Elementos de Teoría de la Computación
Clase 1: Técnicas de Prueba. Repaso

Depart. de Teoría de la Computación - Facultad de Informática
Universidad Nacional del Comahue
Segundo Cuatrimestre de 2020

Pablo Kogan
pablo.kogan@fi.uncoma.edu.ar

Temario

¿Los convenci?
Formales Vs No tan Formales

Pruebas Formales

En la práctica o investigación, podemos observar casos en los que Q es verdadero siempre que P es verdadero..

A partir de estas experiencias..

podemos formular la conjetura: $P \rightarrow Q$

Si P es verdadero entonces Q es verdadero.

Técnicas de Prueba

- En general, se busca probar la validez de una conjetura $P \to Q$ en un contexto dado.
- Una vez que la conjetura es probada se vuelve un teorema.
- A menudo, las conjeturas se basan en el razonamiento inductivo. Esto es, el proceso de arribar a conclusiones a partir de un número de casos o experiencias.
- Para probar una conjetura debemos aplicar razonamiento deductivo donde se verifica su verdad o falsedad evaluando o transformando adecuadamente la conjetura.

Técnicas de Prueba

Comenzaremos el recorrido de los siguientes métodos de prueba:

- Prueba (o No-Prueba) por contraejemplo.
- Prueba Exhaustiva
- Prueba Directa
- Prueba por Contraposición
- Prueba por Contradicción

Terminología

- Axioma: Sentencia que se asume verdadera.
  - Ejemplo: Una recta tiene infinitos puntos.

- Definición: Se usa para crear nuevos conceptos a partir de conceptos ya existentes.

- Teorema: Proposición que ha sido probada verdadera.
  - Dos tipos especiales de teoremas: Lema y Corolario.
  - Lema: Teorema que es de utilidad para probar otro teorema.
  - Corolario: Teorema que se deduce rápidamente de otro teorema.

Terminología

Lenguaje Coloquial	Conectivo Lógico	Expresión Lógica
y; pero; también; además	Conjunción	$A \wedge B$
o	Disyunción	$A \vee B$
Si A entonces B A implica B A, luego B A solo si B B se deduce de A A es condición suficiente para B B es condición necesaria para A	Implicación	$A \rightarrow B$
A si y solo si B A es condición necesaria y suficiente para B	Equivalencia	$A \leftrightarrow B$
no A Es falso que $A \ldots$ No es verdadero que $A \ldots$	Negación	$\sim A$ $\neg A$ A'

Prueba por contraejemplo

Encontramos un contraejemplo que invalide la conjetura $P \to Q$.

Esto es, un caso donde P es verdadero, pero Q es falso.

Prueba por contraejemplo

Importante

Para probar que una conjetura es falsa basta con encontrar UN SOLO ejemplo que la contradiga.

Ejemplo: *Para todo entero positivo n,* $n + n \leq n^2$. ¿Verdadero o falso?

- H: entero positivo $n > 0$
- T: $n + n \leq n^2$

Dem: por Contraejemplo. Analicemos algunos casos:

n	$n+n$	n^2	$n + n \leq n^2$
2	2	4	Sí
3	6	9	Si
4	8	16	Si
1	2	1	Nooo! Contraejemplo

Prueba por contraejemplo

Más ejemplos:

- *Todos los animales que viven en el mar son peces.*
- *Todo entero menor a 10 es mayor que 5.*

Importante

En general, no existe un modo específico de hallar un contraejemplo. Más aún, no existe un modo mecánico de determinar si una conjetura es verdadera o falsa.

Los contraejemplos no siempre son triviales y el sólo hecho de no hallarlos no determina la validez de la conjetura. Por eso, necesitamos otros medios de prueba.

Prueba Exhaustiva

- Cuando la conjetura se refiere a una colección finita de objetos, usando esta técnica, uno puede verificar si es verdadera para cada miembro de la colección.

- Esta técnica de prueba solo puede ser aplicada si el número de casos posibles es finito.

- Un ejemplo de la técnica de prueba exhaustiva lo constituyen las tablas de verdad en la lógica proposicional.

Prueba Exhaustiva

Ejemplo: *Para todo entero positivo menor o igual a 5, su cuadrado es menor o igual a la suma de 10 más 5 veces ese entero.*

- H: todo entero positivo $0 \leq n \leq 5$
- T: $n^2 \leq 10 + 5 * n$

Dem: por prueba Exhaustiva. Analicemos todos los casos posibles:

n	n^2	$10 + 5n$	$n^2 \leq 10 + 5n$
0	0	10	Sí
1	1	15	Sí
2	4	20	Sí
3	9	25	Sí
4	16	30	Sí
5	25	35	Sí!

