Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Quelques corrections d'exercices de la fiche n^o 1

1 Espaces Vectoriels

Corrigé Exo 1.3 :

1. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contient nécessairement le vecteur nul $(0,0,0)$. Ici, on vérifie facilement que $(0,0,0)$ appartient à E_k si et seulement si $k=0$. Il reste alors à vérifier que E_0 est bel et bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   •Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in E_0$, c'est à dire deus points de$\mathbb{R}^3$ satisfaisant $x+y-2z=0$ et $x'+y'-2z'=0$. Montrons que la somme $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ est encore dans E_0.
$$\begin{aligned}(x+x')+(y+y')-2(z+z') &= (x+y-2z)+(x'+y'-2z') \\ &= 0\end{aligned}$$
   •Soient $(x,y,z) \in E_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ est encore dans E_0
$$\begin{aligned}(\lambda x)+(\lambda y)-2(\lambda z) &= \lambda(x+y-2z) \\ &= 0\end{aligned}$$
   Conclusion E_0 n'est pas vide, est stable par addition et multiplication scalaire, donc c'est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. $E_0 \neq \mathbb{R}^3$ donc c'est un sous espace de dimension 1 ou 2 (nous pouvons anticiper que $\dim(E_0)=2$ car nous reconnaissons l'equation d'un plan vectoriel !). Il s'agit alors de trouver de 2 vecteurs libres satisfaisant l'equation de E_0... Par exemple, $\{(2,0,1),(0,2,1)\}$ est une base de E_0.
3. Similaire à Question 1.
4. $E_0 \cap F$ est l'intersection de deux plans vectoriels, c'est donc une droite vectorielle, autrement dit un s.e.v de dimension 1. Il s'agit alors de trouver un vecteur directeur, *i.e.* un vecteur staisfaisant les deux equations. Par exemple, on trouve $(1,-1,0)$ d'où $E_0 \cap F = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0)\}$.

Corrigé Exo 1.4 :
Etant donné $P(X)=AX^2+BX+C$ un polynôme réel de degré au plus 2, montrons qu'on peut trouver a,b,c réels tels que
$$P(X)=aX(X-1)+b(X-1)(X-2)+cX(X-2).$$
On peut, soit développer l'expression ci-dessus, identifier avec la 1ère expression pour avoir A,B,C en fonction de a,b,c puis résoudre pour avoir a,b,c en fonction de A,B,C, ou alors, évaluer le polynôme en des valeurs bien choisies pour avoir directement a,b,c en fonction de A,B,C. En évaluant en 0,1,2 on obtient :
$$\left\{\begin{array}{rcl}2b &=& C \\ -c &=& A+B+C \\ 2a &=& 4A+2B+C\end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{rcl}a &=& 2A+B+\frac{1}{2}C \\ b &=& \frac{1}{2}C \\ c &=& -(A+B+C)\end{array}\right.$$
On a donc montré que la famille $\{X(X-1),(X-1)(X-2),X(X-2)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, on conclut que cette famille est une base.

Corrigé Exo 1.5 :

1. Soient λ,μ réels tels que $\lambda x+\mu y=0$. Montrons que $\lambda=\mu=0$.
$$\begin{aligned}\lambda x+\mu y &= \lambda(2,3,-1)+\mu(1,-1,-2) \\ &= (2\lambda+\mu,3\lambda-\mu,-\lambda-2\mu)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\lambda x+\mu y=0 &\implies (2\lambda+\mu,3\lambda-\mu,-\lambda-2\mu)=(0,0,0) \\ &\implies \left\{\begin{array}{rcl}2\lambda+\mu &=& 0 \\ 3\lambda-\mu &=& 0 \\ -\lambda-2\mu &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$
   On additionnant les deux premières equations, on trouve $5\lambda=0$ donc $\lambda=0$. Puis en substituant on trouve aussi $\mu=0$. Donc la famille $\{x,y\}$ est libre. De même pour $\{u,v\}$

