Processus Stochastique

Optimisation du nombre de guichets dans une file d'attente

BRUNO Céline - DEZE Florian
Génie Informatique et Statistique
4e année - Semestre 8
Polytech'Lille
Mai 2017

Table des matières

1 Intoduction

Dans le cadre de notre formation en Génie Informatique et Statistique, en 4^{e}année, à Polytech'Lille, nous avons suivi un cours de Processus Stochastique suivi de ce projet afin d'appliquer les notions du cours sur un exemple concret.

Le projet consiste à trouver le nombre optimal de guichets dans une file d'attente. Nous considérons un magasin avec s guichets ouverts, supposés indépendants et dont les temps de service sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Nous supposons aussi que les arrivées des clients peuvent être modélisées par un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Il y a donc une seule file d'attente et dès qu'un guichet se libère, le prochain client de la file s'y présente. L'unité de temps est la minute.

Dans un premier temps, nous déterminerons la condition portant sur s, μ, λ assurant l'existence d'un régime stationnaire pour le système défini ci-dessus. Ensuite nous décririons ce régime stationnaire. Puis, nous calculerons le nombre moyen de clients dans la file d'attente. Enfin, nous effectuerons des simulations.

2 Etude du comportement asymptotique

Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ le nombre de clients dans le système au temps t. Nous admettons que pour les files d'attentes M/M/s, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts. Soit un état $n \in \mathbb{N}$. Nous définissons le paramètre $\lambda(n)$ correspondant au temps de séjour du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à l'état n. Nous cherchons à trouver une expression pour $\lambda(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et pour $q_{n,m}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

$n = 0$:	$\lambda(0) = \lambda$	$q_{0,1} = 1$		
$n = 1$:	$\lambda(1) = \lambda + \mu$	$q_{1,0} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$	et	$q_{1,2} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$
$n = 2$:	$\lambda(2) = \lambda + \min(2\mu, s\mu)$	$q_{2,1} = \frac{\min(2\mu,s\mu)}{\lambda+\min(2\mu,s\mu)}$	et	$q_{2,3} = \frac{\lambda}{\lambda+\min(2\mu,s\mu)}$
A l'état n :	$\lambda(n) = \lambda + \min(n\mu, s\mu)$	$q_{n,n-1} = \frac{\min(n\mu,s\mu)}{\lambda+\min(n\mu,s\mu)}$	et	$q_{n,n+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\min(n\mu,s\mu)}$

Cette généralité est valable $\forall n \geqslant 1$. Nous devons donc distinguer deux cas : si tous les guichets sont occupés, c'est à dire que $s \leqslant n$ et s'il existe des guichets vides, c'est à dire $s > n$.

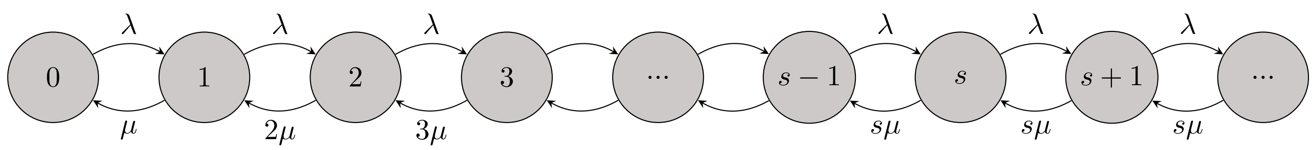
Soit le générateur $A = (a_{x,y})_{x,y\in E}$ avec :

$$a(x,y) = \begin{cases} \lambda(x) q_{x,y} & \text{si } x \neq y \\ -\lambda(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Nous obtenons le générateur suivant :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & & \\ \mu\min(1,s) & -(\lambda+\mu\min(1,s)) & \lambda & 0 & \dots & \\ 0 & \mu\min(2,s) & -(\lambda+\mu\min(2,s)) & \lambda & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Soit le graphe de transition correspondant au générateur :



Nous pouvons aller de l'état x à l'état y et inversement. Donc x communique avec y. Par transitivité tous les états communiquent donc la chaîne est irréductible. Afin d'appliquer le théorème limite, nous cherchons une mesure stationnaire.

Nous cherchons une mesure réversible telle que : $\pi(x) \cdot a_{x,y} = \pi(y) \cdot a_{y,x}$. Pour réaliser le calcul, nous distinguons deux cas : lorsque que le nombre de clients est supérieur au nombre de guichets ($n \geqslant s$) et lorsque le nombre de clients est inférieur au nombre de guichets ($n < s$).
Cas 1 : $n \geqslant s$

$$\begin{aligned} \pi(n) a_{n,n+1} &= \pi(n+1) a_{n+1,n} \\ \pi(n)\lambda &= \pi(n+1)(n+1)\mu \\ \pi(n+1) &= \frac{\pi(n)\lambda}{\mu(n+1)} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\pi(n) = \frac{\pi(n-1)\lambda}{n\mu} &= \pi(n-2) \times \frac{\lambda}{n\mu} \times \frac{\lambda}{(n-1)\mu} \\ &= \pi(n-3) \times \frac{\lambda}{n\mu} \times \frac{\lambda}{(n-1)\mu} \times \frac{\lambda}{(n-2)\mu} \\ &= \cdots \\ &= \pi(0)\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\end{aligned}$$

