Mecánica Cuántica Avanzada: Tarea 1

Iván Mauricio Burbano Aldana

6 de febrero de 2018

1. Asumimos que $\alpha := \{|a_n\rangle\, | n \in \{1, \dots, k\}\}$ es una base del espacio de Hilbert sobre el cual $\hat{O}_k$ actúa. Observando que

$$\hat{O}_k |a_n\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i |a_i\rangle \langle a_i|a_n\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i |a_i\rangle \delta_{in} = a_n |a_n\rangle \tag{1}$$

para todo $n \in \{1, \dots, k\}$ se concluye que la representación matricial de $\hat{O}_k$ en la base α es $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$. De esto se concluye que

$$\operatorname{tr}\left(\hat{O}_k\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i. \tag{2}$$

También podemos calcularla directamente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\hat{O}_k\right) &= \sum_{n=1}^{k} \langle a_n|\hat{O}_k|a_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} \langle a_n| \sum_{i=1}^{k} a_i |a_i\rangle \langle a_i|a_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \langle a_n|a_i\rangle \langle a_i|a_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} a_i | \langle a_n|a_i\rangle |^2 \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{in} = \sum_{i=1}^{k} a_i.
\end{aligned} \tag{3}$$

Note que para una proyección, se tiene que $\operatorname{tr}(P)$ es igual al rango de la proyección. Si la proyección es ortogonal, es autoadjunta y el teorema espectral vale. Luego si $\hat{O}_k$ es una proyección ortogonal, los $a_i \in \{0, 1\}$ son sus valores propios y el número de $a_k \neq 0$, es decir $|\{i \in \{0, \dots, k\}| a_i \neq 0\}|$ es la dimensión de su imágen.

2. Definimos $|\psi_t\rangle := \psi(\cdot, t)$ y $|\phi_i\rangle := \phi_i$ para todo indice i y tiempo t. En-

tonces tenemos para todo tiempo t

$$\begin{aligned}\langle\psi_t|\hat{P}_i|\psi_t\rangle &= \sum_k a_k(t)^* \langle\phi_k|\phi_i\rangle \langle\phi_i| \sum_l a_l(t) |\phi_l\rangle \\ &= \sum_k \sum_l a_k(t)^* a_l(t) \langle\phi_k|\phi_i\rangle \langle\phi_i|\phi_l\rangle \\ &= \sum_k \sum_l a_k(t)^* a_l(t) \delta_{ki}\delta_{il} = |a_i(t)|^2 = \left|\sum_k a_k(t)\delta_{ik}\right|^2 \\ &= \left|\sum_k a_k(t) \langle\phi_i|\phi_k\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi_i| \sum_k a_k(t) |\phi_k\rangle\right|^2 = |\langle\phi_i|\psi_t\rangle|^2\end{aligned} \tag{4}$$

demostrando lo que se pedía.

3. Para poder resolver este problema, es necesario recordar la demostración de las relaciones de incertidumbre. Suponga que $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{H}$ son operadores simétricos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $\psi \in \mathcal{D}_{AB} \cap \mathcal{D}_{BA}$ unitario donde $\mathcal{D}_{AB} := \{\phi \in \mathcal{D}_B | B\phi \in \mathcal{D}_A\}$. Defina la incertidumbre de A en el estado descrito por ψ por $(\Delta_\psi A)^2 := \|(A - \langle A\rangle_\psi)\psi\|^2$ donde $\langle A\rangle_\psi := \langle\psi, A\psi\rangle$. Entonces en vista de que $A - \langle A\rangle_\psi$ es simétrico

