

Mecánica Estadística

Tarea 5: Teoría de Landau y Renormalización

Iván Mauricio Burbano Aldana

15 de abril de 2018

1. Teoría de Landau

1.1. Parámetro de orden

1. La derivada funcional de S es

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi] &= \frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi] - \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \int d^d \mathbf{r}' h(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{r})} \int d^d \mathbf{r}' \left(\frac{1}{2} \|\nabla \phi(\mathbf{r}')\|^2 + A\phi(\mathbf{r}')^2 + B\phi(\mathbf{r}')^4 \right) \\ &\quad - \int d^d \mathbf{r}' h(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= \int d^d \mathbf{r}' \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{r}' (2A\phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r}')^3 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) - h(\mathbf{r}) \\ &= \int d^d \mathbf{r}' \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{1}$$

Note que según la definición de derivada de una distribución se tiene

$$\begin{aligned}\nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^d \partial_i \phi(\mathbf{r}') \partial_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = - \sum_{i=1}^d \partial_i^2 \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= - \Delta \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi] &= \int d^d \mathbf{r}' \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}) \\ &= - \int d^d \mathbf{r}' \Delta \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}) \\ &= - \Delta \phi(\mathbf{r}) + 2A\phi(\mathbf{r}) + 4B\phi(\mathbf{r})^3 - h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{3}$$

En efecto, la condición de minimización $0 = \frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{r})}[\phi_0]$ toma la forma

$$h(\mathbf{r}) = 2A\phi_0(\mathbf{r}) + 4B\phi_0(\mathbf{r})^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}). \quad (4)$$

2. En el caso $h = 0$ en el que ϕ_0 es constante, $\Delta\phi = 0$ y por lo tanto

$$0 = 2A\phi_0 + 4B\phi_0^3 = 2\phi_0(A + 2B\phi_0^2). \quad (5)$$

Se obtienen las soluciones $\phi_0 = 0$ y, si A y B tienen signos opuestos, $\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$.

3. Empezamos considerando las expansiones en series de potencias de A y B alrededor de la temperatura crítica T_c

$$\begin{aligned} A(T) &= A_0 + A_1(T - T_c) + \dots \\ B(T) &= B_0 + B_1(T - T_c) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Recordando los resultado de campo medio, queremos dependencia del tiempo. Por lo tanto no podemos permitirnos considerar a A y B simultaneamente como constantes. Mas aún, ya que en la aproximación de campo medio tenemos para $T < T_c$ la relación $m \propto |T - T_c|^{1/2}$ y, como se demostró en clase, podemos identificar ϕ_0 con m , observamos que las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A_0 + A_1(T - T_c) + \dots}{2B_0 + B_1(T - T_c) + \dots}} \quad (7)$$

coinciden con las obtenidas en campo medio al poner $A_0 = A_2 = \dots = B_1 = B_2 = \dots = 0$. Más aún, queremos que esta solución sea inválida en el caso $T > T_c$. Esto lo podemos obtener asegurando que los coeficientes A_1 y B_0 tengan el mismo signo. Las escogemos positivas. En este caso, si $T > T_c$, se tiene $A > 0$. Por lo tanto, la única solución posible es $\phi_0 = 0$. Por el otro lado, si $T < T_c$, tanto la solución $\phi_0 = 0$ como las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{A_1(T_c - T)}{B}} \quad (8)$$

son permitidas. Sin embargo, solo consideramos la solución (8) ya que esta minimiza la energía libre. En efecto, ya que $h = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} F = H[\phi_0] &= \int d^d\mathbf{r} (A\phi^2 + B\phi^4) = \int d^d\mathbf{r} (A + B\phi^2)\phi^2 \\ &= \begin{cases} 0, & \phi_0 = 0 \\ -\int d^d\mathbf{r} (A - B\frac{A}{2B})\frac{A}{2B} = -\int d^d\mathbf{r} \frac{A^2}{4B} < 0, & \phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

1.2. Correlaciones

1. Tomando la derivada funcional y utilizando la relación vista en clase $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}')$ se tiene

