Vérification des Processus Décisionnels de Markov pondérés

Florent Delgrange

UMONS

Faculté des Sciences

Mab2 Science Informatique

Table des matières

Système de transition

Definition (Système de transition)

Un *système de transition* (noté TS, pour *transition system*) est un tuple $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$ où

- S est un ensemble d'états,
- A est un ensemble d'actions,
- $\rightarrow \subseteq S \times A \times S$ est une relation de transition,
- AP est un ensemble de propositions atomiques et
- $L : S \rightarrow 2^{AP}$ est une fonction d'étiquetage.

Système de Transition

- **Idée** : Graphe orienté
  - noeuds : états du système
  - arcs : transitions du système
- **État** : décrit les informations d'un système à un certain moment de son comportement.
- **Transition** : si un état a plus d'une transition sortante, alors le comportement du système est non-déterministe, i.e., l'évolution du système requiert la sélection d'une transition.
- **Étiquetage** : $L(s)$ est l'ensemble des étiquettes $a \in AP$ de l'état s.
- **Pas d'états terminaux !**

Système de Transition

Exemple

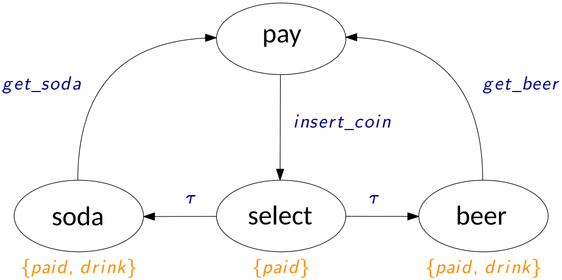


Figure – Distributeur de boissons [1]

- $S = \{pay, select, beer, soda\}$
- $A = \{insert\_coin, \tau, get\_soda, get\_beer\}$
- $AP = \{paid, drink\}$

Chemins

Un chemin d'un système de transition est une succession d'état possible résultant de l'exécution de ce système.

- **Idée** : pas d'états terminaux $\implies$ chemins infinis.

Definition (Chemin d'un TS)

Soit $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$, un TS.
$\pi = s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots$ est un *chemin* (infini) de $\mathcal{T}$ ssi pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une action $\alpha \in A$ telle que $s_i \xrightarrow{\alpha} s_{i+1}$, avec $s_i, s_{i+1} \in S$.
L'ensemble des chemins (infinis) $\pi = s_0 s_1 \ldots$ commençant en l'état s (i.e., tels que $s_0 = s$) est dénoté par $Paths(s)$.

Traces

Les traces d'un système de transition sont des mots infinis sur l'alphabet 2^{AP} formés lors de l'exécution du système.

Definition (Traces)

Soit $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$, un TS. La trace du chemin $\pi = s_0 s_1 \ldots$ est donné par

$$trace(\pi) = L(s_0)L(s_1)\ldots$$

Dès lors, soit $s \in S$, un état de $\mathcal{T}$, les traces du système provenant de l'état s est donné par

$$Traces(s) = \{trace(\pi) \mid \pi \in Paths(s)\}$$

Chemins et Traces

Exemple

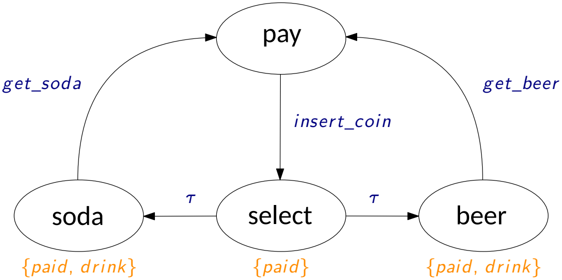


Figure – Distributeur de boissons [1]

- $\pi = pay\ select\ soda\ pay\ select\ beer\ \cdots \in Paths(pay)$
- $\varnothing\{paid\}\{paid, drink\}\varnothing\{paid\}\{paid, drink\}\cdots = trace(\pi) \in Traces(paid)$

Table des matières

Logique temporelle linéaire (LTL)

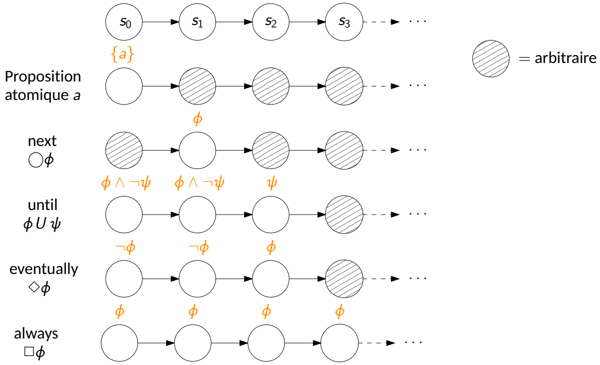
- L'exactitude des systèmes réactifs dépend des exécutions + de l'équité du système
- La logique temporelle permet de traiter ces aspects
  $\longrightarrow$ *temps "réel"* (discret !)
- Temps linéaire $\Longrightarrow$ logique basée sur les chemins du système
  $\longrightarrow$ à chaque étape, un seul successeur est possible

$\longrightarrow$ **LTL** $\approx$ langage qui a pour but de vérifier des propriétés sur les exécutions d'un système

Logique temporelle linéaire (LTL) : intuition

Soit $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$, LTL est formée par ...

