Mecánica Estadística
Tarea 5: Teoría de Landau y Renormalización

Iván Mauricio Burbano Aldana

10 de abril de 2018

1. Teoría de Landau

1.1. Parámetro de orden

1. La derivada funcional de S es

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi] =&\frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi]-\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r})}\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,h(\mathbf{r}')\phi(\mathbf{r}')\\ =&\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r}')}\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\|^2+A\phi(\mathbf{r}')^2+B\phi(\mathbf{r}')^4\right)\\ &-\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,h(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ &+\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\left(2A\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r}')^3\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\right)-h(\mathbf{r})\\ =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{1}$$

Note que según la definición de derivada de una distribución se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) =&\sum_{i=1}^d\partial_i\phi(\mathbf{r}')\partial_i\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=-\sum_{i=1}^d\partial_i^2\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\\ =&-\Delta\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi] =&\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r})\\ =&-\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}'\,\Delta\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r})\\ =&-\Delta\phi(\mathbf{r})+2A\phi(\mathbf{r})+4B\phi(\mathbf{r})^3-h(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{3}$$

En efecto, la condición de minimización $0 = \frac{\delta S}{\delta\phi(\mathbf{r})}[\phi_0]$ toma la forma

$$h(\mathbf{r}) = 2A\phi_0(\mathbf{r}) + 4B\phi_0(\mathbf{r})^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}). \tag{4}$$

2. En el caso $h = 0$ en el que ϕ_0 es constante, $\Delta\phi = 0$ y por lo tanto

$$0 = 2A\phi_0 + 4B\phi_0^3 = 2\phi_0(A + 2B\phi_0^2). \tag{5}$$

Se obtienen las soluciones $\phi_0 = 0$ y, si A y B tienen signos opuestos, $\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$.

3. Empezamos considerando las expansiones en series de potencias de A y B alrededor de la temperatura crítica T_c

$$\begin{aligned} A(T) =& A_0 + A_1(T - T_c) + \cdots \\ B(T) =& B_0 + B_1(T - T_c) + \cdots . \end{aligned} \tag{6}$$

Recordando los resultado de campo medio, queremos dependencia del tiempo. Por lo tanto no podemos permitirnos considerar a A y B simultaneamente como constantes. Mas aún, ya que en la aproximación de campo medio tenemos para $T < T_c$ la relación $m \propto |T - T_c|^{1/2}$ y, como se demostró en clase, podemos identificar ϕ_0 con m, observamos que las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A_0 + A_1(T - T_c) + \cdots}{2B_0 + B_1(T - T_c) + \cdots}} \tag{7}$$

coinciden con las obtenidas en campo medio al poner $A_0 = A_2 = \cdots = B_1 = B_2 \cdots = 0$. Más aún, queremos que esta solución sea inválida en el caso $T > T_c$. Esto lo podemos obtener asegurando que los coeficientes A_1 y B_0 tengan el mismo signo. Las escogemos positivas. En este caso, si $T > T_c$, se tiene $A > 0$. Por lo tanto, la única solución posible es $\phi_0 = 0$. Por el otro lado, si $T < T_c$, tanto la solución $\phi_0 = 0$ como las soluciones

$$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{A_1(T_c - T)}{B}} \tag{8}$$

son permitidas. Sin embargo, solo consideramos la solución (8) ya que esta minimiza la energía libre. En efecto, ya que $h = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} F =& H[\phi_0] = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\left(A\phi^2 + B\phi^4\right) = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\left(A + B\phi^2\right)\phi^2 \\ =& \begin{cases} 0, & \phi_0 = 0 \\ -\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,(A - B\frac{A}{2B})\frac{A}{2B} = -\int \mathrm{d}^d\mathbf{r}\,\frac{A^2}{4B} < 0, & \phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

1.2. Correlaciones

1. Tomando la derivada funcional y utilizando la relación vista en clase $G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}')$ se tiene

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) =&\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}h(\mathbf{r}') = \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\big(2A\phi_0(\mathbf{r}') + 4B\phi_0(\mathbf{r}')^3 - \Delta\phi_0(\mathbf{r}')\big)\\ =&2A\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}') + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}') - \Delta\frac{\delta}{\delta h(\mathbf{r})}\phi_0(\mathbf{r}')\\ =&2AG(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + 12B\phi_0(\mathbf{r}')^2G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) - \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}',\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{10}$$

