Elementos de Teoría de la Computación
Clase 4: Relaciones

Depart. de Teoría de la Computación - Facultad de Informática
Universidad Nacional del Comahue
Segundo Cuatrimestre de 2020

Pablo Kogan
pablo.kogan@fi.uncoma.edu.ar

Temario

1 Repaso
2 Introducción
3 Relaciones Binarias
4 Tipos de Relaciones Binarias
5 Propiedades de Relaciones Binarias
6 Clausuras de Relaciones
7 Desafíos
8 Bibliografía

¿Qué vimos?

- Técnicas de Prueba
  - Prueba (o No-Prueba) por contraejemplo.
  - Prueba Exhaustiva
  - Prueba Directa
  - Prueba por Contraposición
  - Prueba por Contradicción
- Secuencia, Conjuntos y Operaciones Recursiva
  - Caso Base
  - Paso Inductivo
- Combinatoria:
  - Permutación
  - Variación
  - Combinación

HOY: Relaciones

Forward to Modelado de Datos: Nos llaman del KfW ...

Requieren mantener información de los clientes, las cuentas y las sucursales.

Se deben tener en cuenta las siguientes restricciones:

- Un cliente puede tener muchas cuentas.
- Una cuenta puede tener muchos clientes, pero solamente uno de ellos es el titular.
- Una cuenta está asociada a solamente una sucursal.

Nos llaman del KfW ...

Deberemos guardar información de los siguientes objetos:

- Clientes
- Cuentas
- Sucursales

Nos llaman del KfW ...

Clientes
Juan
Pedro
Laura
Andrea
...

Cuentas
23-34444-44
87-76543-90
45-34554-09
28-11111-22
...

Sucursales
Berlín
Roma
Londres
París
...

¿Cómo sabremos quién es el dueño de cuál cuenta?

¿Cómo sabremos quién es el titular de una cuenta?

¿Cómo sabremos a qué sucursal pertenece una cuenta?

Nos llaman del KfW ...

Tendremos que RELACIONAR estos objetos

Juan es dueño de la cuenta 23-34444-44
Pedro es dueño de la cuenta 23-34444-44
Juan es el titular de la cuenta 23-34444-44
23-34444-44 pertenece a la sucursal Berlín

Restricciones

Juan es el titular de la cuenta 23-34444-44
Pedro es el titular de la cuenta 23-34444-44
NO es posible

23-34444-44 pertenece a la sucursal Berlín
23-34444-44 pertenece a la sucursal París
NO es posible

Nuestro Árbol Genealógico

Todos tenemos parientes.

- Padre y madre
- Hermanxs
- Abuelos y Abuelas
- Tíos y Primos
- ...

Estamos RELACIONADOS por un parentesco. :)

Roberto es padre de Laura
Alicia es madre de Laura
Roberto es padre de Amalia
Alicia es madre de Amalia
¿Qué pueden deducir?

Nuestro Árbol Genealógico

¿Cómo sería la definición de hermanx?

$$\forall X, Y, Z\ (padre(Z, X) \wedge padre(Z, Y) \rightarrow hermanx(X, Y))$$

$$\forall X, Y, Z\ (madre(Z, X) \wedge madre(Z, Y) \rightarrow hermanx(X, Y))$$

¿Es correcta esta definición?

Otra relación es la de abuelx...
Otra relación es la de bisabuelx...

Les dejo de desafío pensar la definición recursiva de ancestro, teniendo en cuenta que un padre o una madre es nuestro primer ancestro.

¿Qué es una Relación?

Según la Real Academia Española, entre sus varias acepciones, el término relación remite a:

- Conexión, correspondencia de algo con otra cosa.
- Conexión, correspondencia, trato, comunicación de alguien con otra persona.
- Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números.

¿Por qué necesitamos estudiar Relaciones?

- Al trabajar con conjuntos de objetos, es importante que seamos capaces de manipular sus elementos y relacionarlos entre sí.

- Muchas operaciones permiten transformar elementos de un conjunto en elementos de otro (o del mismo conjunto).