1. des propositions atomiques $a \in AP$,
2. des combinaisons booléennes de formules : $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ et
3. des opérateurs temporels : soit $\pi = s_0 s_1 s_2 s_3 \cdots \in Paths(\mathcal{T})$



Syntaxe

Soit AP, un ensemble de propositions atomiques, les *formules* LTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\phi ::= true \mid a \mid \phi \wedge \psi \mid \neg \phi \mid \bigcirc \phi \mid \phi U \psi$$

où $a \in AP$

Note : $\phi U \psi$ requiert l'apparition de ψ dans le chemin ; ϕ indéfiniment n'est pas suffisant !

Syntaxe

Opérateurs dérivés :

eventually	$\Diamond\phi \equiv true\, U\, \psi$
always	$\Box\phi \equiv \neg\Diamond\neg\phi$

Ordre de précédence :

1. parenthèses
2. opérations unaires $(\neg, \bigcirc)$
3. opérations binaires :
   3.1 U (assosiatif par la droite, e.g., $\phi_1 U \phi_2 U \phi_3 \equiv \phi_1 U (\phi_2 U \phi_3)$)
   3.2 $\wedge$

Combinaisons de modalités temporelles :

- $\Box\Diamond\phi$ “infiniment souvent ϕ”
- $\Diamond\Box\phi$ “éventuellement toujours ϕ”

Combinaisons de modalités temporelles

Exemple (infiniment souvent)

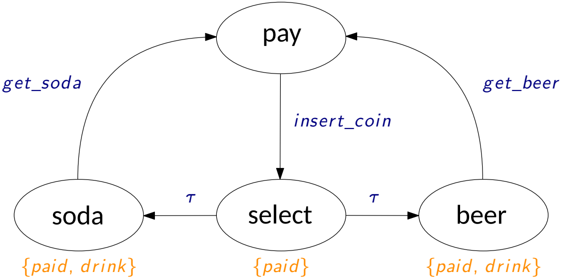


Figure – Distributeur de boissons [1]

- Pour toute trace de l'éxécution du système depuis pay, i.e., $\forall \sigma \in Traces(pay)$, pour toute position dans σ, le label $drink$ doit apparaître dans le futur.
  $\rightsquigarrow \Box\Diamond drink$

Combinaisons de modalités temporelles

Exemple (éventuellement toujours)

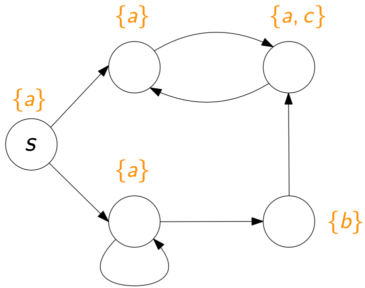


Figure – [2]

- $\forall \sigma \in Traces(s)$, il y a toujours un moment où on voit toujours a, mais plus b
  $\rightsquigarrow \Diamond\Box(a \wedge \neg b)$

Sémantique

Soient $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$ et ϕ, une formule LTL sur AP, la propriété LT induite par ϕ est le langage de mots

$$Words(\phi) = \{\sigma = A_0 A_1 A_2 \cdots \in (2^{AP})^\omega \mid \sigma \models \phi\}$$

où $\models$ est la plus petite relation satisfaisant

$$\begin{array}{ll}
\sigma \models true & \\
\sigma \models a & \text{ssi } a \in A_0 \\
\sigma \models \phi \wedge \psi & \text{ssi } \sigma \models \phi \text{ et } \sigma \models \psi \\
\sigma \models \neg\phi & \text{ssi } \sigma \not\models \phi \\
\sigma \models \bigcirc\phi & \text{ssi } \sigma[1:] = A_1 A_2 \ldots \models \phi \\
\sigma \models \phi U \psi & \text{ssi } \exists j \geq 0,\ \sigma[j:] \models \psi \text{ et } \forall 0 \leq i < j,\ \sigma[i:] \models \phi
\end{array}$$

Sémantique

Soit $s \in S$,

- $\forall \pi \in Paths(s)$, $\pi \models \phi$ ssi $trace(\pi) \models \phi$
- $s \models \phi$ ssi $\forall \pi \in Paths(s)$, $\pi \models \phi$

Exemple

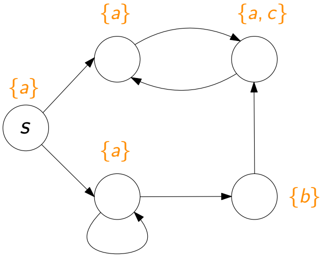


Figure – [2]

- $s \models \Diamond\Box(a \wedge \neg b)$

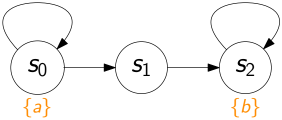
Table des matières

Logique d'arbre de calculs (CTL)

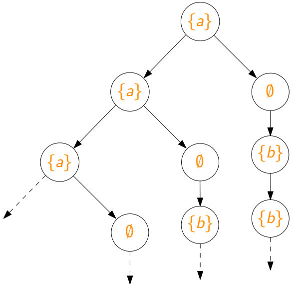
- Notion d'**arbre d'exécution = arbre de calcul**

$\rightsquigarrow$ Dépliage infini du système considérant toutes les possibilités de branchement

Arbre de calculs



Arbre de calculs depuis l'état s_0 ?



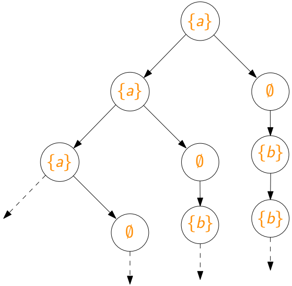
Est-ce que toutes les exécutions ont toujours la possibilité d'atteindre éventuellement $\{b\}$?

Quantificateurs

- **LTL** : $s \models \phi$ signifie que tous les chemins commençant en s satisfont ϕ
  - Quantification explicite !
  - $s \models \forall \phi$
- **CTL** : on peut considérer seulement certains chemins
  - Existe-t-il un chemin satisfaisant ϕ commençant en s ?
  - $s \models \exists \phi \iff \underbrace{s \not\models \forall \neg \phi}_{\text{LTL : } s \not\models \neg \phi}$

Quantificateurs

Motivation



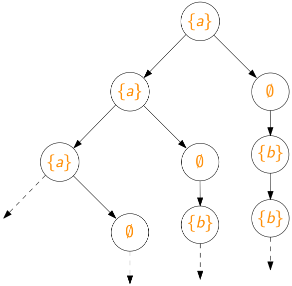
Est-ce que toutes les exécutions ont toujours la possibilité d'atteindre éventuellement $\{b\}$?

- **LTL** :
  - $s_0 \models \Box\Diamond b$ ne fonctionne pas !
  - requiert que tous les chemins du système de transition atteignent $\{b\}$

  $\rightsquigarrow$ On ne parle pas de possibilité d'atteindre $\{b\}$
- Pas expressible en LTL

Quantificateurs

Motivation



Est-ce que toutes les exécutions ont toujours la possibilité d'atteindre éventuellement $\{b\}$?

→ Besoin de quantificateurs

- **CTL** :
  - $s_0 \models \forall \Box \exists \Diamond b$
  - Pour tout chemin commençant en s_0, à chaque étape, il existe un chemin qui peut atteindre b.

CTL vs LTL

Comparaison intuitive

- **LTL :**
  - chemins + traces
  - temps linéaire
  - chaque point a un seul futur possible
- **CTL :**
  - arbre de calculs + comportement des branchements
  - temps en branchements
  - chaque noeud de l'arbre a plusieurs futurs possibles

CTL

Intuition

- Formules d'états

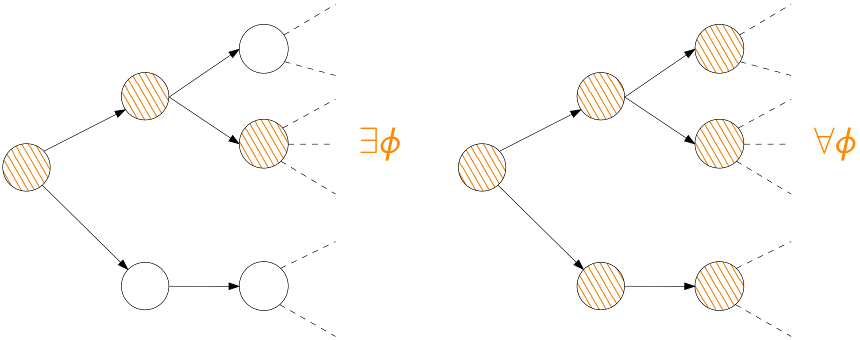
= Assertions de propositions atomiques dans des états ainsi que leur structure de branchement

  - propositions atomiques $a \in AP$
  - combinaisons booléennes de formules : $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$
  - quantification de chemins via des formules de chemins

CTL

Intuition

- Formules de chemins



Formules de chemins

Formules LTL $\neq$ formules de chemin CTL !

