Synthèse multi-objectifs dans les processus décisionnels de Markov

Florent Delgrange

UMONS

Faculté des Sciences

Mab2 Science Informatique

Table des matières

Borne supérieure stricte dans un MDP

Soit $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, w)$, un MDP, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$ et $T \subseteq S$, un sous-ensemble d'états cibles.

On va définir une stratégie σ qui **garantit d'atteindre T depuis s avec un coût inférieur à un seuil l :**

$\rightsquigarrow$ $\forall \pi \in Paths^{\sigma}(s),\ TS^{T}(\pi) \leq l$

$\equiv$ $\mathbb{P}^{\sigma}_{s}(\Diamond_{\leq l} T) = 1$

On veut donc assurer une **borne supérieure stricte** lors de l'accessibilité à T.

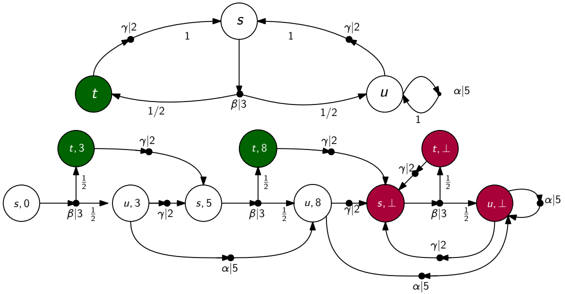
Borne supérieure stricte dans un MDP

Remarque

- $\forall \pi \in Paths^{\sigma}(s),\ TS^{T}(\pi) \leq l$
- $\mathbb{P}^{\sigma}_{s}(\Diamond_{\leq l} T) = 1$

$w : A \to \mathbb{N}_0 \implies$ Ces deux propositions sont équivalentes !

En effet, le problème *SSP-P* induit un **dépliage** de $\mathcal{M}$, dont le graphe sous-jacent est un DAG (si on ne considère pas les les états terminaux).



Problème du plus court chemin dans un jeu

Assurer une borne supérieure stricte lors de l'accessibilité à T

$\rightsquigarrow$ Problème **SP-G** (*Shortest path game problem*)

À chaque étape,

- **Joueur 1** : choisit l'action par stratégie
- **Joueur 2** : choisit le successeur s', i.e., l'état qui mène au pire cas en terme de somme tronquée

Problème du plus court chemin dans un jeu

Definition (SP-G)

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, w)$ un MDP, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$, $T \subseteq S$, un sous-ensemble d'états cibles et un seuil $l \in \mathbb{N}$.
Le problème *SP-G* consiste à décider s'il existe une stratégie σ pour laquelle

$$\forall \pi \in Paths^{\sigma}(s),\ TS^{T}(\pi) \leq l$$

$$\equiv \quad \mathbb{P}_s^{\sigma}(\Diamond_{\leq l} T) = 1$$

- peut être décidé en temps polynomial
- stratégie sans mémoire

Problème du plus court chemin dans un jeu

Hypothèses

$$w : A \rightarrow \mathbb{N}_0$$

- Les coûts sont strictement positifs

⇝ Pas de cycle pendant la minimisation de TS^T

  - pas d'intérêt car poids strictement positifs

⇝ $TS^T = \infty$ si les cycles ne peuvent pas être évités

SP-G : Programmation dynamique

Algorithme

$\mathbb{C}(s, i)$ est le plus court chemin jusque T depuis s, après i étapes, $\forall 0 \leq i \leq n,\ n = |S|$ (pas de cycle).

Initialisation :

- $\forall t \in T, \mathbb{C}(t, 0) = 0$
- $\forall s \in S, \mathbb{C}(s, T) = \infty$

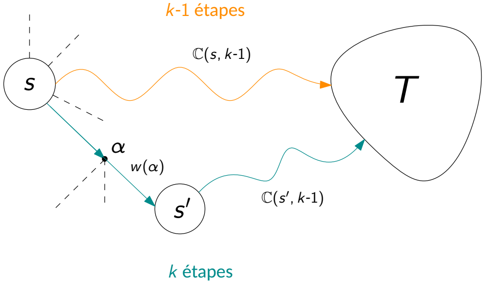
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < k < n$. Supposons que $\mathbb{C}(s, k-1)$ a déjà été calculé pour tout $s \in S$. Alors, pour tout $s \in S$,

$$\mathbb{C}(s, k) = \min\{\mathbb{C}(s, k-1), \min_{\alpha \in A(s)} \underbrace{\max_{s' \in Succ(s,\alpha)} w(\alpha) + \mathbb{C}(s', k-1)\}}_{\textit{l'adversaire choisit le pire successeur}}$$

SP-G : Programmation dynamique

Algorithme

$$\mathbb{C}(s,k) = \min\{\mathbb{C}(s,k{-}1), \min_{\alpha \in A(s)} \max_{s' \in Succ(s,\alpha)} w(\alpha) + \mathbb{C}(s',k{-}1)\}$$

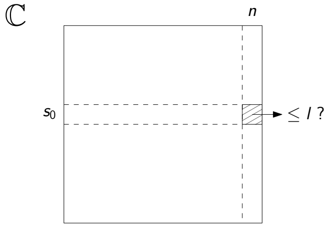


SP-G : Programmation dynamique

Algorithme

La stratégie σ s'il est possible d'atteindre T depuis s_0 avec une longueur de chemin d'au plus l :

$$\mathbb{C}(s_0, n) \leq l \iff \exists \sigma,\ \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq l} T) = 1$$



SP-G : Programmation dynamique

Algorithme

Résumé :

- $\mathbb{C}(s,k)$ correspond au plus court chemin de $s \in S$ à T après au plus k étapes, i.e., après avoir traversé au plus k états.
- À chaque étape, le plus court chemin résulte du choix des actions minimisant, à chaque étape, le coût de la transition menant au *pire* successeur (i.e., celui dont le chemin pour atteindre T est le plus long) est choisit.
- Cycle depuis un état $\Longrightarrow$ on ne peut pas atteindre T
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{C}(s,k-1) \geq \mathbb{C}(s,k)$ pour tout $s \in S$
- $\mathbb{C}(s,n) = \min_k \mathbb{C}(s,k)$ pour tout $s \in S$

SP-G

Construction de la stratégie

Soit $s \in S$. Par le fait que

- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{C}(s, k-1) \geq \mathbb{C}(s, k) \quad$ pour tout $s \in S$
- $\mathbb{C}(s, n) = \min_k \mathbb{C}(s, k) \quad$ pour tout $s \in S$

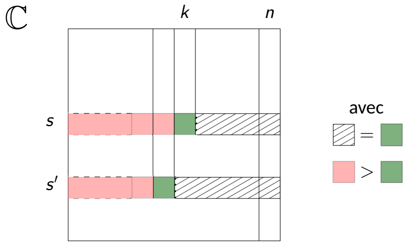
On peut construire une stratégie sans mémoire en se basant sur les résultats de $\mathbb{C}(s, n)$ de chaque $s \in S$:

$$\sigma : S \to A,\ s \mapsto arg \min_{\alpha \in A(s)} \max_{s' \in Succ(s,\alpha)} w(\alpha) + \mathbb{C}(s', n)$$

SP-G

Construction de la stratégie : intuition

Soient $k \in \mathbb{N}$, $s \in S \setminus T$. Supposons que $\mathbb{C}(s,n) \neq \infty$.



