

# *Astérisque*

FRANÇOIS LAUDENBACH

**Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes.  
Application à la conjecture de Weinstein en dimension 3**

*Astérisque*, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 786, p. 309-333

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1993-1994\\_\\_36\\_\\_309\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__309_0)

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ORBITES PÉRIODIQUES ET COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES,  
APPLICATION À LA CONJECTURE DE WEINSTEIN**

**EN DIMENSION 3**

[d'après H. Hofer et al.]

par **François LAUDENBACH**

## 1. De Rabinowitz à Hofer

**1.1.** Si  $(W, \omega)$  est une variété symplectique et si  $M$  est une hypersurface de  $W$ , le noyau de la forme induite par  $\omega$  sur  $M$  est tangent à un feuilletage de dimension 1, noté  $M_\omega$  et appelé *feuilletage caractéristique* de  $M$ . Lorsqu'il existe un *hamiltonien*  $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ , constant sur  $M$  et sans point critique au voisinage de  $M$ , le gradient symplectique de  $H$ , c'est-à-dire le champ de vecteurs  $X_H$  tel que  $i(X_H)\omega = dH$ , dirige le feuilletage caractéristique en tout point de  $M$ . Aussi  $M_\omega$  est-il l'objet typique d'étude de la *dynamique hamiltonienne* et l'une des premières questions est l'existence de feuilles compactes, ou encore d'orbites périodiques si l'on est en présence d'un hamiltonien. Le rapport de Berestycki [Ber] fait l'état de la question en 83. Par le renouveau apporté aux méthodes de mini-max, le théorème de Rabinowitz (1978) reste une des grandes étapes dans le problème des orbites périodiques.

**1.2. Théorème [Ra].** *Si  $M$  est une hypersurface compacte dans  $\mathbf{R}^{2n}$ , muni de sa structure symplectique standard  $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq_i$ , et si  $M$  est strictement étoilée (c'est-à-dire transverse aux droites issues d'un point), alors le feuilletage caractéristique  $M_\omega$  a une feuille compacte.*

**1.3.** L'hypothèse géométrique faite sur  $M$  n'est pas invariante par difféomorphismes symplectiques, contrairement à la conclusion. Dans [We], A.

S. M. F.

Weinstein s'est attaché à formuler une hypothèse "naturelle". Il dit que  $M$  est une *hypersurface de type contact* dans une variété symplectique  $(W, \omega)$  si au voisinage de  $M$ ,  $\omega$  admet une primitive  $\Lambda$  induisant une 1-forme sans zéro sur chaque feuille de  $M_\omega$ . Si  $\lambda$  est la forme induite par  $\Lambda$  sur  $M$ , cette dernière condition s'exprime aussi en disant que  $d\lambda$  est une 2-forme non-dégénérée sur le fibré  $\ker \lambda$ , ou encore que  $\lambda$  est une *forme de contact*.

*Exemple 1.* Si  $M$  est strictement étoilée par rapport à l'origine dans  $\mathbf{R}^{2n}$ ,  $M$  est de type contact (prendre  $\Lambda = \frac{1}{2} \sum p_i dq_i - q_i dp_i$ ).

*Exemple 2.* Soit  $N$  une variété riemannienne. Son espace cotangent est muni d'une 1-forme canonique, dite forme de Liouville,  $\Lambda = \sum p dq$  dont la différentielle est une forme symplectique. Le sous-fibré unitaire est une hypersurface de type contact. Les feuilles du feuilletage caractéristique sont les orbites du *flot géodésique*. Il y a au moins une feuille compacte car, d'après Lusternik - Fet [LF] (1951), toute variété riemannienne possède une géodésique périodique.

**1.4.** La conjecture de Weinstein est une généralisation des théorèmes de Lusternik - Fet et de Rabinowitz. Elle s'énonce ainsi :

*Si  $M$  est une hypersurface compacte et de type contact dans  $(W, \omega)$  (et si  $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$ ), alors  $M_\omega$  admet une feuille compacte.*

L'hypothèse cohomologique est mise ici entre parenthèses car sa raison d'être n'apparaît pas clairement. D'ailleurs c'est bien la conjecture forte qui a été prouvée par C. Viterbo [Vi] lorsque  $(W, \omega) = (\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$  et dans ce cas il est facile de construire par chirurgie plongée des hypersurfaces de type contact dont le premier nombre de Betti est non nul.

Dans certaines situations, l'hypothèse d'exactitude contenue dans la définition de "type contact" peut être assouplie. Dans [HV], Hofer et Viterbo la remplacent par une certaine propriété de *stabilité* de  $M$  du point de vue symplectique et ils obtiennent ainsi de nouveaux résultats d'orbites périodiques.

**1.5. Remarque.** Soit  $M$  une variété compacte sans bord, de dimension  $2n - 1$ , munie d'une 2-forme fermée  $\omega$  dont le noyau  $\ker \omega$  est un fibré de

rang 1 ; il revient au même de munir  $M$  d'un feuilletage de dimension 1 "transversalement symplectique". Si  $\ker \omega$  est un fibré orientable,  $(M, \omega)$  admet un germe de symplectisation  $(\mathbf{R} \times M, \tilde{\omega})$ , au voisinage de  $\{a = 0\}$ , où  $a$  désigne la coordonnée dans  $\mathbf{R}$  (prendre  $\tilde{\omega} = t\lambda + \omega$ , où  $\lambda$  est une 1-forme positive sur  $\ker \omega$ ). De plus, d'après A. Givental (voir [Be2]), le germe de  $\tilde{\omega}$  est unique à conjugaison près. La situation de type contact correspond à  $\omega = d\lambda$  où  $\lambda$  est une forme de contact. Dans ce cas la symplectisation prend une forme plus classique :  $\tilde{\omega} = d(e^a \lambda)$ .

Cette remarque signifie que l'on peut étudier une dynamique hamiltonienne sur une variété de dimension impaire  $M$  sans la plonger comme hypersurface d'une variété symplectique.

**1.6.** Voici deux exemples de dynamique hamiltonienne sans orbite périodique.

*Exemple A.* Un feuilletage linéaire irrationnel sur le tore  $T^{2n-1}$  est transversalement symplectique si on met sur les facteurs  $T^{2n-2} \times pt$  la structure symplectique standard (invariante par translation). Se fondant sur le théorème KAM, M. Herman a montré que, sous certaines conditions diophantiennes sur la pente du feuilletage linéaire, les flots hamiltoniens  $C^{2n+1}$ -voisins restent sans orbite périodique, interdisant ainsi un " $C^{2n+1}$ -closing lemma" hamiltonien [Her].

Cet exemple n'est pas de type contact car la 2-forme fermée  $\omega$  ainsi définie n'est pas une différentielle.

*Exemple B* (bien connu des spécialistes de  $SL_2(\mathbf{R})$ ). D'après Hedlund [Hed], sur les quotients compacts de  $SL_2(\mathbf{R})$  le flot horocyclique est *minimal* (toutes les orbites sont denses) et pourtant il est hamiltonien (c.-à-d. transversalement symplectique) ; la 2-forme  $\omega$  est prescrite par sa valeur sur les 2-vecteurs de l'algèbre de Lie. Par ailleurs Milnor [Mi] a montré que certains de ces quotients sont des variétés  $\Sigma^3$  ayant l'homologie de la sphère  $S^3$ .