Prueba Directa

Dada una conjetura $P \to Q$, ¿qué podemos hacer si una prueba exhaustiva no funciona?

- Intentar probar $P \to Q$ usando las reglas de la lógica proposicional (o la lógica de predicados).
- En una Prueba Directa, se asume la hipótesis P y se deduce la conclusión Q.
- Una prueba formal directa es una secuencia de prueba que nos conduce desde P a Q.

Prueba Directa: Ejemplo

Consideremos la conjetura:

$$x \text{ es un entero par} \wedge y \text{ es un entero par} \rightarrow \text{el producto } xy \text{ es un entero par}$$

Una secuencia de prueba formal sería:

1.	x es un entero par $\wedge$ y es un entero par	hip.
2.	$(\forall x)[x$ es un entero par $\rightarrow (\exists k)(k$ entero $\wedge\ x = 2k)]$	teoría de num. (def. par)
3.	x es un entero par $\rightarrow (\exists k)(k$ entero $\wedge\ x = 2k)$	2, inst. univ.
4.	y es un entero par $\rightarrow (\exists k)(k$ entero $\wedge\ y = 2k)$	2, inst. univ.
5.	x es un entero par	1, simplif.
6.	$(\exists k)(k$ entero $\wedge\ x = 2k)$	3, 5, mp
7.	m es un entero $\wedge\ x = 2m$	6, inst. exist.
8.	y es un entero par	1, simplif.
9.	$(\exists k)(k$ entero $\wedge\ y = 2k)$	4, 8, mp
10.	n es un entero $\wedge\ y = 2n$	9, inst. exist.
11.	$x = 2m$	7, simplif.
12.	$y = 2n$	10, simplif.
13.	$xy = (2m)(2n)$	11, 12, sustitución

Prueba Directa: Ejemplo (continuación)

Consideremos la conjetura:

x es un entero par $\wedge$ y es un entero par $\rightarrow$ el producto xy es un entero par

Una secuencia de prueba formal sería:

	....	
13.	$xy = (2m)(2n)$	11, 12, sustitución
14.	$xy = 2(2mn)$	13, props. del producto
15.	m es un entero	7, simplif.
16.	n es un entero	10, simplif.
17.	$2mn$ es un entero	15, 16, teoría de num.
18.	$xy = 2(2mn) \wedge 2mn$ es un entero	14, 17, conj.
19.	$(\exists k)(k$ entero $\wedge\ xy = 2k)$	18, gen. exist.
20.	$(\forall x)((\exists k)(k$ entero $\wedge\ x = 2k) \rightarrow x$ es un entero par$)$	teoría de num. (def. par)
21.	$(\exists k)(k$ entero $\wedge\ xy = 2k) \rightarrow xy$ es un entero par	20, inst. univ.
22.	xy es un entero par	19, 21, mp

Prueba Directa: Ejemplo (continuación)

De nuevo, consideremos la conjetura:

$$x \text{ es un entero par} \wedge y \text{ es un entero par} \rightarrow \text{el producto } xy \text{ es un entero par}$$

Otra forma de hacer una prueba directa podría ser (Formalidad requerida en Parcial):

- H: x es un entero par $\wedge$ y es un entero par
- T: el producto xy es un entero par

- Dem. por Prueba Directa:
- Sea $x = 2m$ y sea $y = 2n$, donde m y n son enteros.
- Entonces $xy = (2m)(2n) = 2(2mn) = 2k$, donde $k = 2mn$ y es un entero.
- Entonces xy tiene la forma $2k$ y, por la definición de número par, podemos concluir que xy es un entero par.

Técnicas de Prueba

Recordemos que estamos repasando los siguientes métodos de prueba:

- Prueba (o No-Prueba) por contraejemplo.
- Prueba Exhaustiva
- Prueba Directa
- Prueba por Contraposición
- Prueba por Contradicción

Prueba por Contraposición

- Si no podemos encontrar una prueba directa, y todavía confiamos en la verdad de la conjetura $P \to Q$, podemos intentar con alguna *variante* de ella.

- Si podemos probar el teorema $\sim Q \to \sim P$, entonces podemos concluir $P \to Q$ usando la tautología $(\sim Q \to \sim P) \to (P \to Q)$.

