Corrections feuille 1 PC

Florestan Martin-Baillon

September 23, 2020

Les deux premiers exercices sont essentiellement une utilisation de l'identité remarquable "carré d'une somme":

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

qu'il faut savoir utiliser dans les deux sens: à la fois pour développer un carré, et pour le factoriser.

1 Correction exercice 1

On doit montrer que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

On développe le membre de gauche:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2,$$

et on développe le membre de droite en utilisant deux fois l'identité remarquable:

$$\begin{aligned}(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2,\end{aligned}$$

et on constate que ces deux quantités sont égales.

2 Correction exercice 2

(1) On doit montrer l'inégalité

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

On raisonne par équivalence: c'est à dire qu'on part de l'énoncé que l'on veut montrer et on exprime des énoncés équivalents à celui-ci jusqu'à trouver un énoncé que l'on sait être vrai.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\geq 2xy \\ &\Leftrightarrow \\ x^2+y^2-2xy &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow && \textit{Factorisation de l'identité remarquable} \\ (x-y)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vrai, car le carré d'un nombre réel est toujours positif. Par équivalence, l'inégalité dont on est partie est vrai.

(2) Même raisonnement. On suppose $x > 0$.

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x} &\geq 2 \\ &\Leftrightarrow \\ x+\frac{1}{x}-2 &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow && \textit{Mise au même dénominateur} \\ \frac{x^2+1-2x}{x} &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow && \textit{Factorisation de l'identité remarquable} \\ \frac{(x-1)^2}{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vrai, car $(x-1)^2$ est un carré, donc positif et x est positif. Donc l'inégalité de départ est vrai par équivalence.

(3) Même raisonnement.

$$\begin{aligned}
xy &\leq (\frac{x+y}{2})^2 \\
&\Leftrightarrow && \textit{On sort le } \tfrac{1}{2} \textit{ du carré} \\
xy &\leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \\
&\Leftrightarrow \\
4xy &\leq (x+y)^2 \\
&\Leftrightarrow \\
0 &\leq (x+y)^2 - 4xy \\
&\Leftrightarrow && \textit{On développe l'identité remarquable} \\
0 &\leq x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \\
&\Leftrightarrow \\
0 &\leq x^2 + y^2 - 2xy \\
&\Leftrightarrow && \textit{On factorise l'identité remarquable} \\
0 &\leq (x-y)^2.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vrai, toujours parce qu'un carré est positif, donc la première est vrai.

(4) Cette inégalité est plus astucieuse. On se rappelle qu'à la question (1) on a montré:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

On peut aussi appliquer cette inégalité à x et z, ainsi qu'à y et z et on obtient:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &\geq 2xy \\
x^2 + z^2 &\geq 2xz \\
y^2 + z^2 &\geq 2yz.
\end{aligned}$$

Maintenant on somme ces trois inégalités, pour obtenir:

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 + x^2 + z^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz \\
\Leftrightarrow \\
2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + xz + yz) \\
\Leftrightarrow \\
x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.
\end{gathered}$$

3 Exercice 3

On doit montrer l'énoncé $A \Rightarrow B$. On sait que cet énoncé est équivalent à sa *contraposé*: non $(B) \Rightarrow$ non (A). On va montrer la contraposé (parce que c'est, dans ce cas, plus facile). Écrivons les énoncés non (A) et non (B):

Comme (A) est

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \leq x \leq \varepsilon,$$

et comme par hypothèse $x \geq 0$, (A) est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon,$$

On en déduit que l'énoncé non (A) est

$$\exists \varepsilon > 0, x > \varepsilon.$$

En effet, on se rappelle que la négation d'une proposition de la forme "pour tout x, x vérifie la propriété P " est la proposition "il existe un x qui ne vérifie pas la propriété P", c'est à dire la proposition qui exprime l'existence d'un *contre-exemple*.

L'énoncé (B) est

$$x = 0$$

donc sa négation est

$$x \neq 0.$$

On doit donc montrer l'implication:

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, x > \varepsilon.$$

Traduit en langage courant, cette implication dit: si x n'est pas nul, il existe un ε strictement positif qui est strictement plus petit que x. Montrons cela:

Soit $x \neq 0$. Par hypothèse, $x \geq 0$, donc $x > 0$. On a $x > \frac{1}{2}x$; en effet:

$$x > \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{2},$$

où l'on a simplifié par x, ce qui est licite car $x > 0$, et la dernière inégalité est évidemment vrai. Donc si on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}x$, on a $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \leq x$, ce qui donne bien le contre-exemple recherché.

4 Exercice 4

(1) On doit décider si la phrase « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x < xy$» est vrai. La phrase est fausse: il y a un *contre-exemple* à la proposition «$\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x < xy$» . En effet, considérons $x = 0$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x = xy$ car $0 = 0y$, donc il n'existe pas de y tel que $x < xy$.

(2) On doit décider si la phrase « $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$» est vrai. Cette phrase est fausse. Un contre-exemple est, par exemple, $x = -2$. En effet, on a $x = -2 < -1$ et $x^2 = 4 > 2$.