Esquissons que pour les variétés de Milnor  $(\Sigma^3, \omega)$  n'est pas de type contact. La forme  $\omega$  a une primitive  $\lambda$  dont la relevée dans  $SL_2(\mathbf{R})$  est invariante à gauche ; elle se calcule facilement sur l'algèbre de Lie. On

trouve :

$$(*) \quad \ker \omega \subset \ker \lambda.$$

Comme  $H^1(\Sigma^3, \mathbf{R}) = 0$ , les autres primitives de  $\omega$  sont de la forme  $\lambda + df$ , où  $f$  est une fonction sur  $\Sigma^3$ . La condition de type contact impose que  $df$  soit non nulle sur  $\ker \omega$  ce qui est impossible aux points critiques de  $f$ .

En relation avec  $(*)$  signalons que, dans le germe de symplectisation,  $\tilde{\omega}$  a une primitive  $\tilde{\lambda}$  dont le champ de vecteurs  $\tilde{\omega}$ -dual sort de  $[-\epsilon, +\epsilon] \times \Sigma^3$  par les deux côtés. Ce phénomène est aussi décrit dans [Mc3] avec une approche différente.

**1.7.** Si, au lieu de fixer la variété ambiante comme dans le théorème de Viterbo, on met l'accent sur  $M$  en vertu de la remarque 1.5, on a une nouvelle formulation de la conjecture de Weinstein :

*Soit  $M$  une variété compacte munie d'une forme de contact  $\lambda$ . Alors le feuilletage de dimension 1 dirigé par  $\ker d\lambda$  a une feuille compacte.*

En introduisant le *champ de Reeb*  $X$  associé à la forme de contact  $\lambda$  et défini par  $i(X)d\lambda = 0$  et  $\lambda(X) = 1$ , la conjecture énonce que  $X$  a une orbite périodique. Si on fixe  $M$ , variété compacte de dimension impaire et orientable, on dira que *la conjecture de Weinstein est vraie pour  $M$  si, quelle que soit la forme de contact sur  $M$ , le champ de Reeb associé a une orbite périodique.* En dimension 3, la question se pose pour toutes les variétés compactes orientables, puisque d'après Lutz et Martinet, elles portent toutes une forme de contact (cf. [Ma]).

**1.8. Le théorème de Hofer ([Ho]).** *Soit  $M$  une variété compacte orientable de dimension 3. La conjecture de Weinstein est vraie dans les deux cas suivants :*

- (i)  *$M$  est revêtue par  $S^3$  ;*
- (ii) *le second groupe d'homotopie de  $M$  est non trivial.*

*Dans ce dernier cas, tout champ de Reeb a une orbite périodique homotope à zéro.*

### 1.9. Commentaires

- 1) Si la conjecture de Weinstein est vraie pour une variété, elle est vraie pour toute variété qu'elle revêt.
- 2) Dans le cas de  $S^3$  ce théorème d'existence d'une orbite périodique est à rapprocher du résultat de K. Kuperberg selon lequel il existe un champ de vecteurs sans orbites périodiques (voir l'exposé de E. Ghys dans ce volume). D'une façon générale pour un champ de vecteurs sur  $S^3$  on peut se demander si le fait de préserver une structure géométrique le force à avoir une orbite périodique. Mais le théorème de Hofer n'est pas exactement de cette nature vis-à-vis de la géométrie de contact. Un champ de Reeb associé à une forme de contact  $\lambda$  préserve la structure de contact sous-jacente, c'est-à-dire le champ de plans  $\ker \lambda$  ; inversement, parmi tous les champs de vecteurs préservant une structure de contact  $\xi$  les champs de Reeb sont exactement ceux qui sont transverses à  $\xi$ . La question suivante est alors naturelle : un champ de vecteurs préservant une structure de contact sur  $S^3$  a-t-il une orbite périodique ? (E. Giroux a observé que la même question sur  $T^3$  a une réponse négative).
- 3) Toujours pour  $S^3$ , une construction simple montre que le feuilletage dirigé par un champ de Reeb de la structure de contact standard est conjugué au feuilletage caractéristique d'une hypersurface étoilée dans  $\mathbf{R}^4$ . Dans ce cas l'orbite périodique est fournie par le théorème de Rabinowitz.
- 4) D'après le "Sphere Theorem" de Papakyriakopoulos et Whitehead (voir [Hem]), si  $\pi_2(M) \neq 0$ ,  $M$  contient une sphère plongée  $S$  non homotope à zéro. Si  $S$  sépare  $M$  en deux composantes,  $M$  se présente comme une somme connexe de deux variétés non simplement connexes ; si  $S$  est à complémentaire connexe,  $M = S^1 \times S^2$  ou une somme connexe avec  $S^1 \times S^2$ . On a ainsi une description topologique des variétés auxquelles s'applique le (ii) du théorème de Hofer.
- 5) Typiquement, l'exemple suivant ne se situe pas dans le champ du théorème 1.8. Si  $N$  est une surface riemannienne compacte à courbure  $\leq 0$ , il existe bien des géodésiques périodiques mais aucune n'est homotope à zéro. Il en est de même pour le champ de Reeb de la forme de contact canonique sur son espace unitaire tangent ( $\cong$  cotangent)  $UTN$ .

## 2. Sur les structures de contact en dimension trois

On se reportera à l'exposé de Giroux [Gi2] pour un rapport détaillé sur cette question. Ici nous rassemblons seulement le matériel en relation avec le théorème de Hofer.

### 2.1. Feuilletage caractéristique

Si  $S$  est une surface (plongée) dans une variété de contact  $(M^3, \xi)$  le champ de plans  $\xi$  trace sur  $S$  un feuilletage  $S_\xi$  de dimension 1 singulier ; génériquement sur  $S$ , les singularités sont isolées. Le feuilletage  $S_\xi$  est (encore une fois !) appelé *feuilletage caractéristique* de la surface. Le qualificatif est d'ailleurs justifié puisque  $S_\xi$  détermine  $\xi$  au voisinage de  $S$  (à isotopie près, laissant  $S$  fixe).

### 2.2. Structure vrillée, structure tendue

La structure de contact  $\xi$  est dite *vrillée le long d'un disque plongé*  $D$  si le feuilletage caractéristique  $D_\xi$  admet une seule singularité (nécessairement d'indice 1 et dite *elliptique*) et si le bord est une feuille régulière (voir fig.1).

Une structure qui n'est vrillée le long d'aucun disque plongé est dite *tendue*. Dans [Gil], E. Giroux a établi le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit  $(M^3, \xi)$  une variété munie d'une structure de contact tendue et soit  $S$  une sphère plongée dans  $M$ . Alors :*

- 1) *le feuilletage caractéristique  $S_\xi$  ne contient pas de cycle régulier ;*
- 2)  *$S$  est isotope à une sphère plongée  $S'$ , par une isotopie  $C^0$ -petite, de sorte que  $S'_\xi$  n'ait que deux singularités elliptiques.*

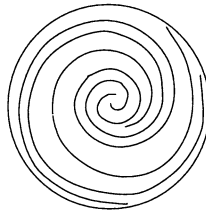


Figure 1

### 2.3. Existence de structures de contact tendues

A partir d'une structure de contact quelconque  $\xi$ , il est facile de produire une structure de contact vrillée : on construit une courbe fermée  $\gamma$  transversale à  $\xi$  et on change  $\xi$  dans un voisinage tubulaire de  $\gamma$  par une "modification de Lutz" ; le résultat est vrillé le long des disques méridiens de ce tube. En revanche, l'existence même d'une seule structure tendue est un problème difficile. Le théorème de D. Bennequin [Be1] est la première réponse (1982), antérieure bien sûr aux définitions ci-dessus (proposées par Y. Eliashberg), et une source d'inspiration du sujet :

**Théorème.** *La structure de contact standard de la sphère  $S^3$  est tendue.*

Rappelons qu'en chaque point de  $S^3$ , vue comme sphère unité de  $\mathbf{C}^2$ , l'espace tangent réel contient une unique droite complexe. Le champ de  $\mathbf{R}$ -plans ainsi obtenu est la structure de contact *standard*. On peut aussi la voir comme la structure canonique sur l'unitaire tangent de la 2-sphère ronde.

