

# Mecánica Estadística

## Tarea 5: Teoría de Landau y Renormalización

Iván Mauricio Burbano Aldana

13 de abril de 2018

### 1. Teoría de Landau

#### 1.1. Parámetro de orden

1. La derivada funcional de  $S$  es

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi] &= \frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi] - \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \int d^d \mathbf{r}' h(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \int d^d \mathbf{r}' \left( \frac{1}{2} \|\nabla \phi(\mathbf{r}')\|^2 + A\phi(\mathbf{r}')^2 + B\phi(\mathbf{r}')^4 \right) \\ &\quad - \int d^d \mathbf{r}' h(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= \int d^d \mathbf{r}' \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{r}' (2A\phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r}')^3 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) - h(\mathbf{r}) \\ &= \int d^d \mathbf{r}' \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{1}$$

Note que según la definición de derivada de una distribución se tiene

$$\begin{aligned}\nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^d \partial_i \phi(\mathbf{r}') \partial_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = - \sum_{i=1}^d \partial_i^2 \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= - \Delta \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi] &= \int d^d \mathbf{r}' \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}) \\ &= - \int d^d \mathbf{r}' \Delta \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}) \\ &= - \Delta \phi(\mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{3}$$

En efecto, la condición de minimización  $0 = \frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi_0]$  toma la forma

$$h(\mathbf{r}) = 2A\phi_0(\mathbf{r}) + 4B\phi_0(\mathbf{r})^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}). \quad (4)$$

2. En el caso  $h = 0$  en el que  $\phi_0$  es constante,  $\Delta\phi = 0$  y por lo tanto

$$0 = 2A\phi_0 + 4B\phi_0^3 = 2\phi_0(A + 2B\phi_0^2). \quad (5)$$

Se obtienen las soluciones  $\phi_0 = 0$  y, si  $A$  y  $B$  tienen signos opuestos,  $\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$ .

3. Empezamos considerando las expansiones en series de potencias de  $A$  y  $B$  alrededor de la temperatura crítica  $T_c$

$$\begin{aligned} A(T) &= A_0 + A_1(T - T_c) + \dots \\ B(T) &= B_0 + B_1(T - T_c) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Recordando los resultado de campo medio, queremos dependencia del tiempo. Por lo tanto no podemos permitirnos considerar a  $A$  y  $B$  simultaneamente como constantes. Mas aún, ya que en la aproximación de campo medio tenemos para  $T < T_c$  la relación  $m \propto |T - T_c|^{1/2}$  y, como se demostró en clase, podemos identificar  $\phi_0$  con  $m$ , observamos que las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A_0 + A_1(T - T_c) + \dots}{2B_0 + B_1(T - T_c) + \dots}} \quad (7)$$

coinciden con las obtenidas en campo medio al poner  $A_0 = A_2 = \dots = B_1 = B_2 = \dots = 0$ . Más aún, queremos que esta solución sea inválida en el caso  $T > T_c$ . Esto lo podemos obtener asegurando que los coeficientes  $A_1$  y  $B_0$  tengan el mismo signo. Las escogemos positivas. En este caso, si  $T > T_c$ , se tiene  $A > 0$ . Por lo tanto, la única solución posible es  $\phi_0 = 0$ . Por el otro lado, si  $T < T_c$ , tanto la solución  $\phi_0 = 0$  como las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{A_1(T_c - T)}{B}} \quad (8)$$

son permitidas. Sin embargo, solo consideramos la solución (8) ya que esta minimiza la energía libre. En efecto, ya que  $h = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} F = H[\phi_0] &= \int d^d\mathbf{r} (A\phi^2 + B\phi^4) = \int d^d\mathbf{r} (A + B\phi^2)\phi^2 \\ &= \begin{cases} 0, & \phi_0 = 0 \\ -\int d^d\mathbf{r} (A - B\frac{A}{2B})\frac{A}{2B} = -\int d^d\mathbf{r} \frac{A^2}{4B} < 0, & \phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

## 1.2. Correlaciones

1. Tomando la derivada funcional y utilizando la relación vista en clase  $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}')$  se tiene

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} h(\mathbf{r}') = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} (2A\phi_0(\mathbf{r}') + 4B\phi_0(\mathbf{r}')^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}')) \\
&= 2A \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}') + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2 \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}') - \Delta \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}') \\
&= 2AG(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Si  $h = 0$  y el sistema es homogéneo,  $\phi_0$  es constante y  $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ . Es claro entonces por la regla de la cadena que

$$\Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \Delta G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \tag{11}$$

Tomando

$$\xi^{-2} = 2A + 12B\phi_0^2 \tag{12}$$

y haciendo el cambio de variable  $\mathbf{r}' - \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$  se concluye

$$\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})G(\mathbf{r}). \tag{13}$$

