectiva

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Si el codominio de una función f es igual al dominio de la otra función g entonces las dos funciones pueden ser combinadas para obtener una nueva función:

$$g \circ f: S \to U,\ (g \circ f)\ (s) = g(f(s))$$

Término	Significado
Función	Mapeo desde un conjunto a otro que asocia a cada elemento del conjunto de partida exactamente un elemento del conjunto destino
Dominio	Conjunto de partida de una función
Codominio	Conjunto destino de una función
Imagen	Resultado o punto destino de un mapeo
Pre-imagen	Punto de partida de un mapeo
Rango	Colección de todas las imágenes del dominio
Sobreyectiva	El rango es igual al codominio; todo elemento del codominio tiene una pre-imagen
Inyectiva	No hay dos elementos del dominio que se mapeen a la misma imagen
Biyección	Función inyectiva y sobreyectiva

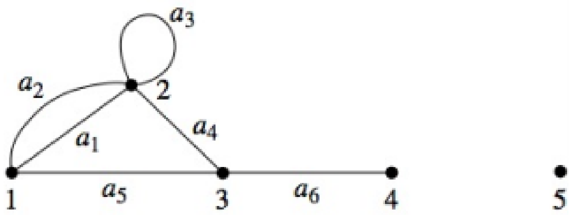
GRAFOS

Un grafo es un conjunto no vacío de nodos (o vértices) y un conjunto de arcos tal que cada arco conecta a dos nodos.

GRAFOS DIRIGIDOS
En este tipo de grafo, los arcos siempre tienen un nodo de partida y un nodo de llegada

---

TERMINOLOGÍA

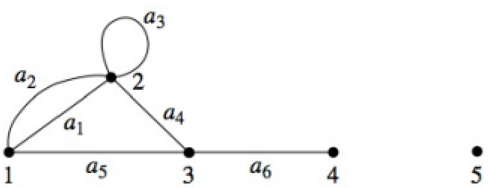


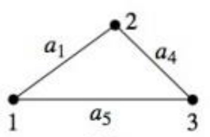
- → Nodos adyacentes: Diremos que dos nodos de un grafo son adyacentes si son los extremos asociados a un arco. Los nodos 1 y 3 son adyacentes, pero 1 y 4 no lo son.
- → Lazo: es un arco con extremos n-n, para algún nodo n. Por ejemplo, el arco a3 es un lazo con extremos 2-2. Un grafo sin lazos se denomina grafo libre de lazos.
- → Arcos Paralelos: Dos arcos con los mismos (nodos) extremos son arcos paralelos. Por ejemplo, los arcos a1 y a2 son paralelos.
- → Grado de un nodo: es el número de arcos que tienen a ese nodo como extremo. En el ejemplo, los nodos 1 y 3 tienen grado 3, el nodo 2 tiene grado 5, el nodo 4 tiene grado 1 y el nodo 5 tiene grado 0.
    - Un nodo con grado cero es un nodo aislado.
    - Un nodo que no tiene nodos adyacentes se denomina nodo aislado. En el ejemplo, el nodo 5 es un nodo aislado.

Grafo simple: Un grafo sin lazos ni arcos paralelos.
Grafo completo: Es aquel en el cual todo par de nodos distintos, son adyacentes.

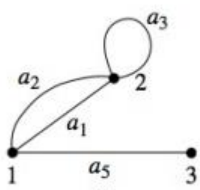
SUBGRAFO

Es el grafo que se obtiene 'borrando' parte del grafo original y dejando el resto sin cambios



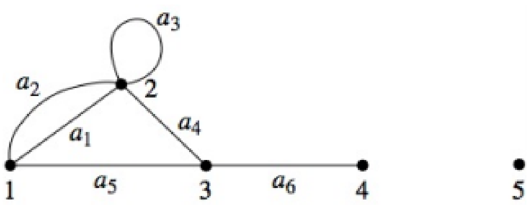


(a)



(b)

CAMINOS Y LONGITUDES



- → Camino: Un Camino desde un nodo n0 a un nodo nk es una secuencia. En el grafo G, un camino desde el nodo 2 al nodo 4 consiste en la secuencia 2, a1, 1, a2, 2, a4, 3, a6, 4
- → Longitud: de un camino es el número de arcos que contiene el camino. La Longitud del camino anterior (del nodo 2 al 4) es 4.