- $\exists k \leq n$ tel que $\mathbb{C}(s,n) = \mathbb{C}(s,k) < \mathbb{C}(s,k-i) \quad \forall i \in \{0,\ldots,k\}$
  $\rightsquigarrow$ s atteint T en k étapes.
- $\exists s' \in Succ(s)$ et $\exists \alpha \in A(s)$ tels que
  $\mathbb{C}(s,k) = \mathbb{C}(s',k-1) + w(\alpha) = \mathbb{C}(s',n) + w(\alpha)$
  $\rightsquigarrow$ s accède à T via s', qui atteint T en $k-1$ étapes.

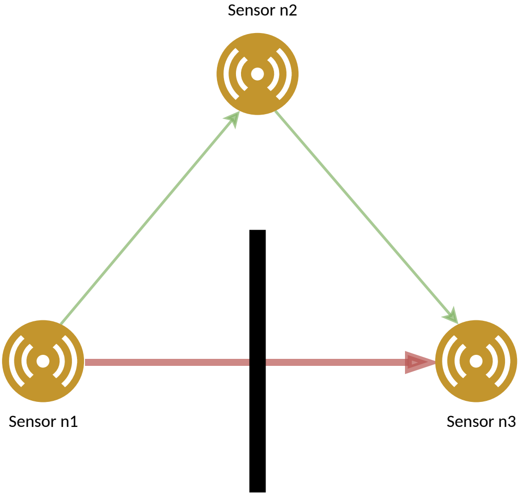
SP-G

Note

- poids négatifs : possible de résoudre en temps pseudo-polynomial
- multi-dimensionnel + poids négatifs : indécidable

Exemple

Communication entre noeuds dans un réseau de capteurs



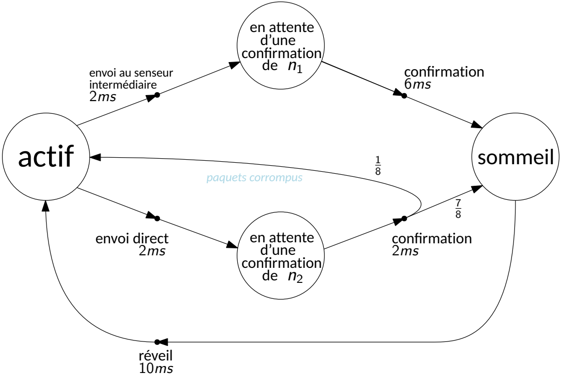
Exemple

Communication entre noeuds dans un réseau de capteurs

- Un mur sépare n_0 et n_2
- Communication directe $n_0 \rightarrow n_2$
  - ⇝ plus rapide que de passer par un noeud intermédiaire
  - ⇝ nécessite plus d'énergie
  - ⇝ risque de corruption des paquets envoyés (bruit)
- Communication indirecte : $n_0 \rightarrow n_1 \rightarrow n_2$
  - ⇝ plus lent (n_1 doit attendre la confirmation de réception du paquet par n_2 et n_0 doit attendre la confirmation de n_1)
  - ⇝ consommation d'énergie normale
  - ⇝ risque de perte de paquet négligeable

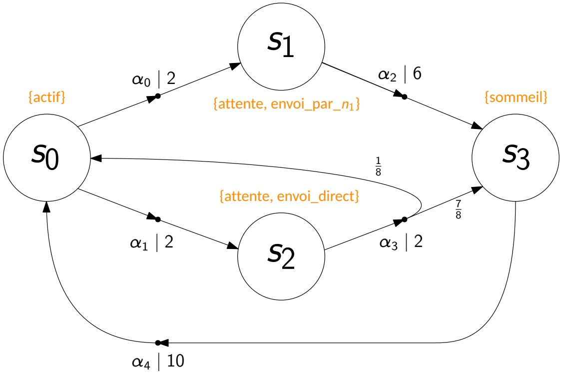
Exemple

Communication entre noeuds dans un réseau de capteurs



Exemple

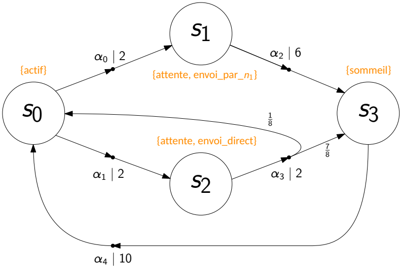
Communication entre noeuds dans un réseau de capteurs



Exemple

Communication entre noeuds dans un réseau de capteurs

Dutty cycle : $12ms \rightsquigarrow \exists \sigma,\ \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq 12}\,\text{sommeil}) = 1$?



$k = 0$
- $\mathbb{C}(s_0, 0) = \mathbb{C}(s_1, 0) = \mathbb{C}(s_2, 0) = \infty$
- $\mathbb{C}(s_3, 0) = 0$

$k = 1$
- $\mathbb{C}(s_0, 1) = \infty$
- $\mathbb{C}(s_1, 1) = 6 + 0 = 6$
- $\mathbb{C}(s_2, 1) = 2 + \infty = \infty$

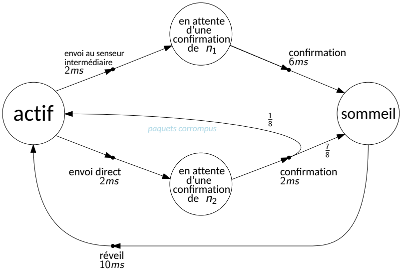
$k = 2$
- $\mathbb{C}(s_0, 2) = 2 + 6 = 8$

$k = 3$
- $\mathbb{C}(s_2, 3) = 2 + 8 = 10$

Table des matières

Au delà du pire cas...

- On souhaite assurer simultanément un seuil de pire cas et une bonne espérance



Quelle est l'espérance optimale du temps d'envoi d'informations au senseur n_2 qui assure de respecter le *dutty cycle* du senseur n_0 ($12ms$) ?

