Elementos de Teoría de la Computación
Clase 1: Técnicas de Prueba.
Repaso

$\boxed{P \rightarrow Q}$

Técnicas de prueba

- Prueba (o No-Prueba) por contraejemplo: un caso donde P es verdadero, pero Q es falso. Para probar que una conjetura es falsa basta con encontrar UN SOLO ejemplo que la contradiga

Ejemplo: Para todo entero positivo n, $n + n \leq n^2$. ¿Verdadero o falso?
H: entero positivo $n > 0$
T: $n + n \leq n^2$
Dem: por Contraejemplo. Analicemos algunos casos:

n	$n+n$	n^2	$n+n \leq n^2$
2	2	4	Sí
3	6	9	Si
4	8	16	Si
1	2	1	Nooo! Contraejemplo

Primero busco un Contraejemplo, y si no lo encuentro:

- Prueba Exhaustiva: Cuando la conjetura se refiere a una colección finita de objetos

Ejemplo: Para todo entero positivo menor o igual a 5, su cuadrado es menor o igual a la suma de 10 más 5 veces ese entero.
H: todo entero positivo $0 \leq n \leq 5$
T: $n^2 \leq 10 + 5 * n$
Dem: por prueba Exhaustiva. Analicemos todos los casos posibles:

n	n^2	$10+5n$	$n^2 \leq 10+5n$
0	0	10	Sí
1	1	15	Sí
2	4	20	Sí
3	9	25	Sí
4	16	30	Sí
5	25	35	Sí!

- Prueba Directa: ¿qué podemos hacer si una prueba exhaustiva no funciona?, una prueba formal directa es una secuencia de prueba que nos conduce desde P a Q, asumir P y deducir Q

Ejemplo: consideremos la conjetura:

x es un entero par $\wedge$ y es un entero par $\rightarrow$ el producto xy es un entero par
H: x es un entero par $\wedge$ y es un entero par
T: el producto xy es un entero par

Dem. por Prueba Directa:
Sea $x = 2m$ y sea $y = 2n$, donde m y n son enteros.
Entonces $xy = (2m)(2n) = 2(2mn) = 2k$, donde $k = 2mn$ y es un entero.

Entonces xy tiene la forma 2k y, por la definición de número par, podemos concluir que xy es un entero par.

- Prueba por Contraposición (contrapositiva o la contrarrecíproca de $P \rightarrow Q$): Si no podemos encontrar una prueba directa, y todavía confiamos en la verdad de la conjetura $P \rightarrow Q$, podemos intentar con alguna variante de ella

$\boxed{\sim Q \rightarrow \sim P}$

Ejemplo: Probar que, “si el cuadrado de un entero es impar, entonces el entero debe ser impar”

La conjetura es n^2 impar → n impar.
Haremos prueba por Contraposición y entonces probaremos n par → n^2 par

H: n par
T: n^2 par

Dem: Si n es par entonces n = 2m, donde m es un entero. Entonces $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2) = 2t$, donde t es un entero. Por lo tanto, n^2 es par

---

- Prueba por Contradicción o reducción al absurdo: esto es una fórmula cuyo valor de verdad es siempre falso. Por ejemplo: A ∧ ~A. Para probar el teorema P → Q, basta con probar P ∧ ~Q → 0. se asumen la hipótesis y la negación de la conclusión como verdaderas y, a partir de esos hechos, tratamos de deducir alguna contradicción.

$$\boxed{\mathbf{P \wedge \sim Q}}$$

Ejemplo: Probar que, “si un número sumado a sí mismo da el mismo número, entonces debe ser 0”

La conjetura es x + x = x → x = 0.
Por lo tanto, para la Prueba por Contradicción, H: x + x = x y x distinto de 0 (la negación de la conclusión)

Dem: Luego, 2x = x y x es distinto de 0. Entonces, podemos dividir por x a ambos miembros y obtenemos la contradicción: 2 = 1 Absurdo!!!!

Por lo tanto, queda probado que (x + x = x) → (x = 0)

Distinto $\neq$

Terminología

- Axioma: Sentencia que se asume verdadera.
- Cuadrado perfecto: es un número entero cuya raíz cuadrada es un número entero.

Lenguaje Coloquial	Conectivo Lógico	Expresión Lógica
y; pero; también; además	Conjunción	$A \wedge B$
o	Disyunción	$A \vee B$
Si *A* entonces *B* *A* implica *B* *A*, luego *B* *A* solo si *B* *B* se deduce de *A* *A* es condición suficiente para *B* *B* es condición necesaria para *A*	Implicación	$A \rightarrow B$
A si y solo si *B* *A* es condición necesaria y suficiente para *B*	Equivalencia	$A \leftrightarrow B$
no *A* Es falso que *A* . . . No es verdadero que *A* . . .	Negación	$\sim A$ $\neg A$ A'

Directa	P → Q	P → Q
Contrarrecíproca	P → Q	~ Q →~ P
Recíproca	P → Q	Q → P
Inversa o contraria	P → Q	~ P →~ Q

Elementos de Teoría de la Computación

Clase 2: Definiciones Recursivas

¿Qué es recursividad?