En effet, les formules de chemin CTL...

- ne peuvent pas être combinées avec des connecteurs booléens
- ne permettent pas l'imbrication des modalités temporelles

  Exemple :

$s \models \forall \Box \exists \Diamond b$	correct
$s \models \forall \Box \Diamond b$	incorrect

Syntaxe

Soit AP, un ensemble de propositions atomiques.

- Les *formules d'états* CTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\Phi ::= true \mid a \mid \Phi \wedge \Psi \mid \neg\Phi \mid \exists\phi \mid \forall\phi$$

  où $a \in AP$ et ϕ est une formule de chemin.

- Les *formules de chemins* CTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\phi ::= \bigcirc\Phi \mid \Phi U \Psi$$

  où Φ et Ψ sont des formules d'états.

Sémantique

Soient $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$, un TS et $s \in S$, un état de $\mathcal{T}$.
$s \models \Phi$ ssi la formule Φ tient dans l'état s, i.e.,

$s \models true$	
$s \models a$	ssi a est un label de s, i.e., $a \in L(s)$
$s \models \Phi \wedge \Psi$	ssi $s \models \Phi$ et $s \models \Psi$
$s \models \neg\Phi$	ssi $s \not\models \Phi$
$s \models \exists\phi$	ssi $\exists\pi \in Paths(s),\ \pi \models \phi$
$s \models \forall\phi$	ssi $\forall\pi \in Paths(s),\ \pi \models \phi$

Sémantique

Soient $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$, un TS et $\pi = s_0 s_1 s_2 \cdots \in Paths(s)$, un chemin.

$\pi \models \phi$ ssi π satisfait ϕ, i.e.,

$$
\begin{array}{ll}
\pi \models \Phi & \text{ssi } s_0 \models \Phi \\
\pi \models \bigcirc\Phi & \text{ssi } s_1 \models \Phi \\
\pi \models \Phi U \Psi & \text{ssi } \exists j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Psi \text{ et } \forall 0 \leq i < j,\ s_i \models \Phi \\
\pi \models \Diamond\Phi & \text{ssi } \exists j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Phi \\
\pi \models \Box\Phi & \text{ssi } \forall j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Phi
\end{array}
$$

Satisfiabilité

Definition (Ensemble de satisfaction)

Soient $\mathcal{T} = (S, A, \rightarrow, AP, L)$, un TS et Φ, une formule d'état CTL sur AP. L'ensemble de satisfaction du TS $\mathcal{T}$ est donné par

$$Sat_{\mathcal{T}}(\Phi) = \{s \in S \mid s \models \Phi\}$$

LTL vs CTL

LTL et CTL sont incomparables !

Exprimable en ...

- CTL mais pas LTL :
  $\forall\Box\exists\Diamond a$ (voir exemple)
- LTL mais pas CTL :
  $\Diamond\Box a$

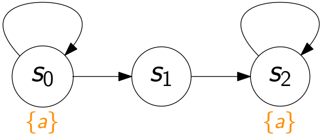
En effet, $\Diamond\Box a \not\equiv \forall\Diamond\forall\Box a$!

- $\Diamond\Box a$ assure que a sera atteint éventuellement en tout point.
- $\forall\Diamond\forall\Box a$ affirme que pour toute exécution, un état s est éventuellement atteint, tel que $s \models \forall\Box a$

LTL vs CTL

Exemple

- AP = $\{a\}$



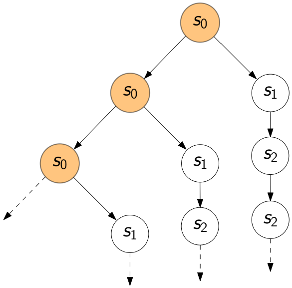
- s_0 satisfait la formule LTL $\Diamond\Box a$ car chaque chemin commençant en s_0 reste éventuellement toujours en s_0 ou en s_2, tous les deux étiquettés avec a.
- s_0 **ne satisfait pas** la formule CTL $\forall\Diamond\forall\Box a$.
  Prenons le chemin s_0^ω.
  $s_0^\omega \not\models \Diamond\forall\Box a$

LTL vs CTL

Exemple

$$s_0^\omega \not\models \Diamond\forall\Box a$$

- $\pi = s_0 s_1 \ldots \models \Diamond\Phi \iff \exists j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Phi$
- $s \models \forall\Box a \iff \forall\pi = s_0 s_1 s_2 \cdots \in Paths(s),\ a \in L(s_i)\ \forall i \in \mathbb{N}$



Le chemin

$$s_0^* s_1 s_2^\omega$$

passe par un état $\neg a$ (i.e., par s_1).