(3) On doit décider si la phrase « $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x > 0$» est vrai. Cett phrase est vrai. En effet, soit un $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x > 1$. Comme $1 > 0$, on a que $x > 0$.

Les 2 exercices suivants sont des applications du raisonement par récurrence. On a essayé de faire ressortir la structure de la preuve, qui est toujours la même: énoncé de ce qu'on doit montrer, initialisation, hérédité, conclusion.

5 Exercice 5

(1) On doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On va le démontrer par récurrence. Appelons (H_n) la proposition:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation. On montre que (H_n) est vraie pour $n = 1$. D'une part,

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1,$$

et d'autre part,

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La proposition (H_1) est donc vrai.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$; la proposition (H_n) soit vraie. Démontrons (H_{n+1}). On a:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1),$$

et par hypothèse de récurrence, on a que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

donc en remplaçant on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

On simplifie la dernière expression:

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && \textit{On met au même dénominateur} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. && \textit{On factorise par } n+1 \end{aligned}$$

On a donc prouvé:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

c'est à dire la proposition (H_{n+1}). On a bien prouvé l'hérédité, c'est à dire que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a prouvé que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) On doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On va le démontrer par récurrence. Appelons (H_n) la proposition:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation. On montre que (H_n) est vraie pour $n = 1$. D'une part,

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1,$$

et d'autre part,

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 3)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

La proposition (H_1) est donc vrai.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$; la proposition (H_n) soit vraie. Démontrons (H_{n+1}). On a:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2,$$

et par hypothèse de récurrence, on a que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donc en remplaçant on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

On simplifie la dernière expression:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1+6(n+1)^2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6},
\end{aligned}$$

ce qui n'est pas encore le résultat que l'on souhaite; on voudrait obtenir

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}.$$

Mais si on développe $(n+2)(2n+1)$ on trouve

$$2n^2 + 7n + 6,$$

ce qui prouve bien que

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6},
\end{aligned}$$

et donc
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6},$$
c'est à dire que (H_{n+1}) est vraie.

On a bien prouvé l'hérédité, c'est à dire que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a prouvé que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(3) On doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$
On va le démontrer par récurrence. Appelons (H_n) la proposition:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Initialisation. On montre que (H_n) est vraie pour $n = 1$. D'une part,
$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1,$$
et d'autre part,
$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1.$$
La proposition (H_1) est donc vrai.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$; la proposition (H_n) soit vraie. Démontrons (H_{n+1}). On a:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3,$$
et par hypothèse de récurrence, on a que
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$
donc en remplaçant on obtient:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3.$$

On simplifie la dernière expression:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
&\qquad \textit{On met } (n+1)^2 \textit{ en facteur} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&\qquad \textit{On factorise l'identité remarquable} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

et on a donc prouvé

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,$$

c'est à dire que (H_{n+1}) est vraie.

On a bien prouvé l'hérédité, c'est à dire que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a prouvé que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

6 Exercice 6

(1) On doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^n > n$. On va le montrer par récurrence. Soit (H_n) la proposition

$$2^n > n.$$

Initialisation. On montre que la propriété est vrai pour $n = 0$. On a $2^0 = 1$, donc

$$2^0 > 0,$$

ce qui veut dire que la propriété (H_0) est vraie. On prouve aussi (H_1), car l'argument de l'hérédité nécessitera $n \geq 1$. On a $2^1 = 2$, donc

$$2^1 > 1,$$

et (H_1) est vraie.

Hérédité. On suppose que pour un certain $n \geq 1$, la propriété (H_n) est vraie, c'est à dire que l'on a

$$2^n > n.$$

On va montrer que (H_{n+1}) est aussi vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n,$$

et par hypothèse de récurrence $2^n > n$, donc

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n.$$

De plus on a

$$2n \geq n + 1,$$

car

$$2n \geq n + 1 \Leftrightarrow n \geq 1,$$

et donc

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1,$$

donc $2^{n+1} > n + 1$ et la propriété (H_{n+1}) est démontrée. On a bien prouvé l'hérédité.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n > n.$$

(2) On doit prouver l'inégalité de Bernouilli; pour tout $x \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

On fixe un $x \geq 0$ et on le prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit (H_n) la proposition

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Initialisation. On prouve (H_0). On a $(1 + x)^0 = 1$ et $1 + 0x = 1$ donc (H_0) est vraie.

Hérédité. On suppose que pour un certain $n \geq 1$, la propriété (H_n) est vraie, c'est à dire que l'on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

On montre (H_{n+1}). On a

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x),$$

et par hypothèse de récurrence $(1+x)^n \geq 1+nx$, donc

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2,$$

et comme nx^2 est positif, on a

$$1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

donc finalement,

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

On a bien prouvé (H_{n+1}).

Conclusion. Par le principe de récurrence on a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

7 Exercice 7

Pour tout cet exercice, on se fixe deux ensembles X et Y, une application $f : X \to Y$, des sous-ensembles $A, B \subset X$ et $C, D \subset Y$.

