Mecánica Estadística
Tarea 5: Teoría de Landau y Renormalización

Iván Mauricio Burbano Aldana

13 de abril de 2018

1. Teoría de Landau

1.1. Parámetro de orden

1. La derivada funcional de S es

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi] =&\frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi]-\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})}\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\, h(\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}')\\ =&\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r}')}\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\|^2+A\phi(\mathbf{r}')^2+B\phi(\mathbf{r}')^4\right)\\ &-\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\, h(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ &+\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\left(2A\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r}')^3\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\right)-h(\mathbf{r})\\ =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{1}$$

Note que según la definición de derivada de una distribución se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) =&\sum_{i=1}^{d}\partial_i\phi(\mathbf{r}')\partial_i\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=-\sum_{i=1}^{d}\partial_i^2\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ =&-\Delta\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{2}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi] =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r})\\ =&-\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\Delta\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r})\\ =&-\Delta\phi(\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{3}$$

En efecto, la condición de minimización $0 = \frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi_0]$ toma la forma

$$h(\mathbf{r}) = 2A\phi_0(\mathbf{r}) + 4B\phi_0(\mathbf{r})^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}). \tag{4}$$

2. En el caso $h = 0$ en el que ϕ_0 es constante, $\Delta\phi = 0$ y por lo tanto

$$0 = 2A\phi_0 + 4B\phi_0^3 = 2\phi_0(A + 2B\phi_0^2). \tag{5}$$

Se obtienen las soluciones $\phi_0 = 0$ y, si A y B tienen signos opuestos, $\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$.

3. Empezamos considerando las expansiones en series de potencias de A y B alrededor de la temperatura crítica T_c

$$\begin{aligned} A(T) =& A_0 + A_1(T - T_c) + \cdots \\ B(T) =& B_0 + B_1(T - T_c) + \cdots . \end{aligned} \tag{6}$$

Recordando los resultado de campo medio, queremos dependencia del tiempo. Por lo tanto no podemos permitirnos considerar a A y B simultaneamente como constantes. Mas aún, ya que en la aproximación de campo medio tenemos para $T < T_c$ la relación $m \propto |T - T_c|^{1/2}$ y, como se demostró en clase, podemos identificar ϕ_0 con m, observamos que las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A_0 + A_1(T - T_c) + \cdots}{2B_0 + B_1(T - T_c) + \cdots}} \tag{7}$$

coinciden con las obtenidas en campo medio al poner $A_0 = A_2 = \cdots = B_1 = B_2 \cdots = 0$. Más aún, queremos que esta solución sea inválida en el caso $T > T_c$. Esto lo podemos obtener asegurando que los coeficientes A_1 y B_0 tengan el mismo signo. Las escogemos positivas. En este caso, si $T > T_c$, se tiene $A > 0$. Por lo tanto, la única solución posible es $\phi_0 = 0$. Por el otro lado, si $T < T_c$, tanto la solución $\phi_0 = 0$ como las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{A_1(T_c - T)}{B}} \tag{8}$$

son permitidas. Sin embargo, solo consideramos la solución (8) ya que esta minimiza la energía libre. En efecto, ya que $h = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} F =& H[\phi_0] = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\left(A\phi^2 + B\phi^4\right) = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\left(A + B\phi^2\right)\phi^2 \\ =& \begin{cases} 0, & \phi_0 = 0 \\ -\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,(A - B\frac{A}{2B})\frac{A}{2B} = -\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\frac{A^2}{4B} < 0, & \phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

1.2. Correlaciones

1. Tomando la derivada funcional y utilizando la relación vista en clase $G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}')$ se tiene

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) =&\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}h(\mathbf{r}') = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\big(2A\phi_0(\mathbf{r}') + 4B\phi_0(\mathbf{r}')^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}')\big)\\ =&2A\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}') + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}') - \Delta\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}')\\ =&2AG(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) - \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}',\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{10}$$

Si $h=0$ y el sistema es homogeneo, ϕ_0 es constante y $G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$. Es claro entonces por la regla de la cadena que

$$\Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \Delta G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}). \tag{11}$$

Tomando

$$\xi^{-2} = 2A + 12B\phi_0^2 \tag{12}$$

y haciendo el cambio de variable $\mathbf{r}'-\mathbf{r}\mapsto\mathbf{r}$ se concluye

$$\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})G(\mathbf{r}). \tag{13}$$

Podemos determinar

$$\begin{aligned}\xi =&\frac{1}{\sqrt{2A+12B\phi^2}}\\ =&\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2A-12B\frac{A}{2B}}} = \frac{1}{2\sqrt{-A}} = \frac{1}{2\sqrt{A_1(T_c-T)}}, & T<T_c\\ \frac{1}{\sqrt{2A}} = \frac{1}{\sqrt{2A_1(T-T_c)}}, & T>T_c.\end{cases}\end{aligned} \tag{14}$$

