Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Fiche d'exercices n^o 4

1 Formules sur les formes quadratiques générales

Ex 1.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et une application $f : E \to \mathbb{K}$ telle que

(i) $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$, pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

(ii) $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x + y) - f(x) - f(y)\big)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, est linéaire par rapport à la première variable.

Montrer que f est une forme quadratique.

Ex 1.2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q une forme quadratique sur E.

1. Montrer la *formule du parallélogramme* :

$$\forall\, x, y \in E, \quad q(x + y) + q(x - y) = 2\big(q(x) + q(y)\big) \qquad \text{(PA)}.$$

2. Montrer la formule de polarisation d'ordre 3 :

$$\forall\, x, y, z \in E, \quad q(x + y) + q(y + z) + q(x + z) = q(x) + q(y) + q(z) + q(x + y + z) \qquad \text{(PO)}.$$

3. Expliquer pourquoi (PO) implique (PA).

Ex 1.3 Soit q une forme quadratique positive (i.e. $q(x) \geq 0$, $\forall\, x$) sur un $\mathbb{R}$-e.v E et b sa forme polaire.

1. Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\forall\, x, y \in E, \quad b(x, y)^2 \leq q(x)q(y) \qquad \text{(CS)}.$$

(Indication : considérer l'application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto q(x + ty)$ avec x et y fixés.)

2. Montrer que si x et y sont liés alors (CS) est une égalité. La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose de plus que q est définie. Montrer que si pour $x, y \in E$ (CS) est une égalité, alors x et y sont liés. (Indication : utiliser à nouveau P.)

Ex 1.4 Soit q une forme quadratique positive (i.e. $q(x) \geq 0$, $\forall\, x$).

1. Montrer l'*inégalité de Minkowski* (appelée aussi i*inégalité triangulaire*)

$$\forall\, x, y \in E, \quad \sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \qquad \text{(M)}.$$

(Indication : utiliser Cauchy-Schwarz.)

2. On suppose de plus que q est définie. Montrer que pour $x, y \in E$ (M) est une égalité si et seulement si $x = \varrho y$ ou $y = \varrho x$ avec $\varrho \geq 0$.

2 Formes quadratiques/ Représentations matricielles

Ex 2.1 Trouver les formes polaires et le rang des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^4$, donner les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. $q(x, y, z, t) = xy + y^2$
2. $q(x, y, z, t) = xy + zt + t^2$
3. $q(x, y, z, t) = x^2 - y^2 + z^2 - t^2$

Ex 2.2 Montrer que le déterminant est une forme quadratique sur $M_2(\mathbb{R})$. Donner sa forme polaire, donner sa matrice dans la base canonique $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Cette forme est-elle dégénérée, définie, positive ?

Ex 2.3 Soient A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall$ X $\in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX = {}^tXBX$ (*)

1. Soient X, Y $\in \mathbb{R}^n$, en appliquant (*) à X, Y et X+Y, montrer que ${}^tXAY = {}^tXBY$
2. En remplaçant X et Y par des vecteurs de la base canonique, en déduire que $A = B$.

Que peut-on déduire pour les formes quadratiques ?

3 Orthogonalité-Isotropie

Ex 3.1 Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, b sa forme polaire et Q sa matrice dans la base canonique.

1. Si $Q = \mathrm{Id}$, existe-t-il un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(x, y) = 0$ quel que soit $y \in \mathbb{R}^n$? Que vaut le noyau $N(q)$, le cône $C(q)$?
2. On suppose ici que $\mathrm{rg}(Q) = n$.
   (a) Expliquer pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = Qy$.
   (b) Que vaut le noyau $N(q)$, le cône $C(q)$?
3. On suppose ici que $\mathrm{rg}(Q) < n$.
   (a) Expliquer pourquoi il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Qx = 0$.
   (b) Montrer que $N(q) \neq \{0\}$.
4. En déduire que $N(q) = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(Q) = n$.

Ex 3.2 Soit $q : E \to K$ une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, montrer que l'on a $(F^\perp)^\perp = F + N(q)$.
2. Pour tous sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$, montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. Si q est non-dégénérée, montrer que l'on a $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Ex 3.3 Les formes quadratiques de l'exercice 2.1 sont-elles dégénérées ? Sont-elles définies ?

Ex 3.4 On considère la forme quadratique q de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La forme q est-elle dégénérée ?
2. Existe-t-il des vecteurs q-isotropes non nuls ?
3. On note $u = (0, -2, 3, 0)$. Que vaut $\dim\{u\}^\perp$? Donner une base de $\{u\}^\perp$.

Ex 3.5 Construire une base orthogonale pour chacune des formes de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ suivantes :

1. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$,
2. $q(x, y, z) = 8xy - 16xz - 8yz$,
3. $q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 19z^2 - 8xy + 12xz - 18yz$,
4. $q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy - 4xt + 3y^2 + 8yz + 6y^2 - 2t^2$.

Ex 3.6 Diagonaliser et donner la signature des formes de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ suivantes :

1. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$,
2. $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$,
3. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_3x_4$.

Ex 3.7 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et q la forme quadratique sur E donnée par $P \mapsto \int_{-1}^{1} P^2(t)dt$.

1. Donner la forme polaire b associée à q.
2. On pose $p_0 = 1$, et $p_k = \frac{d^k}{dX^k}((X^2 - 1)^k)$. Montrer que $p_k \in \{1, X, X^2, \ldots, X^{k-1}\}^\perp$.
3. En déduire une base q-orthogonale de E.