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} h(\mathbf{r}') = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} (2A\phi_0(\mathbf{r}') + 4B\phi_0(\mathbf{r}')^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}')) \\
&= 2A \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}') + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2 \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}') - \Delta \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})} \phi_0(\mathbf{r}') \\
&= 2AG(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Si $h = 0$ y el sistema es homogéneo, ϕ_0 es constante y $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$. Es claro entonces por la regla de la cadena que

$$\Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \Delta G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \tag{11}$$

Tomando

$$\xi^{-2} = 2A + 12B\phi_0^2 \tag{12}$$

y haciendo el cambio de variable $\mathbf{r}' - \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$ se concluye

$$\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})G(\mathbf{r}). \tag{13}$$

Podemos determinar

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\sqrt{2A + 12B\phi_0^2}} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2A - 12B\frac{A}{2B}}} = \frac{1}{2\sqrt{-A}} = \frac{1}{2\sqrt{A_1(T_c - T)}}, & T < T_c \\ \frac{1}{\sqrt{2A}} = \frac{1}{\sqrt{2A_1(T - T_c)}}, & T > T_c. \end{cases}
\end{aligned} \tag{14}$$

2. Utilizando la forma integral de la distribución delta e insertando la transformada de Fourier en (13) se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}) &= (-\Delta + \xi^{-2}) \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} (-\Delta + \xi^{-2}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} (\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{G}(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{15}$$

en vista de que $\Delta e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = i\mathbf{k} \cdot i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$. Comparando se obtiene que

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}}. \tag{16}$$

3. Utilizando el resultado anterior y restringiendo a $d = 3$ tenemos

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty du \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi u^2 \sin(\theta) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\| \cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du \int_1^{-1} dv (-1) u^2 \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|v}}{u^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_0^\infty du u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|} - e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}
\end{aligned} \tag{17}$$

Note que bajo un cambio de variable

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty du u \frac{e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}} &= \int_0^{-\infty} du (-1)(-u) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{(-u)^2 + \xi^{-2}} \\
&= - \int_{-\infty}^0 du u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty du \frac{ue^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{19}$$

Sea $R > i\xi^{-1}$. Considere bajo la orientación en contra de las manecillas del reloj los conjuntos

$$\begin{aligned}
S_R^+ &:= \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, \pi]\} \subseteq D_R := S_R^+ \cup [-R, R] \times \{0\} \\
&\subseteq \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\},
\end{aligned} \tag{20}$$

el dominio de definición de la función holomorfa

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\} &\rightarrow \mathbb{C} \\
z &\mapsto \frac{ze^{iz\|\mathbf{r}\|}}{z^2 + \xi^{-2}} = \frac{ze^{iz\|\mathbf{r}\|}}{(z + i\xi^{-1})(z - i\xi^{-1})}.
\end{aligned} \tag{21}$$

D_R solo encierra el polo $i\xi^{-1}$ y en este punto el residuo de f claramente es

$$\frac{i\xi^{-1}e^{ii\xi^{-1}\|\mathbf{r}\|}}{2i\xi^{-1}} = \frac{1}{2}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{22}$$

Por lo tanto por el teorema del residuo

$$\int_{D_R} dz f(z) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}, \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty du f(u) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{D_R} dz f(z) - \int_{S_R^+} dz f(z) \right) \\
&= i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+} dz f(z) = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}.
\end{aligned} \tag{24}$$

El límite desaparece por la estimación

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S_R^+} dz f(z) \right| &\leq \int_{S_R^+} dz |f(z)| = \int dz R \left| \frac{e^{iRre^{i\theta}}}{R^2 e^{i2\theta} + \xi^{-2}} \right| \\
&= R \int dz \frac{e^{-Rr \sin(\theta)}}{(R^2 e^{i2\theta} + \xi^{-2})(R^2 e^{-i2\theta} + \xi^{-2})} \\
&= R \int dz \frac{e^{-Rr \sin(\theta)}}{R^4 + \xi^{-4} + 2R^2 \xi^{-2} \cos(2\theta)} \\
&\leq \pi R^2 \sup \left\{ \frac{e^{-Rr \sin(\theta)}}{R^4 + \xi^{-4} + 2R^2 \xi^{-2} \cos(2\theta)} \middle| \theta \in (0, \pi) \right\} \\
&\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pi R^2 0 = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Para poner los límites del ángulo utilizamos el hecho de que $[0, \pi] \setminus (0, \pi) = \{0, \pi\}$ tiene medida nula. Se concluye que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \tag{26}$$