Espérance sous un pire cas

Definition (SSP-WE)

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, w)$, un MDP à une dimension (i.e., tel que $w : A \to \mathbb{N}_0$), un état initial $s \in S$, un sous-ensemble d'états cibles $T \subseteq S$ et deux seuils $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Le problème consiste à décider s'il existe une stratégie σ pour laquelle

- $\forall \pi \in Paths^{\sigma}(s),\ TS^{T}(\pi) \leq l_1 \quad \equiv \quad \mathbb{P}^{\sigma}_{s}(\Diamond_{\leq l_1} T) = 1$
- $\mathbb{E}^{\sigma}_{s}(\Diamond T) \leq l_2$

- décidé en temps pseudo-polynomial
- NP-hard
- mémoire pseudo-polynomiale lors de la construction de la stratégie

SSP-WE
Algorithme

1. Construire $\mathcal{M}_{l_1}$, le MDP $\mathcal{M}$ déplié jusque l_1
2. Calculer, $\mathbb{A}$, l'ensemble des actions possibles de l'*attracteur* de $T' = \{(t, v) \in S_{l_1} \mid t \in T \text{ et } v \leq l_1\}$
   - pour chaque état $(s, v) \in S_{l_1}$, $\mathbb{A}(s, v)$ est l'ensemble des actions $\alpha \in A(s)$ qui assurent à (s, v) d'atteindre T' dans $\mathcal{M}_{l_1}$, quelle que soit l'issue de l'évolution du système *par l'adversaire* (i.e., l'incertitude lié aux probabilités).
3. Construire $\mathcal{M}_{l_1}^{\mathbb{A}}$, le MDP déplié limité à l'attracteur de T'
   - on supprime les états (s, v) de $\mathcal{M}_{l_1}$ tels que $\mathbb{A}(s, v) = \emptyset$
4. Résoudre le problème SSP-E sur $\mathcal{M}_{l_1}^{\mathbb{A}}$

SSP-WE

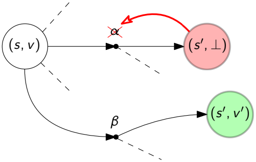
Algorithme

$\mathbb{A}(s,v)$ peut être calculé récursivement :

- **Idée** : $\mathbb{A}_i(s,v)$ correspond à l'ensemble des actions garantissant au système d'évoluer vers un état sûr (i.e., non-terminal) après i étapes.
- $\mathbb{A}_0(s,v) = A(s)$ si $v \leq l$
  $\mathbb{A}_0(s,v) = \emptyset$ si $v = \perp$
- Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{A}_i(s,v)$ a été calculé pour tout $(s,v) \in S_{l_1}$.
  Alors,

$$\mathbb{A}_{i+1}(s,v) = \{\alpha \in \mathbb{A}_i(s,v) \mid \forall (s',v') \in Succ((s,v),\alpha),\ \mathbb{A}_i(s',v') \neq \emptyset\}$$

$\mathbb{A}_1(s,v)$



SSP-WE

Algorithme

- La taille de l'ensemble $\mathbb{A}_i$ est croissante en i, i.e., $|\mathbb{A}_i| \geq |\mathbb{A}_{i+1}| \quad \forall i \in \mathbb{N}$ par construction de $\mathbb{A}$
- Le dépliage du MDP résulte en un DAG

$\Longrightarrow$ pas de cycle !

$\Longrightarrow$ le nombre d'itérations i est donc borné par v (= pire cas $\longrightarrow$ toutes les actions ont un coût de 1)

$\Longrightarrow$ le temps de construction de $\mathbb{A}$ est donc polynomial en la taille du MDP déplié $\mathcal{M}_{l_1} \rightsquigarrow \mathcal{O}(v \times |S_{l_1}|)$

SSP-WE

Construction de la stratégie

σ est la stratégie à mémoire finie résultante de la résolution du problème SSP-E sur le MDP $\mathcal{M}_{l_1}^{\mathbb{A}}$ (σ est sans mémoire sur $\mathcal{M}_{l_1}^{\mathbb{A}}$).

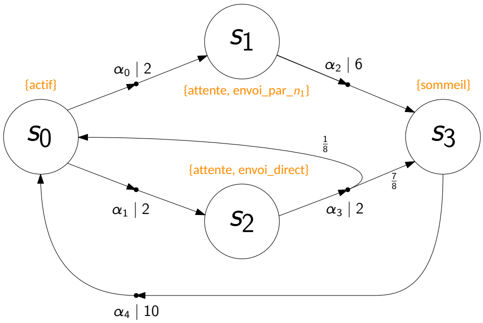
- $\rightsquigarrow$ complexité pseudo-polynomiale
- $\rightsquigarrow$ NP-difficile (pas de temps polynomial à moins que P = NP)

SSP-WE

Exemple

$$\overset{?}{\exists}\sigma\ \mathbb{E}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond\ \text{sommeil}) \leq l \wedge \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq 12}\ \text{sommeil}) = 1$$

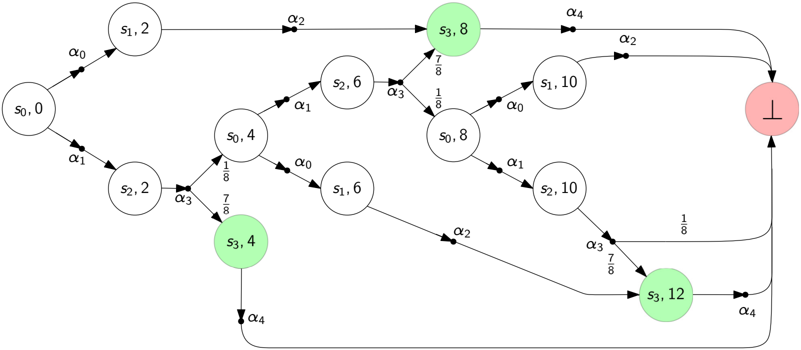
Avec l, l'espérance minimale pour laquelle le noeud n_0 est assuré d'envoyer les données au noeud n_2 en moins de $12ms$ (afin d'assurer un *dutty cycle de* $12ms$).



SSP-WE

Exemple

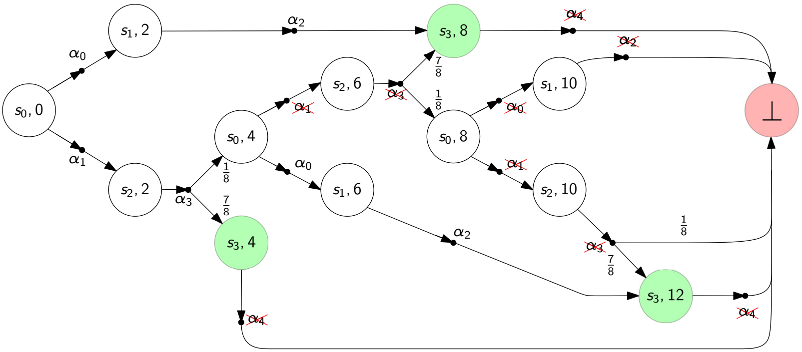
$$\overset{?}{\exists}\sigma\ \mathbb{E}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond\ \text{sommeil}) \leq l \wedge \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq 12}\ \text{sommeil}) = 1$$



SSP-WE

Exemple

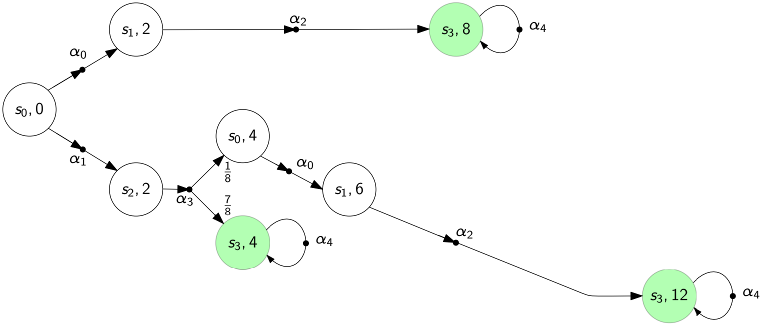
$$\overset{?}{\exists}\sigma\ \mathbb{E}^{\sigma}_{s_0}(\lozenge\ \text{sommeil}) \leq l \wedge \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\lozenge_{\leq 12}\ \text{sommeil}) = 1$$