Alors que les structures de contact vrillées peuvent être classées ([E11]), les structures tendues restent mystérieuses, sauf sur  $S^3$  :

**Théorème** (Eliashberg [E13]). *La structure de contact standard est, à isotopie près, l'unique structure tendue de  $S^3$ .*

### 2.4. Réduction du théorème de Hofer

Compte tenu des résultats cités le théorème de Hofer 1.8 se réduit à l'énoncé suivant :

**Théorème.** *Soit  $M$  une variété de dimension 3 compacte munie d'une forme de contact  $\lambda$ . Alors le champ de Reeb de  $\lambda$  a une orbite périodique homotope à zéro dans les deux cas suivants :*

- (i) *la structure de contact  $\xi = \ker \lambda$  est vrillée ;*
- (ii)  *$M$  possède une sphère plongée  $S$ , non homotope à zéro, telle que  $S_\xi$  n'ait pas de cycles et seulement deux singularités elliptiques.*

En effet pour 1.8(i), on peut supposer que  $M = S^3$  d'après 1.9.1 et que la structure de contact est vrillée, d'après 1.9.3 et le théorème de Rabinowitz. Pour 1.8(ii), il ne reste qu'à considérer le cas d'une structure de



contact tendue. Le “Sphere Theorem” (1.9.4) et le théorème de Giroux 2.2 ramènent aux hypothèses du second cas ci-dessus.●

*Remarque.* Lu dans l’autre sens, ce théorème dit que, si le champ de Reeb d’une forme de contact n’a pas d’orbites périodiques homotopes à zéro, alors la structure de contact sous-jacente est tendue.

## 2.5. Généralisation du théorème de Bennequin

Avec Eliashberg [El2], on dit que  $(M^3, \xi)$  est *remplissable symplectiquement* s’il existe une variété compacte symplectique  $(W, \omega)$  avec les propriétés suivantes :

- 1)  $M$  orientée par  $\xi$  est le bord orienté de  $W$ , celle-ci étant orientée par  $\omega$  ;
- 2)  $\omega|_{\xi}$  est positive.

Dans [El2], Eliashberg donne la généralisation suivante du théorème de Bennequin :

**Théorème.** *Si  $(M, \xi)$  est remplissable symplectiquement par  $W$ , alors  $\xi$  est une structure tendue. De plus, toute 2-sphère plongée dans  $M$  borde une 3-boule dans  $W$ .*

*Remarque.* Par construction, l’hypothèse de ce théorème est satisfaite pour les structures de contact standard sur les fibrés unitaires cotangents des surfaces riemanniennes. Elles sont donc tendues quelle que soit la métrique.

Il nous paraît important de situer le théorème de Hofer 2.4 par rapport au théorème d’Eliashberg 2.5. L’un et l’autre se démontrent à l’aide de *courbes pseudo-holomorphes*. Dans le cas de Hofer, ce qui tient lieu du remplissage symplectique est la variété non compacte  $(-\infty, 0] \times M$ , munie de la forme symplectique  $d(e^a \lambda)$ . Mais alors qu’avec un remplissage compact au sens d’Eliashberg on conclut à l’inexistence d’un disque le long duquel la structure est vrillée, avec le “remplissage” non compact de Hofer et à cause du trou en  $-\infty$ , on conclut qu’en présence d’un tel disque le champ de Reeb de  $\lambda$  a une orbite périodique.

### 3. Disques pseudo-holomorphes

La théorie des courbes pseudo-holomorphes a été développée par M. Gromov dans son célèbre article de 85 [Gr] (voir aussi [Be3]). On en présente ici certains aspects dans le cadre géométrique de Hofer.

#### 3.1. Structure presque complexe sur la symplectisée

On commence par choisir une structure complexe  $J$  dans le fibré des plans de contact  $\xi = \ker \lambda$ , *calibrée* par  $d\lambda$ , c'est-à-dire telle que  $\langle Y, Z \rangle = d\lambda(Y, JZ)$  soit un produit scalaire. On note  $W = \mathbf{R} \times M$  et  $(a, x)$  son point général. En chaque point de  $W$  l'espace tangent est scindé :  $T_{(a,x)}W = (\mathbf{R}\partial_a \oplus \mathbf{R}X(x)) \oplus \ker \lambda(x)$ . On étend  $J$  en une structure presque complexe sur  $W$  en posant

$$J\partial_a = X$$

et on étend  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en une métrique riemannienne en prenant  $\partial_a$  et  $X(x)$  unitaires, mutuellement orthogonaux et orthogonaux à  $\ker \lambda(x)$ . Ces deux structures sont invariantes par translation parallèle à  $\partial_a$ . Par ailleurs  $W$  possède une structure symplectique canonique  $\omega = d(e^a \lambda)$ . Sur  $W$ ,  $J$  est calibrée par  $\omega$ , mais la métrique  $\omega(\cdot, J\cdot)$  est infiniment petite par rapport à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pour  $a \rightarrow -\infty$ . Noter enfin que  $d\lambda$  est  $\geq 0$  sur les droites  $J$ -complexes de  $TW$ .

*Remarque.* Soit  $p$  la projection  $\mathbf{R} \times M \rightarrow M$ . Si  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $X$ , l'espace tangent à  $p^{-1}(\mathcal{O})$  est  $J$ -complexe et donc  $(p^{-1}(\mathcal{O}), J)$  est conformément équivalent à  $\mathbf{C}$  si l'orbite n'est pas périodique et à  $\mathbf{C}^*$  si elle est périodique.

#### 3.2. Disques $J$ -holomorphes et $J$ -convexité

Soit  $D$  le disque unité fermé de  $\mathbf{C}$  ; un disque  $J$ -holomorphe (paramétré) est une application dérivable (au moins en un sens faible)  $u : D \rightarrow W$  dont l'application tangente vérifie

$$Tu \circ i = J(u) \circ Tu.$$

La propriété suivante est fondamentale :

Si  $u : D \rightarrow W$  est  $J$ -holomorphe, la fonction  $e^{a \circ u}$  est strictement sous-harmonique (laplacien  $> 0$ ), sauf aux points singuliers de  $u$ .

En effet, soit  $J^*$  la transposée de  $J$ . La 2-forme  $-d(J^*de^a) = +d(e^a\lambda)$   $= \omega$  est positive sur les droites  $J$ -complexes de  $TW$ . Par ailleurs  $u^*(dJ^*de^a) = -\Delta(e^{a \circ u})$ . •

En vertu du principe du maximum fort (lemme de E. Hopf), si  $u(\partial D) \subset \{a = 0\}$  et si  $u$  est non constant, alors  $a \circ u(z) < 0$  pour tout  $z \in \text{int}D$ . De plus, la dérivée radiale de  $e^{a \circ u}$  (donc de  $a \circ u$ ) est non nulle en tout point du bord de  $D$ . Le domaine  $\{a \leq 0\}$  est strictement  $J$ -convexe.

### 3.3. Disques $J$ -holomorphes à bord dans une surface

Soit  $S$  une surface dans  $M \times \{0\} = \{a = 0\}$ . On note  $S^*$  le complémentaire du lieu singulier du feuilletage caractéristique  $S_\xi$ . C'est une surface totalement réelle :  $T_x S^* \cap JT_x S^* = \{0\}$ .