4. En el caso $d = 2$ tenemos tomando coordenadas polares con los ángulos medidos desde \mathbf{r}

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du \int_0^{2\pi} d\theta u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\| \cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Recordando la expresión integral para la función de Bessel de orden 0[1]

$$\begin{aligned}
J_0(x) &= \frac{1}{2} (J_0(x) + J_0(x)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} + \int_0^\pi d\theta e^{-ix \cos(\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi d\theta e^{-ix \cos(\theta - \pi)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi d\theta e^{ix \cos(\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ix \cos(\theta)}
\end{aligned} \tag{28}$$

se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{u J_0(u\|\mathbf{r}\|)}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{29}$$

Recordando que bajo ciertas asunciones sobre el comportamiento de las funciones se tiene[2]

$$\int_0^\infty dx f(x)g(x) = \int_0^\infty \mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}^{-1}(g)(x), \quad (30)$$

se tiene que[1, 2]

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \mathcal{L}(u \mapsto J_0(u\|\mathbf{r}\|))(u) \mathcal{L}^{-1}\left(u \mapsto \frac{u}{u^2 + \xi^{-2}}\right)(u) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 + u^2}} \cos\left(\frac{u}{\xi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \|\mathbf{r}\| \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 u^2}} \cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty du \frac{\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right)}{\sqrt{1 + u^2}} = K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \end{aligned} \quad (31)$$

El crédito de esta solución va para Iwaniuk[3].

5. En el caso $d = 2$ tenemos según el apéndice del enunciado que para $\|\mathbf{r}\|/\xi \gg 1$, es decir, $\|\mathbf{r}\| \gg \xi$ se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi\xi}{2\|\mathbf{r}\|}} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \quad (32)$$

Este es el comportamiento deseado. En el caso $d = 3$ el comportamiento es trivial de (26).

6. En el caso $d = 2$ cuando $\xi \gg \|\mathbf{r}\|$ se tiene $\|\mathbf{r}\|/\xi \ll 1$. Por lo tanto, según el apéndice del enunciado se tiene

$$G(\mathbf{r}) \sim -\frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{r}\|/\xi). \quad (33)$$

Ya que no hay dependencia en potencias, se tiene $0 = d + \eta - 2 = 2 + \eta - 2 = \eta$. En el caso $d = 3$ vemos que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \sim \frac{1}{2\pi\|\mathbf{r}\|}. \quad (34)$$

Por lo tanto $1 = d + \eta - 2 = 3 + \eta - 2 = 1 + \eta$. Se concluye una vez más que $\eta = 0$.

7. En el punto crítico $\xi \rightarrow \infty$. Por lo tanto en caso $d = 2$ y $d = 3$

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \zeta} \sim \frac{1}{\mathbf{k}^2} = \|\mathbf{k}\|^{-2} \quad (35)$$

Se concluye entonces que $\eta = 0$ en ambos casos, resultado que concuerda con el anterior.

