Tarea 2
Mecánica Cuántica Avanzada

Iván Mauricio Burbano Aldana
Universidad de los Andes

5 de mayo de 2018

1. Suponga que $B\left|\psi\right\rangle = b\left|\psi\right\rangle$ y $C\left|\psi\right\rangle = c\left|\psi\right\rangle$. Entonces

$$bc\left|\psi\right\rangle = BC\left|\psi\right\rangle = -CB\left|\psi\right\rangle = -bc\left|\psi\right\rangle. \tag{1}$$

Luego $bc\left|\psi\right\rangle = 0$. Por definición de vector propio $\left|\psi\right\rangle \neq 0$. Se tiene entonces que $b = 0$ o $c = 0$.

En el caso donde B es el operador de número bariónico y C el de conjugación de carga se tiene que $\left|\psi\right\rangle = C^2\left|\psi\right\rangle = c^2\left|\psi\right\rangle$. Entonces $c \in \{-1, 1\}$ y se concluye que $b = 0$. Esto significa que en esta teoría cualquier estado con una paridad definida y un número bariónico definido debe tener número bariónico 0.

2.

1. *a*)

$$\begin{aligned}
\langle p'|\hat{x}|\alpha\rangle &= \langle p'|\int dx\, |x\rangle\langle x|\,\hat{x}|\alpha\rangle = \int dx x \left\langle p'|x\right\rangle \left\langle x|\alpha\right\rangle \\
&= \int dx x \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ip'x/\hbar} \left\langle x|\alpha\right\rangle \\
&= \int dx i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ip'x/\hbar}\right) \left\langle x|\alpha\right\rangle \\
&= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ip'x/\hbar} \left\langle x|\alpha\right\rangle \\
&= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \int dx \left\langle p'|x\right\rangle \left\langle x|\alpha\right\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \left\langle p'|\alpha\right\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

b)

$$\begin{aligned}
\langle\beta|\hat{x}|\alpha\rangle &= \langle\beta|\int dp'\, |p'\rangle\langle p'|\,\hat{x}|\alpha\rangle = \int dp' \left\langle\beta|p'\right\rangle \langle p'|\hat{x}|\alpha\rangle \\
&= \int dp' \phi_\beta^*(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \left\langle p'|\alpha\right\rangle = \int dp' \phi_\beta^*(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p')
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Podemos calcularlo explicitamente utilizando la definición de función de observable de Dirac

$$\exp\left(\frac{i\hat{x}\Xi}{\hbar}\right)|x\rangle = \exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)|x\rangle . \tag{4}$$

Por lo tanto el operador $\exp\left(\frac{i\hat{x}\Xi}{\hbar}\right)$ corresponde a la simetría de fases en mecánica cuántica. Esta simetría refleja que dos vectores que difieren por una fase representan el mismo estado físico. La forma del operador nos hace notar que $\hat{x}$ es el generador de estas simetrías.

3. Suponemos que por "todos los demas vectores de estado del sistema" se refiere a que $\{|\Psi\rangle, |\Phi\rangle, |\Gamma_n\rangle \,|n \in I\}$, donde I es el conjunto de indices, es una base de Schauder del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todos los vectores $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$ existen $a, b, c, d, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in I$ tal que

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= a|\Psi\rangle + b|\Phi\rangle + \sum_{n\in I}\alpha_n|\Gamma_n\rangle \\ |\beta\rangle &= c|\Psi\rangle + d|\Phi\rangle + \sum_{n\in I}\beta_n|\Gamma_n\rangle . \end{aligned} \tag{5}$$

Claramente podemos asumir que H es acotado extendiendolo por continuidad. El Hamiltoniano es hermítico si y solo si para todos los $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\begin{aligned} &agd^* + agc^*\langle\Psi|\Phi\rangle + bg^*c^* + bg^*d^*\langle\Phi|\Psi\rangle \\ &= ag(d^* + c^*\langle\Psi|\Phi\rangle) + bg^*(c^* + d^*\langle\Phi|\Psi\rangle) \\ &= ag\langle\beta|\Phi\rangle + bg^*\langle\beta|\Psi\rangle \\ &= \langle\beta|(ag|\Phi\rangle + bg^*|\Psi\rangle) = \langle\beta|H|\alpha\rangle = \langle|\beta\rangle, H|\alpha\rangle\rangle \\ &= \langle H|\beta\rangle, |\alpha\rangle\rangle = (c^*g^*\langle\Phi| + d^*g\langle\Psi|)|\alpha\rangle \\ &= c^*g^*\langle\Phi|\alpha\rangle + d^*g\langle\Psi|\alpha\rangle \\ &= c^*g^*(b + a\langle\Phi|\Psi\rangle) + d^*g(a + b\langle\Psi|\Phi\rangle) \\ &= c^*g^*b + c^*g^*a\langle\Phi|\Psi\rangle + d^*ga + d^*gb\langle\Psi|\Phi\rangle , \end{aligned} \tag{6}$$

lo que sucede si y solo si para todo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$agc^*\langle\Psi|\Phi\rangle + bg^*d^*\langle\Phi|\Psi\rangle = c^*g^*a\langle\Phi|\Psi\rangle + d^*gb\langle\Psi|\Phi\rangle . \tag{7}$$

Luego se tiene que H es hermítico si y solo si para todo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$(ac^* - bd^*)(g\langle\Psi|\Phi\rangle - g^*\langle\Phi|\Psi\rangle) = 0. \tag{8}$$

Es fácil ver que esto sucede si y solo si $g\langle\Psi|\Phi\rangle = g^*\langle\Phi|\Psi\rangle = \overline{g\langle\Psi|\Phi\rangle}$. Entonces vemos que una condición necesaria y suficiente para que H sea hermítico es que $g\langle\Psi|\Phi\rangle \in \mathbb{R}$. Es claro para todo $n \in I$ se tiene que $|\Gamma_n\rangle$ es un vector propio de H con valor propio 0. Además, el subespacio $\text{span}\{|\Psi\rangle, |\Phi\rangle\}$ es H-invariante. La restricción a este de H tiene una representación matricial en la base $\gamma = \{|\Psi\rangle, |\Phi\rangle\}$ dada por

$$[H]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & g^* \\ g & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

El polinomio característico de esta restricción es

$$\det([H]_\gamma - \lambda) = \lambda^2 - |g|^2 = (\lambda - |g|)(\lambda + |g|). \tag{10}$$

Por lo tanto, los valores propios son $|g|$ y $-|g|$. Los siguientes cálculos

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} -|g| & g^* & 0 \\ g & -|g| & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -g^*/|g| & 0 \\ g & -|g| & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -g^*/|g| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} |g| & g^* & 0 \\ g & |g| & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & g^*/|g| & 0 \\ g & |g| & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & g^*/|g| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{11}$$

nos muestran que $g^* |\Psi\rangle + |g| |\Phi\rangle$ es un vector propio con valor propio $|g|$