- (i) Pour tout disque  $J$ -holomorphe  $u$  à bord dans  $S^*$  et non constant,  $u|_{\partial D}$  est une immersion transverse à  $S_\xi$ .
- (ii) Si  $S$  est une sphère ou un disque et si  $u|_{\partial D}$  est un plongement, on a :

$$0 < \int_D u^* d\lambda \leq \int_S |d\lambda|.$$

*Preuve :* (i) Par  $J$ -holomorphie, on a  $(u^*\lambda) \circ i = u^*da$ . Comme le long du bord la dérivée radiale de  $a \circ u$  est non nulle, la dérivée tangentielle de  $u$  est transverse à  $\ker \lambda$ .

(ii) La  $J$ -holomorphie dit encore que  $u^*(d\lambda)$  est une forme  $\geq 0$ . Si elle est identiquement nulle,  $u$  est à valeurs dans  $p^{-1}(\mathcal{O})$  pour une certaine orbite  $\mathcal{O}$  du champ de Reeb  $X$  et  $e^{a \circ u}$  est harmonique, constante au bord, donc constante ainsi que  $u$ . Comme  $u$  n'est pas constante,  $\int_D u^* d\lambda > 0$ . La seconde inégalité résulte de la formule de Stokes, en utilisant que  $u(\partial D)$  borde un disque sur  $S$ . •

### 3.4. Les disques $J$ -holomorphes de Bishop

Le lemme de Darboux sur les formes de contact énonce que celles-ci ont un unique modèle local. On en déduit que, près d'une singularité

elliptique  $e$  de  $S_\xi$  et quitte à appliquer à  $S$  une isotopie  $C^0$ -petite, on peut supposer que le germe de  $(M, S, \lambda)$  est conjugué au germe de  $(S^3 = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) | x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1\}, S^2 = S^3 \cap \{y_2 = 0\}, \lambda_0)$  au voisinage de  $(0, 0, \pm 1, 0)$ , avec  $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum (x_i dy_i - y_i dx_i)$ . Le signe dépend du signe de la singularité, en comparant l'orientation de  $S$  et celle du plan de contact. La symplectisation canonique de  $\lambda_0$  est  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ . Par conséquent, on peut choisir  $J$  pour coïncider au voisinage de  $e$  avec la structure complexe canonique de cette carte. Avec ce choix on a une famille explicite de disques  $J$ -holomorphes, appelés *disques de Bishop*,  $D_t = \{x_1 + iy_1, t, 0\}$  pour  $t$  voisin de  $\pm 1$ . Bishop en a établi l'existence sans déplacer  $S$ , au moins lorsque  $J$  est intégrable au voisinage du point elliptique ([Bi]).

On observe que les disques de Bishop sont plongés et deux à deux disjoints. Ils feuillettent un germe d'hypersurface (Lévi-plate) et leurs bords feuillettent le germe de  $S$  en faisant un tour autour de  $e$ .

La question est alors de prolonger la famille des disques de Bishop lorsque l'on s'éloigne de la singularité. Cette question, importante en géométrie complexe pour la détermination d'enveloppes d'holomorphic, a été considérée en premier par Bedford et Gaveau [BG].

### 3.5. Déformation locale d'un disque $J$ -holomorphe

La détermination des disques  $J$ -holomorphes de  $W$  à bord dans  $S^*$  consiste à résoudre un certain problème elliptique non linéaire  $Pu = 0$ . Des résultats généraux de régularité énoncent par exemple que si  $J$  et  $S$  sont  $C^\infty$ , les solutions sont  $C^\infty$  et que sur l'espace des solutions la topologie  $C^0$  et la topologie  $C^\infty$  coïncident (voir [Si] pour un traitement direct dans le cas considéré).

*A partir de maintenant on considère la situation où  $S$  est un disque ou une sphère vérifiant les hypothèses du théorème de Hofer 2.4.*

Soit  $u_0 : D \rightarrow W$  un disque  $J$ -holomorphe plongé à bord dans  $S^*$  représentant zéro dans le groupe d'homotopie relatif  $\pi_2(W, S)$  ; d'après 3.3 son bord fait un tour autour de(s) singularité(s)  $e_\pm$ .

*L'indice de Maslov du lacet  $z \in \partial D \mapsto T_{u_0(z)} S^*$  de plans totalement réels, lu dans la trivialisation de  $TW|_{u_0(D)}$  vaut 2.*

C'est évident pour les disques de Bishop et pour tous les disques qui s'en déduisent par déformation continue. L'indice de Fredholm de  $P$  en  $u_0$  est alors égal à l'indice de Maslov  $+\frac{1}{2}\dim W = 4$  et donc le noyau de son linéarisé  $TP_{u_0}$  est de dimension  $\geq 4$ .

Par ailleurs, en appliquant le *principe de similarité* ([Bers] ou [Ve], p. 211) dont une version locale sera donnée en 3.6, Hofer montre élémentairement que ce noyau est de dimension  $\leq 4$ . Comme trois dimensions viennent du groupe des automorphismes conformes de la source, il y a exactement un degré de liberté pour les disques non paramétrés. De plus le champ des vecteurs normaux à  $u_0(D)$  correspondant à cette déformation infinitésimale est sans zéros. Par le théorème des fonctions implicites on en déduit un plongement (unique à reparamétrage près)  $\Phi : D \times ]-\epsilon, +\epsilon[ \rightarrow W$  tel que pour tout  $t \in ]-\epsilon, +\epsilon[$ ,  $\Phi_t$  soit  $J$ -holomorphe à bord dans  $S^*$  et que  $\Phi_0 = u_0$ .

En conclusion, la famille des disques de Bishop  $\mathcal{D}(e_{\pm})$  issue de  $e_{\pm}$  a un prolongement maximal en une famille de disques  $J$ -holomorphes plongés deux à deux disjoints.

**3.6. Proposition.** *Si  $S$  est une sphère non homotope à zéro avec 2 singularités elliptiques (hypothèse 2.4(ii)), les disques de la famille  $\mathcal{D}(e_+)$  sont disjoints des disques de la famille  $\mathcal{D}(e_-)$ .*

*Preuve.* Si  $D_- \in \mathcal{D}(e_-)$  rencontre l'un des disques de  $\mathcal{D}(e_+)$ , il y a, à partir de  $e_+$ , un premier disque  $D_{t_0} \in \mathcal{D}(e_+)$  qui touche  $D_-$ .

Si  $D_{t_0} = D_-$ , alors les deux familles coïncident et la réunion de tous ces disques forme une 3-boule plongée dans  $W = \mathbf{R} \times M$  bordée par  $S$ . C'est impossible puisque  $S$  n'est pas homotope à zéro dans  $M$ .

