Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Fiche d'exercices n^o 1

1 Espaces Vectoriels

Ex 1.1 1. Rappeler pourquoi l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *ie* l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.

2. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:
   (a) L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $f(0) = 0$,
   (b) L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $f(1) = 0$,
   (c) L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $f(0) = 1$,
   (d) L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 1 et telles que : $f'(1) = 0$,
   (e) L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'equation différentielle : $f'(x) = \cos(x)f(x)$,
   (f) L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'equation différentielle : $f'(x) + \cos(x)f(x) = \sin(x)$,
   (g) L'ensemble des polynomes réels,
   (h) L'ensemble des polynomes réels de degré inférieur ou égal à 2.

Ex 1.2 1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Parmi les familles de vecteurs suivantes, dire lesquelles sont génératrices, lesquelles sont libres, lesquelles sont des bases. Compléter les familles libres en des bases. Extraire des bases des familles génératrices.
   (a) $F_1 = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$
   (b) $F_2 = \{(0,1,2), (2,1,0)\}$
   (c) $F_3 = \{(1,0,2), (0,1,2), (1,2,0)\}$
   (d) $F_4 = \{(2,2,1), (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$

2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $\{\cos, \sin\}$ est-elle libre ? génératrice ?
3. Dans $\mathbb{R}$ considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, les familles $\{1, \sqrt{2}\}$ et $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ sont-elles libres ? génératrices ?

Ex 1.3 Soit $E_k := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = k\}$ pour $k \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les réels k pour que E_k soit un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Donner une base de E_0.
3. Soit $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.
4. Déterminer $E_0 \cap F$.

Ex 1.4 Montrer que si P est un polynome réel de degré inférieur ou égal à 2 alors P peut s'écrire sous la forme :

$$P(X) = aX(X-1) + b(X-1)(X-2) + cX(X-2)$$

où a, b, c sont des constantes réelles que l'on déterminera.

Que peut-on dire de la famille $\{X(X-1), (X-1)(X-2), X(X-2)\}$?

Ex 1.5 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $x = (2,3,-1)$, $y = (1,-1,-2)$, $u = (3,7,0)$ et $v = (5,0,-7)$.

1. Montrer que $\{x,y\}$ et $\{u,v\}$ sont deux familles libres.
2. Montrer que $\{x,y\}$ et $\{u,v\}$ engendrent le même sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 Applications linéaires

Ex 2.1 1. Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont linéaires. Déterminer le noyau de celles qui sont linéaires.

(a) $\psi_1 : (x, y, z) \mapsto (x^2, 2y, x + y)$

(b) $\psi_2 : (x, y, z) \mapsto (3z + y, x + y + z, x + y)$

(c) $\psi_3 : (x, y, z) \mapsto (y + z, x.z, x + y)$

(d) $\psi_4 : (x, y, z) \mapsto (x + 3y, 2y, 4x)$

2. Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont linéaires. Déterminer le noyau de celles qui sont linéaires.

(a) $\phi_1 : f \mapsto (f(1))^2$

(b) $\phi_2 : f \mapsto f(1) + f(2)$

(c) $\phi_3 : f \mapsto 2 + f(1)$

Ex 2.2 Soit $a \in \mathbb{C}$, on définit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto z + a\bar{z}$.
Suivant les valeurs de a, dire si f est $\mathbb{C}$-linéaire ou $\mathbb{R}$-linéaire. Quand f est $\mathbb{R}$ linéaire donner son noyau, son image et sa matrice dans la base $(1, i)$.

Ex 2.3 On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de l'opération de dérivation $D : P \mapsto P'$.

1. Vérifier que D est linéaire, calculer son noyau et son image.
2. Énoncer le théorème du rang et le vérifier sur cet exemple.
3. Écrire la matrice M de D dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
4. On considère $D^2 : E \to E,\ P \mapsto P''$; Écrire sa matrice dans la même base.
5. Donner *sans calculs* la valeur de M^4.

Ex 2.4 Soient $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; on rappelle $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base, dite canonique, de $M_2(\mathbb{C})$. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}),\ M \mapsto AM$.

1. Montrer que f est linéaire et calculer sa matrice dans la base canonique.
2. Prouver que f est inversible et calculer son inverse.

3 Changement de base

Ex 3.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice A dans la base canonique. Trouver une base dans laquelle f admet pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice de passage.

Ex 3.2 On note $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, et on les munit de leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et $\mathcal{C}_{\text{can}}$. On note aussi $\mathcal{B}$ la famille :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

et $\phi : E \to F$ l'application définie par :

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & +3x_3 \\ & 2x_2 & +x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. Ecrire les matrices $M_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{C}_{\text{can}}}(\phi)$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}_{\text{can}}}(\phi)$.
3. Déterminer des équations, puis une base du noyau de ϕ.
4. Déterminer une famille génératrice, puis des équations de l'image de ϕ.

4 Pour s'entrainer avec les définitions abstraites

Ex 4.1 On rappelle qu'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, est la donnée d'un groupe abélien E, et d'une multiplication externe $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E, vérifiant pour tout $(x, y) \in E \times E$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

(i) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(ii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

(iii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

(iv) $1x = x$

1. Montrer que $0x = 0_E$. Puis montrer que $(-1)x$ est l'inverse de x dans le groupe abélien E
2. En déduire qu'il est inutile de supposer E abélien, que cette propriété peut se déduire des axiomes (i) à (iv).

Ex 4.2 Soit E un espace vectoriel réel. On définit une multiplication externe de $\mathbb{C} \times E^2$ dans E^2 par :

$$(a + ib) \cdot (u, v) = (au - bv, av + bu)$$

Montrer que E^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ pour cette multiplication et pour son addition usuelle.