- En muchos casos, estamos interesados en propiedades como "*es menor que*" o "*es un divisor de*", etc., que **no** son operaciones.

- Estas relaciones entre diferentes objetos son importantes para aplicaciones como la recuperación de información de bases de datos o para la administración de tareas o procesos.

Relaciones

Si nos dicen que dos personas, Juan y Marcela son parientes, entendemos que existe alguna *conexión* familiar entre ellos.

Es decir, el par (Juan,Marcela) se distingue de otros pares de personas porque existe una relación (primos, hermanos, padre-hija, etc.) que Juan y Marcela satisfacen.

La analogía matemática es distinguir ciertos pares ordenados de objetos que satisfacen alguna relación, de otros pares ordenados que no la satisfacen.

Relaciones

Las Relaciones establecen una conexión entre determinados miembros de conjuntos de objetos.

Por ejemplo:

- $x < y$ es una relación sobre el conjunto de los enteros.
- $x \subseteq y$ es una relación sobre conjuntos de objetos.
- *x es el padre de y* es una relación sobre un conjunto de personas.

En general, usaremos la notación $x \ \rho \ y$ para indicar que el par ordenado (x, y) satisface la relación ρ.

La relación ρ puede estar definida formalmente o indicando los pares ordenados que satisfacen ρ.

Repasamos: Producto Cartesiano

Definición

Sean A y B dos conjuntos. El Producto Cartesiano de A y B, denotado $A \times B$, está definido como:

$$A \times B = \{(n, m) : n \in A \text{ y } m \in B\}$$

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces el producto cartesiano $A \times B$ es:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \ ?$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Relaciones Binarias: Ejemplo

Sea el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$. Entonces el producto cartesiano $S \times S$ es:

$$S \times S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

¿Cuáles son los pares ordenados cuyos componentes son iguales?

$$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

¿Cuáles son los pares (x, y) tales que $x < y$?

$$\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

Relaciones Binarias

Definición

Dado un conjunto S, una relación binaria sobre S es un subconjunto del producto cartesiano $S \times S$. Es decir, un conjunto de pares ordenados de elementos de S.

Una relación binaria ρ siempre es un subconjunto tal que:

$$x \, \rho \, y \leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

es decir, $\rho \subseteq S \times S$.

Ejemplo: Sea $S = \{1, 2\}$ y sea $\rho \subseteq S \times S$ definida como

$$x \, \rho \, y \leftrightarrow x + y \text{ es impar}$$

$$\rho = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Relaciones Binarias - Ejemplos

- La descripción de una relación binaria como un conjunto nos permite definir relaciones que no (necesariamente) tienen una descripción directa.
  - Ej: sea $S = \{1, 2\}$ y sea $\rho = \{(1, 1), (2, 1)\}$

- Más ejemplos:
  - Sea $S = \{1, 2, 3\}$, la relación $x\ \rho\ y \leftrightarrow x < y$ puede ser representada por $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Es decir, $(2, 1) \notin \rho$.
  - $\rho = \{(1, 1), (3, 3)\}$ sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ representa la relación $x = y$ y x es impar. Es decir, $(2, 2) \notin \rho$.
  - Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la relación $x^2 < y$ puede ser representada por $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5)\}$.

Relaciones sobre Múltiples Conjuntos

Una relación binaria ρ también puede definir una conexión entre elementos de diferentes conjuntos, por ejemplo S y T. En este caso,

$$\rho \subseteq S \times T$$

Ejemplo:

Dados $S = \{\text{Ford,Honda,GM,Toyota}\}$ y $T = \{\text{EEUU,Japón}\}$, la relación

$$\rho = \{(\text{Ford,EEUU}),(\text{Honda,Japón}),(\text{GM,EEUU}),(\text{Toyota,Japón})\}$$

representa

"*la empresa x está ubicada en el país y*"

Relaciones sobre Múltiples Conjuntos

Definición

Dados dos conjuntos S y T, una relación binaria desde S a T es un subconjunto del producto cartesiano $S \times T$.