SSP-WE

Exemple

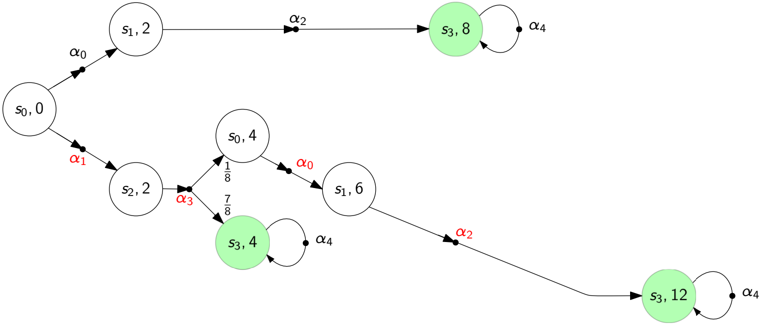
$$\rightsquigarrow \mathbb{E}^{\min}_{s_0,0}(\Diamond\{(s_3,v) \mid v \leq 12\}) = ?$$



SSP-WE

Exemple

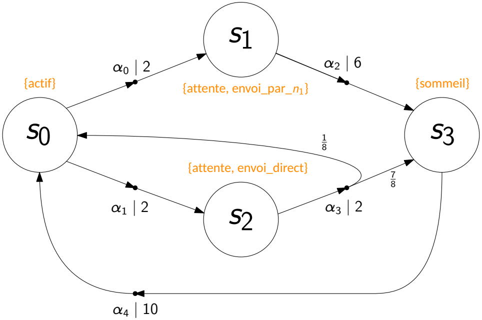
$$\rightsquigarrow \mathbb{E}_s^{\min}(\Diamond\{(s_3, v) \mid v \leq 12\}) = \frac{7}{8} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 12 = 5$$



SSP-WE

Exemple

$$\mathbb{E}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond\ \text{sommeil}) \leq 5 \wedge \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq 12}\ \text{sommeil}) = 1$$

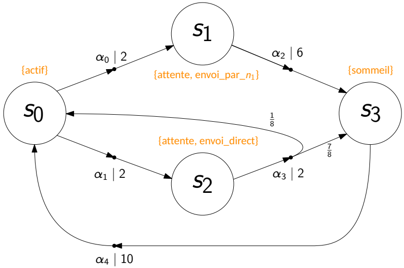


- **Stratégie optimale σ** : tester une fois un envoi direct et passer par le noeud n_1 si l'envoi direct est un échec.

SSP-WE

Exemple dans Storm

```
mdp

module sensors_transmission

s: [0..3] init 0;

[alpha0] s=0 -> 1 : (s'=1);
[alpha1] s=0 -> 1 : (s'=2);
[alpha2] s=1 -> 1 : (s'=3);
[alpha3] s=2 -> 0.125 : (s'=0) + 0.875 : (s'=3);
[alpha4] s=3 -> 1 : (s'=0);

endmodule

label "active" = s=0;
label "sleep" = s=3;
label "waiting" = s=1 | s=2;
label "intermediate" = s=1;
label "direct" = s=2;

rewards "time"
  [alpha0] true : 2;
  [alpha1] true : 2;
  [alpha2] true : 6;
  [alpha3] true : 2;
```



SSP-WE

Exemple dans Storm

$$\overset{?}{\exists}\sigma\ \mathbb{E}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond\ \text{sommeil}) \leq 5 \wedge \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq 12}\ \text{sommeil}) = 1$$

```
storm --prism resources/sensors.prism --prop "multi(Rmin<=5 [F \"sleep\"], Pmax>=1 [F{\"time\"}<=12 \"sleep\"])"
Storm 1.2.0

Command line arguments: --prism resources/sensors.prism --prop multi(Rmin<=5 [F "sleep"], Pmax>=1 [F{"time"}<=12 "sleep"])

Time for model construction: 0.305s.

--------------------------------------------------------------
Model type:  MDP (sparse)
States:  4
Transitions:  6
Choices:  5
Reward Models:  time
State Labels:  3 labels
   * deadlock -> 0 item(s)
   * init -> 1 item(s)
   * sleep -> 1 item(s)
Choice Labels:  none
--------------------------------------------------------------

Model checking property multi(R[exp]min<=5 [F "sleep"], Pmax>=1 [true Urew{"time"}<=12 "sleep"]) ...
Result (for initial states): true
Time for model checking: 0.038s.
```

SSP-WE

Exemple dans Storm (requête)

$$\min_{\sigma \mid \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{\leq 12}\, \text{sommeil})=1} \mathbb{E}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond\ \text{sommeil})$$

```
storm --prism resources/sensors.prism --prop "multi(Rmin=? [F \"sleep\"], Pmax>=1 [F{\"time\"}<=12 \"sleep\"])"
Storm 1.2.0

Command line arguments: --prism resources/sensors.prism --prop multi(Rmin=? [F "sleep"], Pmax>=1 [F{"time"}<=12 "sleep"])

Time for model construction: 0.348s.

--------------------------------------------------------------
Model type:  MDP (sparse)
States:  4
Transitions:  6
Choices:  5
Reward Models:  time
State Labels:  3 labels
   * deadlock -> 0 item(s)
   * init -> 1 item(s)
   * sleep -> 1 item(s)
Choice Labels:  none
--------------------------------------------------------------

Model checking property multi(R[exp]min=? [F "sleep"], Pmax>=1 [true Urew{"time"}<=12 "sleep"]) ...
Result (for initial states): 5
Time for model checking: 0.035s.
```

Table des matières

MDP multidimensionnels

Definition (MDP multidimensionnel)

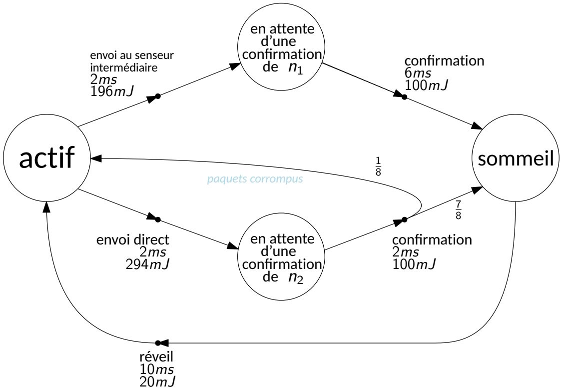
Un MDP à $d \in \mathbb{N}_0$ dimensions est un tuple $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, w)$ tel que

- S, A, Δ sont définis de la même façon que pour un MDP classique
- $w : A \to \mathbb{N}_0^d$ est une fonction de coût, associant chaque action à un coût (strictment positif) par dimension du MDP.