Importante

- $\sim Q \to \sim P$ es la contrapositiva o la contrarrecíproca de $P \to Q$.
- Probar la contrapositiva (o la contrarrecíproca) de una conjetura es equivalente a probar la conjetura original.

Prueba por Contraposición: Ejemplo

Probar que si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero debe ser impar (Formalidad requerida en Parcial)

- La conjetura es n^2 *impar* $\rightarrow$ n *impar*.

- Haremos *prueba por Contraposición* y entonces probaremos n *par* $\rightarrow$ n^2 *par* (que es la *contrarrecíproca* de la conjetura original).
- H: n *par*
- T: n^2 *par*
- Dem:
- Si n es par entonces $n = 2m$, donde m es un entero.
- Entonces $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2) = 2t$, donde t es un entero.
- Por lo tanto, n^2 es par.

Prueba por Contraposición

Importante

La contrapositiva (o contrarrecíproca) es diferente de la recíproca de una conjetura.

- La recíproca $Q \to P$ no es equivalente a la conjetura $P \to Q$.
- Probar la recíproca no implica probar la conjetura.

Ejemplo: La implicación 'Si $a > 5$, entonces $a > 2$' es verdadera, pero su recíproca 'Si $a > 2$, entonces $a > 5$' es falsa.

Desafío: ¿Por qué la recíproca no es equivalente a la conjetura? Proponer un método de prueba (y una prueba) para demostrar su falsedad.

Probando '*Si y Solo Si*'

En muchos casos los teoremas tienen la forma:

$$P \text{ si y solo si } Q$$

Lo que significa 'P si Q' y 'P solo si Q'. Esto equivale a las implicaciones '$Q \to P$' y '$P \to Q$'.

Importante

Para probar una conjetura de la forma P si y solo si Q debemos probar tanto la implicación directa como su recíproca.

Prueba por Contradicción

La técnica de Prueba por Contradicción también es conocida como Reducción al Absurdo.

Mediante '0' denotaremos a una contradicción, esto es una fórmula cuyo valor de verdad es siempre falso. Por ejemplo: $A \wedge \sim A$.

Mediante tablas de verdad, se puede probar que

$$(P \wedge \sim Q \rightarrow 0) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

es una tautología.

Por lo tanto, para probar el teorema $P \rightarrow Q$, basta con probar $P \wedge \sim Q \rightarrow 0$.

Prueba por Contradicción

Importante

En una *Prueba por Contradicción* (o *Reducción al Absurdo*), se asumen la hipótesis y la negación de la conclusión como verdaderas y, a partir de esos hechos, tratamos de deducir alguna contradicción.

Prueba por Contradicción: Ejemplo

Probar que si un número sumado a sí mismo da el mismo número, entonces debe ser 0 (Formalidad requerida en Parcial)

- La conjetura es $x + x = x \to x = 0$.
- Por lo tanto, para la *Prueba por Contradicción* (o *Reducción al Absurdo*),
- H: $x + x = x$ y $x \neq 0$ (la negación de la conclusión)
- Dem:
- Luego, $2x = x$ y $x \neq 0$. Entonces, podemos dividir por x a ambos miembros y obtenemos la contradicción: $2 = 1$ Absurdo!!!!
- Por lo tanto, queda probado que $(x + x = x) \to (x = 0)$

Sumario de las Técnicas de Prueba

Primero busco un Contraejemplo, y si no lo encuentro:

Técnica	**¿Cómo probar $P \to Q$?**	**Comentario**
Prueba Exhaustiva	Demostrar $P \to Q$ para todos los casos posibles.	Solo puede usarse para probar un número finito de casos.
Prueba Directa	Asumir P y deducir Q.	El enfoque usual.
Prueba por Contraposición	Asumir $\sim Q$ y deducir $\sim P$.	Usar en caso que $\sim Q$ provea un argumento de *mayor peso* que P.
Contradicción Prueba por Reducción al Absurdo	deducir una contradicción. Asumir $P \wedge \sim Q$ y	*”algo no es verdadero”*. Usar en caso que Q diga que

Bibliografía

Mathematical Structures for Computer Science
J. Gersting
Sixth edition
2007

Desafíos

- Para responder por Discord.
  ¿Por qué la recíproca no es equivalente a la conjetura? Proponer un método de prueba (y una prueba) para demostrar su falsedad.
- Para responder en Pedco

  Auto-evaluación Técnicas de Prueba

  Suma 2 puntos para el 1er Parcial. Cierra el próximo viernes, 28 de agosto de 2020 a las 23:59

¿Preguntas?