Ex 4.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F + G$ est un sous espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.
3. (a) $F \cup G$ est-il un sous espace vectoriel de E ? Donner un contre exemple.
   (b) Montrer que si $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Ex 4.4 Soit E un espace vectoriel, on note v_i des éléments de E.

1. Montrer que si $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice, alors pour tout vecteur $v \in E$, la famille $(v_1, \ldots, v_n, v)$ est génératrice.
2. Plus généralement, si $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice, pour toute famille $\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$ est génératrice.
3. Montrer que si $\mathcal{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ est libre, alors $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est libre.
4. Montrer que si $\mathcal{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ est libre, et si $v \notin < (v_1, \ldots, v_n) >$ alors $(v_1, \ldots, v_n, v)$ est libre.
5. Si $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ est liée, alors pour tout $v \in E$, $(v_1, \ldots, v_n, v)$ est liée.

Ex 4.5 Soit $E := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = a \cos(x - \varphi)\}$.

1. Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
2. Vérifier que les applications cos et sin appartiennent à E.
3. Donner une base de E.

Ex 4.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. F et G des sous espaces vectoriels de E.

1. Montrer que les assertions suivantes sont equivalentes.
   (a) Pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.
   (b) $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$
   (c) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
   (d) $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0_E\}$

   Dans ces cas on note $E = F \oplus G$, et on dit que E est la somme directe de F et G.
2. Montrer qu'il existe H un sous espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus H$.

Ex 4.7 Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E .

1. Montrer que le sous espace engendré par $F \cup G$ est le sous espace $F + G$.
2. Si A et B sont deux parties quelconques de E, quel est le sous espace engendré par $A \cup B$?
3. Quel est le sous espace engendré par $\complement_E F$ le complémentaire de F dans E ?
   (distinguer les cas $E = F$ et $E \neq F$)

Ex 4.8 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $(v_1, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E .

1. On suppose que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille libre et que f est injective. Montrer que $(f(v_1), ..., f(v_p))$ est une famille libre dans F.
2. On suppose que $(v_1, ..., v_p)$ est une famille génératrice et que f est surjective. Montrer que $(f(v_1), ..., f(v_p))$ est une famille génératrice dans F.

Ex 4.9 Soit E, F et G trois espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective et g une application quelconque de F dans G . On suppose que $g \circ f$ est linéaire, montrer que g est linéaire.

Ex 4.10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E, tels que $f \circ g = g \circ f$

1. Montrer que $f(\ker g) \subset \ker g$ et $f(\mathrm{Im} g) \subset \mathrm{Im} g$.
2. On suppose que $f + g = id_E$
   Montrer que $\ker(f \circ g) = \ker f \oplus \ker g$.

Ex 4.11 Dans l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit E le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array},$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x-1) \end{array}, \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x-1) \end{array},$$

1. Est-ce que la famille (f, g, h, k) est libre ?
2. Montrer que $\mathcal{B} = (f, g)$ est une base de E. Quelle est la dimension de E ?
3. Compléter la famille à un vecteur (h) en une base $\mathcal{C}$ de E.
4. Montrer que la dérivation des fonctions $D : u \mapsto u'$ est bien un endomorphisme de E (i.e., que la dérivée d'un élément de E appartient à E et que D est linéaire).
5. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(D)$. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(D)$. Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

5 Matrices : déterminant, inversion, rang

Ex 5.1 Calculer de deux manieres différentes le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & i & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ i & i & -1 \\ 0 & 2 & i \end{pmatrix}$$

Ex 5.2 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \diagdown & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \diagdown & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & & & \\ a & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

Ex 5.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Montrer que $\det A = \prod_{i=1}^{n} \det A_i$.
2. Calculer

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & & b_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_n & & & b_n \\ c_1 & & & d_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & c_n & & & d_n \end{pmatrix}$$

Ex 5.4 Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 5 & 9 \\ 7 & 18 & -2 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 5.5 Calculer quand c'est possible l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & i & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ i & i & -1 \\ 0 & 2 & i \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} t & -3 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Ex 5.6
1. Soit A une matrice 2x2. Calculer $P_A(X) = \det(A - XI)$. Que reconnaissez-vous dans les coefficients de P ?
2. Calculer le polynome P_A pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer $P_A(A)$. Obtiendra-t-on toujours ce resultat ?

Ex 5.7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\begin{gathered} \mathrm{rg}(A) = n \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Comat} A) = n \\ \mathrm{rg}(A) = n-1 \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Comat} A) = 1 \\ \mathrm{rg}(A) \leq n-2 \Longrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Comat} A) = 0 \end{gathered}$$

Ces implications sont-elles des equivalences ?

6 Encore des matrices de passage

Ex 6.1 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (-1, -2, 3)$, $f_3 = (0, 1, 0)$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1, 1, 0)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$?
3. Mêmes questions avec $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Interpréter avec la matrice de passage.

Ex 6.2 Soit $E = \mathbb{C}^3$, vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = -ie_2 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + ie_3$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ ainsi que son inverse P^{-1}.
3. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -2i & -2i & 1 \\ 2(1+i) & 1+2i & -1+i \\ 1+2i & 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$
Est-ce que A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{D}$ de E ? Si oui, quelle est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$?

Ex 6.3 Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = PM$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer et donner des bases de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Montrer $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.
4. Soit $\mathcal{D} := (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Montrer que $\mathcal{D}$ est une base, donner la matrice de passage de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{B}$ et la matrice de f dans la base $\mathcal{D}$.