Podemos determinar

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\sqrt{2A + 12B\phi_0^2}} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2A - 12B\frac{A}{2B}}} = \frac{1}{2\sqrt{-A}} = \frac{1}{2\sqrt{A_1(T_c - T)}}, & T < T_c \\ \frac{1}{\sqrt{2A}} = \frac{1}{\sqrt{2A_1(T - T_c)}}, & T > T_c. \end{cases}
\end{aligned} \tag{14}$$

2. Utilizando la forma integral de la distribución delta e insertando la transformada de Fourier en (13) se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}) &= (-\Delta + \xi^{-2}) \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} (-\Delta + \xi^{-2}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} (\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{15}$$

en vista de que  $\Delta e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = i\mathbf{k} \cdot i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ . Comparando se obtiene que

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}}. \tag{16}$$

3. Utilizando el resultado anterior y restringiendo a  $d = 3$  tenemos

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi u^2 \sin(\theta) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\| \cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du \int_1^{-1} dv (-1) u^2 \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|v}}{u^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_0^\infty du u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|} - e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}
\end{aligned} \tag{17}$$

Note que bajo un cambio de variable

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty du u \frac{e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}} &= \int_0^{-\infty} du (-1)(-u) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{(-u)^2 + \xi^{-2}} \\
&= - \int_{-\infty}^0 du u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty du \frac{ue^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{19}$$

Sea  $R > i\xi^{-1}$ . Considere bajo la orientación en contra de las manecillas del reloj los conjuntos

$$\begin{aligned}
S_R^+ &:= \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, \pi]\} \subseteq D_R := S_R^+ \cup [-R, R] \times \{0\} \\
&\subseteq \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\},
\end{aligned} \tag{20}$$

el dominio de definición de la función holomorfa

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\} &\rightarrow \mathbb{C} \\
z &\mapsto \frac{ze^{iz\|\mathbf{r}\|}}{z^2 + \xi^{-2}} = \frac{ze^{iz\|\mathbf{r}\|}}{(z + i\xi^{-1})(z - i\xi^{-1})}.
\end{aligned} \tag{21}$$

$D_R$  solo encierra el polo  $i\xi^{-1}$  y en este punto el residuo de  $f$  claramente es

$$\frac{i\xi^{-1}e^{ii\xi^{-1}\|\mathbf{r}\|}}{2i\xi^{-1}} = \frac{1}{2}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{22}$$

Por lo tanto por el teorema del residuo

$$\int_{D_R} dz f(z) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}, \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty du f(u) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{D_R} dz f(z) - \int_{S_R^+} dz f(z) \right) \\
&= i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+} dz f(z) = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}.
\end{aligned} \tag{24}$$

El límite desaparece por la estimación

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S_R^+} dz f(z) \right| &\leq \int_{S_R^+} dz |f(z)| = \int dz R \left| \frac{e^{iRre^{i\theta}}}{R^2 e^{i2\theta} + \xi^{-2}} \right| \\
&= R \int dz \frac{e^{-Rr \sin(\theta)}}{(R^2 e^{i2\theta} + \xi^{-2})(R^2 e^{-i2\theta} + \xi^{-2})} \\
&= R \int dz \frac{e^{-Rr \sin(\theta)}}{R^4 + \xi^{-4} + 2R^2 \xi^{-2} \cos(2\theta)} \\
&\leq \pi R^2 \sup \left\{ \frac{e^{-Rr \sin(\theta)}}{R^4 + \xi^{-4} + 2R^2 \xi^{-2} \cos(2\theta)} \mid \theta \in (0, \pi) \right\} \\
&\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pi R^2 0 = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Para poner los límites del ángulo utilizamos el hecho de que  $[0, \pi] \setminus (0, \pi) = \{0, \pi\}$  tiene medida nula. Se concluye que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \tag{26}$$

4. En el caso  $d = 2$  tenemos tomando coordenadas polares con los ángulos medidos desde  $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du \int_0^{2\pi} d\theta u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\| \cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Recordando la expresión integral para la función de Bessel de orden 0[?]

$$\begin{aligned}
J_0(x) &= \frac{1}{2} (J_0(x) + J_0(x)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} + \int_0^\pi d\theta e^{-ix \cos(\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi d\theta e^{-ix \cos(\theta - \pi)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ix \cos(\theta)}
\end{aligned} \tag{28}$$

se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{u J_0(u\|\mathbf{r}\|)}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{29}$$

Recordando que bajo ciertas asunciones sobre el comportamiento de las funciones se tiene[?]

$$\int_0^\infty dx f(x)g(x) = \int_0^\infty \mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}^{-1}(g)(x), \quad (30)$$

se tiene que[?, ?]