Grafo Conectado: cuando existe un camino desde cualquier nodo a otro.

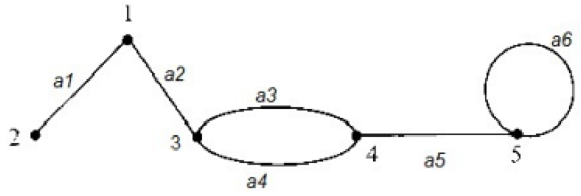
CICLOS

En un grafo es un camino que comienza y termina en un mismo nodo.

En el grafo pasado: el camino 1, a1, 2, a4, 3, a5, 1 es un ciclo.

Grafo acíclico: un grafo que no tiene ciclos.

EJEMPLO

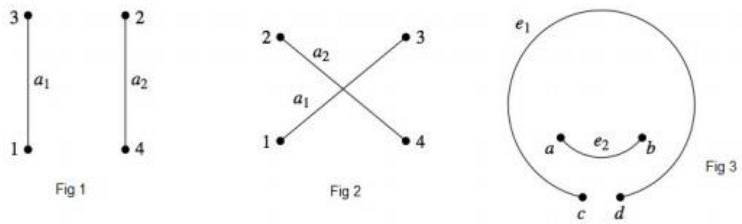


1. Encontrar dos nodos que no sean adyacentes. 2-3, 3-5, etc., ¿1-1?
2. Encontrar un nodo adyacente a sí mismo. 5
3. Encontrar un lazo. a_6
4. Encontrar dos arcos paralelos. a_3 y a_4
5. ¿Cuál es el grado del nodo 3? 3
6. Encontrar un camino de longitud 5. 4, a_4, 3, a_3, 4, a_4, 3, a_3, 4, a_5, 5
7. Encontrar un ciclo. ¿El anterior es un ciclo? NO. 3, a_3, 4, a_4, 3
8. Es un grafo completo? NO.
9. Es un grafo conectado? SÍ!

En general, un grafo simple y completo con n vértices se denota mediante Kn.

GRAFOS ISÓMORFICOS

Dos grafos que lucen diferentes en su representación visual pueden, sin embargo, ser el mismo grafo de acuerdo a nuestra definición formal.



Los grafos de Fig. 1 y Fig 2. son *casi iguales*. Tienen los mismos nodos, los mismos arcos y la misma función de arcos en (nodos) extremos.

El grafo de Fig. 3 es esencialmente el mismo grafo también. Si relacionamos los nodos y arcos del grafo de Fig.1 mediante los siguientes mapeos:

$$f_1: \begin{array}{l} 1 \to a \\ 2 \to c \\ 3 \to b \\ 4 \to d \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{l} a_1 \to e_2 \\ a_2 \to e_1 \end{array}$$

Tenemos que: $g_1(a_1) = 1\text{-}3$ sssí $g_2[f_2(a_1)] = g_2(e_2) = a\text{-}b = f_1(1)\text{-}f_1(3)$

Importante

Para probar que los grafos son Isomórficos, deberíamos completar la definición de la función f_2 y luego demostrar que la relación arcos-nodos extremos es preservada examinando todos los casos posibles.

Dos grafos no son isómorficos cuando:

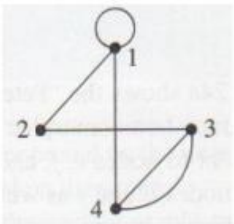
1. Un grafo tiene más nodos que el otro.
2. Un grafo tiene más arcos que el otro.
3. Un grafo tiene arcos paralelos y el otro no.
4. Un grafo tiene un lazo y el otro no.
5. Un grafo tiene un nodo de grado k y el otro no.
6. Un grafo es conectado y el otro no.
7. Un grafo tiene un ciclo y el otro no.

CICLO DE HAMILTON

Es un CICLO que contiene TODOS los nodos o vértices exactamente una vez, excepto el primer nodo que también es el último.

