Mecánica Estadística
Tarea 5: Teoría de Landau y Renormalización

Iván Mauricio Burbano Aldana

15 de abril de 2018

1. Teoría de Landau

1.1. Parámetro de orden

1. La derivada funcional de S es

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi] =&\frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi]-\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})}\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\, h(\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}')\\ =&\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r}')}\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\|^2+A\phi(\mathbf{r}')^2+B\phi(\mathbf{r}')^4\right)\\ &-\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\, h(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ &+\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\left(2A\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r}')^3\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\right)-h(\mathbf{r})\\ =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{1}$$

Note que según la definición de derivada de una distribución se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) =&\sum_{i=1}^d\partial_i\phi(\mathbf{r}')\partial_i\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=-\sum_{i=1}^d\partial_i^2\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ =&-\Delta\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi] =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r})\\ =&-\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\Delta\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r})\\ =&-\Delta\phi(\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{3}$$

En efecto, la condición de minimización $0 = \frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi_0]$ toma la forma

$$h(\mathbf{r}) = 2A\phi_0(\mathbf{r}) + 4B\phi_0(\mathbf{r})^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}). \tag{4}$$

2. En el caso $h = 0$ en el que ϕ_0 es constante, $\Delta\phi = 0$ y por lo tanto

$$0 = 2A\phi_0 + 4B\phi_0^3 = 2\phi_0(A + 2B\phi_0^2). \tag{5}$$

Se obtienen las soluciones $\phi_0 = 0$ y, si A y B tienen signos opuestos, $\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$.

3. Empezamos considerando las expansiones en series de potencias de A y B alrededor de la temperatura crítica T_c

$$\begin{aligned} A(T) =& A_0 + A_1(T - T_c) + \cdots \\ B(T) =& B_0 + B_1(T - T_c) + \cdots . \end{aligned} \tag{6}$$

Recordando los resultado de campo medio, queremos dependencia del tiempo. Por lo tanto no podemos permitirnos considerar a A y B simultaneamente como constantes. Mas aún, ya que en la aproximación de campo medio tenemos para $T < T_c$ la relación $m \propto |T - T_c|^{1/2}$ y, como se demostró en clase, podemos identificar ϕ_0 con m, observamos que las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A_0 + A_1(T - T_c) + \cdots}{2B_0 + B_1(T - T_c) + \cdots}} \tag{7}$$

coinciden con las obtenidas en campo medio al poner $A_0 = A_2 = \cdots = B_1 = B_2 \cdots = 0$. Más aún, queremos que esta solución sea inválida en el caso $T > T_c$. Esto lo podemos obtener asegurando que los coeficientes A_1 y B_0 tengan el mismo signo. Las escogemos positivas. En este caso, si $T > T_c$, se tiene $A > 0$. Por lo tanto, la única solución posible es $\phi_0 = 0$. Por el otro lado, si $T < T_c$, tanto la solución $\phi_0 = 0$ como las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{A_1(T_c - T)}{B}} \tag{8}$$

son permitidas. Sin embargo, solo consideramos la solución (8) ya que esta minimiza la energía libre. En efecto, ya que $h = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} F =& H[\phi_0] = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\left(A\phi^2 + B\phi^4\right) = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\left(A + B\phi^2\right)\phi^2 \\ =& \begin{cases} 0, & \phi_0 = 0 \\ -\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,(A - B\frac{A}{2B})\frac{A}{2B} = -\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\frac{A^2}{4B} < 0, & \phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

1.2. Correlaciones

1. Tomando la derivada funcional y utilizando la relación vista en clase $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}')$ se tiene

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) =&\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} h(\mathbf{r}') = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\big(2A\phi_0(\mathbf{r}') + 4B\phi_0(\mathbf{r}')^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}')\big)\\ =&2A\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}') + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}') - \Delta\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}')\\ =&2AG(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}', \mathbf{r}).\end{aligned} \tag{10}$$

Si $h = 0$ y el sistema es homogeneo, ϕ_0 es constante y $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$. Es claro entonces por la regla de la cadena que

$$\Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \Delta G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \tag{11}$$

Tomando

$$\xi^{-2} = 2A + 12B\phi_0^2 \tag{12}$$

y haciendo el cambio de variable $\mathbf{r}' - \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$ se concluye

$$\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})G(\mathbf{r}). \tag{13}$$