- Lo que definimos aparece como parte de la definición.
- La definición se aplica a muestras cada vez más chicas.
- Tiene que tener un límite en el cual de ahí se devuelva y tenga una respuesta, lo llamaremos **caso base**
- La solución se construye a partir de los casos anteriores.

Llamamos Definición Recursiva o Definición Inductiva a aquella definición en la cual cada parte individual de lo que está siendo definido aparece como parte de la definición.

La Recursión es una idea muy importante que puede ser usada para definir **secuencias de objetos**, **conjuntos de objetos** y **operaciones sobre objetos**.

Secuencias Definidas por Recursión

Una secuencia S es una lista de objetos que están enumerados en algún orden. Esto es, hay un primer elemento, un segundo, etc.

Mediante S(k) se denota el elemento más pequeño de la secuencia.

Secuencia Definida Recursivamente
Una secuencia se define por recursión indicando explícitamente: los primeros valores de la secuencia y luego definiendo los valores posteriores en términos de los casos previos.

Ejemplo. Sea la secuencia S definida recursivamente por:

1. $S(1) = 2$
2. $S(n) = 2S(n-1)$ para $n \geq 2$

De acuerdo al punto 1, S (1), el primer objeto de S es 2.
Por el punto 2, el segundo objeto de S es $S(2) = 2S(1) = 2(2) = 4$
Continuando de esta manera, podemos comprobar que S es la secuencia 2, 4, 8, 16, 32, . . .

Una regla como la del punto (2) del Ejemplo, es denominada **Relación Recurrencia.**

Repaso: Secuencia de Fibonacci

$F(1) = 1$
$F(2) = 1$
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ para $n > 2$

$F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$

$F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3 \ldots$

Los primeros números de la Secuencia de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 . . .

Conjuntos Definidos por Recursión

Un conjunto es una colección de objetos sin un orden explícito. Algunos conjuntos también pueden ser definidos recursivamente.

Ejemplo. El conjunto de todas las fórmulas bien formadas (fbf) de la Lógica Proposicional.

1. **Caso Base:** toda letra de sentencia (A, B, . . ., Z) es una fbf.
2. **Caso Inductivo:** si α y β son fbfs, entonces $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\sim\alpha$, y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son también fbfs.

Conjunto FBF	α	β	α ∧ β	α ∨ β	α → β	~ α	α ↔ β
A,B,C,D,E,F….,Z	A	D	A ∧ D	A ∨ D	A → D	~A	A ↔ D
A,B,C,D,E….,Z, A∧D, A∨D, A→D, ~A, A↔D	~A	F	~A ∧ F	~A ∨ F	~A → F	~~A	~A ↔ F
A,B,C,D,E,F….,Z, A∧D, A∨D, A→D, ~A, A↔D ~A ∧ F, ~A ∨ F, ~A → F, ~~A, ~A ↔ F	A→D	~A∨F	A→D ∧ ~A∨F	A→D ∨ ~A∨F	A→D → ~A ∨F	~ A→D	A→D ↔ ~A∨F
A,B,C,D,E,F….,Z, A∧D, A∨D, A→D, ~A, A↔D ~A ∧ F, ~A ∨ F, ~A → F, ~~A, ~A ↔ F A→D ∧ ~A∨F, A→D ∨ ~A∨F, A→D → ~A ∨F, ~ A→D A→D ↔ ~A∨F							

20/3

Caso base: una variable pertenece a un conjunto
Paso inductivo: un conjunto pertenece a otro conjunto entonces "la transformación de los elementos" pertenece al mismo conjunto
Un conjunto no pertenece a otro conjunto

Operaciones Definidas por Recursión

Cierta operación sobre objetos también puede ser definidas recursivamente.

Ejemplo. la potencia a n para un número real a distinto de cero y un entero positivo n:

- $2^4 = 2x2x2x2 = 2 \times (2x2x2) = 2 \times 2^3$
- $2^3 = 2x2x2 = 2 \times (2x2) = 2 \times 2^2$
- $2^2 = 2x2 = 2 \times 2^1$
- $2^1 = 2 = 2x1 = 2 \times 2^0$
- $2^0 = 1$

Algoritmos Definidos por Recursión

En general, una relación de recurrencia puede ser implementada mediante un:

Ejemplo. Sea la secuencia S definida recursivamente por:

1. $S(1) = 2$
2. $S(n) = 2S(n - 1)$ para $n \geq 2$

Elementos de Teoría de la Computación

Principios de la Suma y de la Multiplicación

Sean un evento A qué se puede realizar de n1 maneras diferentes, y otro evento B que se puede realizar de n2 maneras diferentes,

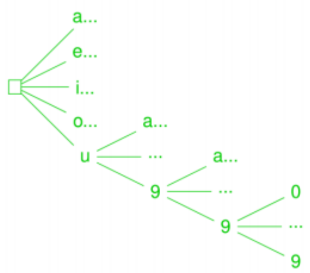
Principio de la Suma
Si la ocurrencia de un evento impide la ocurrencia el otro, entonces existen n1 + n2 posibles resultados para el evento A o el evento B.