→ Il n'existe pas d'états dans le chemin s_0^ω qui va satisfaire $\forall\Box a$ car $s_0 \not\models \forall\Box a$

Table des matières

Definition (Chaîne de Markov à temps discret)

Une *chaîne de Markov à temps discret*, notée **MC** (pour *Markov Chain*), est un modèle probabiliste défini par un tuple $\mathcal{M} = (S, \Delta, AP, L)$ où :

- S est un ensemble dénombrable d'états,
- $\Delta : S \times S \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est une *fonction de transition* telle que

$$\forall s \in S, \sum_{s' \in S} \Delta(s, s') = 1$$

  où $\Delta(s, s')$ est la probabilité de passer de l'état s à l'état s',
- AP est un ensemble de propositions atomiques et
- $L : S \to 2^{AP}$ est une fonction d'étiquetage.

Chaînes de Markov

- Les MCs sont des modèles **déterministes**
- L'idée des chemins d'une MC est la même que pour les TSs :

Definition (Chemin dans une MC)

Un chemin (infini) $\pi = s_0 s_1 s_2 \cdots \in S^\omega$ est une séquence d'états de la MC $\mathcal{M} = (S, \Delta, AP, L)$ où $\forall i \in \mathbb{N}, \Delta(s_i, s_{i+1}) > 0$. $Paths(s)$ est l'ensemble des chemins de $\mathcal{M}$ qui commencent en l'état $s \in S$.

Logique en arbre de calculs probabiliste (PCTL)

- CTL probabiliste
- Logique temporelle en branchements pour exprimer les propriétés d'états des MCs.
- Logique proche de CTL pour les systèmes probabilistes.

CTL vs PCTL

- **CTL :**
  Chemins quantifiés en utilisant $\forall$ et $\exists$
- **PCTL :**
  Chemins quantifiés en utilisant leur probabilité, avec $\mathcal{P}_J(\phi)$ où $J \subseteq [0, 1]$ et ϕ est une formule de chemin

$$s \models \mathcal{P}_J(\phi) \text{ ssi } \mathbb{P}_s(\{\pi \in Paths(s) \mid \pi \models \phi\}) \in J$$

\+ PCTL inclus additionnellement le *until borné* $U^{\leq n}$

Syntaxe

Soit AP, un ensemble de propositions atomiques.

- Les *formules d'états* PCTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\Phi ::= true \mid a \mid \Phi \wedge \Psi \mid \neg \Phi \mid \mathcal{P}_J(\phi)$$

  où $a \in AP$, $J \subseteq [0, 1]$ et ϕ est une formule de chemin.

- Les *formules de chemins* PCTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\phi ::= \bigcirc \Phi \mid \Phi U \Psi \mid \Phi U^{\leq n} \Psi$$

  où Φ et Ψ sont des formules d'états et $n \in \mathbb{N}$.

Sémantique

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, AP, L)$, une MC et $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$.
$s \models \Phi$ ssi la formule Φ tient dans l'état s, i.e.,

$$
\begin{array}{ll}
s \models true & \\
s \models a & \text{ssi } a \text{ est un label de } s\text{, i.e., } a \in L(s) \\
s \models \Phi \wedge \Psi & \text{ssi } s \models \Phi \text{ et } s \models \Psi \\
s \models \neg\Phi & \text{ssi } s \not\models \Phi \\
s \models \mathcal{P}_J(\phi) & \text{ssi } \mathbb{P}_s(\phi) \in J
\end{array}
$$

où $\mathbb{P}_s(\phi) = \mathbb{P}_s(\{\pi \in Paths(s) \mid \pi \models \phi\})$ et $\mathbb{P}_s$ est la mesure de probabilité sur le σ-algèbre dont les résultats sont les chemins commençant en s, i.e., $Paths(s)$

Sémantique

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, AP, L)$, une MC et
$\pi = s_0 s_1 s_2 \cdots \in Paths(s)$, un chemin.
$\pi \models \phi$ ssi π satisfait ϕ, i.e.,

$$
\begin{array}{ll}
\pi \models \Phi & \text{ssi } s_0 \models \Phi \\
\pi \models \bigcirc \Phi & \text{ssi } s_1 \models \Phi \\
\pi \models \Phi U \Psi & \text{ssi } \exists j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Psi \text{ et } \forall 0 \leq i < j,\ s_i \models \Phi \\
\pi \models \Phi U^{\leq n} \Psi & \text{ssi } \exists 0 \leq j \leq n,\ s_j \models \Psi \text{ et } \forall 0 \leq i < j,\ s_i \models \Phi \\
\pi \models \Diamond \Phi & \text{ssi } \exists j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Phi \\
\pi \models \Box \Phi & \text{ssi } \forall j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Phi
\end{array}
$$

Sémantique

Remarque

Soient $\mathcal{M} = (S, \Delta, AP, L)$, une MC et $T \subseteq S$, un sous-ensemble d'états de $\mathcal{M}$.