2. Renormalización

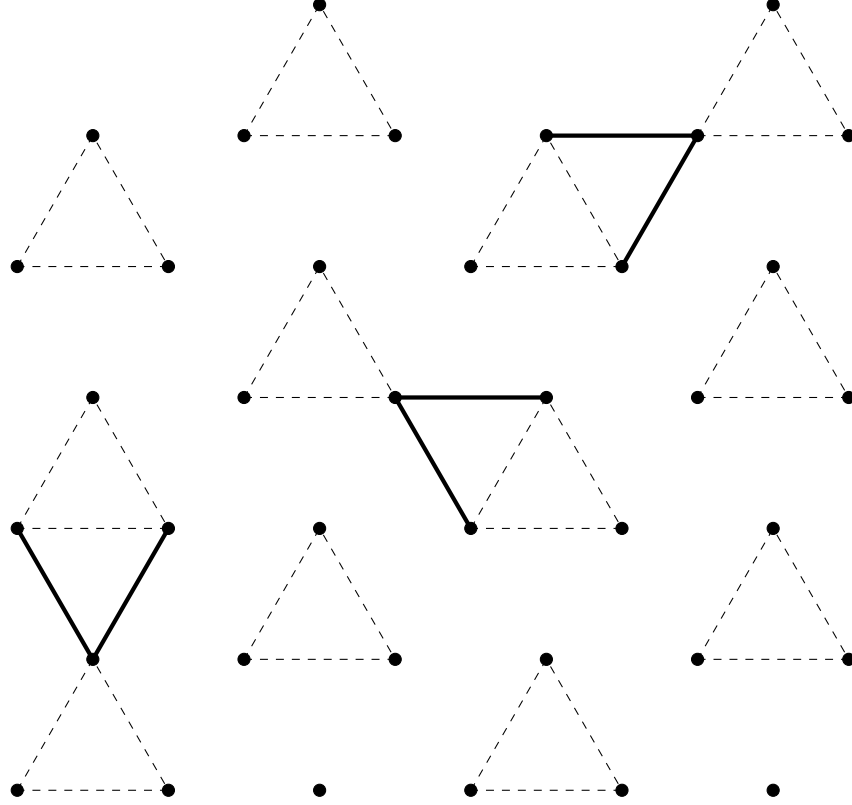


Figura 1: Se muestra una red triangular de sitios para un retículo de espines. Las líneas punteadas señalan la agrupación de los espines en el esquema de renormalización propuesto. Las líneas solidas corresponden a ejemplos de vecinos más cercanos que pertenecen a grupos distintos.

1. Considere la red triangular mostrada en la figura 1. Al conjunto a lo sumo contable de sitios lo vamos a denotar Λ y al de vecinos más cercanos $\langle \Lambda \rangle \subseteq \Lambda \times \Lambda$. Cabe notar que solo escogemos un representante por vecino, es decir, si $(i, j) \in \langle \Lambda \rangle$ entonces $(j, i) \notin \langle \Lambda \rangle$. Entonces los microestados de la red se pueden tomar como los elementos $s \in \{-1, 1\}^\Lambda$ bajo la interpretación de que $s_i := s(i)$ para $i \in \Lambda$ es el espín en el sitio i . El Hamiltoniano toma la forma

$$\beta H : \{-1, 1\}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \beta H(s) = -K \sum_{(i,j) \in \langle \Lambda \rangle} s_i s_j - h \sum_{i \in \Lambda} s_i \quad (36)$$

para unas constantes $K, h \in [0, \infty)$.

Vamos a considerar un esquema de renormalización agrupando los sitios en grupos de 3. Por lo tanto, el factor de escala λ está determinado por la restricción de que $\lambda^2 = 3$. Se concluye que $\lambda = \sqrt{3}$. Podemos tomar $\Lambda' \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ como el conjunto de los grupos de 3 sitios. Este va a ser el conjunto de sitios despues del procedimiento de renormalización. Note que para cada $\mu \in \Lambda'$ se tiene un conjunto $\langle \mu \rangle := \{(i, j) \in \langle \Lambda \rangle \mid i, j \in \mu\} \subseteq \langle \Lambda \rangle$ de vecinos contenidos en μ . Ya que los elementos de Λ' son disjuntos,

$$\beta H(s) = \beta H_0(s) + \beta V(s) \quad (37)$$

donde

$$\beta H_0(s) = -K \sum_{(i,j) \in \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle} s_i s_j = -K \sum_{\mu \in \Lambda'} \sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} s_i s_j \quad (38)$$

y

$$\beta V(s) = -K \sum_{(i,j) \in \langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle} s_i s_j - h \sum_{i \in \Lambda} s_i. \quad (39)$$