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \mathcal{L}(u \mapsto J_0(u\|\mathbf{r}\|))(u) \mathcal{L}^{-1}\left(u \mapsto \frac{u}{u^2 + \xi^{-2}}\right)(u) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 + u^2}} \cos\left(\frac{u}{\xi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \|\mathbf{r}\| \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 u^2}} \cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right)}{\sqrt{1 + u^2}} = K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \end{aligned} \quad (31)$$

El crédito de esta solución va para Iwaniuk[?].

5. En el caso  $d = 2$  tenemos según el apéndice del enunciado que para  $\|\mathbf{r}\|/\xi \gg 1$ , es decir,  $\|\mathbf{r}\| \gg \xi$  se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi\xi}{2\|\mathbf{r}\|}} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \quad (32)$$

Este es el comportamiento deseado. En el caso  $d = 3$  el comportamiento es trivial de (26).

6. En el caso  $d = 2$  cuando  $\xi \gg \|\mathbf{r}\|$  se tiene  $\|\mathbf{r}\|/\xi \ll 1$ . Por lo tanto, según el apéndice del enunciado se tiene

$$G(\mathbf{r}) \sim -\frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{r}\|/\xi). \quad (33)$$

Ya que no hay dependencia en potencias, se tiene  $0 = d + \eta - 2 = 2 + \eta - 2 = \eta$ . En el caso  $d = 3$  vemos que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \sim \frac{1}{2\pi\|\mathbf{r}\|}. \quad (34)$$

Por lo tanto  $1 = d + \eta - 2 = 3 + \eta - 2 = 1 + \eta$ . Se concluye una vez más que  $\eta = 0$ .

7. En el punto crítico  $\xi \rightarrow \infty$ . Por lo tanto en caso  $d = 2$  y  $d = 3$

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \zeta} \sim \frac{1}{\mathbf{k}^2} = \|\mathbf{k}\|^{-2} \quad (35)$$

Se concluye entonces que  $\eta = 0$  en ambos casos, resultado que concuerda con el anterior.

## 2. Renormalización

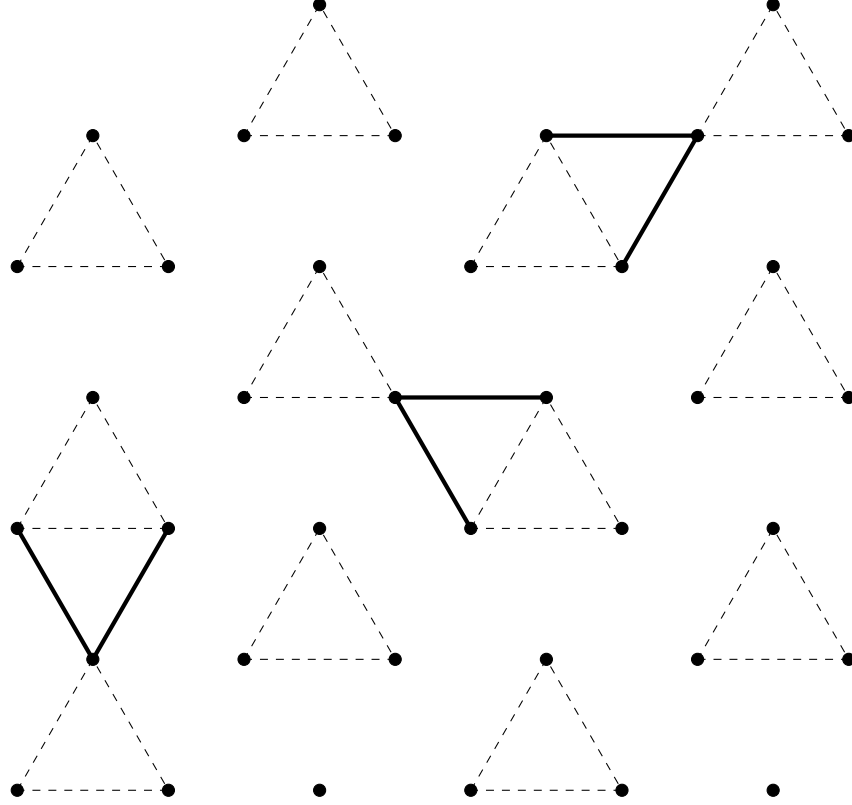


Figura 1: Se muestra una red triangular de sitios para un retículo de espines. Las líneas punteadas señalan la agrupación de los espines en el esquema de renormalización propuesto. Las líneas solidas corresponden a ejemplos de vecinos más cercanos que pertenecen a grupos distintos.