Podemos determinar

$$\begin{aligned}\xi =&\frac{1}{\sqrt{2A + 12B\phi^2}}\\ =&\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2A - 12B\frac{A}{2B}}} = \frac{1}{2\sqrt{-A}} = \frac{1}{2\sqrt{A_1(T_c - T)}}, & T < T_c\\ \frac{1}{\sqrt{2A}} = \frac{1}{\sqrt{2A_1(T - T_c)}}, & T > T_c.\end{cases}\end{aligned} \tag{14}$$

2. Utilizando la forma integral de la distribución delta e insertando la transformada de Fourier en (13) se tiene

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} =&\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}(-\Delta + \xi^{-2})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}(\mathbf{k}^2 + \xi^{-2})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{15}$$

en vista de que $\Delta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i\mathbf{k}\cdot i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Comparando se obtiene que

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}}. \tag{16}$$

3. Utilizando el resultado anterior y restringiendo a $d = 3$ tenemos

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) =& \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\ =& \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, u^2 \sin(\theta) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|\cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}} \\ =& \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_1^{-1} \mathrm{d}v \, (-1) u^2 \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|v}}{u^2 + \xi^{-2}} \\ =& \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}u \, u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|} - e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}} \end{aligned} \tag{17}$$

Note que bajo un cambio de variable

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{d}u \, u \frac{e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}} =& \int_0^{-\infty} \mathrm{d}u \, (-1)(-u) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{(-u)^2 + \xi^{-2}} \\ =& - \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}u \, u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u \, \frac{u e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{19}$$

Sea $R > i\xi^{-1}$. Considere bajo la orientación en contra de las manecillas del reloj los conjuntos

$$\begin{aligned} S_R^+ :=& \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} | \theta \in [0, \pi]\} \subseteq D_R := S_R^+ \cup [-R, R] \times \{0\} \\ \subseteq& \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\}, \end{aligned} \tag{20}$$

el dominio de definición de la función holomorfa

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z e^{iz\|\mathbf{r}\|}}{z^2 + \xi^{-2}} = \frac{z e^{iz\|\mathbf{r}\|}}{(z + i\xi^{-1})(z - i\xi^{-1})}. \end{aligned} \tag{21}$$

D_R solo encierra el polo $i\xi^{-1}$ y en este punto el residuo de f claramente es

$$\frac{i\xi^{-1} e^{ii\xi^{-1}\|\mathbf{r}\|}}{2i\xi^{-1}} = \frac{1}{2} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{22}$$

Por lo tanto por el teorema del residuo

$$\int_{D_R} \mathrm{d}z \, f(z) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}, \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u \, f(u) = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{D_R} \mathrm{d}z \, f(z) - \int_{S_R^+} \mathrm{d}z \, f(z) \right) \\ = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} - \lim_{R\to\infty} \int_{S_R^+} \mathrm{d}z \, f(z) = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \end{aligned} \tag{24}$$

El límite desaparece por la estimación

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, f(z)\right| \leq \int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, |f(z)| = \int \mathrm{d}z\, R \left|\frac{e^{iRre^{i\theta}}}{R^2e^{i2\theta}+\xi^{-2}}\right| \\
=& R\int \mathrm{d}z\, \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{(R^2e^{i2\theta}+\xi^{-2})(R^2e^{-i2\theta}+\xi^{-2})} \\
=& R\int \mathrm{d}z\, \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{R^4+\xi^{-4}+2R^2\xi^{-2}\cos(2\theta)} \\
\leq& \pi R^2 \sup\left\{ \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{R^4+\xi^{-4}+2R^2\xi^{-2}\cos(2\theta)} \,\middle|\, \theta\in(0,\pi)\right\} \\
\xrightarrow[R\to\infty]{}& \pi R^2 0 = 0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Para poner los límites del ángulo utilizamos el hecho de que $[0,\pi]\backslash(0,\pi) = \{0,\pi\}$ tiene medida nula. Se concluye que

$$
G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \tag{26}
$$

4. En el caso $d = 2$ tenemos tomando coordenadas polares con los ángulos medidos desde $\mathbf{r}$

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) =& \int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2+\xi^{-2}} \\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, u\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|\cos(\theta)}}{u^2+\xi^{-2}}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Recordando la expresión integral para la función de Bessel de orden 0[1]

$$
\begin{aligned}
J_0(x) =& \frac{1}{2}(J_0(x)+J_0(x)) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{-ix\cos(\theta)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi\, \mathrm{d}\theta\, e^{-ix\cos(\theta-\pi)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi\, \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

se tiene

$$
G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{uJ_0(u\|\mathbf{r}\|)}{u^2+\xi^{-2}}. \tag{29}
$$