Principio de la Multiplicación
Si la ocurrencia de un evento no depende del otro, entonces existen n1 × n2 posibles resultados para la secuencia de los dos eventos.

Ejemplo.

Considere un identificador de exactamente 4 caracteres, en el que solo permitimos las vocales y dígitos; empieza siempre con una letra y termina con un dígito:

¿Cómo definimos este conjunto I?: vocal (vocal ∨ dígito)^2 dígito ∈ I



¿Cuántos elementos tiene este conjunto?: Teniendo 5 vocales y 10 dígitos, la cantidad de combinaciones será de:

$$5 \times 15 \times 15 \times 10$$

Permutación

Características de una Permutación:

- Involucra a todos los elementos.
- Importa el orden.
- No se repiten los elementos.

Fórmula para la permutación
N × (N − 1) × … × 2 × 1 = N

Ejemplo.

Feudania y Tirania
Feudania y Tirania son dos países recientemente independizados que deben diseñar sus banderas. La tradición impone tener una bandera de tres franjas horizontales iguales, sin repetir colores. Los colores permitidos son rojo, verde y amarillo.

¿Cuántas banderas distintas tienen estos países para elegir?: 3 × 2 × 1 = 6

El problema de la BANANA

Existen algunas permutaciones que son iguales

$A_1A_2A_3BN_1N_2$, $A_1A_2A_3BN_2N_1$

$N_1BN_2A_1A_2A_3$, $N_1BN_2A_1A_3A_2$, $N_1BN_2A_2A_1A_3$,
$N_1BN_2A_2A_3A_1$, $N_1BN_2A_3A_1A_2$, $N_1BN_2A_3A_2A_1$

¿Cuántas permutaciones hay de N_1 y N_2? $2! = 2$

¿Cuántas permutaciones hay de A_1, A_2 y A_3? $3! = 6$

Permutación con repetición

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite k1 veces, el segundo k2 veces, el tercero k3 veces… n = k1 + k2 + k3 + …

- Entran todos los elementos.
- Importa el orden.
- Se repiten los elementos.

Formula:

El número de permutaciones distinguibles que pueden formarse a partir de una colección de n objetos, en la que el primer objeto aparece k1 veces, el segundo k2 veces, el tercero k3 veces, y así sucesivamente, es

$$\frac{n!}{k_1! \times k_2! \ldots \times k_t!}$$

Variación o Permutación de n tomados de a r

- No entran todos los elementos.
- Importa el orden.
- No se repiten los elementos.

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo. Feudania y Tirania (2)

Supongamos que los colores permitidos ahora son rojo, verde, amarillo, negro, azul y blanco. ¿Cuántas banderas distintas tienen estos países para elegir si solo se permiten tres franjas de colores diferentes?:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

Variación o Permutación con REPETICIÓN de N elementos tomados de M

No entran todos los elementos si N > M. Pueden entrar todos los elementos si N ≤ M. Importa el orden. Se repiten los elementos.

$$VR^{m}_{n} = N^{M}$$

Examen Perfecto

Fabrizio quiere sacarse un 10. Fabrizio ha hecho un examen cuyas respuestas se respondían solamente con “si” o con “no” y que consistía de 10 preguntas. ¿Cuántas posibles soluciones tiene este examen?:

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10}$

Combinaciones de n elementos tomados de a r

Se llama combinaciones de n elementos tomados de r (0 ≤ r ≤ n) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los n elementos de forma que:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

Fórmula de $C(n, r)$; ${}_nC_r$; C^n_r; $\binom{n}{r}$

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

para $0 \leq r \leq n$

Ejemplo. Les Luthiers

El Partido Frente Liberal Estatista Lista Azul ha formado la Comisión para el Mantenimiento y Actualización Permanente de la Canción Patria, la CMAPCP. En el Comité Central hay 10 miembros y la CMAPCP debe estar formada por cuatro de ellos. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión que eligirá al Maestro Mangiacaprini?

Hay muchas combinaciones son IGUALES.
{P1, P2, P3, P4} y {P4, P3, P2, P1}
NO IMPORTA EL ORDEN

¿Cuántas permutaciones existen de estos 4 elementos?: 4!
Luego, hay 5040/4! combinaciones.

Número Combinatorio o Coeficiente Binomial

Se representa al número combinatorio $\binom{n}{r}$ y se lee "n sobre r"

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinación con Repeticiones

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- Se repiten los elementos.

Fórmula CR_n^r ; $C(r+n-1, r)$

$$C(r+n-1, r) = \frac{(r+n-1)!}{r!(r+n-1-r)!} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Ejemplo. La Joyería

Diseñando una joya. Un diseñador de joyas debe realizar un prendedor y ha decidido utilizar 5 piedras, aunque no sabe bien aún como las va a incrustar. Las 5 piedras deberán ser elegidas entre los diamantes, las esmeraldas y los rubíes. ¿De cuántas maneras posibles pueden ser seleccionadas las piedras?