(1) On doit montrer:

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B),$$

c'est à dire que l'on suppose que $A \subset B$ et on doit en déduire $f(A) \subset f(B)$.

On rappelle que l'énoncé « $A \subset B$ » signifie: « si $x \in A$ alors $x \in B$. » De même, l'énoncé « $f(A) \subset f(B)$ » signifie: « si $y \in f(A)$ alors $y \in f(B)$. »

On suppose donc que $A \subset B$. On veut montrer « si $y \in f(A)$ alors $y \in f(B)$. On fixe donc un $y \in f(A)$. On se souvient que $f(A)$ est l'ensemble

$$\{f(x); x \in A\}.$$

C'est un sous-ensemble de Y, c'est à dire l'ensemble d'arrivé de f. Si $y \in f(A)$, cela veut dire qu'il existe un $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$ et que $A \subset B$, on a que $x \in B$. Donc $y = f(x) \in f(B)$, car on se rappelle que $f(B)$ est l'ensemble

$$\{f(x); x \in B\}.$$

(2) On doit montrer:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Pour montrer l'égalité de 2 ensembles, la méthode est toujours la même: on montre la double inclusion, c'est à dire dans notre cas

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

et

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

Montrons la première inclusion,

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Soit $y \in f(A \cup B)$. Cela veut dire qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Le fait que $x \in A \cup B$ veut dire « $x \in A$ ou $x \in B$ ». Il faut considérer les 2 cas.

- Dans le premier cas $x \in A$. Donc $y = f(x) \in f(A)$, et alors $y \in f(A) \cup f(B)$.
- Dans le deuxième cas, $x \in B$. Donc $y = f(x) \in f(B)$, et alors $y \in f(A) \cup f(B)$.

(On se rappelle que en général, pour deux ensemble C et D on a $C \subset C \cup D$ et $D \subset C \cup D$.) Dans le 2 cas, on a la conclusion voulu, c'est à dire que $y \in f(A) \cup f(B)$. On peut conclure que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Montrons la deuxième inclusion,

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

On va utiliser la propriété suivante: pour trois ensembles C, D, E on a

$$C \subset E$$

et

$$D \subset E$$

$$\Rightarrow$$

$$C \cup D \subset E,$$

(le démontrer si ce n'est pas clair pour vous).

On montre donc d'abord $f(A) \subset f(A \cup B)$. On a $A \subset A \cup B$, et d'après la question (1) cela implique $f(A) \subset f(A \cup B)$.

De même, on a $B \subset A \cup B$, et d'après la question (1) cela implique $f(B) \subset f(A \cup B)$.

D'après la propriété énoncé plus haut, cela implique

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

Conclusion. On a montré $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ et $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$, cela veut dire que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(3) On doit montrer

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Soit $y \in f(A \cap B)$. Cela veut dire qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A \cap B$, $x \in A$, donc $y = f(x) \in f(A)$. Comme $x \in A \cap B$, $x \in B$, donc $y = f(x) \in f(B)$. Comme $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ on en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$.

(4) On rappelle que

$$f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\}.$$

C'est un sous-ensemble de X (c'est à dire l'ensemble de départ de f). On a la caractérisation:

$$x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C.$$

On doit montrer:

$$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D).$$

On suppose donc $C \subset D$ et on se donne un $x \in f^{-1}(C)$. On a alors $f(x) \in C$. Comme $C \subset D$, on a aussi $f(x) \in D$. Cela veut dire que $x \in f^{-1}(D)$. On a bien montré $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

(5) On doit montrer:

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

On montre la double-inclusion. On commence par montrer que $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$: soit $x \in f^{-1}(C \cup D)$. On a $f(x) \in C \cup D$, c'est à dire que $f(x) \in C$ ou $f(x) \in D$ On traite les deux cas:

- Si $f(x) \in C$ alors $x \in f^{-1}(C)$ et donc $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- Si $f(x) \in D$ alors $x \in f^{-1}(D)$ et donc $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Dans les deux cas, $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. On a prouvé que $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

On montre la deuxième inclusion, c'est à dire $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$. Soit $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$:

- Si $x \in f^{-1}(C)$ alors $f(x) \in C$ donc $f(x) \in C \cup D$ et finalement $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

- Si $x \in f^{-1}(D)$ alors $f(x) \in D$ donc $f(x) \in C \cup D$ et finalement $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

Dans les deux cas, on a $x \in f^{-1}(C \cup D)$. On a bien montré que $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$.

(6) On doit montrer que

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Pour montrer cet égalité entre ensemble, on va montrer que

$$x \in f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

On a:

$$\begin{gathered} x \in f^{-1}(C \cap D) \\ \Leftrightarrow \\ f(x) \in C \cap D \\ \Leftrightarrow \\ f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ \Leftrightarrow \\ x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ \Leftrightarrow \\ x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{gathered}$$

Cela prouve $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.