Recordando que bajo ciertas asunciones sobre el comportamiento de las funciones se tiene[2]

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)g(x) = \int_0^\infty \mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}^{-1}(g)(x), \tag{30}$$

se tiene que[1, 2]

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \mathcal{L}(u \mapsto J_0(u\|\mathbf{r}\|))(u)\mathcal{L}^{-1}\left(u \mapsto \frac{u}{u^2+\xi^{-2}}\right)(u) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2+u^2}}\cos\left(\frac{u}{\xi}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \|\mathbf{r}\|\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2+\|\mathbf{r}\|^2u^2}}\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right)}{\sqrt{1+u^2}} = K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi)
\end{aligned} \tag{31}$$

El crédito de esta solución va para Iwaniuk[3].

5. En el caso $d = 2$ tenemos según el apéndice del enunciado que para $\|\mathbf{r}\|/\xi \gg 1$, es decir, $\|\mathbf{r}\| \gg \xi$ se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \sim \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi\xi}{2\|\mathbf{r}\|}}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{32}$$

Este es el comportamiento deseado. En el caso $d = 3$ el comportamiento es trivial de (26).

6. En el caso $d = 2$ cuando $\xi \gg \|\mathbf{r}\|$ se tiene $\|\mathbf{r}\|/\xi \ll 1$. Por lo tanto, según el apéndice del enunciado se tiene

$$G(\mathbf{r}) \sim -\frac{1}{2\pi}\ln(\|\mathbf{r}\|/\xi). \tag{33}$$

Ya que no hay dependencia en potencias, se tiene $0 = d+\eta-2 = 2+\eta-2 = \eta$. En el caso $d = 3$ vemos que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \sim \frac{1}{2\pi\|\mathbf{r}\|}. \tag{34}$$

Por lo tanto $1 = d + \eta - 2 = 3 + \eta - 2 = 1 + \eta$. Se concluye una vez más que $\eta = 0$.

7. En el punto crítico $\xi \to \infty$. Por lo tanto en caso $d = 2$ y $d = 3$

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2+\zeta} \sim \frac{1}{\mathbf{k}^2} = \|\mathbf{k}\|^{-2} \tag{35}$$

Se concluye entonces que $\eta = 0$ en ambos casos, resultado que concuerda con el anterior.