No importa el orden, ya que todavía no sabe cómo las va a incrustar. ∴ Combinación
Dado que tiene que elegir 5 piedras de 3, será con repetición

$$C(7,5) = \frac{7!}{5!2!}$$

Orden	Todos los Elementos	Repetición	Técnica	Fórmula
Si	Si	No	Permutación	$n!$
Si	Si	Si	Permutación con elementos repetidos	$\frac{n!}{k_1!\ldots k_l!}$
Si	No	No	Variación o Permutación de n tomados de a r	$\frac{n!}{(n-r)!}$
Si	Si-No	Si	Variación o Permutación de n tomados de a r con Repetición	n^r
No	Si/No	No	Combinación de n tomados de a r	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
No	No	Si	Combinación de n tomados de a r con Repetición	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

Clase 4: Relaciones

¿Qué es una Relación?

Las Relaciones establecen una conexión entre determinados miembros de conjuntos de objetos.

Por ejemplo:

- $x < y$ es una relación sobre el conjunto de los enteros.
- $x \subseteq y$ es una relación sobre conjuntos de objetos.
- x es el padre de y es una relación sobre un conjunto de personas.

$x \rho y$ = (x, y) satisface la relación ρ.

Producto Cartesiano

El Producto Cartesiano de A y B, $A \times B$, está definido como: $A \times B = \{(n, m): n \in A \text{ y } m \in B\}$

Ejemplo:
Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$.

Entonces el producto cartesiano

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

Relaciones Binarias: Ejemplo

- Dado un conjunto S, una relación es un conjunto de pares ordenados de elementos de S.
- Una relación binaria ρ siempre es un subconjunto tal que: $x \rho y \leftrightarrow (x, y) \in \rho \leftrightarrow \rho \subseteq S \times S$.

Ejemplo:
Sea $S = \{1, 2\}$ y sea $\rho \subseteq S \times S$ definida como $x \rho y \leftrightarrow x + y$ es impar, entonces $\rho = \{(1, 2),(2, 1)\}$

Ejemplo:
Sea el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$.
$S \times S = \{(1, 1),(1, 2),(1, 3),(2, 1),(2, 2),(2, 3),(3, 1),(3, 2),(3, 3)\}$
¿Cuáles son los pares ordenados cuyos componentes son iguales? = $\{(1, 1),(2, 2),(3, 3)\}$
¿Cuáles son los pares (x, y) tales que $x < y$? = $\{(1, 2),(1, 3),(2, 3)\}$

Más ejemplos:

- Sea $S = \{1, 2, 3\}$, la relación $x \rho y \leftrightarrow x < y$ puede ser representada por $\rho = \{(1, 2),(1, 3),(2, 3)\}$. Es decir, $(2, 1) \notin \rho$.
- $\rho = \{(1, 1),(3, 3)\}$ sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ representa la relación $x = y$ y x es impar. Es decir, $(2, 2) \notin \rho$.
- Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la relación $x^2 < y$ puede ser representada por $\{(1, 2),(1, 3),(1, 4),(1, 5),(2, 5)\}$.

Relaciones sobre Múltiples Conjuntos

Una relación binaria ρ también puede definir una conexión entre elementos de diferentes conjuntos, por ejemplo S y T. En este caso, $\rho \subseteq S \times T$

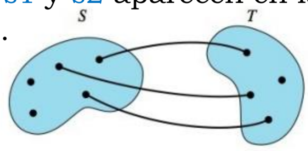
Ejemplo:

- Dados S = {Ford,Honda,GM,Toyota} y T = {EEUU,Japón},
- la relación ρ = {(Ford,EEUU),(Honda,Japón),(GM,EEUU),(Toyota,Japón)} representa
- "la empresa x está ubicada en el país y"

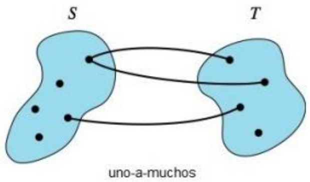
Tipos de Relaciones Binarias

Si ρ es una relación binaria sobre S, entonces ρ está formada por un conjunto de pares ordenados de la forma (s1, s2). Esto da lugar a diferentes tipos de relación:

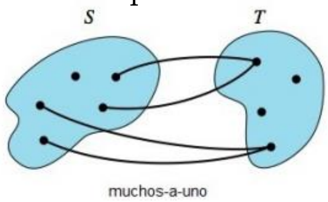
- Relación uno-a-uno: s1 y s2 aparecen en la relación solo una vez.



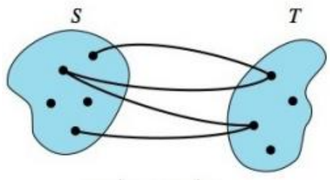
- Relación uno-a-muchos: s1 aparece más de una vez, pero s2 aparece como máximo una vez.



- Relación muchos-a-uno: s2 aparece con más de un primer componente, pero cada primer componente aparece como máximo una vez.



- Relación muchos-a-muchos: s1 aparece con más de un segundo componente y s2 aparece con más de un primer componente.