Cas 2 : $n < s$

$$\begin{aligned}\pi(n)a_{n,n+1} &= \pi(n+1)a_{n+1,n} \\ \pi(n)\lambda &= \pi(n+1)s\mu \\ \pi(n+1) &= \frac{\pi(n)\lambda}{s\mu}\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\pi(n) &= \frac{\pi(n-1)\lambda}{s\mu} \\ &= \pi(n-2) \times \frac{\lambda}{s\mu} \times \frac{\lambda}{s\mu} \\ &= \pi(n-3) \times \frac{\lambda}{s\mu} \times \frac{\lambda}{s\mu} \times \frac{\lambda}{s\mu} \\ &= \cdots \\ &= \pi(0)\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{1}{s!}\end{aligned}$$

$\pi(n)$ doit être une mesure de probabilité donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\pi(n) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{s-1}\pi(0)\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=s}^{+\infty}\pi(0)\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{1}{s!} = 1$$

$$\pi(0)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \pi(0)\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\sum_{k=s}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} = 1$$

Afin que les calculs se déroulent, il faut que $\underline{\ s\mu > \lambda > 0\ }$.

$$\pi(0)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \pi(0)\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}} = 1$$

$$\pi(0)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \pi(0)\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{s\mu}{s\mu-\lambda} = 1$$

$$\pi(0)\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right) = 1$$

$$\pi(0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}}$$

La chaîne est irréductible et nous avons trouvé une mesure stationnaire (et réversible) donc d'après le théorème limite c'est l'unique mesure stationnaire et la chaîne y converge.

En régime stationnaire, $X_t \hookrightarrow \pi$. Le nombre moyen de client est donc $\mathbb{E}(X_t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \ \pi(n) \\
&= \sum_{k=0}^{s} k \, \pi(k) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} k \, \pi(k) \\
&= \sum_{k=1}^{s} k \ \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi(0) + \sum_{k=s+1}^{+\infty} k \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{k-s} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0)
\end{aligned}$$

Nous savons que :

$$\pi(0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}}}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=s+1}^{+\infty} k \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{k-s} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) &= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \sum_{j=1}^{+\infty} (j+s) \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^j \text{avec } j = k - s \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^j + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^j \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \frac{\lambda}{\mu s} \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{j-1} \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \frac{\lambda}{\mu s} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}}\right)' \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \pi(0) \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}
\end{aligned}$$

Revenons sur l'équation de départ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= \pi(0) \left[\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}\right] \\
&= \pi(0) \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \ \pi(0) \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu s}} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\mu} + \pi(0) \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\lambda}{\mu s} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}
\end{aligned}$$

3 Simulations

Nous avons réalisé des simulations pour chacune des deux questions.

Concernant la première question, le code est composée de deux sous-parties. La première est l'étude de cas pertinents des paramètres λ et μ (section 1.1 du code) et la seconde partie est l'étude de la stabilité du système en fonction du nombre de guichet (section 1.2 du code).

Pour la première sous-partie, nous avons relevé trois cas :

Cas 1 $\mu \times s > \lambda$ (quelconque)

Cas 2 $\mu \times s \gg \lambda$

Cas 3 $\mu \times s > \lambda$ avec $\mu \times s$ très proche de λ

Nous formulons l'hypothèse suivante : plus le nombre de guichets est élevé, plus le nombre moyen de clients dans le système au temps t est faible.

Nous observons l'espérance de X au temps t, les résultats obtenus [1] sont les suivants :

Cas 1 1.0068

Cas 2 0.4

Cas 3 7.4666

Lorsque $\mu \times s \gg \lambda$, nous remarquons que le nombre moyen de clients au temps t est proche de 0. A l'inverse, lorsque $\mu \times s$ est très proche de λ le nombre moyen de clients est plus élevé. Cela correspond à l'hypothèse suggérée, cependant nous remarquons bien que même si le nombre de guichets est élevé, nous ne pouvons pas atteindre un nombre moyen de 0 client. L'hypothèse est vraie jusqu'à une certaine limite, si le nombre de guichets est trop important par rapport au nombre de clients, la moyenne de stabilise.

Nous vérifions cette seconde hypothèse dans la deuxième étude de cas. Nous choisissons trois cas comme précédemment :

Cas 1 $s = 6$

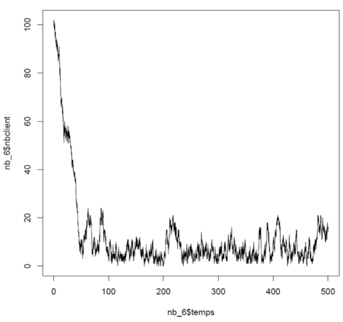
Cas 2 $s = 12$

Cas 3 $s = 50$

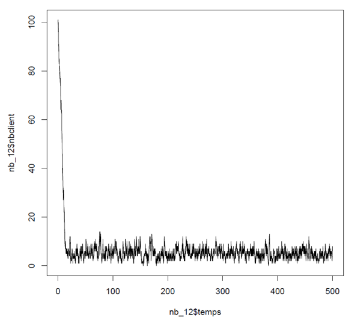
Cela nous permet de réaliser une étude similaire à précédemment cependant celle-ci ne dépendra que de s car λ et μ sont constants.