MDP multidimensionnel

Exemple

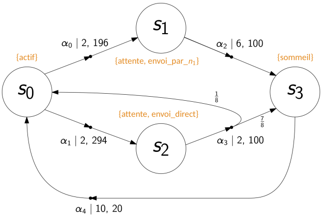
On ajoute le coût en énergie de l'envoi d'un message de n_0 à n_2



Requêtes percentiles dans les MDP multi-dimensionnels

Motivation :

- satisfaire plusieurs requêtes d'accessibilité limité par un coût dans un MDP multidimensionnel.



- $Q_1 := \mathbb{P}^{\sigma_1}_{s_0}(\Diamond_{1\,:\,\leq 4}\ \text{sommeil}) \geq 0.8$
- $Q_2 := \mathbb{P}^{\sigma_2}_{s_0}(\Diamond_{2\,:\,\leq 700}\ \text{sommeil}) \geq 0.9$

$\rightsquigarrow$ σ_1 : envoi direct

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}^{\sigma_1}_{s_0}(\Diamond_{1\,:\,\leq 4}\ \text{sommeil}) = 0.875$

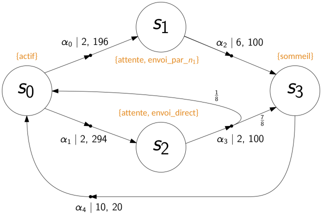
$\rightsquigarrow$ σ_2 : envoi par un noeud intermédiaire

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}^{\sigma_2}_{s_0}(\Diamond_{2\,:\,\leq 700}\ \text{sommeil}) = 1$

Requêtes percentiles dans les MDP multi-dimensionnels

Motivation :

- satisfaire plusieurs requêtes d'accessibilité limité par un coût dans un MDP multidimensionnel.



- $Q_1 := \mathbb{P}^{\sigma_1}_{s_0}(\Diamond_{1\,:\,\leq 4}\ \text{sommeil}) \geq 0.8$
- $Q_2 := \mathbb{P}^{\sigma_2}_{s_0}(\Diamond_{2\,:\,\leq 700}\ \text{sommeil}) \geq 0.9$

$\rightsquigarrow$ σ_1 : envoi direct

$\Longrightarrow$ ne satisfait pas Q_2

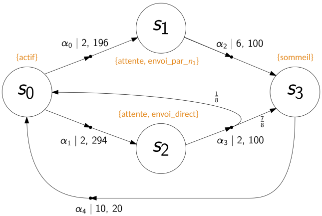
$\rightsquigarrow$ σ_2 : envoi par un noeud intermédiaire

$\Longrightarrow$ ne satisfait pas Q_1

Requêtes percentiles dans les MDP multi-dimensionnels

Motivation :

- satisfaire plusieurs requêtes d'accessibilité limité par un coût dans un MDP multidimensionnel.



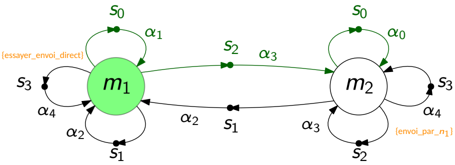
- $Q_1 := \mathbb{P}^{\sigma_1}_{s_0}(\Diamond_{1\,:\,\leq 4}\ \text{sommeil}) \geq 0.8$
- $Q_2 := \mathbb{P}^{\sigma_2}_{s_0}(\Diamond_{2\,:\,\leq 700}\ \text{sommeil}) \geq 0.9$

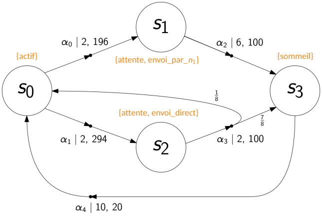
⇝ Résoudre un tel problème requiert une *stratégie à mémoire finie*

Requêtes percentiles dans les MDP multi-dimensionnels

$\sigma_{1\wedge 2}$:= essayer une fois un envoi direct et passer ensuite par n_1 si l'envoi direct a échoué

$\sigma_{1\wedge 2} :=$





- $Q_1 := \mathbb{P}^{\sigma_{1\wedge 2}}_{s_0}(\lozenge_{1:\leq 4}\ \text{sommeil}) \geq 0.8$
- $Q_2 := \mathbb{P}^{\sigma_{1\wedge 2}}_{s_0}(\lozenge_{2:\leq 700}\ \text{sommeil}) \geq 0.9$
- $\mathbb{P}^{\sigma_{1\wedge 2}}_{s_0}(\lozenge_{1:\leq 4}\ \text{sommeil}) = 0.875 \models Q_1$
- $\mathbb{P}^{\sigma_{1\wedge 2}}_{s_0}(\lozenge_{2:\leq 700}\ \text{sommeil}) = 1 \models Q_2$
  - $\rightsquigarrow$ $394 \leq TS^{\{s_3\}}(\pi) \leq 690$ $\forall \pi \in Paths^{\sigma_{1\wedge 2}}(s_0)$

SSP-PQ

Definition (SSP-PQ)

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, w)$, un MDP multidimensionnel tel que $w : A \to \mathbb{N}_0^d$, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$ et $q \in \mathbb{N}$ contraintes percentiles.
Ces contraintes percentiles sont décrites par les ensembles d'états cibles $T_i \subseteq S$, les dimensions $k_i \in \{1, \dots, d\}$, les seuils de longueur $l_i \in \mathbb{N}$ et les seuils de probabilité $\alpha_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$.
Le problème *SSP-PQ* consiste à décider s'il existe une stratégie σ pour laquelle la requête suivante est satisfaite :

$$\mathcal{Q} := \bigwedge_{i \in \{1,\dots,q\}} \mathbb{P}_s^\sigma(\Diamond_{k_i : \leq l_i} T_i) \geq \alpha_i$$

où $\Diamond_{k_i : \leq l_i} T_i$ dénote l'ensemble des chemins satisfaisant $\Diamond_{\leq l_i} T_i$ sur la dimension k_i

- peut être décidé en temps exponentiel
- PSPACE-difficile

SSP-PQ

Algorithme

1. Construire $\mathcal{M}_l$, le MDP déplié de $\mathcal{M}$, de la même façon que pour le problème SSP-P, mais tel que $l = \max_i l_i$.
   - $S_l \in S \times (\{0, \dots, l\} \cup \{\bot\})^d$
   - un chemin n'est écarté que lorsque le coût du chemin courant, pour chacune de ses dimensions j, excède $\max_i l_i$, avec $i \in \{1, \dots, q \mid \mathcal{Q}_i := \mathbb{P}^\sigma_s(\Diamond_{k_i : \leq l_i} T_i) \geq \alpha_i \ \wedge \ k_i = j\}$
   - certains chemins peuvent dépasser le seuil de longueur d'une requête tout en restant intéressants pour la stratégie
   - en effet, on ne cherche pas forcément à atteindre un état qui satisfait toutes les contraintes de coûts à la fois !