Ejemplos: Sea S = {2, 5, 7, 9}. Identifiquemos el tipo de cada una de las siguientes relaciones:

- {(5, 2),(7, 5),(9, 2)} muchos-a-uno
- {(2, 5),(5, 7),(7, 2)} uno-a-uno
- {(7, 9),(2, 5),(9, 9),(2, 7)} muchos-a-muchos
- {(7, 9),(2, 5),(7, 2)} uno-a-muchos

Manipulación de Relaciones Binarias

El hecho de interpretar las relaciones binarias como conjuntos de pares ordenados nos permite combinar múltiples relaciones por medio de operaciones de conjuntos. Esto nos permite generar relaciones más complejas. Por ejemplo:

$$a(\rho \cup \sigma)b \leftrightarrow a\ \rho\ b \text{ o } a\ \sigma\ b$$

$$a(\rho \cap \sigma)b \leftrightarrow a\ \rho\ b \text{ y } a\ \sigma\ b$$

$$a\ \rho'\ b \leftrightarrow \text{no } a\ \rho\ b$$

Inversa: s, la relación inversa de ρ, denotada ρ −1 , es la relación binaria sobre el producto B × A tal que b ρ −1 a ↔ a ρ b

Ejemplo: Sean ρ y σ dos relaciones binarias sobre N definidas por a ρ b ↔ a = b y a σ b ↔ a < b. Dar descripciones verbales para los ítems (1), (2) y (3) y mediante conjuntos para (4):

(1) ¿Cuál es la relación ρ ∪ σ? = igual o menor

(2) ¿Cuál es la relación ρ’? = distinto

(3) ¿Cuál es la relación σ’? = mayor o igual

(4) ¿Cuál es la relación ρ ∩ σ? = igual y menor, así que es vacío

Ejemplo de inversa : Sea A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c}. Sea ρ = {(1, a),(1, b),(2, b),(2, c),(3, b),(4, a)}

(1)¿Cuál es la relación ρ −1 ?

ρ −1 = {(a, 1),(b, 1),(b, 2),(c, 2),(b, 3),(a, 4)}

Composición de Relaciones Binarias

Sea ρ una relación binaria sobre el producto A×B y sea σ una relación binaria sobre el producto B × C. Entonces, la Composición de ρ y σ o la Relación Compuesta, denotada σ o ρ, es la relación binaria sobre el producto A × C

tal que a (σ o ρ) c ↔ ∃b ∈ B, tal que a ρ b y b σ c

Ejemplo:

Sea A = {1, 2, 3, 4}, ρ = {(1, 2),(1, 1),(1, 3),(2, 4),(3, 2)} y σ = {(1, 4),(1, 3),(2, 3),(3, 1),(4, 1)}

Dado que **1 ρ 2** y que **2 σ 3** entonces **1 (σ o ρ) 3**

Dado que **(1, 1) ∈ ρ** y que **(1, 4) ∈ σ** entonces **(1, 4) ∈ (σ o ρ)**

Continuando de esta manera, tenemos que **σ o ρ** = {(1, 4), (1, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 3)}

Relaciones Binarias como Conjuntos

Identidades Importantes

1a.	$\rho \cup \sigma = \sigma \cup \rho$	1b.	$\rho \cap \sigma = \sigma \cap \rho$
2a.	$(\rho \cup \sigma) \cup \gamma = \rho \cup (\sigma \cup \gamma)$	2b.	$(\rho \cap \sigma) \cap \gamma = \rho \cap (\sigma \cap \gamma)$
3a.	$\rho \cup (\sigma \cap \gamma) = (\rho \cup \sigma) \cap (\rho \cup \gamma)$	3b.	$\rho \cap (\sigma \cup \gamma) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \gamma)$
4a.	$\rho \cup \emptyset = \rho$	4b.	$\rho \cap S^2 = \rho$
5a.	$\rho \cup \rho' = S^2$	5b.	$\rho \cap \rho' = \emptyset$

Propiedades de las Relaciones

Reflexiva = (∀x) (x ∈ S → (x, x) ∈ ρ)

Ejemplos:

ρ= {(1,2), (2,1)} No es reflexiva porque (1,1) ∉ ρ
ρ= {(1,1), (2,1)} No es reflexiva porque (2,2) ∉ ρ
ρ= {(1,1), (2,2)} No es reflexiva porque (3,3) ∉ ρ
ρ= {(1,1), (2,2), (3,3)} es reflexiva …
ρ= {(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)} es reflexiva …

Simétrica = (∀x) (∀y) (x ∈ S ∧ y ∈ S ∧ (x, y) ∈ ρ → (y, x) ∈ ρ)

Ejemplos:

ρ= {(1,2), (2,1)} si es simétrica
ρ= {(1,2), (2,3), (3,1)} No es simétrica porque (1,2) ∈ ρ y (2,1) ∉ ρ

Transitiva = (∀x) (∀y) (∀z) (x ∈ S ∧ y ∈ S ∧ z ∈ S ∧ (x, y) ∈ ρ ∧ (y, z) ∈ ρ → (x, z) ∈ ρ)

Ejemplos:

ρ= {(1,2), (2,3), (1,3)} si es transitiva
ρ= {(1,2), (1,3)} si es transitiva
ρ= {(1,2), (2,3), (1,3)} si es transitiva
ρ= {(1,2), (2,3), (3,1)} No es transitiva porque (1,2), (2,3) ∈ ρ y (1,3) ∉ ρ

Antisimétrica = $(\forall x)\ (\forall y)\ (x \in S \land y \in S \land (x, y) \in \rho \land (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$

Ejemplos:

$x\ \rho\ y \leftrightarrow x = y$ sobre el conjunto S = N es Antisimétrica.
$x\ \rho\ y \leftrightarrow x \leq y$ sobre el conjunto S = N es Antisimétrica.
$x\ \rho\ y \leftrightarrow x < y$ sobre el conjunto S = N es Antisimétrica.

