Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Fiche d'exercices n^o 5

1 Produit scalaire

Ex 1.1 Parmi les formes suivantes lesquelles sont des produits scalaires sur E :

1. $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
2. $E = \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$,
3. $E = M_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$,
4. $E = M_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$,
5. $E = M_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$,
6. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$,
7. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)dt$,
8. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(P,Q) = \int_{0}^{1} tP(t)Q(t)dt$,
9. $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geqslant 0} u_n^2 < +\infty\right\}$ et $\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.
   (Dans cette dernière question, commencer par montrer que φ est bien définie.)

Ex 1.2 On considère $E = \mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1;1]$ à valeurs réelles, muni de la forme quadratique

$$q : f \mapsto \int_{-1}^{1} tf^2(t)dt \ .$$

1. Donner la forme polaire b associée à q.
2. Montrer que si f est paire ou impaire $q(f) = 0$.
3. La forme bilinéaire b est-elle un produit scalaire ?
4. On considère la restriction $\tilde{q}$ de q à $F = \mathbb{R}_2[X]$. Ecrire la matrice de $\tilde{q}$ dans $\{1, X, X^2\}$

2 Bases orthogonales, bases orthonormales

Ex 2.1 Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel,
2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
3. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 xf(x)g(x)dx$.

Ex 2.2 Sur $\mathbb{R}^3$, montrer que la forme

$$f : (x,y) \mapsto (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

est un produit scalaire.

1. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. À l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.
3. Donner sans calcul la matrice de f dans la nouvelle base ainsi obtenue.

Ex 2.3 On considère la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ suivante

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. En utilisant la méthode de réduction de Gauss, trouver une base $\mathcal{B}$ qui est q-orthogonale.
2. On note b la forme polaire associée à q. Montrer que b est un produit scalaire.
3. À l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire b. On notera $\mathcal{B}_0$ la b.o.n obtenue.
4. Comparer les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ obtenues précédemment.

Ex 2.4 On considère la matrice réelle suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Construire une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Ex 2.5 On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien standard $<,>$. Soit q la forme quadratique suivante

$$q(x) = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour $<,>$ et q-orthogonale.

Ex 2.6 Soit E un espace euclidien, de base orthonormée $\mathcal{B}_0$. On considère $\mathcal{B}$ une base quelconque de E, et on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$. Montrer que

$$\mathcal{B} \text{ est une base orthonormée } \Leftrightarrow P \text{ est une matrice orthogonale}$$