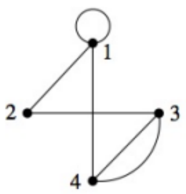
REPRESENTACION DE GRAFOS COMPUTACIONALES

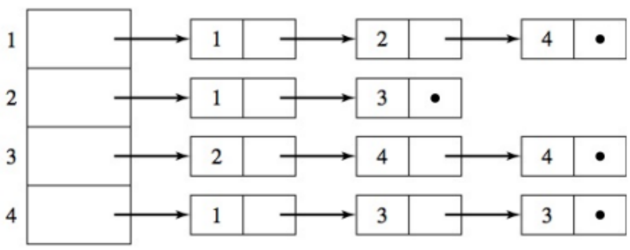
1. Matriz de Adyacencia:



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Lista de adyacencia:

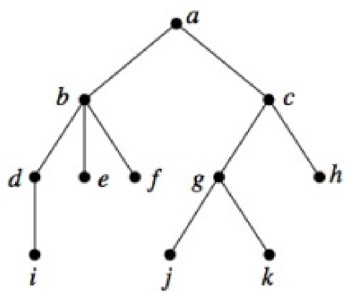




→ Para cada nodo, un puntero apunta a un nodo adyacente, el cual a su vez apunta a otro nodo adyacente y así sucesivamente.
→ En la figura, el símbolo '•' denota un puntero nulo, que indica el fin de la lista de adyacencia para el nodo correspondiente.

ARBOLES

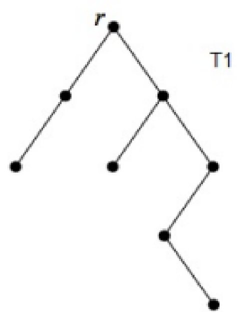
- Como un árbol es un grafo conectado, existe un camino desde la raíz a cualquier otro nodo del árbol. Además, como el grafo es acíclico, este camino es único.
- La Profundidad de un nodo en un árbol es la longitud del camino desde la raíz a ese nodo. La raíz tiene *Profundidad* 0.
- La Profundidad (o Altura) de un árbol es la *máxima profundidad* de algún nodo del árbol. Es decir, *la longitud del camino más largo* desde la raíz a algún nodo.
- Un nodo que no tiene hijos se denomina Hoja del árbol.
- Todos los nodos que no son *Hojas* se denominan nodos internos.
- Un Bosque es un grafo acíclico (no necesariamente conectado); es decir, un bosque es una colección disjunta de árboles.

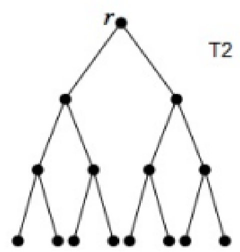


- ¿Cuál es la Profundidad del nodo *g*? 2
- ¿Cuál es la Profundidad (o Altura) del árbol? 3
- ¿Cuáles nodos son Hojas del árbol? *i, e, f, j, k, h*
- ¿Cuáles son nodos internos? *d, b, a, c, g*

ARBOLES BINARIOS

- Un Árbol Binario es aquel árbol donde cada nodo tiene, como máximo, dos hijos.
- En un árbol binario, cada hijo de un nodo es o bien el Hijo Izquierdo o el Hijo Derecho.
- Un Árbol Binario Completo es aquel árbol donde todos los nodos internos tienen dos hijos y todas las hojas tienen la misma profundidad.
- El árbol *T*1 es un Árbol Binario y el árbol *T*2 es un Árbol Binario Completo de altura 3.

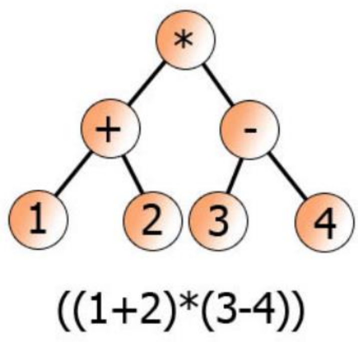




EJEMPLO DE UN

ARBOL CON EXPRESIONES

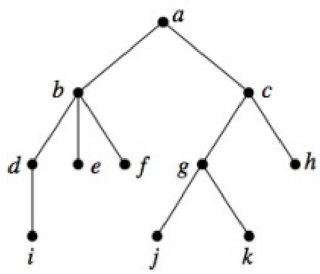
ALGEBRAICAS



RECORRIDOS

Existen tres algoritmos básicos para realizar recorridos de árboles:

- Recorrido Pre-Orden.
- Recorrido In-Orden.
- Recorrido Pos-Orden.