Sea $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3))\}$ sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ no es Antisimétrica.

No es Antisimétrica: $(1, 2) \in \rho$, $(2, 1) \in \rho$, pero 1 \= 2.
No es simétrica: $(1, 3) \in \rho$, pero $(3, 1) \in/\ \rho$.

Una relación puede ser:

- Simétrica y No Antisimétrica
- Antisimétrica y No Simétrica
- Simétrica y Antisimétrica
- No Antisimétrica y No Simétrica

Clausuras de Relaciones

Una relación binaria ρ^* sobre un conjunto S es la clausura de una relación ρ sobre S con respecto a una propiedad P si:

1. ρ^* satisface la propiedad P.

2. $\rho \subseteq \rho^*$

3. ρ^* es el conjunto mínimal que cumple los ítems anteriores (1) y (2).

Ejemplo: Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y sea $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$

ρ no es reflexiva, ni simétrica, ni transitiva.

¿Cuál es la clausura reflexiva de ρ? = $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2,2), (3,3)\}$

¿Cuál es la clausura simétrica de ρ? = $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2,1), (3,2)\}$

¿Cuál es la clausura antisimétrica de ρ? NO se puede, ¿por qué?

¿Cuál es la clausura transitiva de ρ? = $\{(1, 1), (1, 2),(1, 3),(3, 1),(2, 3), (3,2), (3,3)\ , (2,1),(2, 2)\}$

Algunas observaciones sobre la clausura transitiva:

Observación 1: Es posible combinar las clausuras de relaciones. Por ejemplo, obtener la clausura reflexiva y transitiva de una relación.
Observación 2: Si una relación no es antisimétrica, entonces no existe la clausura antisimétrica de tal relación.
Ejemplo: Sea $\rho = \{(1, 2), (2, 1),(1, 3))\}$ sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ no es antisimétrica.

No es antisimétrica dado que: $(1, 2) \in \rho$, $(2, 1) \in \rho$, pero 1 /= 2.

Esto no se evita por más que agreguemos pares a la relación original.

Relaciones de Orden

Órdenes Parciales: Una relación binaria sobre un conjunto S que es reflexiva, antisimétrica y transitiva es llamada un Orden Parcial sobre S.

Reflexiva: $(\forall x)\ (x \in S \rightarrow (x, x) \in \rho)$
Antisimétrica: $(\forall x)\ (\forall y)\ (x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$
Transitiva: $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \rightarrow (x, z) \in \rho)$

Si ρ es un orden parcial sobre S, entonces el par ordenado (S, ρ) se denomina Conjunto Parcialmente Ordenado.

Denotaremos a cualquier conjunto parcialmente ordenado mediante $(S, \preccurlyeq)$. En cada caso particular, el símbolo "$\preccurlyeq$" tendrá algún significado definido como "*menor o igual a*", "*es subconjunto de*", "*divide a*", "*es menos o igual de confiable que*",etc.

Algunos ejemplos de Órdenes Parciales:

La relación $x\ \rho\ y \leftrightarrow x \leq y$, sobre N.

La relación $x\ \rho\ y \leftrightarrow x = y$, sobre N.

La relación $A\ \rho\ B \leftrightarrow A \subseteq B$, sobre $\wp(N)$.

La relación $x\ \rho\ y \leftrightarrow$ x divide a y, sobre Z +.

¿La relación $x\ \rho\ y \leftrightarrow x < y$, sobre N? No, porque la relación "<" no es reflexiva

Órdenes Parciales - Terminología

Sea $(S, \preccurlyeq)$ un *conjunto parcialmente ordenado* o un *orden parcial*.
Si $a \preccurlyeq b$, entonces o bien $a = b$ o bien $a \neq b$.

- Si $a \preccurlyeq b$ pero $a \neq b$, entonces lo denotamos $a \prec b$ y decimos que *a* es un predecesor de *b* o que *b* es un sucesor de *a*.

- Un determinado elemento *b* puede tener muchos predecesores, pero si $a \prec b$ y no existe un *c* tal que $a \prec c \prec b$, entonces *a* es un predecesor inmediato de *b*.

Diagrama de Hasse

Si *S* es finito, entonces podemos graficar a un conjunto parcialmente ordenado $(S, \preccurlyeq)$ mediante un diagrama de Hasse.

En un Diagrama de Hasse, cada uno de los elementos de *S* se representa mediante un punto o círculo, llamado nodo o vértice.