Definición

Dados n conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, con $n > 2$, una relación n-aria sobre $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ es un subconjunto de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Tipos de Relaciones Binarias

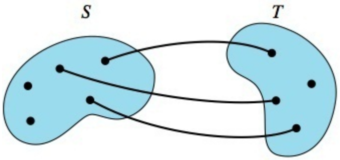
Si ρ es una relación binaria sobre S, entonces ρ está formada por un conjunto de pares ordenados de la forma (s_1, s_2).

Cada primer componente s_1, como cada segundo componente s_2, pueden aparecer de variadas formas en la relación. Esto da lugar a diferentes tipos de relación:

- Relación uno-a-uno.
- Relación uno-a-muchos.
- Relación muchos-a-uno.
- Relación muchos-a-muchos.

Relación *uno-a-uno*

- Una relación es uno-a-uno si cada primer componente s_1 y cada segundo componente s_2 aparecen en la relación solo una vez.



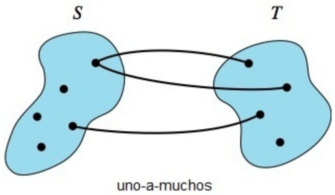
uno-a-uno

¿Cuántos números de DNI tiene cada persona?
¿Cuántas personas tienen el mismo número de DNI?

Relación Personas-DNI es uno-a-uno.

Relación *uno-a-muchos*

- Una relación es uno-a-muchos si algún primer componente s_1 aparece más de una vez (es decir, s_1 aparece con más de un segundo componente), pero cada segundo componente s_2 aparece como máximo una vez (0 o 1 vez).

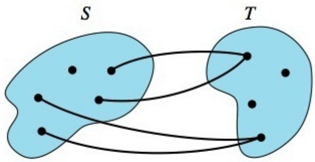


¿Cuántos titulares tiene una cuenta bancaria?
¿De cuántas cuentas bancarias puede ser un cliente titular?

Relación Titular- CuentaBancaria es uno-a-muchos.

Relación *muchos-a-uno*

- Una relación es muchos-a-uno si algún segundo componente s_2 aparece con más de un primer componente, pero cada primer componente aparece como máximo una vez (0 o 1 vez).



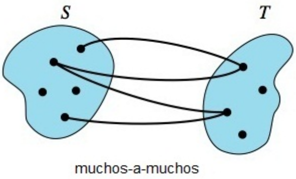
muchos-a-uno

¿Cuántas cuentas bancarias puede tener una sucursal?
¿A cuántas sucursales puede pertenecer una cuenta bancaria?

Relación Cuenta Bancaria Pertenece a la Sucursal es muchos-a-uno.

Relación *muchos-a-muchos*

- Una relación es muchos-a-muchos si al menos un s_1 aparece con más de un segundo componente y al menos un s_2 aparece con más de un primer componente.

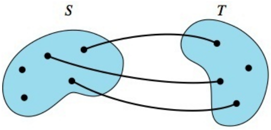


¿Cuántas cuentas bancarias puede tener un cliente?
¿Cuántos clientes puede tener una cuenta bancaria?

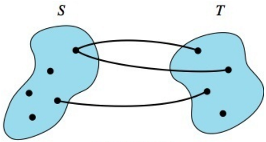
Relación Cuenta Bancaria pertenece a Cliente es muchos-a-muchos.

Tipos de Relaciones Binarias

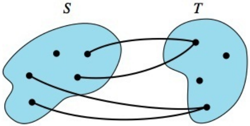
- La relación es uno-a-uno si cada primer componente y cada segundo componente aparecen en la relación solo una vez.
- Una relación es uno-a-muchos si algún primer componente s_1 aparece más de una vez (es decir, s_1 aparece con más de un segundo componente), pero cada segundo componente s_2 aparece como máximo una vez (0 o 1 vez).
- Una relación es muchos-a-uno si algún segundo componente s_2 aparece con más de un primer componente, pero cada primer componente aparece como máximo una vez (0 o 1 vez).
- La relación es muchos-a-muchos si al menos un s_1 aparece con más de un segundo componente y al menos un s_2 aparece con más de un primer componente.



