Corrections feuille 1 L2 SV

Florestan Martin-Baillon

September 25, 2020

1 Exercice 4

Pour chacune des suites suivantes, dire si elle est croissante, décroissante, minorée, majorée, bornée.

a) La suite $u_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

- Comme la suite est positive, pour savoir si elle est croissante on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on le compare à 1. On a pour $n \geq 1$:

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n},$$

  donc le numérateur est strictement plus grand que le dénominateur et la fraction est toujours strictement plus grande que 1. Cela veut dire que la suite est strictement croissante.

- Comme la suite est strictement croissante, elle n'est pas décroissante.

- La suite (u_n) est positive, car c'est un quotient de deux quantités positives, donc elle est minorée (par 0).

- Comme on a $n \leq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 1$. Donc la suite est majorée.

- La suite est majorée et minorée, elle est donc bornée.

On aurait pu aussi raisonner autrement. La suite (u_n) tend vers 1, en effet:

$$u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

La suite (u_n) est donc convergente, donc bornée (donc majorée et minorée).

b) La suite $v_n = (-2)^n, n \in \mathbb{N}$. On remarque que pour les n pair, v_n est positif; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{2n} = (-2)^{2n} = (-1)^{2n}2^{2n} = ((-1)^2)^n 2^{2n} = 1^n \times 2^{2n} = 2^{2n} \geq 0,$$

tandis que pour les n impair, v_n est négatif; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}2^{2n=1} = -(-1)^{2n}2^{2n} = -2^{2n} \leq 0, .$$

On en déduit que la suite n'est ni croissante, ni décroissante:

- si elle était croissante, comme $v_0 = 1$ est positif, les termes de la suite seraient toujours positifs, ce qui n'est pas le cas car on a vu que les termes d'indices impairs étaient négatifs.

- si elle était décroissante, comme $v_1 = -2$ est négatif, les termes de la suite seraient toujours négatifs, ce qui n'est pas le cas car on a vu que les termes d'indices pairs étaient positifs.

La suite n'est pas minorée. En effet, considérons la suite extraite $v_{2n+1} = -2^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$. Cette suite tend vers $-\infty$, donc n'est pas minorée, donc (v_n) aussi n'est pas minorée.

La suite n'est pas majorée. En effet, considérons la suite extraite $v_{2n} = 2^{2n}, n \in \mathbb{N}$. Cette suite tend vers $+\infty$, donc n'est pas majorée, donc (v_n) aussi n'est pas majorée.

c) La suite $w_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. On remarque, comme pour la question **b)** que les termes d'indice pair sont positifs tandis que les termes d'indice impair sont négatif (avec la même démonstration). On en déduit de la même manière que la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

La suite converge vers 0: en effet on a

$$|w_n| = \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0,$$

et comme $(|w_n|)$ tend vers 0, (w_n) tend vers 0. Comme la suite est convergente, elle est bornée et donc majorée et minorée.

d) La suite $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Pour étudier la monotonie de cette suite, on va étudier la fonction annexe

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}, x \in \mathbb{R}_+.$$

Comme on a $x_n = f(n)$, si la fonction f est monotone, la suite (x_n) le sera aussi. On calcule la dérivée de f, pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}.$$

Le numérateur est un polynome du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$, donc ses racines sont

$$x_1 = -1 - \sqrt{2}, x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

On en déduit que ce polynome est positif pour $x \geq x_2$, donc que f' est positive pour $x \geq x_2$. On a

$$1 \leq \sqrt{2} \leq 2,$$

donc

$$0 \leq -1 + \sqrt{2} \leq 1,$$

donc f' est strictement positive pour $x \geq 1$. On en déduit que f est strictement croissante pour $x \geq 1$. Donc (x_n) est une suite strictement croissante pour $n \geq 1$. Comme on a $x_0 = 1$ et $x_1 = 1$, on a que (x_n) est croissante pour $n \geq 0$. Comme (x_n) est strictement croissante pour $n \geq 1$, elle n'est pas décroissante.

La suite (x_n) est positive, donc minorée. Elle tend vers $+\infty$, en effet:

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \frac{n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}},$$

et le numérateur tend vers $+\infty$ tandis que le dénominateur tend vers 1, donc la fraction tend vers $+\infty$. La suite n'est donc pas bornée.

e) La suite $y_n = ne^{-n}, n \in \mathbb{N}$. On a $y_0 = 0$ et $y_n > 0$ pour $n \geq 1$. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudie le quotient $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ pour $n \geq 1$. On a:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}} = \frac{n+1}{n} e^{-1},$$

et d'après la question **a)** on sait que la suite $\frac{n+1}{n}$ est décroissante, et pour $n = 1$ elle vaut 2. Donc on a que $\frac{n+1}{n} \leq 2$ pour tout $n \geq 1$. Comme $e > 2$, il vient que $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1$ pour tout $n \geq 1$. La suite (y_n) est donc décroissante pour $n \geq 1$. Par contre comme $y_0 = 0 < y_1$, la suite n'est pas décroissante pour $n \geq 0$. Elle n'est pas non plus croissante.

Comme la suite est positive, elle est minorée. Comme elle est décroissante à partir de $n = 1$, on a $y_n \leq y_1$ pour tout $n \geq 1$, donc la suite est majorée. Comme elle est majorée et minorée, elle est bornée.

2 Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$.

a) Pour montrer que la suite est croissante, on calcule $u_{n+1} - u_n$. Comme on a, pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

la suite est (strictement) croissante.

b) Définissons, pour $n \geq 1$ la propriété (H_n) : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation. pour $n = 1$ on a $n! = 1$ et $\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^0} = 1$. La propriété (H_1) est bien vérifiée.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, la propriété (H_n) soit vraie. Démontrons la propriété $(H_{n+1)})$. On a $(n+1)! = n!(n+1)$ et par hypothèse de récurrence, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Donc:

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} \leq \frac{1}{2^{n-1}(n+1)},$$

et comme pour $n \geq 1$, $n+1 \geq 2$, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}(n+1)} \leq \frac{1}{2^{n-1} \times 2} = \frac{1}{2^n}.$$

On a donc: $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ et la propriété (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

c) D'après le résultat de la question **b)** on a, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \leq u_n + \frac{1}{2^n}.$$

On va déduire de cela, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

En effet, posons pour $n \geq 1$,

$$(H_n) : u_n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

Initialisation. On a d'une part $u_1 = 1$ et d'autre part $u_0 + \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k} = 1 + 1 = 2$, donc (H_1) est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, la propriété (H_n) soit vraie. Démontrons la propriété $(H_{n+1)})$. On a

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n},$$

et par hypothèse de récurrence,

$$u_n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k},$$

donc

$$u_{n+1} \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k},$$

ce qui veut dire que la propriété (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion. On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$.

Calculons la somme qui apparait au membre de droite:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n}) \leq 2,$$

car $(1 - \frac{1}{2^n}) \leq 1$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \leq u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq u_0 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

e) La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge.