Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Interro n^o 2

Exercice 1 :

1. Donner les définitions de “endomorphisme diagonalisable” et “matrice diagonalisable”.
2. Énoncer le premier théorème de diagonalisation.
3. Donner un exemple de matrice A telle que son polynôme caractéristique $P_A(X) = (1-X)^3$ et A **diagonalisable**.
4. Donner un exemple de matrice B telle que son polynôme caractéristique $P_B(X) = (1-X)^3$ et B **non-diagonalisable**.

Exercice 2 :
Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_M(X)$.
2. Quelles sont les valeurs propres de M ? Donner des bases des sous-espaces propres associés.
3. M est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Exercice 3 :
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On note $p_0 = 1, p_1 = 1+X, p_2 = (1+X)^2$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ est une base de E.
2. On note $\mathcal{B}^* = \{p_0^*, p_1^*, p_2^*\}$ la base duale de $\mathcal{B}$. Que vaut $p_2^*(aX^2 + bX + c)$?
3. Soit $p \in E$. Montrer que l'application $\varphi_p : E \to \mathbb{R}, q \mapsto \int_0^1 p(x)q(x)dx$, est un élément de E^*.
4. On choisit $p = X$. Calculer les valeurs de φ_X sur $\mathcal{B}$.
5. Montrer que l'application $\Phi : E \to E^*, p \mapsto \varphi_p$, est un isomorphisme.

Exercice 4 :
On considère la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. La forme b est-elle symétrique ? Que vaut $b\big((1,1,0),(0,-1,-1)\big)$, $b\big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\big)$?

On donne une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ (on ne demande pas de montrer que c'est une base) où

$$\begin{aligned} e_1' &= (1,0,1), \\ e_2' &= (-1,2,0), \\ e_3' &= (0,1,1). \end{aligned}$$

2. Écrire la matrice de b dans $\mathcal{B}'$.
3. Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1,1,0)$, respectivement $(0,-1,-1)$, dans $\mathcal{B}'$. Que vaut $b(u,v)$?
4. Soit $w = e_1' + e_2' + e_3'$. Que vaut $b(w,w)$? Donner une base de $\{w\}^\perp$.
5. La forme b est-elle dégénérée ? Est-elle un produit scalaire ?