1. Considere la red triangular mostrada en la figura 1. Al conjunto contable de sitios lo vamos a denotar  $\Lambda$  y al de vecinos más cercanos  $\langle \Lambda \rangle \subseteq \Lambda \times \Lambda$ . Cabe notar que solo escogemos un representante por vecino, es decir, si  $(i, j) \in \langle \Lambda \rangle$  entonces  $(j, i) \notin \langle \Lambda \rangle$ . Entonces los microestados de la red se pueden tomar como los elementos  $s \in \{-1, 1\}^\Lambda$  bajo la interpretación de que  $s_i := s(i)$  para  $i \in \Lambda$  es el espín en el sitio  $i$ . El Hamiltoniano toma la forma

$$\beta H : \{-1, 1\}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \beta H(s) = -K \sum_{(i,j) \in \langle \Lambda \rangle} s_i s_j - h \sum_{i \in \Lambda} s_i \quad (36)$$

para unas constantes  $K, h \in [0, \infty)$ .

Vamos a considerar un esquema de renormalización agrupando los sitios en grupos de 3. Por lo tanto, el factor de escala  $\lambda$  está determinado por la restricción de que  $\lambda^2 = 3$ . Se concluye que  $\lambda = \sqrt{3}$ . Podemos tomar  $\Lambda' \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$  como el conjunto de los grupos de 3 sitios. Este va a ser el conjunto de sitios despues del procedimiento de renormalización. Note que para cada  $\mu \in \Lambda'$  se tiene un conjunto  $\langle \mu \rangle := \{(i, j) \in \langle \Lambda \rangle \mid i, j \in \mu\} \subseteq \langle \Lambda \rangle$  de vecinos contenidos en  $\mu$ . Ya que los elementos de  $\Lambda'$  son disjuntos,

$$\beta H(s) = \beta H_0(s) + \beta V(s) \quad (37)$$

donde

$$\beta H_0(s) = -K \sum_{\substack{(i,j) \in \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle}} s_i s_j = -K \sum_{\mu \in \Lambda'} \sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} s_i s_j \quad (38)$$

y

$$\beta V(s) = -K \sum_{(i,j) \in \langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle} s_i s_j + h \sum_{i \in \Lambda} s_i. \quad (39)$$

Note que el conjunto  $\langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle$  es el de vecinos más cercanos que corresponden a grupos distintos. Sea  $\langle \Lambda' \rangle \subseteq \Lambda' \times \Lambda'$  el conjunto de grupos vecinos más cercanos. Sin perdida de generalidad, ordenamos los pares de manera que si  $(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle$  el segmento más corto entre los triángulos generados por  $\mu$  y  $\nu$  tiene un punto final en un vertice del generado por  $\mu$  y otro en la mitad de una arista del generado por  $\nu$ . Defina  $s_{(\mu, \nu)}$  como el espín en el vertice en el segmento y  $s_{(\mu, \nu)}^{(1)}$  y  $s_{(\mu, \nu)}^{(2)}$  como los espinos en los vertices que generan la arista en el segmento. En particular  $s_{(\mu, \nu)} = s_i$  para algún  $i \in \mu$  y  $s_{(\mu, \nu)}^{(1)} = s_{j_1}$  y  $s_{(\mu, \nu)}^{(2)} = s_{j_2}$  para algunos  $j_1, j_2 \in \nu$  distintos. La figura 1 muestra que todos los  $s_i s_j$  con  $(i, j) \in \langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle$  son de la forma  $s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(1)}$  o  $s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(2)}$  para  $\mu, \nu \in \langle \Lambda' \rangle$ . Concluimos que

$$\beta V(s) = -K \sum_{(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle} \left( s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(1)} + s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(2)} \right) + h \sum_{i \in \Lambda} s_i. \quad (40)$$

Defina la función

$$\begin{aligned} f : \{-1, 1\}^3 &\rightarrow \{-1, 1\} \\ (s_1, s_2, s_3) &\mapsto s_1 + s_2 + s_3. \end{aligned} \quad (41)$$

Si  $\mu = \{i, j, k\}$  entonces interpretamos  $s'_\mu := f(s_i, s_j, s_k)$  como el espín en el sitio  $\mu$  posterior al proceso de renormalización. Es claro que este mapa



le asigna a los nuevos sitios su espín según una regla de mayoría. Esta función se extiende a

$$g : \{-1, 1\}^\Lambda \rightarrow \{-1, 1\}^{\Lambda'} \quad (42)$$

$$s \mapsto s'$$

donde  $s'(\mu) := s'_\mu$ . Este mapa le asigna a cada estado de la red original un estado en la red renormalizada. Mediante este podemos inducir a partir de la medida de probabilidad canónica sobre  $\{-1, 1\}^\Lambda$  generada por

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(s)}, \quad (43)$$

con  $Z$  la constante de normalización apropiada, una medida de probabilidad sobre  $\{-1, 1\}^{\Lambda'}$  generada por

$$P'(\{s'\}) = P(g^{-1}(\{s'\})) = \frac{1}{Z} \sum_{s \in g^{-1}(\{s'\})} e^{-\beta H(s)} \quad (44)$$