La pseudo-formule de chemin $\Diamond T$ est équivalente à la formule de chemin $\Diamond \Phi$ telle que :

- $\exists T_{AP} \subseteq AP$
- $\Phi ::= \bigwedge_{a \in T_{AP}} a$
- $\forall t \in T, \forall a \in T_{AP}, a \in L(t)$
- $\forall s \notin T, \exists b \in T_{AP}$ telle que $b \notin L(s)$

Satisfiabilité

L'ensemble de satisfaction d'une MC est essentiellement défini de la même façon que pour les TSs.

Definition (Ensemble de satisfaction)

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, AP, L)$, une MC et Φ, une formule d'état PCTL sur AP. L'ensemble de satisfaction de la MC $\mathcal{M}$ est donné par

$$Sat_{\mathcal{M}}(\Phi) = \{s \in S \mid s \models \Phi\}$$

PCTL vs CTL

$$s \models \mathcal{P}_{=1}(\Diamond\Phi) \quad \not\Rightarrow \quad s \models \forall\Diamond\Phi$$

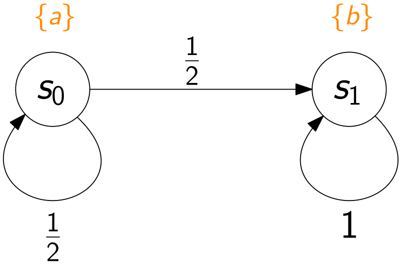
La probabilité que tous les chemins satisfassent une formule de chemin PCTL avec une probabilité de 1 ne signifie pas que tous les chemins satisfassent la formule de chemin CTL correspondante !

$$s \models \mathcal{P}_{>0}(\Box\Phi) \quad \not\Leftarrow \quad s \models \exists\Box\Phi$$

Le fait qu'un chemin satisfasse une formule de chemin CTL n'implique pas forcément que la probabilité des chemins satisfaisant la formules PCTL correspondante soit non-nulle !

PCTL vs CTL

Exemple



- $s_0 \models \mathcal{P}_{=1}(\lozenge b)$, mais $s \not\models \forall \lozenge b$
- $s_0 \models \exists \square a$, mais $s \not\models \mathcal{P}_{>0}(\square a)$

Table des matières

Chaînes de Markov pondérées

Definition (Chaîne de Markov pondérée)

Une *chaîne de Markov pondérée* (WMC, pour *weighted Markov chain*) $\mathcal{M}$ est une chaîne de Markov enrichie par une fonction de poids. $\mathcal{M}$ est définie par le tuple (S, Δ, AP, L, w) tel que :

- S, Δ, AP et L sont définis comme pour une MC classique et
- $w : S \times S \rightarrow \mathbb{N}^{>0}$ est la fonction de poids associant à chaque transition un coût strictement positif.

Chaînes de Markov pondérées

Exemple

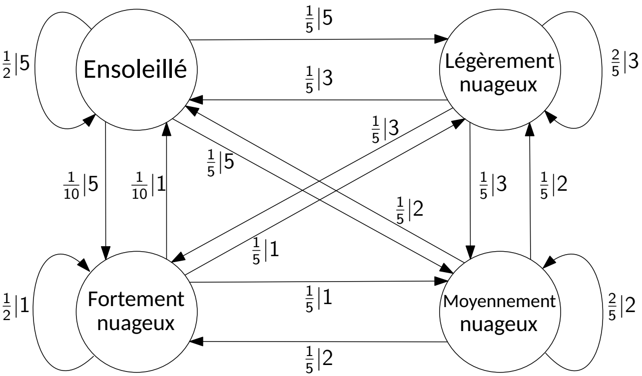


Figure – Système équipé de panneaux solaires produisant de l’énergie en fonction du climat.

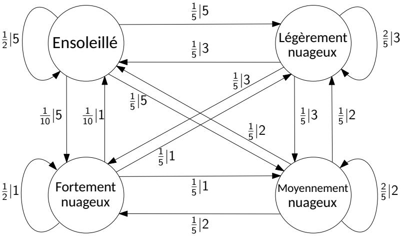
Chaînes de Markov pondérées

Soient $\mathcal{M} = (S, \Delta, AP, L, w)$, une WMC, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$, $T \subseteq S$, un sous-ensemble d'états cibles et $\pi \in Paths(s)$.

- $TS^T(\pi)$, la *somme tronquée de π*, est le coût du chemin π jusqu'à satisfaire (pour la première fois) $\lozenge T$
- $\mathbb{E}_s(TS^T) = \mathbb{E}_s(\{TS^T(\pi) \mid \pi \in Paths(s)\})$ est l'espérance de la longueur des chemins (en terme de coût) pour que $s \models \mathcal{P}_{=1}(\lozenge T)$ (pour la première fois)
- $\mathbb{P}_s(\lozenge_{\leq l} T) = \mathbb{P}_s(\{\pi \in Paths(s) \mid TS^T(\pi) \leq l\})$ est la probabilité que les chemins $\pi_{\in Paths(s)} \models \lozenge T$ avec un coût (i.e., une somme tronquée) inférieure à $l \in \mathbb{N}$.