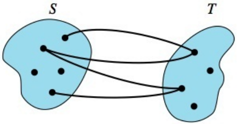
uno-a-uno



uno-a-muchos



muchos-a-uno



muchos-a-muchos

Tipos de Relaciones Binarias - Ejemplos

Importante

Notemos que no es necesario que todos los valores en S (o T) sean componentes de los pares ordenados de la relación ρ.

Ejemplos: Sea $S = \{2, 5, 7, 9\}$. Identifiquemos el tipo de cada una de las siguientes relaciones:

- $\{(5, 2), (7, 5), (9, 2)\}$ muchos-a-uno
- $\{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$ uno-a-uno
- $\{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$ muchos-a-muchos
- $\{(7, 9), (2, 5), (7, 2)\}$ uno-a-muchos

Manipulación de Relaciones Binarias

El hecho de interpretar las relaciones binarias como conjuntos de pares ordenados nos permite combinar múltiples relaciones por medio de operaciones de conjuntos.

Esto nos permite generar relaciones más complejas. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} a(\rho \cup \sigma)b & \leftrightarrow & a\,\rho\,b \ \textbf{o} \ a\,\sigma\,b \\ a(\rho \cap \sigma)b & \leftrightarrow & a\,\rho\,b \ \textbf{y} \ a\,\sigma\,b \\ a\,\rho'\,b & \leftrightarrow & \textbf{no} \ a\,\rho\,b \end{array}$$

Ejemplo: Sean ρ y σ dos relaciones binarias sobre $\mathbb{N}$ definidas por $a\,\rho\,b \leftrightarrow a = b$ y $a\,\sigma\,b \leftrightarrow a < b$. Dar descripciones verbales para los ítems (1), (2) y (3) y mediante conjuntos para (4):

1. ¿Cuál es la relación $\rho \cup \sigma$?
2. ¿Cuál es la relación ρ'?
3. ¿Cuál es la relación σ'?
4. ¿Cuál es la relación $\rho \cap \sigma$?

Manipulación de Relaciones Binarias

Un tipo diferente de operación es la obtención de la **Inversa** de una relación.

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre el producto $A \times B$. Entonces, la relación inversa de ρ, denotada ρ^{-1}, es la relación binaria sobre el producto $B \times A$ tal que

$$b\,\rho^{-1}\,a \quad \text{si y solo si} \quad a\,\rho\,b$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Sea

$$\rho = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}$$

1. ¿Cuál es la relación ρ^{-1}?

$$\rho^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2), (b, 3), (a, 4)\}$$

Composición de Relaciones Binarias

Es posible *componer* relaciones, es decir *aplicar una a continuación* de otra.

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre el producto $A \times B$ y sea σ una relación binaria sobre el producto $B \times C$. Entonces, la Composición de ρ y σ o la Relación Compuesta, denotada $\sigma \circ \rho$, es la relación binaria sobre el producto $A \times C$ tal que

$$a\,(\sigma \circ \rho)\,c \quad \text{si y solo si} \quad \exists b \in B,\ \text{tal que } a\,\rho\,b \text{ y } b\,\sigma\,c$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(1, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ y $\sigma = \{(1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$

- Dado que $1\,\rho\,2$ y que $2\,\sigma\,3$ entonces $1\,(\sigma \circ \rho)\,3$
- Dado que $(1, 1) \in \rho$ y que $(1, 4) \in \sigma$ entonces $(1, 4) \in (\sigma \circ \rho)$
- Continuando de esta manera, tenemos que

$$\sigma \circ \rho = \{(1, 4), (1, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$$

Relaciones Binarias como Conjuntos

Los siguientes hechos referidos a las operaciones $\cup$, $\cap$, $'$ sobre relaciones son consecuencias inmediatas de las identidades básicas de la teoría de conjuntos.
Sea el conjunto $S^2 = S \times S$ una relación binaria sobre S.

