MINES ParisTech
http://oasis.mines-paristech.fr *2019-2020*

Renforcement de réseau gazier

1. *En supposant que le coût de renforcement d'une station de compression est proportionnel à la puissance supplémentaire installée et que celui de doublement d'une canalisation est proportionnel au diamètre choisi pour la canalisation de doublement, écrire la fonction objectif du problème.*

   En notant D_{ij}^d et L_{ij} le diamètre de doublement et la longueur de la canalisation reliant deux noeuds i et j, W_{ij}^{supp} la puissance supplémentaire installée sur une station de compression entre deux noeuds i et j, on obtient

$$f(x) = \alpha \sum_{(i,j)\in Cana} L_{ij} D_{ij}^d + \beta \sum_{(i,j)\in SC} W_{ij}^{supp} \tag{1}$$

   où α et β sont les coûts linéaires et $Cana$ et SC les ensembles des indices des noeuds reliant les arêtes des canalisations et stations de compression du réseau, respectivement.

2. *Ecrire l'équation de perte de charge le long d'une canalisation.*

   La perte de charge le long d'une canalisation de longueur L et de diamètre D, parcourue par un débit Q s'écrit pour un régime turbulent

$$\pi_{amont} - \pi_{aval} = \frac{\lambda_{PDC} L Q^2}{D^5} \tag{2}$$

   où λ_{PDC} est un coefficient constant (dépendant de la température et pression de référence) et où $\pi = P^2$ est la charge.

3. *Sous l'hypothèse d'une compression adiabatique, écrire la contrainte de fonctionnement d'une station de compression.*

   Si l'on considère la compression adiabatique d'un gaz parfait, on a $PV^\gamma = C^{ste}$ et

$$\delta W = Q\delta H = QVdP = Q \times C^{ste} P^{-1/\gamma} dP \tag{3}$$

   soit

$$\begin{aligned} W &= Q \times C^{ste} \frac{1}{-1/\gamma + 1} \left(P_{aval}^{-1/\gamma+1} - P_{amont}^{-1/\gamma+1} \right) \\ &= Q \times \frac{C^{ste}\gamma}{\gamma - 1} P_{amont}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\left(\frac{\pi_{aval}}{\pi_{amont}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) \end{aligned} \tag{4}$$

C'est-à-dire, en notant $K = \frac{nRT_{ref}\gamma}{\gamma-1}$

$$W = KQ\left(\left(\frac{\pi_{aval}}{\pi_{amont}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right) \tag{5}$$

Usuellement, γ est proche de 1, et on peut donc utiliser l'approximation

$$W = \lambda_C Q \ln\left(\frac{\pi_{aval}}{\pi_{amont}}\right) \tag{6}$$

Cette puissance doit être positive et inférieure à la puissance disponible. Ceci se traduit donc par deux contraintes

$$\lambda_C Q \ln\left(\frac{\pi_{aval}}{\pi_{amont}}\right) \leq W^{supp} + W^{in} \tag{7}$$

$$\pi_{amont} \leq \pi_{aval} \tag{8}$$

4. *On se donne une répartition de débit le long du réseau. En identifiant le réseau à un graphe orienté, formuler le problème d'optimisation correspondant. On précisera en particulier les variables de décision et les contraintes (au nombre de huit).*

On considère $Cana$ et SC les ensembles des indices des noeuds reliant les arêtes des canalisations et des stations de compression du réseau, respectivement. On note N_n le nombre de noeuds du réseau. Les variables de décision du problème sont les $D^d_{i,j}$ pour $(i,j) \in Cana$, les $W^{supp}_{k,l}$ pour $(k,l) \in SC$ et les pressions aux noeuds du réseau $\Pi \in \mathbb{R}^{N_n}$.

Ecrivons maintenant la perte de charge pour une canalisation doublée de longueur L, de diamètre initial D^{in} et parcourue par un débit Q. On a alors

$$\pi_{amont} - \pi_{aval} = \lambda_{PDC} L \frac{Q_0^2}{{D^{in}}^5} = \lambda_{PDC} L \frac{(Q-Q_0)^2}{{D^d}^5} \tag{9}$$

où le débit Q est maintenant partagé entre un débit Q_0 parcourant la canalisation originel et un débit $Q - Q_0$ parcourant la canalisation de doublement. Ce débit Q_0 est alors tel que

$$\frac{Q_0^2}{{D^{in}}^5} = \frac{(Q-Q_0)^2}{{D^d}^5} \tag{10}$$

Si l'on définit un diamètre équivalent

$$D_{eq} = \left({D^{in}}^{5/2} + {D^d}^{5/2}\right)^{2/5} \tag{11}$$

on a alors

$$\frac{Q^2}{{D^{eq}}^5} = \frac{Q^2}{({D^{in}}^{5/2} + {D^d}^{5/2})^2} = \frac{Q^2}{{D^{in}}^5\left(1 + \left(\frac{D^d}{D^{in}}\right)^{5/2}\right)^2} \tag{12}$$

$$= \frac{Q^2}{{D^{in}}^5\left(1 + \frac{Q-Q_0}{Q_0}\right)^2} = \frac{Q_0^2}{{D^{in}}^5} \tag{13}$$

En conséquence, la perte de charge le long d'une canalisation doublée s'écrit, en fonction du diamètre de doublement,

$$\pi_{amont} - \pi_{aval} = \lambda_{PDC} L \frac{Q^2}{({D^{in}}^{5/2} + {D^d}^{5/2})^2} \tag{14}$$

En notant $N_{cana} = card(Cana)$ et $N_{SC} = card(SC)$, le problème de minimisation s'écrit donc

$$\min_{(D^d, W^{supp}, \Pi) \in \mathbb{R}^{N_{cana}+N_{SC}+N_n}} \left[\alpha \sum_{(i,j)\in Cana} L_{ij} D_{ij}^d + \beta \sum_{(i,j)\in SC} W_{ij}^{supp} \right]$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned}
&\pi_i - \pi_j = \frac{\lambda_{PDC} L_{ij} Q_{ij}^2}{({D_{ij}^{in}}^{5/2} + {D_{ij}^d}^{5/2})^2}\,, && (i,j) \in Cana \\
&\lambda_C Q_{ij} \ln\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right) - W_{ij}^{supp} - W_{ij}^{in} \leq 0\,, && (i,j) \in SC \\
&\pi_i - \pi_j \leq 0\,, && (i,j) \in SC \\
&\Pi_m \leq \Pi \leq \Pi_M && \\
&D_m \leq D_{ij}^d \leq D_M\,, && (i,j) \in Cana \\
&W_m \leq W_{ij}^{supp} \leq W_M\,, && (i,j) \in SC
\end{aligned} \tag{15}$$

Remarques :

— On note que la second contrainte peut en réalité être réécrite comme une contrainte égalité dans le cas où $W_{ij}^{in} = 0$. Dans ce cas, la troisième contrainte correspondant à cette station de compression est redondante et peut être retirée du problème.

— Dans le cas d'étude de l'annexe, on a

$$Cana = \{(1,2), (3,4), (1,5), (5,4)\}\ , \quad N_{cana} = 4 \tag{16}$$

$$SC = \{(2,3)\}\ , \quad N_{SC} = 1 \tag{17}$$

$$N_n = 5 \tag{18}$$

et on pourra prendre les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha = 1\ , \quad \beta = 10 \quad \lambda_C = 1 \tag{19}$$