Si $h = 0$ y el sistema es homogeneo, ϕ_0 es constante y $G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$. Es claro entonces por la regla de la cadena que

$$\Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \Delta G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}). \tag{11}$$

Tomando

$$\xi^{-2} = 2A + 12B\phi_0^2 \tag{12}$$

y haciendo el cambio de variable $\mathbf{r}'-\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$ se concluye

$$\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})G(\mathbf{r}). \tag{13}$$

Podemos determinar

$$\begin{aligned}\xi =&\frac{1}{\sqrt{2A + 12B\phi^2}}\\ =&\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2A-12B\frac{A}{2B}}} = \frac{1}{2\sqrt{-A}} = \frac{1}{2\sqrt{A_1(T_c-T)}}, & T < T_c\\ \frac{1}{\sqrt{2A}} = \frac{1}{\sqrt{2A_1(T-T_c)}}, & T > T_c.\end{cases}\end{aligned} \tag{14}$$

2. Utilizando la forma integral de la distribución delta e insertando la transformada de Fourier en (13) se tiene

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} =&\delta(\mathbf{r}) = (-\Delta + \xi^{-2})\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}(-\Delta + \xi^{-2})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}(\mathbf{k}^2 + \xi^{-2})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{G}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{15}$$

en vista de que $\Delta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i\mathbf{k}\cdot i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Comparando se obtiene que

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}}. \tag{16}$$

3. Utilizando el resultado anterior y restringiendo a $d = 3$ tenemos

$$\begin{aligned}G(\mathbf{r}) =& \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \xi^{-2}} \\ =& \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, u^2 \sin(\theta) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|\cos(\theta)}}{u^2 + \xi^{-2}} \\ =& \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_1^{-1} \mathrm{d}v\, (-1) u^2 \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|v}}{u^2 + \xi^{-2}} \\ =& \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}u\, u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|} - e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}\end{aligned} \tag{17}$$

Note que bajo un cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, u \frac{e^{-iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}} &= \int_0^{-\infty} \mathrm{d}u\, (-1)(-u) \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{(-u)^2 + \xi^{-2}} \\ &= -\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}u\, u \frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}.\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u\, \frac{u e^{iu\|\mathbf{r}\|}}{u^2 + \xi^{-2}}. \tag{19}$$

Sea $R > i\xi^{-1}$. Considere bajo la orientación en contra de las manecillas del reloj los conjuntos

$$\begin{aligned}S_R^+ :=& \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} | \theta \in [0, \pi]\} \subseteq D_R := S_R^+ \cup [-R, R] \times \{0\} \\ \subseteq& \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\},\end{aligned} \tag{20}$$

el dominio de definición de la función holomorfa

$$\begin{aligned}f : \mathbb{C} \setminus \{i\xi^{-1}, -i\xi^{-1}\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z e^{iz\|\mathbf{r}\|}}{z^2 + \xi^{-2}} = \frac{z e^{iz\|\mathbf{r}\|}}{(z + i\xi^{-1})(z - i\xi^{-1})}.\end{aligned} \tag{21}$$

D_R solo encierra el polo $i\xi^{-1}$ y en este punto el residuo de f claramente es

$$\frac{i\xi^{-1} e^{ii\xi^{-1}\|\mathbf{r}\|}}{2i\xi^{-1}} = \frac{1}{2} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{22}$$

Por lo tanto por el teorema del residuo

$$\int_{D_R} \mathrm{d}z\, f(z) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}, \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u\, f(u) &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{D_R} \mathrm{d}z\, f(z) - \int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, f(z) \right) \\ &= i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} - \lim_{R\to\infty} \int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, f(z) = i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}.\end{aligned} \tag{24}$$

El límite desaparece por la estimación

$$\begin{aligned}
\left|\int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, f(z)\right| \leq \int_{S_R^+} \mathrm{d}z\, |f(z)| = \int \mathrm{d}z\, R \left|\frac{e^{iRre^{i\theta}}}{R^2e^{i2\theta}+\xi^{-2}}\right| \\
=& R\int \mathrm{d}z\, \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{(R^2e^{i2\theta}+\xi^{-2})(R^2e^{-i2\theta}+\xi^{-2})} \\
=& R\int \mathrm{d}z\, \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{R^4+\xi^{-4}+2R^2\xi^{-2}\cos(2\theta)} \\
\leq& \pi R^2 \sup\left\{ \frac{e^{-Rr\sin(\theta)}}{R^4+\xi^{-4}+2R^2\xi^{-2}\cos(2\theta)} \middle| \theta\in(0,\pi)\right\} \\
\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}& \pi R^2 0 = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Para poner los límites del ángulo utilizamos el hecho de que $[0,\pi]\setminus(0,\pi) = \{0,\pi\}$ tiene medida nula. Se concluye que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\|\mathbf{r}\|(2\pi)^2} i\pi e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi} = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \tag{26}$$