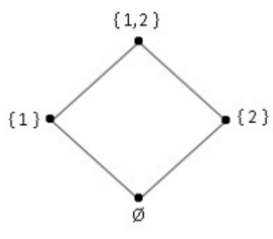
Si *a* es un *predecesor inmediato de b*, entonces el nodo para *b* se ubica arriba del nodo para *a* y los dos nodos están conectados mediante una línea directa.

Ejemplo1:

Los elementos de $\wp(\{1, 2\})$ son $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{1, 2\}$ y la relación binaria $\subseteq$ consiste de los siguientes pares ordenados:

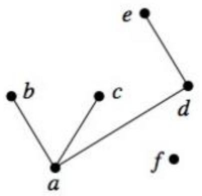
$(\emptyset, \emptyset)$,$(\{1\}, \{1\})$,$(\{2\}, \{2\})$,$(\{1, 2\}, \{1, 2\})$,$(\emptyset, \{1\})$,$(\emptyset, \{2\})$, $(\emptyset, \{1, 2\})$,$(\{1\}, \{1, 2\})$,$(\{2\}, \{1, 2\})$

¿Elemento mínimo? $\emptyset$ ¿Elementos minimales? $\emptyset$ ¿Elemento máximo? $\{1, 2\}$
¿Elementos maximales? $\{1, 2\}$



Ejemplo2:

Dado el Diagrama de Hasse de un orden parcial '$\preccurlyeq$' sobre el conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$



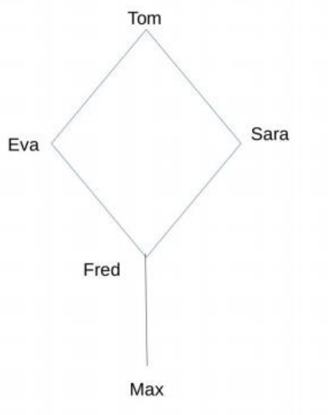
Podemos concluir que la relación '$\preccurlyeq$' es el conjunto:

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (d, e)\}$$

¿Elemento mínimo? No existe
¿Elementos minimales? a, f
¿Elemento máximo? No existe
¿Elementos maximales? b, c, e, f

---

es menos o igual de confiable que	
Sara	Sara
Tom	Tom
Fred	Fred
Eva	Eva
Max	Max
Sara	Tom
Eva	Tom
Fred	Sara
Fred	Eva
Max	Fred
... Transitiva	



Elementos NO Comparables Algún par de elementos de S pueden no estar relacionados en un orden parcial de S. Esos elementos NO son COMPARABLES

En el Ejemplo 1, {1} y {2} no están relacionados.

El elemento f, en el Ejemplo 2, no está relacionado con ningún elemento.

Entre los espías, Sara y Eva no están relacionadas, por lo que no puedo decir quién de ellas es más confiable.

Orden Total o Cadena

Un orden total es aquel en el cual todo elemento del conjunto está relacionado con todo otro elemento, es decir, no hay elementos incomparables.

El Diagrama de Hasse de un Orden Total luce así:

Elementos distinguibles en un orden

Sea $(S, \preccurlyeq)$ un *conjunto parcialmente ordenado* o un *orden parcial*.

- Si existe un elemento $a \in S$ tal que $a \preccurlyeq x$ para todo $x \in S$, entonces a es el mínimo.

- Un elemento $a \in S$ es minimal si no existe $x \in S$ tal que $x \prec a$. (Es decir, si a no tiene predecesor).

- El elemento mínimo, *si existe*, es único. (La prueba queda como ejercicio).

- El elemento mínimo es siempre un elemento minimal. (La inversa es falsa).

- Si existe un elemento $b \in S$ tal que $x \preccurlyeq b$ para todo $x \in S$, entonces b es el máximo.

- Un elemento $b \in S$ es maximal si no existe $x \in S$ tal que $b \prec x$. (Es decir, si b no tiene sucesor).

- El elemento máximo, *si existe*, es único. (La prueba queda como ejercicio).

- El elemento máximo es siempre un elemento maximal. (La inversa es falsa).

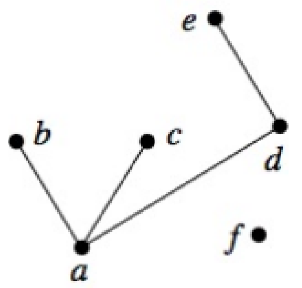
Reticulados

El término Retículo o Reticulado proviene de la forma de los diagramas de Hasse de tales órdenes.

- la Cota Inferior de x e y a un elemento w tal que $w \preccurlyeq x$ y $w \preccurlyeq y$.
- la Cota Superior de x e y a un elemento z tal que $x \preccurlyeq z$ e $y \preccurlyeq z$.

la Menor Cota Superior de x e y a un elemento z tal que $x \preccurlyeq z$, $y \preccurlyeq z$ y si existe algún elemento z^* con $x \preccurlyeq z^*$ e $y \preccurlyeq z^*$, entonces $z \preccurlyeq z^*$.

la Mayor Cota Inferior de x e y a un elemento w tal que $w \preccurlyeq x$, $w \preccurlyeq y$ y si existe algún elemento w^* con $w^* \preccurlyeq x$ y $w^* \preccurlyeq y$, entonces $w^* \preccurlyeq w$.