Chaînes de Markov pondérées

Exemple



$$TS^{\{Fn\}}(E \cdot Ln \cdot Ln \cdot Mn \cdot Fn \ldots)$$
$$= 5 + 3 + 3 + 2 = 13$$

- $\mathbb{E}_E(TS^{\{Fn\}}) = 25Kj$
- $1 - \mathbb{P}_E(\Diamond_{\leq 7}\{Fn\}) = \mathbb{P}_E(\Diamond_{>8}\{Fn\}) = 1 - 0.14 = 0.86$

PRCTL

Intuition

- PCTL + Espérence des “rewards” (≈coûts) des chemins.
- Inclus un until borné par le coûts des chemins en terme de somme tronquée.

Syntaxe

Soit AP, un ensemble de propositions atomiques.

- Les *formules d'états* PRCTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\Phi ::= true \mid a \mid \Phi \wedge \Psi \mid \neg\Phi \mid \mathcal{P}_J(\phi) \mid \mathcal{E}_R(\Phi)$$

où $a \in AP, J \subseteq [0,1], R \in [0,+\infty[\cap \mathbb{N}$ (bornes d'espérances du coût des chemins) et ϕ est une formule de chemin.

- Les *formules de chemins* PRCTL sont formées selon la grammaire suivante :

$$\phi ::= \bigcirc\Phi \mid \Phi U \Psi \mid \Phi U^{\leq n} \Psi \mid \Phi U_{\leq r} \Psi$$

où Φ et Ψ sont des formules d'états et $n, r \in \mathbb{N}$.

Sémantique

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, AP, L)$, une MC, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$ et $\pi = s_0 s_1 s_2 \cdots \in Paths(s)$, un chemin de $\mathcal{M}$.
La sémantique de PRCTL est la même que celle de PCTL, à l'exception que

- $s \models \Phi$ ssi la formule Φ tient dans l'état s, i.e.,

$$s \models \mathcal{E}_R(\Phi) \qquad \text{ssi } \mathbb{E}_s\left(TS^{Sat_{\mathcal{M}}(\Phi)}\right) \in R$$

- $\pi \models \phi$ ssi π satisfait ϕ, i.e.,

$$\pi \models \Phi U_{\leq r} \Psi \quad \text{ssi } \exists j \in \mathbb{N},\ s_j \models \Psi,\ \forall 0 \leq i < j,\ s_i \models \Phi \text{ et } TS^{Sat_{\mathcal{M}}(\Psi)} \leq r$$

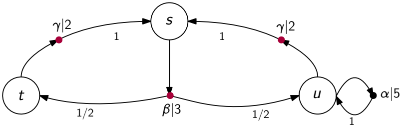
Note : la définition de l'ensemble de satisfaction d'une WMC PRCTL est identique à celle de PCTL

Processus Décisionnel de Markov et Stratégie

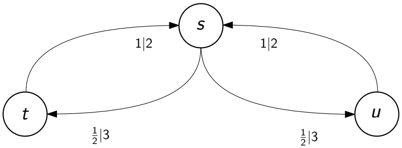
- Un *processus décisionnel de Markov* (MDP, pour *Markov decision process*) est un modèle probabiliste **non-déterministe**.
- $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, AP, L, w)$
  - Actions : A
  - Fonction de transition : $\Delta : S \times A \times S \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$
- *Chemins* de $\mathcal{M}$: $\pi = s_0 \xrightarrow{\alpha_0} s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_2 \xrightarrow{\alpha_2} s_3 \ldots$
  - $s_i \xrightarrow{\alpha_i} s_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$
  - $\mathcal{H}(\mathcal{M})$: histoires de $\mathcal{M}$, i.e., l'ensemble des préfixes des chemins de $\mathcal{M}$
- *Stratégies* de $\mathcal{M}$, $\sigma : \mathcal{H}(\mathcal{M}) \to A$
- Les décisions d'un MDP $\mathcal{M}$, régulées par une stratégie σ, induisent une MC $\mathcal{M}^\sigma$

Processus Décisionnel de Markov

Exemple



- $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, w)$
- $\sigma \colon S \to A$,
  - $\sigma(s) = \beta$
  - $\sigma(t) = \sigma(u) = \gamma$



$$\pi = s \xrightarrow{\beta} t \xrightarrow{\gamma} s \xrightarrow{\beta} u \xrightarrow{\gamma} \cdots \in Paths(s)$$

$\pi = s\,t\,s\,u \ldots \in Paths(s)$ est un chemin de $\mathcal{M}^{\sigma}$

Processus Décisionnel de Markov

Soient $\mathcal{M} = (S, A, \Delta, AP, L, w)$, un MDP, $s \in S$, un état de $\mathcal{M}$ et $T \subseteq S$, un sous-ensemble d'états cibles.