   $\rightsquigarrow$ notion de **compromis**

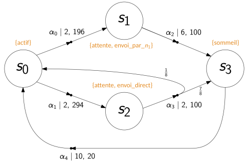
SSP-PQ

Algorithme

1. Construire $\mathcal{M}_l$, le MDP déplié de $\mathcal{M}$, de la même façon que pour le problème SSP-P, mais tel que $l = \max_i l_i$.
2. Pour chaque requête $i \in \{1, \dots, q\}$, on calcule un ensemble d'états cibles R_i dans M_l pour lequel tous les états contenus dans cet ensemble satisfont la contrainte liée au coût de cette requête.
3. Résoudre le *problème d'accessibilité **multiple*** aux différent ensembles R_i, pour chaque requête $i \in \{1, \dots, q\}$. On recherche donc une stratégie σ_l qui assure au système d'atteindre les ensembles R_i depuis $(s, 0, \dots, 0)$ avec une probabilité α_i
   - ⇝ peut être répondu en temps polynomial en $|\mathcal{M}_l|$ ...
   - ⇝ ... mais exponentiel en $|R_i|$, i.e., q

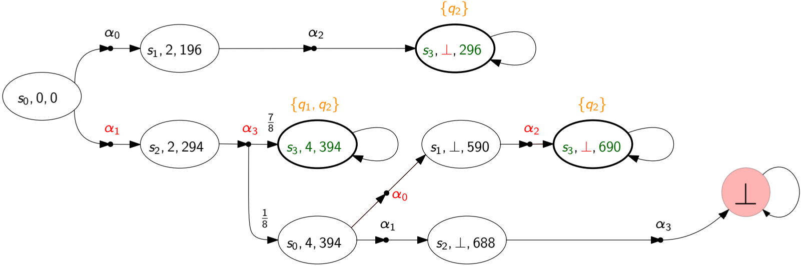
SSP-PQ

Algorithme : exemple



- $Q_1 := \mathbb{P}^{\sigma}{}_{s_0}(\Diamond_{1\,:\,\leq 4}\ \text{sommeil}) \geq 0.8$
- $Q_2 := \mathbb{P}^{\sigma}{}_{s_0}(\Diamond_{2\,:\,\leq 700}\ \text{sommeil}) \geq 0.9$

Idée clé : il est nécessaire qu'il y ait une possibilité pour que les labels q_1 **et** q_2 apparaissent au moins une fois dans le futur dans $\mathcal{M}^{\sigma}$



SSP-PQ : stratégies

Definition (Stratégie aléatoire)

Une stratégie aléatoire sans mémoire est une stratégie σ telle que

$$\sigma : S \to \mathcal{D}(A)$$

où $\mathcal{D}$ est une distribution de probabilité sur A. Les stratégies aléatoires à mémoire sont définies d'une façon similaire.

Théorème

Les stratégies qui résolvent le problème SSP-PQ ont besoin à la fois de mémoire (sans mémoire dans $\mathcal{M}_I$) et d'aléatoire (pour résoudre le problème d'accessibilité multiple dans $\mathcal{M}_I$)

SSP-PQ : stratégies

- La construction d'une stratégie requiert de résoudre le problème d'*accessibilité multiple G-SR* dans le MDP déplié jusque l, i.e., $\mathcal{M}_l$
- Le problème d'accessibilité multiple est une généralisation du problème SR dans les MDP.
- Comment construire une telle stratégie ?

Table des matières

Problème d'accessibilité multiple

Definition (G-SR)

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta)$, un MDP, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$ et $q \in \mathbb{N}$ contraintes.
Ces contraintes sont décrites par les ensembles d'états cibles $T_i \subseteq S$ et les seuils de probabilité $\alpha_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$.
Le problème *G-SR* est une généralisation du problème SR qui consiste à décider s'il existe une stratégie σ pour laquelle la requête suivante est satisfaite :

$$\mathcal{Q} := \bigwedge_{i \in \{1,\ldots,q\}} \mathbb{P}_s^{\sigma}(\Diamond T_i) \geq \alpha_i$$

Nettoyer un MDP

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta)$, un MDP et $q \in \mathbb{N}$ contraintes d'accessibilité. On défini l'ensemble T comme étant l'ensemble des états cibles qui décrivent les q contraintes, i.e., $T = \bigcup_{i \in \{1,\dots,q\}} T_i$. Nettoyer $\mathcal{M}$ consiste à créer un nouveau MDP $\mathcal{M}_T = (S_T, A_T, \Delta_T)$ tel que

- $A_T = A \cup \{\alpha_T, \alpha_{dead}\}$
- Les états de T sont absorbants, i.e., $\forall t \in T,\ \Delta_T(t, \alpha_T, t) = 1$ et $A_T(t) = \{\alpha_T\}$
- $S_T = (S \setminus S_0) \cup \{s_{dead}\}$, avec $S_0 = \{s \in S \mid \forall \sigma,\ \mathbb{P}_s^\sigma(\Diamond T) = 0\}$
  - Pour chaque état $s \in S \setminus T$, on peut facilement vérifier si $\exists \sigma$ tel que $\mathbb{P}_s^\sigma(\Diamond T) > 0$ (si il existe un chemin de s à T dans le graphe sous-jacent de $\mathcal{M}$)

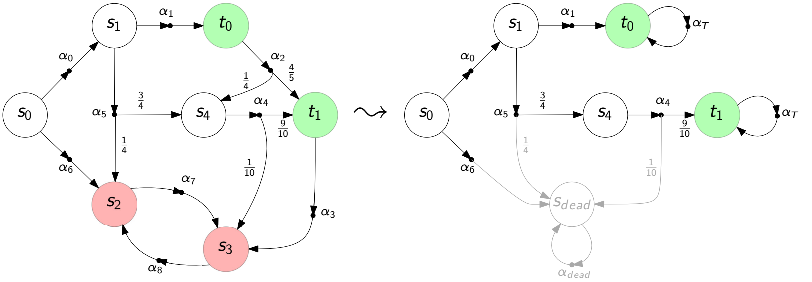
⇝ On a retiré les *mauvais états de* S, i.e., on crée un état s_{dead} invisible absorbant

$\Longrightarrow$ $\forall s \in S,\ \sum_{\alpha \in A(s)} \Delta_T(s, \alpha, s') \leq 1$

⇝ **Transition invisible :** $\Delta_T(s, \alpha, s_{dead}) = 1 - \sum_{s' \in Succ(s,\alpha)} \Delta_T(s, \alpha, s')$

Nettoyer un MDP

Exemple



Courbe de Pareto

- Ensemble des vecteurs p de points $p_1, \ldots, p_q$ réalisables qui satisfont les contraintes de probabilités α_i, i.e., $p \geq \alpha$ tel qu'il n'existe pas de vecteur p' qui domine p, i.e., tel que $\neg \exists p', p \leq p'$
- $U_{\mathcal{Q}} = \{p \in [0,1]^q \cap \mathbb{Q} \mid \exists \sigma, t^\sigma \geq p \ \wedge \ p \geq \alpha\}$, avec $t^\sigma = \mathbb{P}_s^\sigma(\Diamond T_i)$
  - ⇝ Trop coûteux à calculer !
  - ⇝ Notion de courbe de Pareto
- $\mathcal{P} \subseteq U_{\mathcal{Q}}$, la *courbe de Pareto de $U_{\mathcal{Q}}$*, contient tous les vecteurs p *Pareto optimaux* ≈ *courbe des compromis.*
- $p \in U_{\mathcal{Q}}$ est Pareto-optimal ssi $\neg \exists p' (p' \in U_{\mathcal{Q}} \wedge p \leq p' \wedge p \neq p')$
- La courbe de Pareto est en général une surface polyhèdrale de taille superpolynomiale

Programme Linéaire multi-objectif

On résout le problème G-SR via un *programme linéaire à objectifs multiples*.