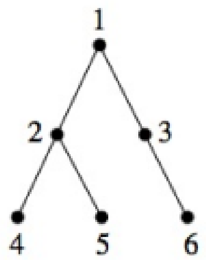


El recorrido en pre-orden (raíz, izq., der.) produce: *a, b, d, i, e, f, c, g, j, k, h*

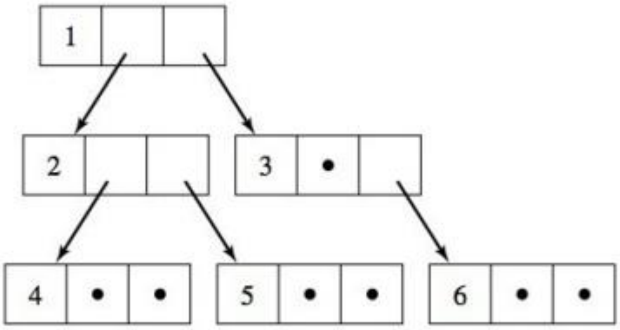
El recorrido in-orden (izq., raíz, der.) produce: *i, d, b, e, f, a, j, g, k, c, h*

El recorrido en pos-orden (izq., der., raíz) produce: *i, d, e, f, b, j, k, g, h, c, a*

REPRESENTACION DE ARBOLES BINARIOS



	Hijo Izq	Hijo Der
1	2	3
2	4	5
3	0	6
4	0	0
5	0	0
6	0	0



PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

1 La operación '$\circ$' es asociativa si

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,[x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z]$$

2 La operación '$\circ$' es conmutativa si

$$(\forall x)(\forall y)(x \circ y = y \circ x)$$

3 $[T, \circ]$ tiene un elemento identidad 'i' si

$$(\exists i)(\forall x)(x \circ i = i \circ x = x)$$

4 Si $[T, \circ]$ tiene un elemento identidad i, entonces cada elemento en T tiene un inverso con respecto a '$\circ$' si

$$(\forall x)(\exists x^{-1})(x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = i)$$

SISTEMAS ALGEBRAICOS

Semigrupo:

La estructura $[T, \circ]$ es un semigrupo si T es un conjunto no vacío y '$\circ$' es una operación binaria sobre T tal que

1 '$\circ$' es **asociativa**.

Monoide:

La estructura $[T, \circ]$ es un monoide si T es un conjunto no vacío y '$\circ$' es una operación binaria sobre T tal que

1 '$\circ$' es **asociativa**.

2 existe **elemento identidad** en T.

Grupo:

$[T, \circ]$ es un grupo si T es un conjunto no vacío y '$\circ$' es una operación binaria sobre T tal que

1 '$\circ$' es **asociativa**.

2 existe **elemento identidad** en T.

3 cada elemento en T tiene un **inverso** (en T) con respecto a '$\circ$'.

Un grupo, en el cual la operación '$\circ$' es conmutativa, es llamado grupo conmutativo o grupo abeliano.

Sea $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y definamos la suma módulo 5, denotada mediante $+_5$, sobre $\mathbb{Z}_5$ como $x +_5 y = r$, donde r es el resto de $x + y$ dividido por 5. Es decir, $x +_5 y = (x + y) \bmod 5$. Por ejemplo, $1 +_5 2 = 3$, $3 +_5 4 = 2$, $3 +_5 2 = 0$, etc.

$[\mathbb{Z}_5, +_5]$ es un grupo conmutativo.

La siguiente tabla define a la operación $+_5$

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

- ¿Cuál es la identidad en $[\mathbb{Z}_5, +_5]$? 0
- ¿Cuál es el inverso de 2 en $[\mathbb{Z}_5, +_5]$? 3
- ¿Cuáles elementos de $[\mathbb{Z}_5, +_5]$ tienen inverso? Todos, sino no sería grupo.

Teorema sobre Cancelación en Grupos

Todo grupo $[G, \circ]$ satisface las leyes de cancelación izquierda y derecha.

Importante

Si una estructura $[G, \circ]$ no satisface alguna de las leyes de cancelación (izquierda o derecha) entonces no es un grupo.

GRUPOS Y SUBGRUPOS

Teorema sobre Subgrupos

Para todo grupo $[G, \circ]$ con identidad i y siendo A un conjunto tal que $A \subseteq G$, entonces $[A, \circ]$ es un subgrupo de $[G, \circ]$ si satisface las siguientes tres condiciones:

1. A es cerrado bajo la operación '$\circ$'.
2. $i \in A$.
3. Todo $x \in A$ tiene un elemento inverso en A.

GRUPOS ISOMORFICOS

¿Qué significa que dos grupos $[S, \bullet]$ y $[T, \circ]$ sean isomórficos?