Le reste de l'argument repose sur l'idée de *positivité d'intersection* des courbes  $J$ -holomorphes en dimension 4 (D. McDuff [Mc2], [Mc4]). Pour l'intersection de disques plongés, c'est une application élémentaire du principe de similarité. Soient en effet  $u, v : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow (W, J)$  deux germes de courbes  $J$ -holomorphes distincts, avec  $u(0) = v(0) = m_0$ . Si  $u$  est un germe de plongement, il existe des coordonnées locales  $\Psi = (z_1, z_2) : (W, m_0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$  tels que  $z_2 \circ u = 0$ ,  $(z_1 \circ u)(z) = z$  et que  $\Psi_* J = i$  le long de  $\{z_2 = 0\}$ . On pose  $\alpha = z_1 \circ v$  et  $\beta = z_2 \circ v$ . Le principe de similarité affirme

que  $\beta$  ressemble à une fonction holomorphe. Précisément :

*Il existe un germe d'application continue  $\Phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  et un germe de fonction holomorphe  $b : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tels que*

$$\beta(z) = \Phi(z)b(z).$$

Il en résulte que les points d'intersection sont isolés. La valuation du développement de Taylor de  $b$  est un entier  $k > 0$ , qui a une interprétation topologique simple : si  $B$  est une petite boule centrée en  $m_0$ , les disques  $u$  et  $v$  découpent sur  $\partial B$  deux courbes simples disjointes  $\gamma_u$  et  $\gamma_v$  ;  $k$  est l'enlacement de  $\gamma_u$  avec  $\gamma_v$ . Un tel enlacement résiste à de petites perturbations ; donc si  $u'$  est  $C^1$ -proche de  $u$ , les courbes  $u'$  et  $v$  se rencontrent encore. Comme  $D_t \cap D = \emptyset$  pour  $t < t_0$ , l'argument ci-dessus montre que  $D_{t_0}$  et  $D_-$  ne peuvent se rencontrer en des points intérieurs.

Une variante de ce raisonnement permet d'exclure aussi les points communs au bord. Si  $D_-$  et  $D_{t_0}$  se rencontrent en  $m_0 \in S$ , les deux disques ont même espace tangent en  $m_0$ . On regarde une petite  $1/2$ -boule  $B$  dans  $(-\infty, 0] \times M$  centrée en  $m_0$  ;  $\partial B$ , la frontière de  $B$  dans  $(-\infty, 0] \times M$ , rencontre les disques suivants deux arcs  $\gamma_u$  et  $\gamma_v$ , dont les extrémités sont sur un cercle  $c$  dans l'espace réel  $S \cap B$ . La valuation  $k$  du développement de Taylor ci-dessus s'interprète ainsi. Si  $k$  est impair, les paires de points  $\partial\gamma_u$  et  $\partial\gamma_v$  sont enlacées sur  $c$ . Si  $k$  est pair, elles ne le sont pas et l'enlacement de  $\gamma_u$  et de  $\gamma_v$  a un sens, car on peut fermer ces arcs avec deux arcs tracés dans  $S \cap B$  et mutuellement disjoints ; pour  $k \geq 2$  cet enlacement est non trivial ( $= k/2$ ). Dans les deux cas la figure est stable par perturbation et donne une intersection non vide de  $D_-$  avec  $D_t$  pour tout  $t$  voisin de  $t_0$ . •

### 3.7. Explosion du gradient

**Proposition.** *Pour tout paramétrage  $u_t : D \rightarrow W$  des disques de la famille maximale de Bishop  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(e_+)$ , le gradient  $\nabla u_t$  est non borné (en  $t$ ).*

*Preuve.* Dans le cas contraire, d'après Ascoli on pourrait extraire de toute suite de  $\mathcal{D}$  (non convergente dans  $\mathcal{D}$ ) une sous-suite  $u_n : D \rightarrow W$ ,  $C^0$ -convergente, (donc  $C^\infty$ -convergente) vers un disque  $J$ -holomorphe  $u_\infty : D \rightarrow W$ .

*Lemme.*  $u_\infty$  est un plongement disjoint des  $u_n$ .

*Preuve du lemme.* Comme on vient de le voir,  $\mathcal{D}$  ne peut s'approcher de  $e_-$ ; on en déduit que  $u_\infty$  n'est pas constant. La courbe  $u_\infty|_{\partial D}$  est alors transverse à  $S_\xi$  et limite de plongements transverses à  $S_\xi$ ; c'est donc un plongement. Dans cette situation on peut parler de l'auto-intersection de  $u_\infty(D)$ : c'est l'intersection algébrique avec un disque voisin en position générale, dont le bord dans  $S$  est disjoint de  $u_\infty(\partial D)$ . Ici cet entier est nul car il varie continuellement avec le disque et il est nul pour  $u_n$ . Or d'après D. McDuff, il est  $> 0$  pour un disque  $J$ -holomorphe non plongé (le modèle local de singularités  $J$ -holomorphe est complètement décrit dans [MW]). Que  $u_\infty(D)$  soit disjoint des  $u_n(D)$  suit en même temps par positivité de l'intersection des courbes  $J$ -holomorphes. •

D'après 3.3(i),  $u_\infty(\partial D) \subset S$  ne peut rencontrer  $\partial S$  qui est tangent à la structure de contact. D'après 3.5,  $u_\infty$  appartient donc à une famille de disques  $J$ -holomorphes et plongés, à bord dans  $S^*$ ; l'unicité locale des familles de disques implique que celle-ci prolonge  $\mathcal{D}$ , contredisant la maximalité de  $\mathcal{D}$ . •

### 3.8. Explosion du diamètre

Dans [Gr] (voir aussi [Pa]), Gromov explique comment compactifier une famille de courbes  $J$ -holomorphes (non paramétrées) d'aires bornées dans une variété compacte, riemannienne presque complexe  $(V, J, \mu)$ , dont la source  $\Sigma$  a un type topologique fixé (surface fermée de genre  $g$ ). Les objets limites qu'il faut ajouter à la famille sont des "courbes cuspidales", dont la source est obtenue à partir de  $\Sigma$  en écrasant, chacune sur un point, un nombre fini de courbes simples 2 à 2 disjointes.

Dans le cas où la source  $\Sigma$  a un bord, on prescrit aux courbes considérées d'avoir leur bord dans une sous-variété compacte totalement réelle; le problème  $P$  des courbes  $J$ -holomorphes reste alors elliptique. Bien qu'une compactification par des courbes cuspidales à bord soit admise par les spécialistes, il n'en existe pas de version écrite avec des hypothèses utilisables ici. On se limitera donc à une version plus faible où un défaut de compacité se traduit par l'apparition de *bulles* au sens de Sacks-Uhlenbeck [SU].

Revenant à la situation de Hofer, on a la proposition suivante :

**Proposition.** *Les disques de la famille maximale de Bishop  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(e_{\pm})$  ne restent dans aucune partie compacte  $W(a_0) = [a_0, 0] \times M$ .*

*Preuve.* Supposons au contraire que les disques de  $\mathcal{D}$  sont dans  $W(a_0)$ . L'aire de disques de  $\mathcal{D}$  est alors bornée. En effet, comme  $a \in [a_0, 0]$ , à une constante près celle-ci est donnée par

$$\int_D u^*(d(e^a \lambda)) = \int_{\partial D} u^* \lambda \leq \int_S |d\lambda|.$$

On choisit les paramétrages  $u_t : D \rightarrow W(a_0)$  de sorte que les images de trois points choisis sur  $\partial D$  restent sur trois feuilles distinctes de  $S_{\xi}$ . D'après 3.7, il existe une suite  $u_n \in \mathcal{D}$  telle que  $R_n \sup_{z \in D} |\nabla u_n(z)| \rightarrow +\infty$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . En prenant une sous-suite, le sup. du gradient est atteint en des points  $z_n$  formant une suite convergente :  $z_n \rightarrow z_{\infty}$ . On a deux cas de figure :

1)  $R_n \text{dist}(z_n, \partial D) \rightarrow +\infty$ .