2. Renormalización

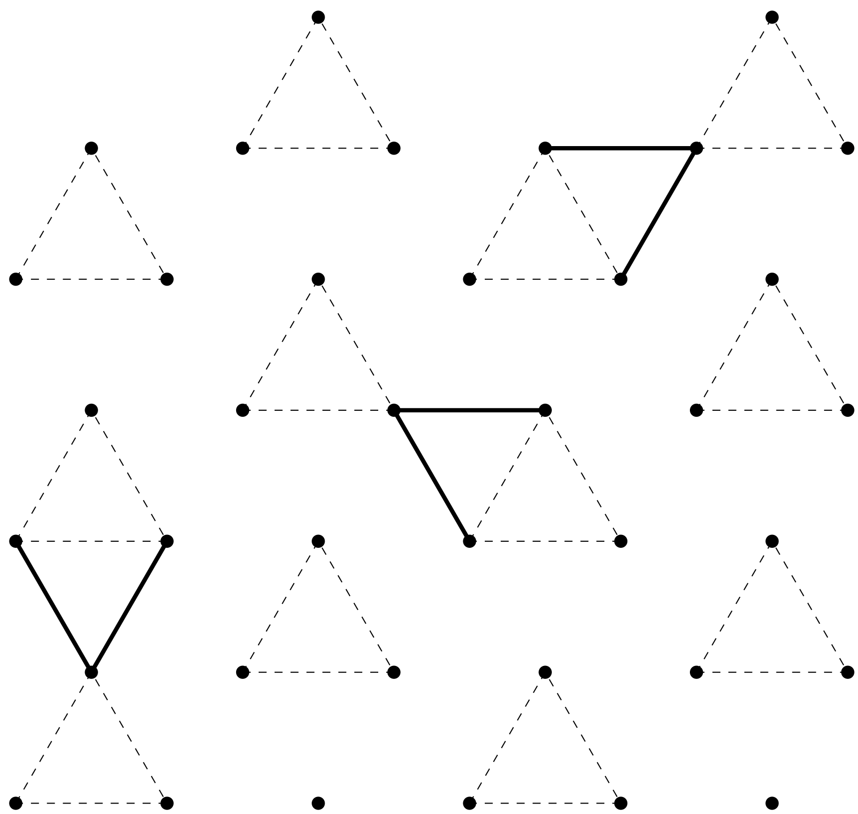

Figura 1: Se muestra una red triangular de sitios para un retículo de espines. Las lineas punteadas señalan la agrupación de los espines en el equema de renormalización propuesto. Las lineas solidas corresponden a ejemplos de vecinos más cercanos que pertencen a grupos distintos.

1. Considere la red triangular mostrada en la figura 1. Al conjunto a lo sumo contable de sitios lo vamos a denotar Λ y al de vecinos más cercanos $\langle\Lambda\rangle \subseteq \Lambda\times\Lambda$. Cabe notar que solo escojemos un representante por vecino, es decir, si $(i,j) \in \langle\Lambda\rangle$ entonces $(j,i) \notin \langle\Lambda\rangle$. Entonces los microestados de la red se pueden tomar como los elementos $s \in \{-1,1\}^\Lambda$ bajo la interpretación de que $s_i := s(i)$ para $i \in \Lambda$ es el espín en el sitio i. El Hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} \beta H &: \{-1,1\}^\Lambda \to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \beta H(s) = -K \sum_{(i,j)\in\langle\Lambda\rangle} s_i s_j - h \sum_{i\in\Lambda} s_i \end{aligned} \tag{36}$$

para unas constantes $K, h \in [0, \infty)$.

Vamos a considerar un esquema de renormalización agrupando los sitios en grupos de 3. Por lo tanto, el factor de escala λ está determinado por la restricción de que $\lambda^2 = 3$. Se concluye que $\lambda = \sqrt{3}$. Podemos tomar $\Lambda' \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ como el conjunto de los grupos de 3 sitios. Este va a ser el conjunto de sitios despues del procedimiento de renormalización. Note que para cada $\mu \in \Lambda'$ se tiene un conjunto $\langle \mu \rangle := \{(i,j) \in \langle \Lambda \rangle \,|\, i, j \in \mu\} \subseteq \langle \Lambda \rangle$ de vecinos contenidos en μ. Ya que los elementos de Λ' son disjuntos,

$$\beta H(s) = \beta H_0(s) + \beta V(s) \tag{37}$$

donde

$$\beta H_0(s) = -K \sum_{(i,j) \in \bigcup\limits_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle} s_i s_j = -K \sum_{\mu \in \Lambda'} \sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} s_i s_j \tag{38}$$

y

$$\beta V(s) = -K \sum_{(i,j) \in \langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup\limits_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle} s_i s_j - h \sum_{i \in \Lambda} s_i. \tag{39}$$

Note que el conjunto $\langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup\limits_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle$ es el de vecinos más cercanos que corresponden a grupos distintos. Sea $\langle \Lambda' \rangle \subseteq \Lambda' \times \Lambda'$ el conjunto de grupos vecinos más cercanos. Sin perdida de generalidad, ordenamos los pares de manera que si $(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle$ el segmento más corto entre los triángulos generados por μ y ν tiene un punto final en un vertice del generado por μ y otro en la mitad de una arista del generado por ν. Defina $s_{(\mu,\nu)}$ como el espín en el vertice en el segmento y $s^{(1)}_{(\mu,\nu)}$ y $s^{(2)}_{(\mu,\nu)}$ como los espinos en los vertices que generan la arista en el segmento. En particular $s_{(\mu,\nu)} = s_i$ para algún $i \in \mu$ y $s^{(1)}_{(\mu,\nu)} = s_{j_1}$ y $s^{(2)}_{(\mu,\nu)} = s_{j_2}$ para algunos $j_1, j_2 \in \nu$ distintos. La figura 1 muestra que todos los $s_i s_j$ con $(i,j) \in \langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup\limits_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle$ son de la forma $s_{(\mu,\nu)} s^{(1)}_{(\mu,\nu)}$ o $s_{(\mu,\nu)} s^{(2)}_{(\mu,\nu)}$ para $(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle$. Concluimos que

$$\beta V(s) = -K \sum_{(\mu,\nu) \in \langle \Lambda' \rangle} \left(s_{(\mu,\nu)} s^{(1)}_{(\mu,\nu)} + s_{(\mu,\nu)} s^{(2)}_{(\mu,\nu)} \right) - h \sum_{i \in \Lambda} s_i. \tag{40}$$