- Un programme linéaire à objectifs multiples (MOLP) se définit de la même façon qu'un LP classique à l'exception du fait qu'on cherche à satistfaire simultanément plusieurs fonctions objectifs.
- Si les objectifs sont non-triviaux, il n'existe pas de solution unique qui optimise tous les objectifs simultanément
  - ⇝ compromis
  - ⇝ pas de solution optimale
- Une solution acceptable d'un MOLP est une solution *non-dominante*
  - ⇝ aucune fonction objectif ne peut être optimisée sans dégrader la valeur d'une autre fonction objectif.
- Soit V, l'ensemble des solutions qui satisfont toutes les contraintes du MOLP. L'ensemble des solutions acceptables du MOLP est la courbe de pareto $\mathcal{P} \subseteq V$

Courbe de Pareto

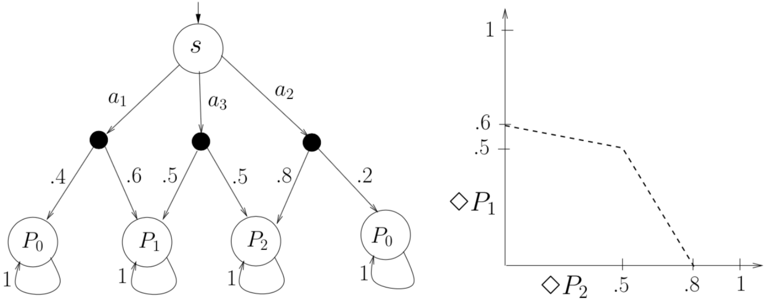


Figure – MDP avec deux objectifs, $\Diamond P_1$ et $\Diamond P_2$, ainsi que la courbe de Pareto associée [1]

G-SR

Programme Linéaire multi-objectif

Supposons que le MDP est nettoyé. Le MOLP se définit comme suit :

Objectifs $i \in \{1, \ldots, q\}$: $\max \sum_{t \in T_i} y_t$

sous les contraintes

$$\sum_{s' \in Pred(t) \setminus T} \sum_{\alpha' \in A(s')} \Delta(s', \alpha', t) \cdot y_{s',\alpha'} = y_t \qquad \forall t \in T$$

$$\mathbb{1}(s) + \sum_{s' \in Pred(s)} \sum_{\alpha' \in A(s')} \Delta(s', \alpha', s) \cdot y_{s',\alpha'} = \sum_{\alpha \in A(s)} y_{s,\alpha} \qquad \forall s \in S \setminus T$$

$$y_t \geq 0 \qquad \forall t \in T_i$$

$$y_{s,\alpha} \geq 0 \qquad \forall s \in S \setminus T \text{ et } \alpha \in A(s)$$

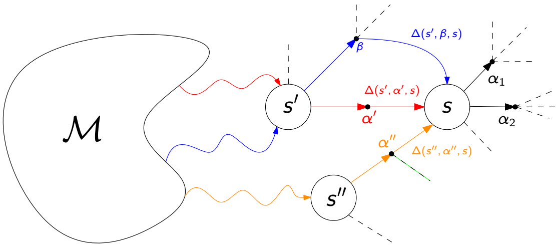
- $\mathbb{1}(s) = 1$ ssi $s \in S$ est l'état pour lequel on cherche à satisfaire $\bigwedge_{i \in \{1,\ldots,q\}} \mathbb{P}_s^\sigma(\Diamond T_i) \geq \alpha_i$
- Ce MOLP est dérivé du LP dual de celui du problème SR pour lequel la solution optimale est $x_s^* = \max_\sigma \mathbb{P}_s^\sigma(\Diamond T)$

G-SR

MOLP

$$\mathbb{1}(s) + \sum_{s' \in Pred(s)} \sum_{\alpha' \in A(s')} \Delta(s', \alpha', s) \cdot y_{s',\alpha'} = \sum_{\alpha \in A(s)} y_{s,\alpha} \quad \forall s \in S \setminus T$$

$y_{s,\alpha} =$ *espérance du nombre de fois que la transition* $s \xrightarrow{\alpha}$ *est empreintée*
$\sum_{\alpha \in A(s)} y_{s,\alpha} =$ *espérance du nombre de fois que l'état* s *est visité*



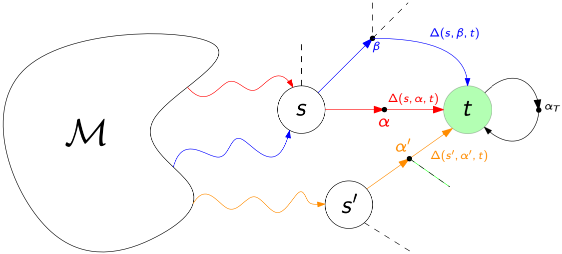
G-SR

MOLP

$$y_t = \sum_{s' \in Pred(t) \setminus T} \sum_{\alpha' \in A(s')} \Delta(s', \alpha', t) \cdot y_{s', \alpha'} \quad \forall t \in T$$

y_t = *espérance du nombre de fois qu'une transition atteint* t *pour la première fois*

⇝ il s'agit d'une autre façon de formuler la probabilité d'atteindre éventuellement t



G-SR

MOLP

$$\sum_{t \in T_i} y_t$$

correspond donc à la probabilité d'atteindre T_i

$\rightsquigarrow$ Si une solution acceptable du MOLP y' existe, alors il reste à vérifier que

$$\sum_{t \in T_i} y'_t \geq \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

G-SR

Théorème

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta)$, un MDP nettoyé, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$ et $q \in \mathbb{N}$ contraintes décrites par les ensembles d'états cibles $T_i \subseteq S$ et les seuils de probabilités $\alpha_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1.) *Il existe une stratégie aléatoire sans mémoire telle que*

$$\bigwedge_{i=1}^{q} \mathbb{P}_s^{\sigma}(\Diamond T_i) \geq \alpha_i$$

(2.) *Il existe une solution acceptable y' au MOLP telle que*

$$\bigwedge_{i=1}^{q} \sum_{t \in T_i} y'_t \geq \alpha_i$$

G-SR

Construction de la stratégie

Supposons que y' est une solution acceptable du MOLP tel que

$$\sum_{t \in T_i} y'_t \geq \alpha_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\} \tag{1}$$