Identidades Importantes

$1a.$	$\rho \cup \sigma = \sigma \cup \rho$	$1b.$	$\rho \cap \sigma = \sigma \cap \rho$
$2a.$	$(\rho \cup \sigma) \cup \gamma = \rho \cup (\sigma \cup \gamma)$	$2b.$	$(\rho \cap \sigma) \cap \gamma = \rho \cap (\sigma \cap \gamma)$
$3a.$	$\rho \cup (\sigma \cap \gamma) = (\rho \cup \sigma) \cap (\rho \cup \gamma)$	$3b.$	$\rho \cap (\sigma \cup \gamma) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \gamma)$
$4a.$	$\rho \cup \emptyset = \rho$	$4b.$	$\rho \cap S^2 = \rho$
$5a.$	$\rho \cup \rho' = S^2$	$5b.$	$\rho \cap \rho' = \emptyset$

Propiedades de las Relaciones

Para identificar algunos tipos importantes de relaciones binarias, debemos definir algunas propiedades de interés.

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre un conjunto S. Entonces

$$\rho \text{ es reflexiva significa que } (\forall x)(x \in S \to (x, x) \in \rho)$$

Ejemplos:

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x = y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es reflexiva.

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x \leq y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es reflexiva.

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x < y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ **no es reflexiva.**

Propiedades de las Relaciones

Para identificar algunos tipos importantes de relaciones binarias, debemos definir algunas propiedades de interés.

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre un conjunto S. Entonces

ρ es simétrica significa que

$$(\forall x)(\forall y)(x \in S \land y \in S \land (x, y) \in \rho \to (y, x) \in \rho)$$

Ejemplos:

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x = y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es simétrica.

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x \leq y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ **no es simétrica.**

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x < y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ **no es simétrica.**

Propiedades de las Relaciones

Más propiedades de interés...

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre un conjunto S. Entonces

ρ es transitiva significa que $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \to (x, z) \in \rho)$

Ejemplos:

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x = y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es transitiva.
$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x \leq y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es transitiva.
$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x < y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es transitiva.
$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow$ "*x es la mitad de y*" sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ **no es transitiva.**
(5 es la mitad de 10 y 10 es la mitad de 20, pero... ?)

Propiedades de las Relaciones

Resumiendo...

Recordatorio

- Reflexiva: todo x está relacionado con sí mismo.
- Simétrica: si x está relacionado con y, entonces y está relacionado con x.
- Transitiva: si x está relacionado con y y también y está relacionado con z, entonces x está relacionado con z.

Propiedades de las Relaciones

Más propiedades de interés...

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre un conjunto S. Entonces

ρ es antisimétrica significa que

$$(\forall x)(\forall y)(x \in S \land y \in S \land (x, y) \in \rho \land (y, x) \in \rho \to x = y)$$

Ejemplos:

$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x = y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es antisimétrica.
$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x \leq y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es antisimétrica.
$x \, \rho \, y \;\leftrightarrow\; x < y$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$ es antisimétrica. (¿Por qué?)

Propiedades de las Relaciones

Definición

Sea ρ una relación binaria sobre un conjunto S. Entonces

ρ es antisimétrica significa que

$$(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$$

Ejemplo:
Sea $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3))\}$ sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ **no es antisimétrica**.

- No es antisimétrica: $(1, 2) \in \rho$, $(2, 1) \in \rho$, pero $1 \neq 2$.
- No es simétrica: $(1, 3) \in \rho$, pero $(3, 1) \notin \rho$.

Propiedades de las Relaciones

Más sobre la propiedad antisimétrica..

Importante

- Antisimétrica **no significa** No-Simétrica.
- Una relación puede ser:
  - Simétrica y No Antisimétrica
  - Antisimétrica y No Simétrica
  - Simétrica y Antisimétrica
  - No Antisimétrica y No Simétrica

Clausuras de Relaciones

En algunas situaciones, cuando una relación ρ sobre un conjunto S no cumple una determinada propiedad P, es útil extender la relación para que P sea satisfecha.