On introduit des applications  $J$ -holomorphes renormalisées

$$v_n(z) = u_n(z_n + \frac{z}{R_n})$$

bien définies sur  $D(0, R_n \text{dist}(z_n, \partial D))$ . La suite  $v_n$  est à gradient borné et  $|\nabla v_n(0)| = 1$ . D'après Ascoli (+ la régularité elliptique), quitte à prendre une sous-suite,  $v_n$  converge dans  $C_{\text{loc}}^{\infty}$  vers  $v : \mathbf{C} \rightarrow W(a_0)$ , non constant. Comme  $v_n$  paramètre une partie de  $u_n(D)$ , l'aire des  $v_n$  est bornée et l'aire de  $v$  est donc finie. D'après un théorème de *singularités inexistantes* (voir [Si], th. 4.5.1),  $v$  se prolonge à  $P^1(\mathbf{C})$  en une application  $J$ -holomorphe non constante.

Or il n'existe pas de sphères  $J$ -holomorphes non constantes, cela pour deux raisons (une seule suffirait) :

- a)  $J$  est calibrée par une forme symplectique exacte  $\omega = d(e^a \lambda)$  ;
- b) la fonction  $a$  ne peut avoir de maximum sur une courbe  $J$ -holomorphe.

2)  $R_n \text{dist}(z_n, \partial D) \rightarrow \ell$ .

On choisit un isomorphisme conforme  $h : \mathbf{H} \rightarrow D$  avec  $h(0) = z_{\infty}$ , où  $\mathbf{H}$  désigne le demi-plan de Poincaré. On pose  $v_n(z) = u_n \circ h(\frac{z}{R_n})$ . Le maximum du gradient de  $v_n$  est atteint en un point de  $\mathbf{H}$  à distance bornée



et ne tend pas vers zéro avec  $n$ . Donc la suite  $v_n$  tend vers  $v : \mathbf{H} \rightarrow W(a_0)$ ,  $J$ -holomorphe non constante et d'aire bornée. Le théorème des singularités inexistantes énonce alors que  $v \circ h^{-1}$  se prolonge en une application  $J$ -holomorphe du disque. En particulier le diamètre de  $v(\{|z| = r\})$  tend vers 0 pour  $r \rightarrow \infty$ . Soit  $\epsilon \ll \text{diam}(v([-1, +1]))$ , et soit  $r$  tel que  $\text{diam}(\{|z| = r\}) < \epsilon$ . Si  $n$  est assez grand les mêmes inégalités valent pour  $v_n$ . Comme  $v_n(\mathbf{R}) \subset u_n(\partial D)$  est plongée dans  $S^*$ , transversalement à  $S_\xi$ , on voit que l'arc  $v_n([-r, +r])$  fait un tour autour de la singularité  $e$  à  $\epsilon$  près. D'autre part le lacet  $u_n(\partial D)$  contient un autre arc où trois points ont été fixés. Ceci ne peut se faire si  $u_n|_{\partial D}$  est un plongement transversal à  $S_\xi$ . •

### 3.9. Retour sur le remplissage symplectique

Ouvrons une parenthèse pour esquisser la preuve du théorème d'Eliashberg 2.5 puisque les arguments invoqués jusqu'ici s'y trouvent déjà (voir aussi [Gr], 2.4D<sub>2</sub> - D'<sub>2</sub>).

Soit  $(W, \omega)$  un remplissage symplectique de  $(M, \xi)$ . Soit  $J$  une structure presque complexe calibrée par  $\omega$  et laissant  $\xi$  invariante. Le bord  $M = \partial W$  est alors  $J$ -convexe.

*1<sup>er</sup> cas :  $W$  ne contient pas de sphères exceptionnelles.*

Une sphère est dite *exceptionnelle* si elle est plongée, symplectique et d'autointersection homologique -1. En l'absence de sphères exceptionnelles, on montre que génériquement sur  $J$  il n'y a pas de sphères  $J$ -holomorphes d'autointersection  $< -1$ . Quant aux sphères  $J$ -holomorphes d'autointersection  $\geq 0$ , elles donnent lieu à des familles à au moins 1 paramètre qui par un théorème de compacité devraient toucher le bord de  $W$ , ce que la  $J$ -convexité interdit (voir [Mc1] th.1.4 dans le cas sans bord). Finalement, il n'y a pas de sphères  $J$ -holomorphes non constantes.

Si  $S \subset M$  est un disque le long duquel  $\xi$  est vrillée, comme en 3.7 le gradient explose dans une famille maximale de Bishop, donnant lieu à une bulle non triviale : contradiction. La structure  $\xi$  est tendue.

Si  $S \subset M$  est une sphère, après une isotopie convenable (2.2),  $S_\xi$  n'a que deux singularités elliptiques et la famille maximale des disques de Bishop engendre une boule plongée dans  $W$ .

2<sup>ème</sup> cas. D. McDuff [Mc1] montre qu'en présence de sphères exceptionnelles  $(W, \omega)$  s'obtient par éclatement d'un nombre fini de points dans une variété symplectique  $(\overline{W}, \overline{\omega})$  qui ne contient pas de sphères exceptionnelles. Le bord est inchangé et  $\xi$  est donc une structure tendue. De plus si  $S$  borde une 3-boule  $B$  dans  $\overline{W}$ , génériquement  $B$  évite les points d'éclatement et se relève dans  $W$ .

## 4. Non-compacité et orbites périodiques

On présente ici une approche due à F. Labourie [Lab], qui a l'avantage sur celle de Hofer de ne pas recourir à d'autres symplectisations de  $(M, \xi)$  que celle utilisée classiquement.

**4.1.** Le théorème de Hofer découle de la proposition suivante :

**Proposition.** *Sous les hypothèses 2.4, il existe une application  $J$ -holomorphe  $v : A \rightarrow W$ , où  $A$  est un anneau  $(\cong S^1 \times [0, 1])$  muni d'une structure complexe et qui vérifie :*

$$(1) \quad \int_A v^* d\lambda = 0$$

$$(2) \quad \int_{S^1 \times \{1\}} v^* \lambda \neq 0.$$

En effet la  $J$ -holomorphicité et la première condition impliquent que  $v$  est à valeurs dans  $p^{-1}(\mathcal{O})$  pour une certaine orbite  $\mathcal{O}$  du champ de Reeb. Si  $\mathcal{O}$  n'est pas périodique,  $v(S^1 \times \{0\})$  peut être contractée sur un point dans  $p^{-1}(\mathcal{O})$ . Comme  $p^*(d\lambda)$  induit 0 sur  $p^{-1}(\mathcal{O})$ , la formule de Stokes contredit (2). •

On va trouver cet anneau  $J$ -holomorphe par un passage à la limite. Le lemme de Gromov-Schwarz assurera la convergence et le lemme de monotonie va, entre autres choses, contrôler la condition (2). On fera aussi appel à l'invariant classique des anneaux conformes à savoir le *module*.

## 4.2. Le lemme de Gromov-Schwarz

Soient  $K$  un domaine compact de  $W$ ,  $\beta$  une 1-forme et  $J$  une structure presque-complexe calibrée par  $d\beta$ . Alors il existe une constante  $C$  telle que, pour toute application  $J$ -holomorphe  $u : D \rightarrow K$ , on ait  $|\nabla u(0)| \leq C$ .

Voir M.-P. Muller [Mu] pour une démonstration de l'énoncé sous la forme ci-dessus. Ce lemme est encore valable si on remplace le disque  $D$  par une surface de Riemann  $\Sigma$  et 0 par un point ne s'approchant pas de  $\partial\Sigma$ .

*Remarque.* D'après P. Gauduchon [Ga], les espaces de jets au-dessus de  $W$  portent une structure presque complexe canonique et le relèvement de  $u$  dans chaque espace de jets est  $J$ -holomorphe. L'application du lemme de Gromov-Schwarz à ce niveau est une expression de la régularité elliptique, au moins loin du bord de  $\Sigma$ .