$$\begin{aligned}&(\Delta_\psi A)^2(\Delta_\psi B)^2 = \|(A - \langle A\rangle_\psi)\psi\|^2 \|(B - \langle B\rangle_\psi)\psi\|^2 \\ &\geq |\langle(A - \langle A\rangle_\psi)\psi, (B - \langle B\rangle_\psi)\psi\rangle|^2 \\ &\geq \left|\mathrm{Im}\Big\{\langle(A - \langle A\rangle_\psi)\psi, (B - \langle B\rangle_\psi)\psi\rangle\Big\}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\langle(A - \langle A\rangle_\psi)\psi, (B - \langle B\rangle_\psi)\psi\rangle - \langle(B - \langle B\rangle_\psi)\psi, (A - \langle A\rangle_\psi)\psi\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\langle\psi, (A - \langle A\rangle_\psi)(B - \langle B\rangle_\psi)\psi\rangle - \langle\psi, (B - \langle B\rangle_\psi)(A - \langle A\rangle_\psi)\psi\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\langle\psi, ((A - \langle A\rangle_\psi)(B - \langle B\rangle_\psi) - (B - \langle B\rangle_\psi)(A - \langle A\rangle_\psi))\psi\rangle\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big|\langle\psi, (AB - A\langle B\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi B + \langle A\rangle_\psi \langle B\rangle_\psi \\ &-BA + B\langle A\rangle_\psi + \langle B\rangle_\psi A - \langle B\rangle_\psi \langle A\rangle_\psi)\psi\rangle\Big|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\langle\psi, (AB - BA)\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle\psi, [A,B]\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Se concluye que ψ es un estado de mínima incertidumbre si y solo si se obtiene igualdad en las dos desigualdades anteriores. Ahora bien, estudiando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se puede ver que la primera desigualdad se satisface si y solo si $\{(A - \langle A\rangle_\psi)\psi, (B - \langle B\rangle_\psi)\psi\}$ no es linealmente independiente, lo que sucede si y solo si $(A - \langle A\rangle_\psi)\psi = 0$, $(B - \langle B\rangle_\psi)\psi = 0$ o existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(A - \langle A\rangle_\psi)\psi = c(B - \langle B\rangle_\psi)\psi$. Note que el primer caso es equivalente a que ψ sea vector propio de A y en tal caso se satisface automaticamente la segunda desigualdad. El segundo caso es análogo. En el tercer caso la segunda desigualdad se satisface si y solo si c es imaginario, es decir, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $c = i\gamma$. Luego en el tercer caso la segunda desigualdad se obtiene si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \langle A \rangle_\psi)\psi - i\gamma(B - \langle B \rangle_\psi)\psi \\ &= (A - i\gamma B)\psi - (\langle A \rangle_\psi + i\gamma \langle B \rangle_\psi)\psi, \end{aligned} \tag{6}$$

es decir, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que ψ es un vector propio de $A - i\gamma B$ con valor propio $\langle A \rangle_\psi - i\gamma \langle B \rangle_\psi$. Es fácil ver que es suficiente pedir que ψ sea vector propio de $A - i\gamma B$ pues si $c + id$ es el valor propio asociado, se tiene

$$c + id = (c + id)\|\psi\|^2 = \langle \psi, (A - i\gamma B)\psi \rangle = \langle A \rangle_\psi - i\gamma \langle B \rangle_\psi . \tag{7}$$

Concluimos entonces que ψ es un estado de mínima incertidumbre si y solo si es un vector propio de A o de B o de $A - i\gamma B$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ahora especializamos la discusión a los operadores de posición y momento $\hat{q}$ y $\hat{p}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Ya que son auto-adjuntos se tiene que son simétricos. Queremos hallar una función de onda normalizada $\psi \in \mathcal{D}_{\hat{q}\hat{p}} \cap \mathcal{D}_{\hat{p}\hat{q}} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ que represente un estado de mínima incertidumbre. En efecto si lo hallamos se tiene

$$\Delta_\psi \hat{q} \Delta_\psi \hat{p} = \sqrt{(\Delta_\psi \hat{q})^2 (\Delta_\psi \hat{p})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} |\langle [\hat{q}, \hat{p}] \rangle_\psi|^2} = \frac{1}{2}\hbar. \tag{8}$$

Es claro que ni $\hat{q}$ o $\hat{p}$ tienen vectores propios en $L^2(\mathbb{R})$. Luego ψ es un estado de mínima incertidumbre si y solo si existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que ψ es vector propio de $\hat{q} - i\gamma\hat{p}$. Entonces tenemos que resolver la ecuación de valores propios

$$x\psi(x) - \gamma\psi'(x) = \lambda\psi(x) \tag{9}$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$. Note que simbólicamente

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_0) \exp\left(\log\left(\frac{\psi(x)}{\psi(x_0)} \right) \right) = \psi(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x dy (\log \circ \psi)'(y) \right) \\ &= \psi(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x dy \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} \right) = \psi(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x dy \frac{y - \lambda}{\gamma} \right) \\ &\propto \exp\left(\frac{(x - \lambda)^2}{2\gamma} \right) \end{aligned} \tag{10}$$

el cual solo está en $L^2(\mathbb{R})$ si $\gamma < 0$. Vemos entonces utilizando teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden que un estado es de mínima incertidumbre en este sistema si y solo si es de la forma

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{(x - \lambda)^2}{2\delta} \right) \tag{11}$$

para $\delta > 0$. Realizando una integral gaussiana notamos que

$$1 = \|\psi\|^2 = |A|^2 \int dx \exp\left(-\frac{(x-\lambda)^2}{\delta}\right) = |A|^2 \sqrt{\delta\pi}, \tag{12}$$

es decir podemos tomar $A = (\delta\pi)^{-\frac{1}{4}}$. Además, tenemos que $\lambda = \langle \hat{q} \rangle_\psi + i\delta \langle \hat{p} \rangle_\psi$.