Defina la función

$$\begin{aligned} f_\mu : \{-1,1\}^\mu &\to \{-1,1\} \\ s &\mapsto \operatorname{sgn} \sum_{i \in \mu} s_i. \end{aligned} \tag{41}$$

para todo $\mu \in \Lambda'$. Si $\mu = \{i, j, k\}$ entonces interpretamos $s'_\mu := f_\mu(s)$ como el espín en el sitio μ posterior al proceso de renormalización. Es claro que este mapa le asigna a los nuevos sitios su espín según una regla de mayoría. Esta función se extiende a

$$\begin{aligned} g : \{-1,1\}^{\Lambda} &\to \{-1,1\}^{\Lambda'} \\ s &\mapsto s' \end{aligned} \tag{42}$$

donde $s'(\mu) := s'_{\mu}$. Este mapa le asigna a cada estado de la red original un estado en la red renormalizada. Mediante este podemos inducir a partir de la medida de probabilidad canónica sobre $\{-1,1\}^{\Lambda}$ generada por

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(s)}, \tag{43}$$

con Z la constante de normalización apropiada, una medida de probabilidad sobre $\{-1,1\}^{\Lambda'}$ generada por

$$\begin{aligned} P'(\{s'\}) =& P(g^{-1}(\{s'\})) = \frac{1}{Z} \sum_{s \in g^{-1}(\{s'\})} e^{-\beta H(s)} \\ =& \frac{1}{Z} \sum_{s \in g^{-1}(\{s'\})} e^{-\beta H_0(s)} e^{-\beta V(s)} = \frac{Z_0}{Z} \left\langle e^{-\beta V} \right\rangle_{P_0(s')} \end{aligned} \tag{44}$$

donde $P_0(s')$ es una medida de probabilidad sobre $\{-1,1\}^{\Lambda}$ generada por

$$\begin{aligned} P_0(s')(\{s\}) =& \frac{\chi_{g^{-1}(\{s'\})}(s)}{Z_0(s')} e^{-\beta H_0(s)} \\ =& \frac{\chi_{g^{-1}(\{s'\})}(s)}{Z_0(s')} \prod_{\mu \in \Lambda'} e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \end{aligned} \tag{45}$$

donde $\chi_{g^{-1}(\{s'\})}$ es la función característica de $g^{-1}(\{s'\})$ y Z_0 es la constante de normalización apropiada. Note que esta medida es el producto de las medidas $P_{\mu}(s')$ sobre $\{-1,1\}^{\mu}$ para $\mu \in \Lambda'$ definidas por

$$P_{\mu}(s')(\{s\}) = \frac{\chi_{f_{\mu}^{-1}(\{s'_{\mu}\})}(s)}{Z_{\mu}(s')} e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \tag{46}$$

donde

$$\begin{aligned} Z_{\mu}(s') =& \sum_{s \in \{-1,1\}^{\mu}} \chi_{f_{\mu}^{-1}(\{s'_{\mu}\})}(s) e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \\ =& \sum_{s \in f_{\mu}^{-1}(\{s'_{\mu}\})} e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \\ =& \sum_{(s_1, s_2, s_3) \in f_{\mu}^{-1}(\{s'_{\mu}\})} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)}. \end{aligned} \tag{47}$$

Se tiene que $f_\mu^{-1}(\{1\}) = \{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ y por lo tanto

$$\sum_{(s_1,s_2,s_3)\in f_\mu^{-1}(\{1\})} e^{K(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)} = e^{3K} + 3e^{-K}. \tag{48}$$

Por la simetría del modelo bajo la inversión de los espines se tiene que $f^{-1}(\{-1\}) = \{(-1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1)\}$ y

$$\sum_{(s_1,s_2,s_3)\in f_\mu^{-1}(\{-1\})} e^{K(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)} = e^{3K} + 3e^{-K}. \tag{49}$$