Esto se logra agregando a ρ *todos los pares ordenados necesarios* para satisfacer la propiedad deseada.

Si ρ^* es el *más pequeño* de tales conjuntos, entonces ρ^* es llamado la clausura de ρ con respecto a la propiedad P.

Clausuras de Relaciones

Definición

Una relación binaria ρ^* sobre un conjunto S es la clausura de una relación ρ sobre S con respecto a una propiedad P si:

1. ρ^* satisface la propiedad P.
2. $\rho \subseteq \rho^*$
3. ρ^* es el conjunto minimal que cumple los items anteriores (1) y (2).

Dada una relación, podemos buscar su clausura reflexiva, su clausura simétrica,su clausura antisimétrica o su clausura transitiva.

Por supuesto, si la relación ya tiene alguna de estas propiedades, entonces ella misma es su propia clausura.

Clausuras de Relaciones

Ejemplo: Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y sea $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$

- ρ no es reflexiva, ni simétrica, ni transitiva.
- ¿Cuál es la clausura reflexiva de ρ ?

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \mathbf{(2,2)}, \mathbf{(3,3)}\}$$

- ¿Cuál es la clausura simétrica de ρ ?

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \mathbf{(2,1)}, \mathbf{(3,2)}\}$$

- ¿Cuál es la clausura antisimétrica de ρ ?

NO se puede, ¿por qué?

- ¿Cuál es la clausura transitiva de ρ ?

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \mathbf{(3,2)}, \mathbf{(3,3)}, \mathbf{(2,1)}, (2, 2)\}$$

  - **(3,2)** por $(3, 1)$ y $(1, 2)$.
  - **(3,3)** por $(3, 1)$ y $(1, 3)$.
  - **(2,1)** por $(2, 3)$ y $(3, 1)$.
  - $(2, 2)$ por **(2,1)** y $(1, 2)$.

Clausura Transitiva

Algunas observaciones sobre la clausura transitiva:

- Como vimos en el ejemplo anterior, una forma de encontrar la clausura transitiva de una relación es examinar los pares ordenados de la relación original, agregar nuevos pares si es necesario, *examinar la relación resultante*, agregar nuevos pares si es necesario y así sucesivamente, hasta lograr una *relación transitiva.*

- Esto es un procedimiento ad-hoc, aunque existe un algoritmo que verán más adelante.

- Este algoritmo tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo: en Sistemas Operativos, Redes de Computadoras, la Web..

Clausuras de Relaciones

Observación 1

Es posible *combinar* las clausuras de relaciones. Por ejemplo, obtener la clausura reflexiva y transitiva de una relación.

Observación 2

Si una relación no es antisimétrica, entonces no existe la clausura antisimétrica de tal relación.

Ejemplo:
Sea $\rho = \{(1,2),(2,1),(1,3))\}$ sobre el conjunto $S = \{1,2,3\}$ **no es antisimétrica**.

- No es antisimétrica dado que: $(1,2) \in \rho$, $(2,1) \in \rho$, pero $1 \neq 2$.
- Esto no se evita por más que agreguemos pares a la relación original.

Desafíos para la Próxima Clase

- Dé la definición recursiva del conjunto de ancestro. Tenga en cuenta que el padre y la madre son nuestros ancestros inmediatos.
- Si la relación ya cumple la propiedad que se clausura, entonces ella misma es su propia clausura. ¿Por qué? Justifique por definición.
- Considere la siguiente relación sobre $\{1, 2, 3\}$:

  $$\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$$

  Explique claramente si la siguiente es la clausura reflexiva:

  $$\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2)\}$$

  Justifique por definición.

Bibliografía

Mathematical Structures for Computer Science. Capítulo 4.
J. Gersting
Sixth edition
2007

Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación. Capítulo 4.
B. Kolman, A. Busby and S. Ross
3ra. Edición
1997

¿Preguntas?