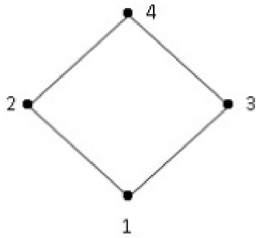
CS(a, d) = {d, e}		
CI(e, d) = {d, a}	MCS(d, e) = e	MCI(a, d) = a
CS(c, d) = No existe	MCS(a, d) = d	MCI(e, d) = d
CI(c, d) = {a}	MCS(c, d) = No existe	MCI(e, c) = a
CS(f, f) = CI(f, f) = { f }	MCS(f, f) = f	MCI(c, f) = No existe

No es un reticulado ya que no existe a · f ni b + c, entre otros casos.

Reticulados

Un Reticulado es un conjunto parcialmente ordenado donde todo par de elementos x e y tiene un Supremo, denotado mediante x+y y tiene un Ínfimo, denotado mediante x · y.

Observación:
La Menor Cota Superior es también conocida como Supremo.
La Mayor Cota Inferior es también conocida como Ínfimo.

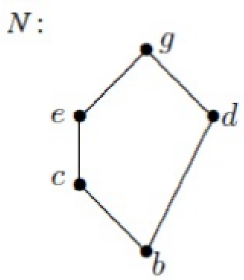


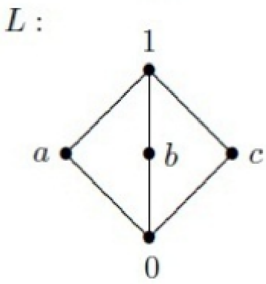
$\cdot$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

$+$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

Reticulados No Distributivos

Los siguientes son ejemplos de Reticulados NO Distributivos





L no es distributivo ya que:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot 1 &= a \\ (a \cdot b) + (a \cdot c) &= 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $a \cdot (b + c) \neq (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Relaciones de Equivalencia

Esta relación que definimos es:

- Reflexiva: $(\forall x)\ (x \in S \to (x, x) \in \rho)$
- Simétrica: $(\forall x)\ (\forall y)\ (x \in S \land y \in S \land (x, y) \in \rho \to (y, x) \in \rho)$
- Transitiva: $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x \in S \land y \in S \land z \in S \land (x, y) \in \rho \land (y, z) \in \rho \to (x, z) \in \rho)$

Algunos ejemplos de Relaciones de Equivalencia:

- La relación $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, sobre $\{1, 2, 3\}$.
- La relación $x \rho y \leftrightarrow x = y$, sobre cualquier conjunto S.
- La relación $x \rho y \leftrightarrow$ x ocupa la misma fila que y, sobre el conjunto {x: x es un estudiante de esta clase}.

Particiones de un Conjunto

Dada una relación de equivalencia ρ sobre un conjunto S y un $x \in S$, entonces mediante $[x]$ se denota al conjunto de todos los miembros de S relacionados con x y es llamada clase de equivalencia de x. Es decir: $[x] = \{y: y \in S \land x \rho y\}$

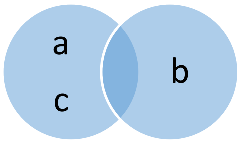
Clases de Equivalencia - Conjunto Cociente

- Una clase de equivalencia puede tomar su nombre a partir de cualquiera de sus miembros.
- Una clase de equivalencia puede tener más de un nombre o representante.

El conjunto cociente se denota: $A/\sim$

Sea $S = \{a, b, c\}$ un conjunto. Para una relación $\rho = \{(a, a),(b, b),(c, c),(a, c),(c, a)\}$, tenemos que

$[a] = \{a, c\} = [c]$ ¿Cómo es el conjunto cociente? $S/\rho = \{[a]\ ,\ [b]\}$



Congruencia Módulo n

Para cualquier par de enteros 'x' e 'y' y entero positivo 'n', $x \equiv_n y$ si $x - y$ es un múltiplo entero de n.

Esta relación binaria es siempre una relación de equivalencia.

Ejemplo

Definamos una relación binaria de congruencia módulo 4 sobre el conjunto Z como:

x es congruente módulo 4 con y, denotado $x \equiv 4\ y$, si $x - y$ es un múltiplo entero de 4 o si ambos, x e y, dan el mismo resto si los dividimos por 4.

La congruencia módulo 4 es una relación de equivalencia sobre Z. Para determinar las clases de equivalencia, notemos que [0], por ejemplo, contendrá a los enteros desde 0 y cada múltiplo de 4, como 4, 8, 12, etc.

El conjunto cociente es $Z/\equiv 4 = \{[0]\ ,\ [1]\ ,\ [2]\ ,\ [3]\}$:

$[0] = \{. . . , -8, -4, 0, 4, 8, . . .\}$
$[1] = \{. . . , -7, -3, 1, 5, 9, . . .\}$
$[2] = \{. . . , -6, -2, 2, 6, 10, . . .\}$
$[3] = \{. . . , -5, -1, 3, 7, 11, . . .\}$