Ambigüedades cuánticas en entropías y teoría modular

Iván Mauricio Burbano Aldana
Código 201423205

Asesor: Andrés Fernando Reyes Lega

2 de mayo de 2018

1. Introducción

La aproximación álgebraica a las teorías físicas ha sido una herramienta muy importante para estudiar la posibilidad de marcos axiomáticos en la teoría cuántica de campos[1]. Su poder recae en la transparencia del sígnificado físico de los objetos matemáticos involucrados. En este marco se toma un álgebra de observables $\mathcal{A}$. Los estados toman la forma de funcionales positivos lineales normalizados $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ de manera que $\omega(a)$ se interpreta como el valor de esperado de a para todo $a \in \mathcal{A}$. Los automorfismos del álgebra implementan su dinámica. Una C^*-álgebra conmutativa es isomorfa al conjunto de funciones continuas complejas que desvanecen en el infinito $C_0(X)$ sobre un espacio localmente compacto Haussdorf X[2]. En este caso el teorema de representación de Riesz[3] garantiza que los estados son medidas de probabilidad sobre este espacio. De esta manera recuperamos el marco teórico de las teorías clásicas. De forma más general, toda C^*-álgebra es isomorfa a una subálgebra cerrada de los operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$[2]. En particular, si esta resulta ser toda el álgebra de operadores acotados, los estados se pueden describir mediante operadores densidad[4]. De esta manera se recupera el marco de las teorías cuánticas.

Las teorías clásicas suceden en un espacio de fase al que se le puede dar la estructura de un espacio de medida (M, Σ, μ). En tal caso, a un estado descrito por una medida de probabilidad P absolutamente continua con respecto a μ se le puede asignar una entropía

$$S(P) = -\int \log \circ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}\, \mathrm{d}P = -\left\langle \log \circ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu} \right\rangle_P . \tag{1}$$

De manera similar, en el caso cuántico a un estado descrito por un operador densidad ρ se le puede asignar la entropía de von Neumann

$$S(\rho) = -\operatorname{tr}(\log(\rho)\rho) = -\langle\log(\rho)\rangle_\rho . \tag{2}$$

Notese que tanto en el caso clásico como en el cuántico la entropía se puede caracterizar como el valor esperado de un observable. En el contexto algebráico no es claro como generar tal observable apartir de un estado. Una propuesta para evitar este problema es mediante la construcción GNS[5]. Con esta podemos construir una representación $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ del álgebra $\mathcal{A}$ y un estado ω. Más aún, con una descomposición en irreducibles de $\mathcal{H}_\omega$ se puede construir un operador densidad ρ en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ tal que

$$\omega(a) = \operatorname{tr}(\rho\pi_\omega(a)) = \langle\pi_\omega(a)\rangle_\rho \tag{3}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Esto nos permite identificar a ρ con ω y sugiere asignarle a ω la entropía $-\operatorname{tr}(\rho\log(\rho))$. Notese que esta asignación ya no necesariamente tiene la interpretación de valor esperado para un observable. En efecto, no hay razón alguna por la cual $\log(\rho) = \pi_\omega(a)$ para algún $a \in \mathcal{A}$. Esto hace que la entropía deje de ser una cantidad medible en el sentido operacional de la teoría. En consecuencia aparece una ambigüedad que se puede rastrear a las distintas descomposiciones en irreducibles de $\mathcal{H}_\omega$[6].

2. Objetivos

En este trabajo se pretende seguir trabajando en un artículo junto con el profesor Aiyalam Parameswaran Balachandran, de la Universidad de Syracuse, la candidata doctoral Souad Maria Tabban Sabbagh y el profesor Andrés Fernando Reyes Lega de la Universidad de los Andes. Este artículo estudia el papel del conmutante $\mathcal{A}'$ del álgebra de observables $\mathcal{A}$ en la caracterización de las distintas descomposiciones en irreducibles del espacio GNS $\mathcal{H}_\omega$. Se ha observado que el conmutante mantiene invariante el valor esperado de los observables y por lo tanto tiene interpretación de álgebra gauge. Esto permite entender esta ambigüedad en la entropía en términos de una simetría gauge emergente. El estudio de esta álgebra gauge se puede hacer mediante la teoría modular de Tomita-Takesaki. Esto provee una manera de relacionar la teoría modular con esta anomalía cuántica. Balachandran ha propuesto que tal relación no solamente se encuentra en las ambigüedades de entropía y puede ser extendida al estudio general de la anomalías cuánticas.