Por lo tanto

$$Z_\mu(s') = e^{3K} + 3e^{-K} \tag{50}$$

Definimos el Hamiltoniano renormalizado $H' : \{-1,1\}^{\Lambda'} \to \mathbb{R}$ pidiendo que P' corresponda al estado de Gibbs de este y se preserve la función de partición. Entonces

$$P'(\{s'\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta' H'(s')}, \tag{51}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \beta' H'(s') &= -\ln(ZP'(\{s'\})) = -\ln\Big(Z_0(s')\left\langle e^{-\beta V}\right\rangle_{P_0(s')}\Big) \\ &= -\ln\Big(\left\langle e^{-\beta V}\right\rangle_{P_0(s')}\Big) - \ln(Z_0(s')) = . \end{aligned} \tag{52}$$

2. Para calcular el nuevo Hamiltoniano vamos a realizar la aproximación

$$\left\langle e^{-\beta V}\right\rangle_{P_0(s')} \approx e^{-\langle \beta V\rangle_{P_0(s')}} \tag{53}$$

Este valor esperado se puede calcular como

$$\begin{aligned} &\langle \beta V\rangle_{P_0(s')} = \\ &- K \sum_{(\mu,\nu)\in\langle\Lambda'\rangle} \left(\left\langle s_{(\mu,\nu)} s^{(1)}_{(\mu,\nu)} \right\rangle_{P_0(s')} + \left\langle s_{(\mu,\nu)} s^{(2)}_{(\mu,\nu)} \right\rangle_{P_0(s')} \right) \\ &- h \sum_{i\in\Lambda} \langle s_i\rangle_{P_0(s')} . \end{aligned} \tag{54}$$

donde hacemos el abuso de notación $\langle s_i\rangle_{P_0(s')} := \langle \pi_i\rangle_{P_0(s')}$ y $\langle s_i s_j\rangle_{P_0(s')} := \langle \pi_i\pi_j\rangle_{P_0(s')}$ para las funciones de evaluación

$$\begin{aligned} \pi_i : \{-1,1\}^\Lambda &\to \{-1,1\} \\ s &\mapsto s_i \end{aligned} \tag{55}$$

para todo $i \in \Lambda$. Dado que estos son valores esperados de funciones locales con una medida producto tenemos que $\langle s_i\rangle_{P_0(s')} = \langle s_i\rangle_{P_\mu(s')}$ y $\langle s_i s_j\rangle_{P_0(s')} = \langle s_i\rangle_{P_0(s')}\langle s_j\rangle_{P_0(s')} = \langle s_i\rangle_{P_\mu(s')}\langle s_j\rangle_{P_\nu(s')}$ donde $i \in \mu$ y

$j \in \nu$ con $\mu, \nu \in \Lambda'$ distintos. Una vez más, hacemos el abuso de notación $\langle s_i \rangle_{P_\mu(s')} := \langle \tau_i \rangle_{P_\mu(s')}$ donde

$$\begin{aligned} \tau_i : \{-1,1\}^\mu &\to \{-1,1\} \\ s &\mapsto s_i. \end{aligned} \tag{56}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle s_i \rangle_{P_\mu(s')} &= \sum_{s \in \{-1,1\}^\mu} \frac{\chi_{f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})}(s)}{Z_\mu(s')} e^{\sum_{(j,k)\in\langle\mu\rangle} K s_j s_k} s_i \\ &= \sum_{s \in f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})} \frac{1}{e^{3K} + 3e^{-K}} e^{\sum_{(j,k)\in\langle\mu\rangle} K s_j s_k} s_i \\ &= \begin{cases} \frac{1}{e^{3K}+3e^{-K}} \left(e^{3K} + e^{-K}\right) & s'_\mu = 1 \\ \frac{1}{e^{3K}+3e^{-K}} \left(-e^{3K} - e^{-K}\right) & s'_\mu = -1 \end{cases} \\ &= \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} s'_\mu. \end{aligned} \tag{57}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano nuevo es

$$\begin{aligned} &\beta' H'(s') = \\ &- 2K\left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}\right)^2 \sum_{(\mu,\nu)\in\langle\Lambda'\rangle} s'_\mu s'_\nu - 3h\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \sum_{\mu\in\Lambda} s'_\mu \end{aligned} \tag{58}$$

donde la última suma se paso a Λ' teniendo en cuenta que por cada grupo hay tres sitios. Se concluye que la operación de renormalización es

$$\begin{aligned} &R_\lambda : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)^2 \\ &\quad (K,h) \mapsto (K',h') := \left(2K\left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}\right)^2, 3h\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}\right) \end{aligned} \tag{59}$$