Note que el conjunto $\langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle$ es el de vecinos más cercanos que corresponden a grupos distintos. Sea $\langle \Lambda' \rangle \subseteq \Lambda' \times \Lambda'$ el conjunto de grupos vecinos más cercanos. Sin perdida de generalidad, ordenamos los pares de manera que si $(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle$ el segmento más corto entre los triángulos generados por μ y ν tiene un punto final en un vertice del generado por μ y otro en la mitad de una arista del generado por ν . Defina $s_{(\mu, \nu)}$ como el espín en el vertice en el segmento y $s_{(\mu, \nu)}^{(1)}$ y $s_{(\mu, \nu)}^{(2)}$ como los espinos en los vertices que generan la arista en el segmento. En particular $s_{(\mu, \nu)} = s_i$ para algún $i \in \mu$ y $s_{(\mu, \nu)}^{(1)} = s_{j_1}$ y $s_{(\mu, \nu)}^{(2)} = s_{j_2}$ para algunos $j_1, j_2 \in \nu$ distintos. La figura 1 muestra que todos los $s_i s_j$ con $(i, j) \in \langle \Lambda \rangle \setminus \bigcup_{\mu \in \Lambda'} \langle \mu \rangle$ son de la forma $s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(1)}$ o $s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(2)}$ para $(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle$. Concluimos que

$$\beta V(s) = -K \sum_{(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle} \left(s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(1)} + s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(2)} \right) - h \sum_{i \in \Lambda} s_i. \quad (40)$$

Defina la función

$$\begin{aligned} f_\mu : \{-1, 1\}^\mu &\rightarrow \{-1, 1\} \\ s &\mapsto \text{sgn} \sum_{i \in \mu} s_i. \end{aligned} \quad (41)$$

para todo $\mu \in \Lambda'$. Si $\mu = \{i, j, k\}$ entonces interpretamos $s'_\mu := f_\mu(s)$ como el espín en el sitio μ posterior al proceso de renormalización. Es claro que

este mapa le asigna a los nuevos sitios su espín según una regla de mayoría. Esta función se extiende a

$$g : \{-1, 1\}^\Lambda \rightarrow \{-1, 1\}^{\Lambda'} \quad (42)$$

$$s \mapsto s'$$

donde $s'(\mu) := s'_\mu$. Este mapa le asigna a cada estado de la red original un estado en la red renormalizada. Mediante este podemos inducir a partir de la medida de probabilidad canónica sobre $\{-1, 1\}^\Lambda$ generada por

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(s)}, \quad (43)$$

con Z la constante de normalización apropiada, una medida de probabilidad sobre $\{-1, 1\}^{\Lambda'}$ generada por

$$\begin{aligned} P'(\{s'\}) &= P(g^{-1}(\{s'\})) = \frac{1}{Z} \sum_{s \in g^{-1}(\{s'\})} e^{-\beta H(s)} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{s \in g^{-1}(\{s'\})} e^{-\beta H_0(s)} e^{-\beta V(s)} = \frac{Z_0}{Z} \langle e^{-\beta V} \rangle_{P_0(s')} \end{aligned} \quad (44)$$

donde $P_0(s')$ es una medida de probabilidad sobre $\{-1, 1\}^\Lambda$ generada por

$$\begin{aligned} P_0(s')(\{s\}) &= \frac{\chi_{g^{-1}(\{s'\})}(s)}{Z_0(s')} e^{-\beta H_0(s)} \\ &= \frac{\chi_{g^{-1}(\{s'\})}(s)}{Z_0(s')} \prod_{\mu \in \Lambda'} e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \end{aligned} \quad (45)$$

donde $\chi_{g^{-1}(\{s'\})}$ es la función característica de $g^{-1}(\{s'\})$ y Z_0 es la constante de normalización apropiada. Note que esta medida es el producto de las medidas $P_\mu(s')$ sobre $\{-1, 1\}^\mu$ para $\mu \in \Lambda'$ definidas por

$$P_\mu(s')(\{s\}) = \frac{\chi_{f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})}(s)}{Z_\mu(s')} e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \quad (46)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_\mu(s') &= \sum_{s \in \{-1, 1\}^\mu} \chi_{f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})}(s) e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \\ &= \sum_{s \in f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})} e^{\sum_{(i,j) \in \langle \mu \rangle} K s_i s_j} \\ &= \sum_{(s_1, s_2, s_3) \in f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Se tiene que $f_\mu^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$ y por lo tanto

$$\sum_{(s_1, s_2, s_3) \in f_\mu^{-1}(\{1\})} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)} = e^{3K} + 3e^{-K}. \quad (48)$$

Por la simetría del modelo bajo la inversión de los espines se tiene que $f^{-1}(\{-1\}) = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)\}$ y

$$\sum_{(s_1, s_2, s_3) \in f_\mu^{-1}(\{-1\})} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)} = e^{3K} + 3e^{-K}. \quad (49)$$