Soit $V = \{s \in S \setminus T \mid \sum_{\alpha \in A(s) y'_{s,\alpha}} y'_{s,\alpha} > 0\}$, les états par lesquels on passe afin de satisfaire (1), alors $\forall s_v \in V$, $\alpha \in A(s_v)$

$$\sigma(s_v)(\alpha) := \frac{y'_{s_v,\alpha}}{\sum_{\alpha' \in A(s_v)} y'_{s_v,\alpha'}}$$

$$:= \frac{\mathbb{E}_s(\text{\# transition } s_v \xrightarrow{\alpha} \text{ est empreintée})}{\mathbb{E}_s(\text{\# visite de l'état } s_v)}$$

Note : Vu que $\sum_{\alpha \in A(s_v)} y'_{s_v,\alpha} > 0$, $\sigma(s_v)$ est une distribution de probabilité sur $A(s_v)$,i.e., $\mathcal{D}(A(s_v))$. Pour les autres états $s' \notin V$, $\sigma(s')$ est une distribution de probabilité aléatoire sur $A(s')$, i.e., $\mathcal{D}(A(s'))$

G-SR

Stratégie et problème de flots

Lemme

La stratégie σ, construite de cette manière, satisfait $\bigwedge_{i=1}^{q} \mathbb{P}_s^{\sigma}(\Diamond T_i) \geq \alpha_i$

Idée : y', une solution acceptable du MOLP, défini un **flot stochastique** dont la source est s et dont les puits sont les états de T.

- Par conservation de flots, les états de $s \in S \setminus T$ qui ont un nombre de flots sortants positifs $(\#_{\alpha \in A(s)} s \xrightarrow{\alpha})$ — et donc un nombre de flots entrants positifs
  - doivent être tous accessibles depuis la source
  - doivent tous atteindre T
  - ne peuvent pas accéder aux états avec un flot nul

G-SR

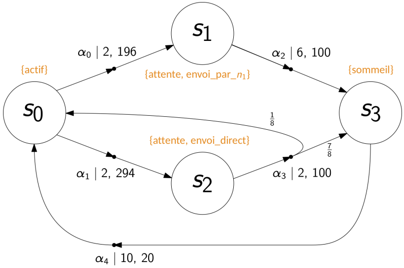
Stratégie et problème de flots

- σ est obtenue en normalisant les flots sortant de chaque action vers les états avec un nombre de flots sortants positif.
- En utilisant σ définie de cette façon, l'espérance du nombre de fois que $\alpha \in A(s)$ est choisie alors que le système se trouve en l'état s est donné par $y'_{s,\alpha}$.
- Par conséquent, vu que les transitions vers un état $t \in T$ depuis un état de $S \setminus T$ sont employées pour atteindre t une **unique fois**, alors, les contraintes définissant y'_t induisent $y'_t = \mathbb{P}^{\sigma}_{s}(\Diamond\{t\})$

SSP-PQ et GSR

Exemple dans Storm

```
mdp

module sensors_transmission

s: [0..3] init 0;

[alpha0] s=0 -> 1 : (s'=1);
[alpha1] s=0 -> 1 : (s'=2);
[alpha2] s=1 -> 1 : (s'=3);
[alpha3] s=2 -> 0.125 : (s'=0) + 0.875 : (s'=3);
[alpha4] s=3 -> 1 : (s'=0);

endmodule

label "sleep" = s=3;

rewards "time"
  [alpha0] true : 2;
  [alpha1] true : 2;
  [alpha2] true : 6;
  [alpha3] true : 2;
  [alpha4] true : 10;
endrewards

rewards "energy"
  [alpha0] true : 196;
  [alpha1] true : 294;
  [alpha2] true : 100;
  [alpha3] true : 100;
  [alpha4] true : 20;
endrewards
```



SSP-PQ et GSR

Exemple dans Storm

$$\overset{?}{\exists}\sigma,\ \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\lozenge_{1\,:\,\leq 4}\ \text{sommeil}) \geq 0.8 \wedge \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\lozenge_{2\,:\,\leq 700}\ \text{sommeil}) \geq 0.9$$

```
storm --prism ../../models/sensors.prism --prop "multi(Pmax>=0.8 [F{\"time\"}<=4 \"sleep\"], Pmax>=0.9 [F{\"energy\"}<=700 \"sleep\"])"
Storm 1.2.0

Command line arguments: --prism ../../models/sensors.prism
                        --prop multi(Pmax>=0.8 [F{"time"}<=4 "sleep"], Pmax>=0.9 [F{"energy"}<=700 "sleep"])

Time for model construction: 0.302s.

--------------------------------------------------------------
Model type:  MDP (sparse)
States:  4
Transitions:  6
Choices:  5
Reward Models:  time, energy
State Labels:  3 labels
   * deadlock -> 0 item(s)
   * init -> 1 item(s)
   * sleep -> 1 item(s)
Choice Labels:  none
--------------------------------------------------------------

Model checking property multi(Pmax>=4/5 [true Urew{"time"}<=4 "sleep"], Pmax>=9/10 [true Urew{"energy"}<=700 "sleep"]) ...
Result (for initial states): true

Time for model checking: 0.003s.
```

SSP-PQ et GSR

Exemple dans Storm

$$\max_{\sigma} \left(\mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{1:\leq 4} \text{ sommeil}),\ \mathbb{P}^{\sigma}_{s_0}(\Diamond_{2:\leq 700} \text{ sommeil}) \right)$$

```
storm --prism ../../models/sensors.prism --prop "multi(Pmax=? [F{\"time\"}<=4 \"sleep\"], Pmax=? [F{\"energy\"}<=700 \"sleep\"])"
Storm 1.2.0

Command line arguments: --prism ../../models/sensors.prism
                        --prop multi(Pmax=? [F{"time"}<=4 "sleep"], Pmax=? [F{"energy"}<=700 "sleep"])

Time for model construction: 0.452s.

Model checking property multi(Pmax=? [true Urew{"time"}<=4 "sleep"], Pmax=? [true Urew{"energy"}<=700 "sleep"]) ...
Result (for initial states):
Underapproximation of achievable values: Polytope with 2 Halfspaces:
   (         1,          0) * x <= 0.875
   (         0,          1) * x <= 1

Overapproximation of achievable values: Polytope with 2 Halfspaces:
   (         1,          0) * x <= 0.875
   (         0,          1) * x <= 1

1 pareto optimal points found
(Note that these points are safe, i.e., contained in the underapproximation, but there is no guarantee for optimality):
   (     0.875,          1 )


Time for model checking: 0.040s.
```

Références I

[1] Kousha Etessami et al. “Multi-Objective Model Checking of Markov Decision Processes”. In : *Logical Methods in Computer Science* 4.4 (2008). doi : 10.2168/LMCS-4(4:8)2008.

[2] Mickael Randour, Jean-François Raskin et Ocan Sankur. “Variations on the Stochastic Shortest Path Problem”. In : *Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation - 16th International Conference, VMCAI 2015, Mumbai, India, January 12-14, 2015. Proceedings*. 2015, p. 1–18. doi : 10.1007/978-3-662-46081-8_1.