2. Utilizando la forma integral de la distribución delta e insertando la transformada de Fourier en (13) se tiene

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} =&\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta+\xi^{-2})\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}(-\Delta+\xi^{-2})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}(\mathbf{k}^2+\xi^{-2})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{15}$$

en vista de que $\Delta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i\mathbf{k}\cdot i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Comparando se obtiene que

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2+\xi^{-2}}. \tag{16}$$

3. Utilizando el resultado anterior y restringiendo a $d = 3$ tenemos

$$\begin{aligned}G(\mathbf{r}) =& \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2+\xi^{-2}}\\=&\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, u^2\sin(\theta)\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|\cos(\theta)}}{u^2+\xi^{-2}}\\=&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_1^{-1}\mathrm{d}v\,(-1)u^2\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|v}}{u^2+\xi^{-2}}\\=&\frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, u\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}-e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2+\xi^{-2}}\end{aligned}\tag{17}$$

Note que bajo un cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, u\frac{e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2+\xi^{-2}} =& \int_0^{-\infty}\mathrm{d}u\,(-1)(-u)\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{(-u)^2+\xi^{-2}}\\=&-\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}u\, u\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2+\xi^{-2}}.\end{aligned}\tag{18}$$

Por lo tanto

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u\,\frac{ue^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2+\xi^{-2}}.\tag{19}$$

Sea $R > i\xi^{-1}$. Considere bajo la orientación en contra de las manecillas del reloj los conjuntos

$$\begin{aligned}S_R^+ :=&\{Re^{i\theta}\in\mathbb{C}|\theta\in[0,\pi]\}\subseteq D_R := S_R^+\cup[-R,R]\times\{0\}\\\subseteq&\mathbb{C}\setminus\{i\xi^{-1},-i\xi^{-1}\},\end{aligned}\tag{20}$$

el dominio de definición de la función holomorfa

$$\begin{aligned}f:\mathbb{C}\setminus\{i\xi^{-1},-i\xi^{-1}\}&\to\mathbb{C}\\z&\mapsto\frac{ze^{iz\|\mathbf{r}\|}}{z^2+\xi^{-2}}=\frac{ze^{iz\|\mathbf{r}\|}}{(z+i\xi^{-1})(z-i\xi^{-1})}.\end{aligned}\tag{21}$$

D_R solo encierra el polo $i\xi^{-1}$ y en este punto el residuo de f claramente es

$$\frac{i\xi^{-1}e^{ii\xi^{-1}\|\mathbf{r}\|}}{2i\xi^{-1}}=\frac{1}{2}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}.\tag{22}$$

Por lo tanto por el teorema del residuo

$$\int_{D_R}\mathrm{d}z\,f(z)=2\pi i\frac{1}{2}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}=i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi},\tag{23}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u\,f(u)=&\lim_{R\to\infty}\left(\int_{D_R}\mathrm{d}z\,f(z)-\int_{S_R^+}\mathrm{d}z\,f(z)\right)\\=&i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}-\lim_{R\to\infty}\int_{S_R^+}\mathrm{d}z\,f(z)=i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}.\end{aligned}\tag{24}$$

El límite desaparece por la estimación

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, f(z)\right| \leq \int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, |f(z)| = \int \mathrm{d}z\, R \left|\frac{e^{iRre^{i\theta}}}{R^2 e^{i2\theta} + \xi^{-2}}\right| \\
=& R \int \mathrm{d}z\, \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{(R^2 e^{i2\theta} + \xi^{-2})(R^2 e^{-i2\theta} + \xi^{-2})} \\
=& R \int \mathrm{d}z\, \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{R^4 + \xi^{-4} + 2R^2\xi^{-2}\cos(2\theta)} \\
\leq& \pi R^2 \sup \left\{ \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{R^4 + \xi^{-4} + 2R^2\xi^{-2}\cos(2\theta)} \middle| \theta \in (0,\pi) \right\} \\
\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}& \pi R^2 0 = 0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Para poner los límites del ángulo utilizamos el hecho de que $[0,\pi]\setminus(0,\pi) = \{0,\pi\}$ tiene medida nula. Se concluye que

$$
G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \tag{26}
$$

4. En el caso $d = 2$ tenemos tomando coordenadas polares con los ángulos medidos desde $\mathbf{r}$

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) =& \int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\
=& \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|\cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Recordando la expresión integral para la función de Bessel de orden 0[**?**]

$$
\begin{aligned}
J_0(x) =& \frac{1}{2}(J_0(x) + J_0(x)) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{-ix\cos(\theta)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi\, \mathrm{d}\theta\, e^{-ix\cos(\theta-\pi)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi\, \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

se tiene

$$
G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{uJ_0(u\|\mathbf{r}\|)}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{29}
$$

Recordando que bajo ciertas asunciones sobre el comportamiento de las funciones se tiene[**?**]

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)g(x) = \int_0^\infty \mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}^{-1}(g)(x), \tag{30}$$

se tiene que[**?**, **?**]

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \mathcal{L}(u \mapsto J_0(u\|\mathbf{r}\|))(u)\mathcal{L}^{-1}\left(u \mapsto \frac{u}{u^2+\xi^{-2}}\right)(u) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2+u^2}}\cos\left(\frac{u}{\xi}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \|\mathbf{r}\|\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2+\|\mathbf{r}\|^2u^2}}\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right)}{\sqrt{1+u^2}} = K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi)
\end{aligned} \tag{31}$$

El crédito de esta solución va para Iwaniuk[**?**].