Por lo tanto

$$Z_\mu(s') = e^{3K} + 3e^{-K} \quad (50)$$

Definimos el Hamiltoniano renormalizado $H' : \{-1, 1\}^{\Lambda'} \rightarrow \mathbb{R}$ pidiendo que P' corresponda al estado de Gibbs de este y se preserve la función de partición. Entonces

$$P'(\{s'\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta' H'(s')}, \quad (51)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \beta' H'(s') &= -\ln(Z P'(\{s'\})) = -\ln(Z_0(s') \langle e^{-\beta V} \rangle_{P_0(s')}) \\ &= -\ln(\langle e^{-\beta V} \rangle_{P_0(s')}) - \ln(Z_0(s')) = . \end{aligned} \quad (52)$$

2. Para calcular el nuevo Hamiltoniano vamos a realizar la aproximación

$$\langle e^{-\beta V} \rangle_{P_0(s')} \approx e^{-\langle \beta V \rangle_{P_0(s')}} \quad (53)$$

Este valor esperado se puede calcular como

$$\begin{aligned} \langle \beta V \rangle_{P_0(s')} &= \\ &= -K \sum_{(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle} \left(\langle s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(1)} \rangle_{P_0(s')} + \langle s_{(\mu, \nu)} s_{(\mu, \nu)}^{(2)} \rangle_{P_0(s')} \right) \\ &\quad - h \sum_{i \in \Lambda} \langle s_i \rangle_{P_0(s')}. \end{aligned} \quad (54)$$

donde hacemos el abuso de notación $\langle s_i \rangle_{P_0(s')} := \langle \pi_i \rangle_{P_0(s')}$ y $\langle s_i s_j \rangle_{P_0(s')} := \langle \pi_i \pi_j \rangle_{P_0(s')}$ para las funciones de evaluación

$$\begin{aligned} \pi_i &: \{-1, 1\}^\Lambda \rightarrow \{-1, 1\} \\ s &\mapsto s_i \end{aligned} \quad (55)$$

para todo $i \in \Lambda$. Dado que estos son valores esperados de funciones locales con una medida producto tenemos que $\langle s_i \rangle_{P_0(s')} = \langle s_i \rangle_{P_\mu(s')}$ y $\langle s_i s_j \rangle_{P_0(s')} = \langle s_i \rangle_{P_0(s')} \langle s_j \rangle_{P_0(s')} = \langle s_i \rangle_{P_\mu(s')} \langle s_j \rangle_{P_\nu(s')}$ donde $i \in \mu$ y

$j \in \nu$ con $\mu, \nu \in \Lambda'$ distintos. Una vez más, hacemos el abuso de notación $\langle s_i \rangle_{P_\mu(s')} := \langle \tau_i \rangle_{P_\mu(s')}$ donde

$$\begin{aligned} \tau_i : \{-1, 1\}^\mu &\rightarrow \{-1, 1\} \\ s &\mapsto s_i. \end{aligned} \quad (56)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle s_i \rangle_{P_\mu(s')} &= \sum_{s \in \{-1, 1\}^\mu} \frac{\chi_{f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})}(s)}{Z_\mu(s')} e^{\sum_{(j,k) \in \langle \mu \rangle} K s_j s_k} s_i \\ &= \sum_{s \in f_\mu^{-1}(\{s'_\mu\})} \frac{1}{e^{3K} + 3e^{-K}} e^{\sum_{(j,k) \in \langle \mu \rangle} K s_j s_k} s_i \\ &= \begin{cases} \frac{1}{e^{3K} + 3e^{-K}} (e^{3K} + e^{-K}) & s'_\mu = 1 \\ \frac{1}{e^{3K} + 3e^{-K}} (-e^{3K} - e^{-K}) & s'_\mu = -1 \end{cases} \\ &= \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} s'_\mu. \end{aligned} \quad (57)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano nuevo es

$$\begin{aligned} \beta' H'(s') &= \\ &- 2K \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 \sum_{(\mu, \nu) \in \langle \Lambda' \rangle} s'_\mu s'_\nu - 3h \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \sum_{\mu \in \Lambda} s'_\mu \end{aligned} \quad (58)$$

donde la última suma se paso a Λ' teniendo en cuenta que por cada grupo hay tres sitios. Se concluye que la operación de renormalización es

$$\begin{aligned} R_\lambda : [0, \infty)^2 &\rightarrow [0, \infty)^2 \\ (K, h) &\mapsto (K', h') := \left(2K \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2, 3h \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