2. On veut montrer que $\mathrm{Vect}\{x,y\} = \mathrm{Vect}\{u,v\}$. Commençons par montrer $\mathrm{Vect}\{x,y\} \subset \mathrm{Vect}\{u,v\}$. Soit $ax+by \in \mathrm{Vect}\{x,y\}$ montrons qu'il existe $c,d \in \mathbb{R}$ tels que

$$ax + by = cu + dv.$$

Ceci mène au système

$$\begin{cases} 2a+b &= 3c+5d \\ 3a-b &= 7c \\ -a-2b &= -7d \end{cases}$$

d'inconnues c,d. On trouve que le système admet $c = \frac{1}{7}(3a-b), d = \frac{1}{7}(a+2b)$ comme solution. On peut ensuite, de la même manière, montrer l'inclusion inverse $\mathrm{Vect}\{u,v\} \subset \mathrm{Vect}\{x,y\}$ (qui conduit au même système mais d'inconnues a,b). Ou alors, on peut utiliser un argument de dimension. Puisque les familles sont libres, ce sont des bases respectives de $\mathrm{Vect}\{x,y\}$ et $\mathrm{Vect}\{u,v\}$: ces deux espaces sont de dimension 2. L'inclusion $\mathrm{Vect}\{x,y\} \subset \mathrm{Vect}\{u,v\}$ plus même dimension, implique l'égalité entre ces deux espaces.

2 Applications linéaires

Corrigé Exo 2.3 :

1. Par propriétés de la dérivation, on a $D(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda D(P) + \mu D(Q)$ donc D est linéaire.
   •Noyau : $D(P) = 0 \Longrightarrow P = c =$ constante donc $\ker(D) \simeq \mathbb{R}$.
   •Image : Il est clair que $D(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Montrons que $\mathrm{Im}D = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. En posant $P = \frac{a}{3}X^3 + \frac{b}{2}X^2 + cX$, on obtient un antécédent, $D(P) = Q$. Donc on a aussi l'inclusion $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}D$.
2. Le théorème du rang dit $\dim(\ker D) + \dim(\mathrm{Im}D) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Ici, on trouve $\dim(\ker D) = 1$, $\dim(\mathrm{Im}D) = 3$ et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$: le théorème du rang est bien satisfait.

3,4. Les matrices de D et D^2 dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ sont

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(D^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. M^4 est la matrice associée à D^4. On sait qu'en dérivant 4 fois un polynôme de degré au plus 3, on obtiendra toujours 0. Donc M^4 est la matrice nulle.

Corrigé Exo 2.4 :

1. Par propriétés de la multiplication de matrice on a $f(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda f(M) + \mu f(N)$.
   On calcule successivement $f(E_{11}), f(E_{12}) \ldots$, on trouve

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + E_{21} \\ f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E_{12} + E_{22} \\ f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 5E_{11} + 3E_{21} \\ f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 5E_{12} + 3E_{22} \end{aligned}$$

   d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On transforme la matrice ci-dessus par pivot de Gauss sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On déduit dans un premier temps que la matrice est inversible, car de déterminant non nul ($\det f = 1$). En poursuivant les transformations, et en les faisant simultanément sur la matrice identité on trouve l'inverse :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour cette dernière question, on peut également montrer que f est inversible, en montrant l'existence de l'application réciproque. En effet, on voit facilement que A est inversible et que $M \mapsto A^{-1}M$ donne f^{-1}. On peut ensuite calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f^{-1})$ en faisant la même chose qu'à la question 1.

3 Définitions abstraites

4 Changement de base

Corrigé Exo 3.1 :
Notons $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ une nouvelle base telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =: B$$

Notons également $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id)$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Les matrices sont reliées par

$$B = P^{-1}AP.$$

On cherche donc une matrice

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{telle que} \quad PB = AP.$$

Ceci se traduit par un système à résoudre, on trouve $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice donnent les coordonnées de la base $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. On trouve $\mathcal{B}' = \{(2,1),(1,1)\}$.

Remarque : on peut remplacer chacun des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par un multiple, ça ne changera pas la propriété de la base.

5 Matrices

Corrigé Exo 5.2 :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix}$$

d'où $\det = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

Pour la deuxième matrice, on suppose dans un 1er temps que $a \neq 0$. La matrice est de taille paire, disons $2n$. On fait successivement les opérations suivantes sur les lignes :

$$L_{2n} \leftarrow L_{2n} - \frac{b}{a}L_1;\ L_{2n-1} \leftarrow L_{2n-1} - \frac{b}{a}L_2;\ L_{2n-2} \leftarrow L_{2n-2} - \frac{b}{a}L_3 \ldots$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & 0 & a-\frac{b^2}{a} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a-\frac{b^2}{a} \end{pmatrix},$$

d'où det $= a^n(a - \frac{b^2}{a})^n = (a^2 - b^2)^n$.

Si $a = 0$ la matrice initiale est une matrice antidiagonale. Pour la mettre sous forme diagonale on peut échanger les lignes L_1 et L_{2n} puis L_2 et L_{2n-1}, etc jusqu'à L_n et L_{n+1}. Ce qui fait au total n échanges, donc n changements de signe pour le déterminant. D'où det $= (-1)^n b^{2n}$.