5. En el caso $d = 2$ tenemos según el apéndice del enunciado que para $\|\mathbf{r}\|/\xi \gg 1$, es decir, $\|\mathbf{r}\| \gg \xi$ se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \sim \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi\xi}{2\|\mathbf{r}\|}}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{32}$$

Este es el comportamiento deseado. En el caso $d = 3$ el comportamiento es trivial de (26).

6. En el caso $d = 2$ cuando $\xi \gg \|\mathbf{r}\|$ se tiene $\|\mathbf{r}\|/\xi \ll 1$. Por lo tanto, según el apéndice del enunciado se tiene

$$G(\mathbf{r}) \sim -\frac{1}{2\pi}\ln(\|\mathbf{r}\|/\xi). \tag{33}$$

Ya que no hay dependencia en potencias, se tiene $0 = d+\eta-2 = 2+\eta-2 = \eta$. En el caso $d = 3$ vemos que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \sim \frac{1}{2\pi\|\mathbf{r}\|}. \tag{34}$$

Por lo tanto $1 = d+\eta-2 = 3+\eta-2 = 1+\eta$. Se concluye una vez más que $\eta = 0$.

7. En el punto crítico $\xi \to \infty$. Por lo tanto en caso $d = 2$ y $d = 3$

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2+\zeta} \sim \frac{1}{\mathbf{k}^2} = \|\mathbf{k}\|^{-2} \tag{35}$$

Se concluye entonces que $\eta = 0$ en ambos casos, resultado que concuerda con el anterior.

2. Renormalización

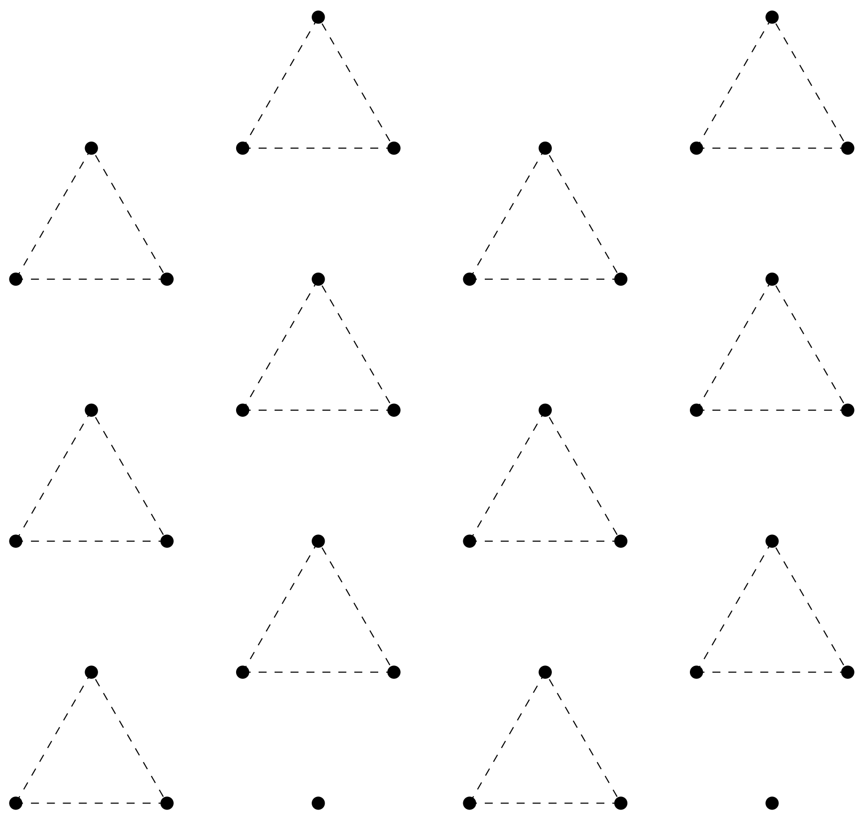

Figura 1: Se muestra una red triangular de sitios para un retículo de espines. Las lineas punteadas señalan la agrupación de los espines en el equema de renormalización propuesto.

1. Considere la red triangular mostrada en la figura 1. Al conjunto contable de sitios lo vamos a denotar Λ. Entonces los microestados de la red se pueden tomar como los elementos $s \in \{-1, 1\}^{\Lambda}$ bajo la interpretación de que $s_i := s(i)$ para $i \in \Lambda$ es el espín en el sitio i. Vamos a considerar un esquema de renormalización agrupando los sitios en grupos de 3. Por lo tanto, el factor de escala λ está determinado por la restricción de que $\lambda^2 = 3$. Se concluye que $\lambda = \sqrt{3}$.