- Que las estructuras son idénticas, excepto por el etiquetado.
- Debe existir una biyección desde S a T.
- Esta biyección debe preservar los efectos de la operación binaria.

HOMOMORFISMO

Sean $[S, \bullet]$ y $[T, \circ]$ dos grupos. Una función $f : S \to T$ es un homomorfismo de $[S, \bullet]$ a $[T, \circ]$ si:

- para todo par $s_1, s_2 \in S$, $f(s_1 \bullet s_2) = f(s_1) \circ f(s_2)$.

Si f es biyectiva, entonces f es un isomorfismo.

NUCLEO DE UN HOMOMORFISMO

Sean $[S, \bullet]$ y $[T, \circ]$ dos grupos. Sea i_t la identidad en $[T, \circ]$ y sea f un homomorfismo de $[S, \bullet]$ a $[T, \circ]$.

El núcleo de f, denotado $Nuc(f)$, se define como

$$Nuc(f) = \{s \in S : f(s) = i_t\}$$

IMAGEN HOMOMÓRFICA

Sean $[S, \bullet]$ y $[T, \circ]$ dos grupos. Sea f un homomorfismo de $[S, \bullet]$ a $[T, \circ]$.

La imagen homomórfica de f, denotada $f(S)$, se define como

$$f(S) = \{t \in T : \text{ existe } s \in S \text{ y } f(s) = t\}$$

ALGEBRA DE BOOLE

1*a*.	$x + y = y + x$	1*b*.	$x \cdot y = y \cdot x$	conmutativa
2*a*.	$(x + y) + z = x + (y + z)$	2*b*.	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	asociativa
3*a*.	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	3*b*.	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	distributiva
4*a*.	$x + 0 = x$	4*b*.	$x \cdot 1 = x$	identidad
5*a*.	$x + x' = 1$	5*b*.	$x \cdot x' = 0$	complemento

- Denotaremos a un álgebra de Boole mediante la notación

$$[B, +, \cdot, ', 0, 1]$$

En todo álgebra de Boole se verifica la propiedad de idempotencia de la operación $+$:

$$x + x = x$$

En todo álgebra de Boole se verifica la propiedad de idempotencia de la operación $\cdot$:

$$x \cdot x = x$$

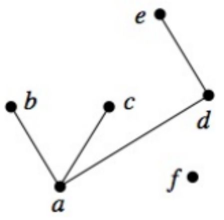
Sea $[B, +, \cdot, ', 0, 1]$ un álgebra de Boole. Para todo $x, y \in B$ se verifica que:

$(x')' = x$	(doble negación)
$(x + y)' = x' \cdot y'$	(ley de De Morgan)
$(x \cdot y)' = x' + y'$	(ley de De Morgan)

RETICULADOS

Observación

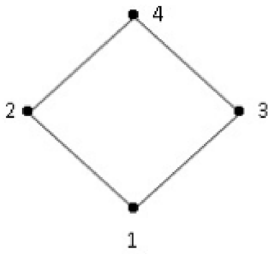
- La *Menor Cota Superior* es también conocida como Supremo.
- La *Mayor Cota Inferior* es también conocida como Ínfimo.



- $MCS(d, e) = e$
- $MCS(a, d) = d$
- $MCS(c, d) =$ No existe
- $MCS(f, f) = f$

- $MCI(a, d) = a$
- $MCI(e, d) = d$
- $MCI(e, c) = a$
- $MCI(c, f) =$ No existe

Un Reticulado es un conjunto parcialmente ordenado donde todo par de elementos x e y tienen una *Menor Cota Superior*, denotada mediante $x + y$ y una *Mayor Cota Inferior*, denotada mediante $x \cdot y$.



$\cdot$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

$+$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

Decimos que L es un Reticulado Distributivo si cualesquiera sean $x, y, z \in L$ se verifica que:

D1 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

D2 $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

RETICULADO COMPLEMENTADO

Decimos que L es un Reticulado Complementado si existe un *mínimo elemento* 0 y un *máximo elemento* 1 y para todo $x \in L$ existe $x' \in L$ tal que:

$$x + x' = 1 \quad \text{y} \quad x \cdot x' = 0$$

Sea L un reticulado Complementado y Distributivo. Entonces L constituye un Álgebra de Boole.