- $\mathbb{E}_s^{\min}(TS^T)$ est l'espérance minimale de la longueur des chemins commençant en s (en terme de coût) de $\mathcal{M}$
  - i.e., l'espérance de la longueur des chemins commençant en s dans la MC induite par la stratégie qui minimise l'espérance de la longueur des chemins de $\mathcal{M}$.
- $\mathbb{P}_s^{\max}(\Diamond_{\leq l} T)$ est la probabilité maximale d'atteindre T avec un coût inférieur à l dans $\mathcal{M}$
  - i.e., la probabilité d'atteindre T avec un coût inférieure à l dans la MC induite par la stratégie qui maximise cette probabilité dans $\mathcal{M}$.

PRCTL pour les MDPs

Pour se référer aux MCs induites par ces stratégies, la syntaxe de PRCTL est essentiellement identique, à l'exception des formules d'états suivantes :

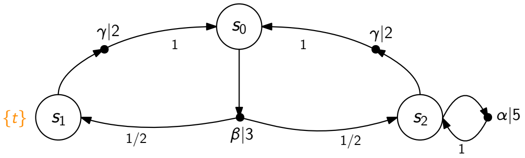
- $\mathcal{P}_J(\phi)$ devient $\mathcal{P}_J^{\max}(\phi)$
- $\mathcal{E}_R(\phi)$ devient $\mathcal{E}_R^{\min}(\phi)$

où $J \subseteq [0, 1]$, $R \in [0, +\infty[\cap \mathbb{N}$ et ϕ est une formule de chemin.

PRCTL dans Storm

Exemple

```
mdp

module classic

s: [0..2] init 0;

[beta] s=0 -> 0.5 : (s'=1) +
      0.5 : (s'=2);
[gamma] s=1 -> 1 : (s'=0);
[alpha] s=2 -> 1 : (s'=2);
[gamma] s=2 -> 1 : (s'=0);

endmodule

label "t" = s=1;

rewards "weights"
  [alpha] true : 5;
  [beta] true : 3;
  [gamma] true : 2;
endrewards
```



PRCTL dans Storm

Exemple

$$\mathcal{E}^{\min}_{\leq 10}(s_0 \models \Diamond t)$$

```
>> storm --prism resources/simple_mdp.prism --prop "Rmin<=10 [F \"t\"]"

Storm 1.2.0

--------------------------------------------------------------
Model type:  MDP (sparse)
States:  3
Transitions:  5
Choices:  4
Reward Models:  weights
State Labels:  3 labels
   * deadlock -> 0 item(s)
   * init -> 1 item(s)
   * t -> 1 item(s)
Choice Labels:  none
--------------------------------------------------------------

Model checking property R[exp]min<=10 [F "t"] ...
Result (for initial states): true

Time for model checking: 0.008s.
```

PRCTL dans Storm

Exemple (requête)

$$\mathcal{E}^{\min}_{=?}(s_0 \models \Diamond t)$$

```
>> storm --prism resources/simple_mdp.prism --prop "Rmin=? [F \"t\"]"

Storm 1.2.0

--------------------------------------------------------------
Model type:  MDP (sparse)
States:  3
Transitions:  5
Choices:  4
Reward Models:  weights
State Labels:  3 labels
   * deadlock -> 0 item(s)
   * init -> 1 item(s)
   * t -> 1 item(s)
Choice Labels:  none
--------------------------------------------------------------

Model checking property R[exp]min=? [F "t"] ...
Result (for initial states): 8
Time for model checking: 0.007s.
```

PRCTL dans Storm

Exemple

$$\mathcal{P}^{\max}_{\geq 0.7}(s_0 \models \Diamond_{\leq 8} t)$$

```
>> storm --prism resources/simple_mdp.prism --prop "Pmax>=0.7 [F{\"weights\"}<=8 \"t\"]"

Model checking property Pmax>=7/10 [true Urew{"weights"}<=8 "t"] ...
Result (for initial states): true
Time for model checking: 0.000s.
```

$$\mathcal{P}^{\max}_{=?}(s_0 \models \Diamond_{\leq 8} t)$$

```
>> storm --prism resources/simple_mdp.prism --prop "Pmax=? [F{\"weights\"}<=8 \"t\"]"

Model checking property Pmax=? [true Urew{"weights"}<=8 "t"] ...
Result (for initial states): 0.75
Time for model checking: 0.010s.s.
```

References I

[1] Christel Baier et Joost-Pieter Katoen. *Principles of model checking*. MIT Press, 2008. isbn : 978-0-262-02649-9.

[2] Mickael Randour. *Formal verification of computer systems*. ULB, 2016.