## 4.3. Le lemme de monotonie

Soit  $(W, K, J)$  comme ci-dessus, où  $J$  est calibrée par une forme symplectique. Il existe alors des constantes  $r_0$  et  $C' > 0$  avec la propriété suivante : pour tout  $x \in K$ , tout  $r \leq r_0$  et toute courbe  $J$ -holomorphe  $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow B(x, r)$  passant par  $x$ , on a

$$\text{aire } u(\Sigma) \geq C' r^2.$$

Voir [Si, prop. 4.3.1]. Noter que ces deux lemmes sont au cœur du théorème de compacité de Gromov.

## 4.4. Module d'un anneau

Soit  $A$  un anneau dans  $\mathbf{C}$ ,  $A \cong S^1 \times [0, 1]$ . L'inverse du module  $\text{Mod}(A)$  est défini par

$$\frac{1}{\text{Mod}(A)} = \inf_b \int_A db \wedge db \circ i$$

où  $b$  parcourt l'ensemble des fonctions réelles valant 0 sur  $S^1 \times \{0\}$  et 1 sur  $S^1 \times \{1\}$ . Le module est une fonction croissante : si  $A_1 \subset A_2$ , on a  $\text{Mod}(A_1) \leq \text{Mod}(A_2)$ . Enfin deux anneaux ayant le même module sont conformément équivalents.

#### 4.5. Démonstration de la proposition 4.1

On considère une suite de disques (plongés)  $J$ -holomorphes

$$u_n : D \rightarrow W = \mathbf{R} \times M,$$

à bords dans  $\{0\} \times M$  et vérifiant :

- (3) la suite  $\int_D u_n^* d\lambda$  est bornée,
- (4)  $\inf_n a \circ u_n = -\infty$ .

D'après 3.3 et 3.8 une telle suite existe dans une famille maximale de Bishop.

**Lemme.** *Il existe une suite d'anneaux  $A_m \subset D$ , des applications  $J$ -holomorphes  $v_m : A_m \rightarrow W$  et des constantes  $C_1$  et  $C_2$  avec les propriétés suivantes :*

- (5)  $\int_{A_m} v_m^* d\lambda \rightarrow 0$ ;
- (6) l'oscillation (max-min) de  $a \circ v_m$  sur  $A_m$  est majorée par 2 ;
- (7)  $\int_{S^1 \times \{1\}} v_m^* \lambda \geq C_1$  ;
- (8)  $\text{Mod}(A_m) \geq C_2$ .

*Preuve.* Pour simplifier les notations on suppose que les disques  $u_n$  sont transverses aux niveaux  $\{a = k\}$  pour tout entier  $k$ . L'entier  $n$  étant fixé, pour chaque entier  $k \in ]\min a \circ u_n, 0]$ , on peut trouver un anneau  $A_{n,k} \subset D$  de sorte que :

- $u_n(\partial_0 A_{n,k}) \subset \{a = k - 1\}$ ,  $u_n(\partial_1 A_{n,k}) \subset \{a = k\}$ , où  $\partial_0$  et  $\partial_1$  désignent les deux composantes du bord,  $\partial_1$  entourant  $\partial_0$ .
- $\text{int} A_{n,k} \cap \text{int} A_{n,k'} = \emptyset$  si  $k \neq k'$ .

D'après le principe du maximum, le disque bordé par  $\partial_0 A_{n,k}$  est envoyé par  $u_n$  dans  $\{a \leq k - 1\}$ . Il n'est pas difficile de trouver un anneau  $A'_{n,k} \subset A_{n,k}$  tel que :

- $u_n$  envoie chaque bord dans des niveaux de  $a$  distants de 1 ;
- l'oscillation de  $u_n|_{A'_{n,k}} \leq 2$ .

(Par exemple, si  $A_{n,k}$  ne convient pas lui-même, on peut obtenir  $A'_{n,k}$  en partant du minimum absolu de  $a \circ u_n|_{A_{n,k}}$  - voir fig.2.)

D'après (3) et (4), les intégrales  $\int_{A'_{n,k}} u_n^* d\lambda$  n'ont pas un minorant  $> 0$  uniforme en  $n$  et  $k$ . On note alors  $v_m : A_m \rightarrow W$  une sous-suite de  $u_n$  :

$A'_{n,k} \rightarrow W$  satisfaisant (5) ; (6) est assuré par la construction même des  $A'_{n,k}$ .

*Preuve de (7).* Soit  $D_m$  le disque bordé par  $\partial_1 A_m$  et  $v_m : D_m \rightarrow W$  la courbe  $J$ -holomorphe prolongeant  $v_m : A_m \rightarrow W$  (induite par un certain  $u_{n,k}$ ). Soit  $D'_m \subset D_m$  un sous-disque tel que :

- $a \circ v_m|_{\partial D'_m} = \text{const.}$
- l'oscillation de  $a \circ v_m|_{D'_m} = 1$  (génériquement).

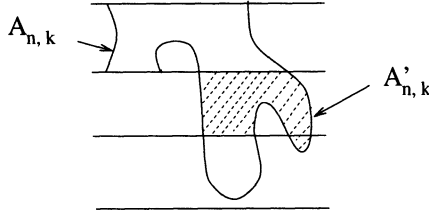


Figure 2

Ainsi le diamètre de  $v_m(D'_m)$  n'approche pas de zéro ; d'après le lemme de monotonie l'aire de  $v_m(D'_m)$  n'approche pas non plus de zéro - on rappelle que la métrique est invariante par translation parallèle à  $\partial_a$ , ce qui permet de considérer que  $v_m(D'_m)$  varie dans un compact.

Après une translation convenable,  $a \circ v_m(\partial D'_m) = 0$ . A une constante près l'aire de  $D'_m$  est alors donnée par

$$\int_{D'_m} v_m^*(da \wedge \lambda + d\lambda) = \int_{D'_m} v_m^* d(a\lambda) + \int_{D'_m} v_m^*(1-a)d\lambda.$$

Par Stokes le premier terme de cette somme est nul ; par ailleurs le second terme est majoré par  $2 \int_{D'_m} v_m^* d\lambda$ . Donc  $\int_{\partial D'_m} v_m^* \lambda$  n'approche pas 0. On en déduit (7) car

$$\int_{D_m - D'_m} v_m^* d\lambda \geq 0 \text{ implique } \int_{\partial D_m} v_m^* \lambda \geq \int_{\partial D'_m} v_m^* \lambda.$$

*Preuve de (8).* Après une translation convenable,  $a \circ v_m(\partial_i A_m) = i$  pour

$i = 0, 1$  et  $|a \circ v_m| \leq 1$  sur  $A_m$ . Donc on peut majorer  $\frac{1}{\text{Mod}(A_m)}$  par

$$\begin{aligned} \int_{A_m} v_m^*(da \wedge \lambda) &= \int_{\partial_1 A_m} v_m^* \lambda - \int_{A_m} v_m^*(ad\lambda) \\ &\leq \int_{D_m} v_m^* d\lambda + \int_{A_m} v_m^* d\lambda. \end{aligned}$$

Donc d'après 3.3(ii) on a  $\frac{1}{\text{Mod}(A_m)} \leq \text{const.} \int_S |d\lambda|$ . •

Quitte à prendre un sous-anneau de  $A_m$ , on peut supposer que le module est constant et donc que  $A_m$  est paramétré par une surface de Riemann fixe  $A$ . D'après (5) et pour  $n$  grand, l'intégrale de  $v_m^* \lambda$  est à peu près la même sur toutes les courbes qui font le tour de  $A_m$ ; donc (7) vaut encore pour  $A$ . Après une translation convenable  $v_m(A)$  est contenu dans un compact. Le lemme de Schwarz assure l'équicontinuité de cette suite (translatée) en restriction à un sous-anneau compact  $A' \subset \text{int} A$ ; d'où la convergence  $C^0$  (et  $C^\infty$  par la régularité elliptique) d'une sous-suite de  $v_n|_{A'}$ . Pour l'application limite, (1) et (2) découlent de (5) et (7). •

#### 4.6. L'approche de Hofer

Elle consiste à prouver que la non-compacité de la famille de Bishop se traduit par l'apparition d'une *bulle infinie*, courbe  $J$ -holomorphe  $v : \mathbf{C} \rightarrow W$ , dont le bout est asymptote au cylindre  $p^{-1}(\mathcal{O})$  au-dessus d'une orbite périodique du champ de Reeb. Cependant pour rester dans un cadre où l'aire est finie, il faut introduire une mesure d'aire plus sophistiquée.