4. En el caso $d = 2$ tenemos tomando coordenadas polares con los ángulos medidos desde $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) =& \int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2+\xi^{-2}} \\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, u\frac{e^{iu\|\mathbf{r}\|\cos(\theta)}}{u^2+\xi^{-2}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Recordando la expresión integral para la función de Bessel de orden 0[1]

$$\begin{aligned}
J_0(x) =& \frac{1}{2}(J_0(x)+J_0(x)) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{-ix\cos(\theta)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi\,\mathrm{d}\theta\, e^{-ix\cos(\theta-\pi)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)} + \int_\pi^2 \pi\,\mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, e^{ix\cos(\theta)}
\end{aligned} \tag{28}$$

se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{uJ_0(u\|\mathbf{r}\|)}{u^2+\xi^{-2}}. \tag{29}$$

Recordando que bajo ciertas asunciones sobre el comportamiento de las funciones se tiene[2]

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)g(x) = \int_0^\infty \mathcal{L}(f)(x)\mathcal{L}^{-1}(g)(x), \tag{30}$$

se tiene que[1, 2]

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \mathcal{L}(u \mapsto J_0(u\|\mathbf{r}\|))(u)\mathcal{L}^{-1}\left(u \mapsto \frac{u}{u^2+\xi^{-2}}\right)(u) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2+u^2}}\cos\left(\frac{u}{\xi}\right) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \|\mathbf{r}\|\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2+\|\mathbf{r}\|^2u^2}}\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}u\, \frac{\cos\left(\frac{\|\mathbf{r}\|u}{\xi}\right)}{\sqrt{1+u^2}} = K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \end{aligned} \tag{31}$$

El crédito de esta solución va para Iwaniuk[3].

5. En el caso $d = 2$ tenemos según el apéndice del enunciado que para $\|\mathbf{r}\|/\xi \gg 1$, es decir, $\|\mathbf{r}\| \gg \xi$ se tiene

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}K_0(\|\mathbf{r}\|/\xi) \sim \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi\xi}{2\|\mathbf{r}\|}}e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}. \tag{32}$$

   Este es el comportamiento deseado. En el caso $d = 3$ el comportamiento es trivial de (26).

6. En el caso $d = 2$ cuando $\xi \gg \|\mathbf{r}\|$ se tiene $\|\mathbf{r}\|/\xi \ll 1$. Por lo tanto, según el apéndice del enunciado se tiene

$$G(\mathbf{r}) \sim -\frac{1}{2\pi}\ln(\|\mathbf{r}\|/\xi). \tag{33}$$

   Ya que no hay dependencia en potencias, se tiene $0 = d+\eta-2 = 2+\eta-2 = \eta$. En el caso $d = 3$ vemos que

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\|\mathbf{r}\|/\xi}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \sim \frac{1}{2\pi\|\mathbf{r}\|}. \tag{34}$$

   Por lo tanto $1 = d + \eta - 2 = 3 + \eta - 2 = 1 + \eta$. Se concluye una vez más que $\eta = 0$.

7. En el punto crítico $\xi \to \infty$. Por lo tanto en caso $d = 2$ y $d = 3$

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2+\zeta} \sim \frac{1}{\mathbf{k}^2} = \|\mathbf{k}\|^{-2} \tag{35}$$

   Se concluye entonces que $\eta = 0$ en ambos casos, resultado que concuerda con el anterior.

2. Renormalización

1.

Referencias

[1] National Institute of Standards and Technology, “DLMF: 10.32 Integral Representations.” https://dlmf.nist.gov/10.32, 2018.

[2] J. Williams, *Laplace Transforms*. George Allen & Unwin Ltd, 1973.

[3] M. Iwaniuk, “How can I solve this equality?.” https://math.stackexchange.com/questions/2731192/how-can-i-solve-this-equality/2731231#2731231, 2018.