3. Es obvio que $(0,0)$ es un punto fijo. Suponga que $h \neq 0$. Entonces

$$R_\lambda(0,h) = \left(0, \frac{3h}{2}\right) \neq (0,h) \tag{60}$$

Suponga que $(0,0) \neq (K,h) \in [0,\infty)^2$ es otro punto fijo de R. Por el argumento anterior $K \neq 0$. Luego de

$$K = 2K\left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}\right)^2 \tag{61}$$

se deduce que

$$2\left(\frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3}\right)^2 = 2\left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}\right)^2 = 1. \tag{62}$$

Esto se puede reducir a una ecuación lineal en e^{4K}

$$\sqrt{2}(e^{4K}+1)=e^{4K}+3 \tag{63}$$

cuya solución es

$$e^{4K}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}, \tag{64}$$

es decir,

$$K=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)\approx 0{,}336. \tag{65}$$

Por el otro lado, tenemos

$$h=3h\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}=\frac{3h}{\sqrt{2}}. \tag{66}$$

Se concluye que $h=0$. Luego los dos puntos fijos de R son $(0,0)$ y $(0{,}336,0)$.

4. El punto $(0,0)$ corresponde a una red en la cual no hay campo magnético y los espines no interactúan. Esto hace que el punto no sea interesante.

   Tenemos

$$\begin{aligned}
&\partial_1 R^1_\lambda(K,h)=2\left(\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}\right)^2+4K\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}\times\\
&\frac{(3e^{3K}-e^{-K})(e^{3K}+3e^{-K})-(e^{3K}+e^{-K})(3e^{3K}-3e^{-K})}{(e^{3K}+3e^{-K})^2}\\
&\partial_1 R^2_\lambda(K,h)=3h\times\\
&\frac{(3e^{3K}-e^{-K})(e^{3K}+3e^{-K})-(e^{3K}+e^{-K})(3e^{3K}-3e^{-K})}{(e^{3K}+3e^{-K})^2}\\
&\partial_2 R^1_\lambda(K,h)=0\\
&\partial_2 R^2_\lambda(K,h)=3\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}
\end{aligned} \tag{67}$$

   Evaluando en el punto crítico interesante se obtiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}^{y_T}=&\lambda^{y_T}=\partial_1 R^1_\lambda(K^*,h^*)\approx 1{,}623524\\
\sqrt{3}^{y_h}=&\lambda^{y_h}=\partial_2 R^2_\lambda(K^*,h^*)=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2{,}121320.
\end{aligned} \tag{68}$$

   Se concluyen entonces los valores

$$\begin{aligned}
y_T\approx&0{,}882203\\
y_h\approx&1{,}369070.
\end{aligned} \tag{69}$$

Con estos valores podemos hallar los exponentes críticos. Tome (K', h') cercano a (K^*, h^*) y defina la función

$$L : [0, \infty)^2 \to [0, \infty) \tag{70}$$

tal que

$$(K', h') = R_{L(K,h)}(K, h) \approx (K^*, h^*) + (L(K, h)^{y_T}(K - K^*), L(K, h)^{y_h}(h - h^*)). \tag{71}$$

para (K, h) cercano a (K^*, h^*). Para la longitud de correlación tenemos la relación de escala $\xi' = \xi/L(K, h)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \xi =& \xi' L(K, h) = \xi' \left(\frac{K' - K^*}{K - K^*} \right)^{1/y_T} \propto (K - K^*)^{-1/y_T} \\ \propto& (T - T_c)^{-1/y_T} \end{aligned} \tag{72}$$

donde se utilizo que K es proporcional a la temperatura como se puede ver de la expresión para el Hamiltoniano. Se conluye

$$\nu = \frac{1}{y_T} \approx 1{,}133526. \tag{73}$$

Referencias

[1] National Institute of Standards and Technology, "DLMF: 10.32 Integral Representations." https://dlmf.nist.gov/10.32, 2018.

[2] J. Williams, *Laplace Transforms*. George Allen & Unwin Ltd, 1973.

[3] M. Iwaniuk, "How can I solve this equality?." https://math.stackexchange.com/questions/2731192/how-can-i-solve-this-equality/2731231#2731231, 2018.