Selon H. Hofer et K. Wysocki, l'existence d'une telle bulle débouche sur d'autres résultats relatifs à l'existence d'une infinité d'orbites périodiques [HW].

#### 4.7. Retour sur la structure de contact standard de $S^3$

En se fondant sur le théorème de Rabinowitz, on a pu exclure la structure standard de notre discussion. Or une idée de remplissage à paramètres permet de la traiter dans le même esprit.

On considère  $S^3 = \{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1\}$ , muni d'une forme de contact  $\lambda$ , où  $\ker \lambda$  est la structure de contact standard. On introduit  $W = \mathbf{R} \times S^3$

muni d'une structure presque complexe comme en 3.1. En dehors des pôles,  $S^3$  est feuilleté par les 2-sphères  $S_s = \{y_2 = s\}$  sur chacune desquelles le feuilletage caractéristique a exactement deux singularités elliptiques. Pour  $s$  voisin de 1, on peut remplir  $S_s$  par des disques  $J$ -holomorphes  $D_{s,t} \subset W$ .

Si cette famille n'explose pas, on pourra atteindre  $s = -1$  et on aura écrit  $\{0\} \times S^3$  comme bord d'une boule dans  $\mathbf{R} \times S^3$ , ce qui est absurde. L'explosion de la famille de Bishop détecte une orbite périodique du champ de Reeb de  $\lambda$ .

*Remerciements.* Je remercie particulièrement François Labourie pour sa contribution originale à cet exposé. Je remercie Helmut Hofer pour les éclaircissements et améliorations qu'il a apportés dans le cadre de son cours au Centre Emile Borel (printemps 94). Je remercie aussi Yasha Eliashberg, Emmanuel Giroux, Jean-Claude Sikorav et Claude Viterbo pour leurs aides et leurs encouragements.

## Références

- [AL] M. Audin, J. Lafontaine, eds., Holomorphic curves in symplectic geometry, Birkhäuser, 1994.
- [Be1] D. Bennequin, Entrelacements et équations de Pfaff, Astérisque 103-108 (1983), 83-161.
- [Be2] D. Bennequin, Caustique mystique [d'après Arnold et al.], Sémin. Bourbaki, Astérisque 133-134 (1986), 19-56.
- [Be3] D. Bennequin, Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques [d'après M. Gromov], Sémin. Bourbaki, Astérisque 145-146 (1987), 111-136.
- [BG] E. Bedford, B. Gaveau, Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in  $\mathbf{C}^2$ , Amer. J. of Math. 105 (1983), 975-1009.
- [Ber] H. Berestycki, Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens, Sémin. Bourbaki, Astérisque 105-106 (1983), 105-128.
- [Bers] L. Bers, An outline of the theory of pseudo-analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 291-331.

- [Bi] E. Bishop, Differentiable manifolds in complex Euclidian space, *Duke Math. J.*
- [El1] Y. Eliashberg, Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds, *Invent. Math.* 98 (1989), 623-637.
- [El2] Y. Eliashberg, Filling by holomorphic discs and its applications, *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* 151 (1991), 45-67.
- [El3] Y. Eliashberg, Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work, *Ann. Inst. Fourier* 42 (1992), 165-192.
- [Ga] P. Gauduchon, The canonical almost complex structure on the manifold of 1-jets of pseudo-holomorphic mappings between two almost complex manifolds, p. 69-74 in [AL].
- [Gi1] E. Giroux, Convexité en topologie de contact, *Comment. Math. Helv.* 66 (1991), 637-677.
- [Gi2] E. Giroux, Topologie de contact en dimension trois [autour de travaux de Yakov Eliashberg], *Sém. Bourbaki, Astérisque* 216 (1993), 7-34.
- [Gr] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. math.* 82 (1985), 307-347.
- [Hed] G. Hedlund, Fuchsian groups and transitive horocycles, *Duke Math. Journal* 2 (1936), 530-542.
- [Hem] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, 1976.
- [Her] M. Herman, Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie  $C^\infty$  n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergie, *C. R. Acad. Sc. Paris série I Math.* 312 (1991), 989-994.
- [Ho] H. Hofer, Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three, *Invent. Math.* 114 (1993), 515-563.
- [HV] H. Hofer, C. Viterbo, The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), 583-622.
- [HW] H. Hofer, K. Wysocki, communication orale.



- [Lab] F. Labourie, communication orale.
- [LF] L. Lusternik, A. Fet, Variational problems on closed manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR 81 (1951), 17-18.
- [Ma] J. Martinet, Formes de contact sur les variétés de dimension trois, p. 142-163 in Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II, L.N.M. 209, Springer, 1971.
- [Mc1] D. McDuff, The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds, J. of AMS 3 (1990), 672-712.
- [Mc2] D. McDuff, The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds, J. of Diff. Geo. 34 (1991), 143-164.
- [Mc3] D. McDuff, Symplectic manifolds with contact type boundaries, Invent. math. 103 (1991), 651-671.
- [Mc4] D. McDuff, Singularities and positivity of intersections of  $J$ -holomorphic curves, p. 191-215 in [AL].
- [Mi] J. Milnor, On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p, q, r)$ , p. 175-225 in : Knots, groups and 3-manifolds, (papers dedicated to the memory of R.H. Fox, ed. by L. Neuwirth, Annals of Math. Studies 84, Princeton Univ. Press, 1975.
- [Mu] M.-P. Muller, Gromov's Schwarz lemma as an estimate of the gradient for holomorphic curves, p. 217-231 in [AL].
- [MW] M. Micallef, B. White, The structure of branch points in minimal surfaces and pseudoholomorphic curves, preprint 1994.
- [Pa] P. Pansu, Compactness, p. 233-249 in [AL].
- [Ra] P. Rabinowitz, Periodic solutions of Hamiltonian systems, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 157-184.
- [Si] J.-C. Sikorav, Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds, p. 165-189 in [AL].
- [SU] J. Sacks, K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of two spheres, Ann. of Math. 113 (1981), 1-24.
- [Ve] I.N. Vekua, Generalized analytical functions, Pergamon, London, 1962.

- [Vi] C. Viterbo, A proof of the Weinstein conjecture in  $\mathbf{R}^{2n}$ , Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire 4 (1987), 337-357.
- [We] A. Weinstein, On the hypotheses of Rabinowitz's periodic orbit theorems, J. Diff. Eq. 33 (1979), 353-358.

François LAUDENBACH  
Ecole Polytechnique  
Centre de Mathématiques  
URA 169 du CNRS  
F-91128 PALAISEAU cedex