3. Es obvio que $(0, 0)$ es un punto fijo. Suponga que $h \neq 0$. Entonces

$$R_\lambda(0, h) = \left(0, \frac{3h}{2} \right) \neq (0, h) \quad (60)$$

Suponga que $(0, 0) \neq (K, h) \in [0, \infty)^2$ es otro punto fijo de R . Por el argumento anterior $K \neq 0$. Luego de

$$K = 2K \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 \quad (61)$$

se deduce que

$$2 \left(\frac{e^{4K} + 1}{e^{4K} + 3} \right)^2 = 2 \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 = 1. \quad (62)$$

Esto se puede reducir a una ecuación lineal en e^{4K}

$$\sqrt{2}(e^{4K} + 1) = e^{4K} + 3 \quad (63)$$

cuya solución es

$$e^{4K} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}, \quad (64)$$

es decir,

$$K = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right) \approx 0,336. \quad (65)$$

Por el otro lado, tenemos

$$h = 3h \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} = \frac{3h}{\sqrt{2}}. \quad (66)$$

Se concluye que $h = 0$. Luego los dos puntos fijos de R son $(0, 0)$ y $(0, 336, 0)$.

4. El punto $(0, 0)$ corresponde a una red en la cual no hay campo magnético y los espines no interactúan. Esto hace que el punto no sea interesante.

Tenemos

$$\begin{aligned} \partial_1 R_\lambda^1(K, h) &= 2 \left(\frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 + 4K \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \times \\ &\quad \frac{(3e^{3K} - e^{-K})(e^{3K} + 3e^{-K}) - (e^{3K} + e^{-K})(3e^{3K} - 3e^{-K})}{(e^{3K} + 3e^{-K})^2} \\ \partial_1 R_\lambda^2(K, h) &= 3h \times \\ &\quad \frac{(3e^{3K} - e^{-K})(e^{3K} + 3e^{-K}) - (e^{3K} + e^{-K})(3e^{3K} - 3e^{-K})}{(e^{3K} + 3e^{-K})^2} \\ \partial_2 R_\lambda^1(K, h) &= 0 \\ \partial_2 R_\lambda^2(K, h) &= 3 \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \end{aligned} \quad (67)$$

Evalutando en el punto crítico interesante se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{3}^{y_T} = \lambda^{y_T} &= \partial_1 R_\lambda^1(K^*, h^*) \approx 1,623524 \\ \sqrt{3}^{y_h} = \lambda^{y_h} &= \partial_2 R_\lambda^2(K^*, h^*) = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,121320. \end{aligned} \quad (68)$$

Se concluyen entonces los valores

$$\begin{aligned} y_T &\approx 0,882203 \\ y_h &\approx 1,369070. \end{aligned} \quad (69)$$

Con estos valores podemos hallar los exponentes críticos según las fórmulas halladas en clase.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 - \frac{d}{y_T} \approx -0,267053 \\
\beta &= \frac{d - y_h}{y_T} \approx 0,715176 \\
\gamma &= \frac{2y_h - d}{y_T} \approx 0,836702 \\
\nu &= \frac{1}{y_T} \approx 1,133526 \\
\eta &= d + 2 - 2y_h \approx 1,261860 \\
\delta &= \frac{y_h}{d - y_h} \approx 2,169925.
\end{aligned} \tag{70}$$

Referencias

- [1] National Institute of Standards and Technology, “DLMF: 10.32 Integral Representations.” <https://dlmf.nist.gov/10.32>, 2018.
- [2] J. Williams, *Laplace Transforms*. George Allen & Unwin Ltd, 1973.
- [3] M. Iwaniuk, “How can I solve this equality?.” <https://math.stackexchange.com/questions/2731192/how-can-i-solve-this-equality/2731231#2731231>, 2018.