Hasta el momento se ha logrado interpretar esta ambigüedad en términos de la teoría modular en el caso de estados normales sobre álgebras de operadores sobre espacios de Hilbert de dimensión finita. Se espera que mediante el estudio de la molécula de etileno[7] se pueda extender este resultado a los sistemas generados mediante la cuantización de espacios de configuración homogéneos. De esta manera podemos obtener más ejemplos que nos ayuden a entender el papel de la teoría modular en la anomalías cuánticas. De manera simultanea se va a estudiar el método de techos convexos para obtener una interpretación física más clara de esta ambigüedad[8]. En efecto, es necesario extender la idea de entropía de enredamiento a sistemas compuestos cuyo estado no es puro. Se ha observado que en estos sistemas la entropía es anómala para el operador densidad total y su reducción a la componente gauge. Esto indica que mediante la teoría modular podemos caracterizar el conjunto de estados en el sistema completo posibles a partir del conocimiento del estado en uno de los subsistemas.

3. Metodología

El trabajo se va a separar en dinámicas de investigación individuales acompañadas de reuniones semanales donde se compartirá el progreso de la semana y se distribuirán los temas prioritarios. Las reuniones se espera que se hagan en el Ip 101 o el Ip 305. Por otra parte, el trabajo individual del estudiante se puede realizar en las salas rotativas o, de acuerdo a la disponibilidad, en alguna de las otras oficinas del I.

El trabajo individual consistirá en dos componentes principales. Una consistirá principalmente en estudiar los métodos geométricos y analíticos necesarios para llevar a cabo el proyecto. La teoría de haces fibrados y representaciones inducidas va a ser importante para el entendimiento de los esquemas de cuantización necesarios para llevar a cabo el ejemplo de la molécula de etileno. El estudio de la teoría de álgebras de operadores y sus varias topologías va a ser necesaria para la extensión del trabajo ya hecho en dimensión finita a casos más complejos y generales. La segunda componente consistirá en la escritura del trabajo con la herramienta Overleaf. Se espera que todos los integrantes compilen en un archivo compartido los teoremas probados y los cálculos efectuados durante la semana. De esta manera podremos compartir la información obtenida de manera eficiente.

Finalmente, los integrantes realizaremos la lectura del libro [9] en conjunto.

Este nos ayudará a entender los prerequisitos analíticos esenciales en el desarrollo de la teoría de operadores.

4. Cronograma

Tareas \ Semanas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	X	X	X	X					
4	X	X	X	X					
5	X	X							
6			X	X	X	X			
7					X	X	X	X	

- Tarea 1: Lectura de [9]
- Tarea 2: Escritura del artículo
- Tarea 3: Estudio de haces fibrados y representaciones inducidas
- Tarea 4: Estudio de la construcción de techos convexos
- Tarea 5: Caracterización de la entropía anómala de la molécula de etileno
- Tarea 6: Extensión de anomalías en la entropía de sistemas con espacios de configuración homogéneos
- Tarea 7: Interpretación de la ambigüedad en la entropía mediante la construcción de techos convexos.

5. Resultados esperados

Se pretende que al final de esta investigación se haya entendido el papel de la teoría modular en la descripción del álgebra gauge responsable en la anomalía dada por la ambigüedad en la entropía de estados algebraicos. Con este propósito se espera tener una descripción completa de esta ambigüedad para sistemas con espacios de configuración homogéneos. Más aún, podremos comparar estos resultados con la representación de la ambigüedad en sistemas bipartitos. A partir de la interpretación de la ambigüedad en estos sistemas, utilizaremos teoría de la información para tener un entendimiento más profundo del origen físico de esta anomalía. Además, es posible que este ejercicio permita entender a un nivel más general el papel de la teoría modular en la descripción de anomalías cuánticas. De esta manera, el artículo debería estar listo para ser sometido a revisión para publicación durante el segundo semestre de este año.

Referencias

[1] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras.* Springer, 2nd ed., 1992.

[2] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1.* Springer, 2nd ed., 1987.

[3] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* New York: Springer, 1975.

[4] B. C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians.* Springer, 2013.

[5] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, A. R. de Queiroz, and A. F. Reyes-Lega, "Algebraic Approach to Entanglement and Entropy," *Physical Review A*, vol. 88, no. 2, 2013.

[6] A. P. Balachandran, A. R. de Queiroz, and S. Vaidya, "Entropy of quantum states: Ambiguities," *European Physical Journal Plus*, vol. 128, no. 10, 2013.

[7] A. P. Balachandran, A. Queiroz, and S. Vaidya, "Quantum entropic ambiguities: Ethylene," *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 88, no. 2, 2013.

[8] A. Uhlmann, "Roofs and convexity," *Entropy*, vol. 12, no. 7, pp. 1799–1832, 2010.

[9] J. Lesmes, *Elementos de análisis funcional.* Universidad de los Andes, 2010.

Firma del asesor