Université Pierre et Marie Curie - LM223 - Année 2012-2013

Fiche d'exercices n^o 3

1 Formes linéaires et espace dual

Ex 1.1 Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer la base duale.

Ex 1.2 Donner une base de l'espace des matrices $M_2(\mathbb{R})$ et sa duale.

Ex 1.3 On considère l'espace vectoriel des polynômes réels $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit trois fonctions f_0, f_1, f_2 de E vers $\mathbb{R}$ par $f_i(P) = P(i)$ pour tout P dans E.

1. Montrer que les f_i sont des applications linéaires.
2. Montrer que $\{f_0, f_1, f_2\}$ est une base de E^*.
3. Trouver la base préduale $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E, c'est-à-dire la base telle que $e_i^* = f_i$, $i = 0, 1, 2$.

Ex 1.4 Si H est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, on pose $H^\perp := \{\varphi \in E^* \mid \varphi_{|H} = 0\}$. Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$,
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$,
4. $E = F \oplus G \Rightarrow E^* = F^\perp \oplus G^\perp$.

Ex 1.5 Calcul du dual de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $\varphi_A : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ est un élément de $M_n(\mathbb{C})^*$.
2. Montrer alors que l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})^*,\ A \mapsto \varphi_A$ est linéaire et injective.
3. En déduire que tout élément de $M_n(\mathbb{C})^*$ s'écrit φ_A pour un unique $A \in M_n(\mathbb{C})$.

2 Formes bilinéaires

Ex 2.1 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{S}_2(E)$ (resp. $\mathcal{A}_2(E)$) l'espace des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) de E. Montrer que :

$$\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E).$$

Ex 2.2 Dans chacun des exemples suivants, montrer que φ est un produit scalaire sur E.

1. $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
2. $E = M_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$,
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$,
4. $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geqslant 0} u_n^2 < +\infty\right\}$ et $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.
   [Dans le 4., commencer par montrer que φ est bien définie.]

Ex 2.3 Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(AB).$$

1. Si $A = ((a_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = ((b_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ji}.$$

2. La forme φ est-elle bilinéaire ? symétrique ?
3. Supposons à présent, A symétrique et B antisymétrique. Montrer alors :
   - $\varphi(A,A) \geqslant 0$,
   - $\varphi(B,B) \leqslant 0$,
   - $\varphi(A,B) = 0$.
4. La forme φ est-elle dégénérée ? Est-elle un produit scalaire ?
5. On note S_n, resp. AS_n, le s.e.v des matrices symétriques, resp. anti-symétriques. Donner $S_n^\perp$ et $AS_n^\perp$.

Ex 2.4 On considère l'application suivante définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\big((x,y,z),(x',y',z')\big) \mapsto \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = (x,y,z)\wedge(x',y',z').$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire alternée.
2. Montrer que si e_1 et e_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$(e_1\wedge e_2)\cdot e_1 = 0, \qquad (e_1\wedge e_2)\cdot e_2 = 0.$$

3. En déduire que, si e_1 et e_2 sont linéairement indépendants,

$$\mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(e_1\wedge e_2)^\perp = \big\{x\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, (e_1\wedge e_2)\cdot x = 0\big\}$$

Application. Déterminer une équation du plan engendré par les vecteurs $e_1 = (1,2,-3)$ et $e_2 = (-2,0,1)$.

Ex 2.5 On reprend le produit scalaire 3. de l'exercice 2.2 avec $n = 2$:

$$\forall\, P,\, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Faire de même dans la base $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2 - X + \frac{1}{6}\big)$.

Ex 2.6 On considère la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 10 \\ -2 & 11 & 8 \\ 10 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

1. La forme b est-elle symétrique ? Que vaut $b\big((1,1,1),(-1,-1,-1)\big)$, $b\big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\big)$?
2. Montrer que 1 et -1 sont des valeurs propres pour B. Pouvez-vous trouver une autre valeur propre pour B ?
3. Montrer que la matrice B est diagonalisable et donner une matrice P telle que $P^{-1}BP$ soit diagonale.
4. Vérifier que pour la matrice P trouvée ${}^tPP$ est diagonale à coefficients strictement positifs.
5. Construire à partir de P une matice P' telle que ${}^tP'P' = I$.
6. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de b est diagonale.