Les résultats sont affichés dans les graphiques suivants :

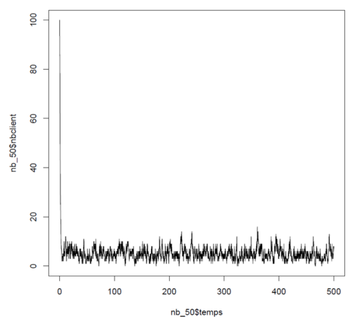
Cas 1 : $s = 6$



Cas 2 : $s = 12$



Cas 3 : $s = 50$



Plus le nombre de guichets est élevé plus la stabilité du système est atteinte rapidement. Nous remarquons aussi que le nombre moyen de clients décroit avec un nombre de guichets plus élevé mais qu'il n'y a pas de différences pertinentes entre les cas $s = 12$ et $s = 50$. La seconde hypothèse est vérifiée.

1. Ces résultats se basent sur de l'aléa donc les résultats diffèrent à chaque exécution de code.

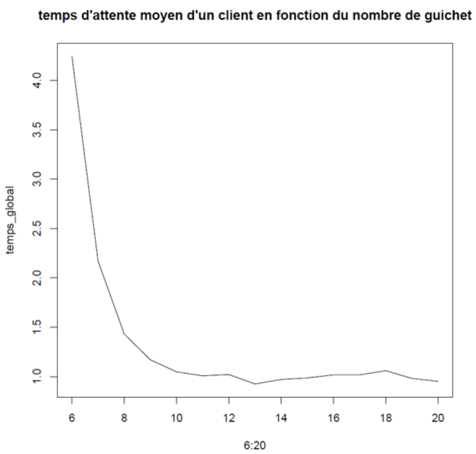
Nous passons maintenant à la résolution de la deuxième question. Le but est de trouver le nombre optimal de guichets afin qu'au maximum 5% des clients passent plus de 4 minutes dans le système (condition de confort) avec λ et μ fixe. Ici $\lambda = 5$ et $\mu = 1$.

Nous écrivons deux fonctions pour nous aider à résoudre le problème :

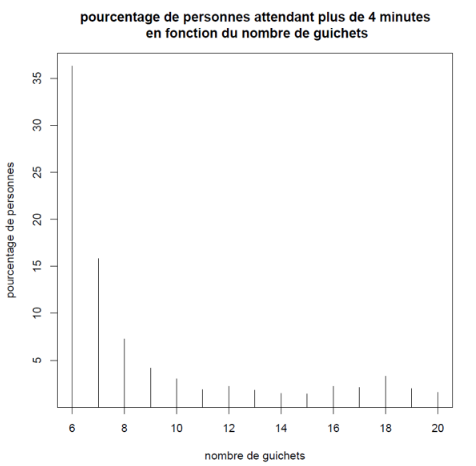
- `file_dattente_personne_unique` : cette fonction nous calcule le temps qu'une personne passe dans la file d'attente en fonction de s, λ et μ.
- `PI_calcul_discret` : cette fonction simule et calcule le nombre de personne présente dans la file d'attente. Ce $\pi(n)$ sera utilisé à la place de $\pi(0)$ afin d'avoir un système stable dès le début de la simulation.

Ces deux fonctions font l'objet d'aléas, il n'est donc pas pertinent d'observer un résultat unique issu de celle-ci. Ces fonctions seront utilisées dans une boucle (dans notre code 1000 fois) et nous réalisons la moyenne de ces résultats. Nous réalisons une boucle dont l'indice correspond au nombre de guichets. Pour chaque guichet nous enregistrons le temps d'attente moyen de 1000 clients.

Le graphique suivant nous montre que le temps d'attente moyen de ces clients est très vite inférieur à 4 minutes à partir de 7 guichets.



Le graphique suivant nous donne le pourcentage de personnes dont le temps d'attente est supérieur à 4 minutes en fonction du nombre de guichet. Nous remarquons que le résultat souhaité est compris entre 8 et 10 guichets.



En imprimant ces valeurs, nous voyons que le résultat attendu est de **9 guichets**, avec une proportion de 3% de personnes attendant plus de 4 minutes. Avec 9 guichets, la condition de confort est respectée.

4 Conclusion

Pour conclure, nous avons déterminé les conditions sur λ et μ nécessaires à l'existence du régime stationnaire, notamment la condition $s\mu > \lambda$. A partir de ces conditions, nous avons déterminé ce régime stationnaire et utilisé celui-ci dans nos simulations.

L'énoncé précise une valeur précise pour λ et μ, nous savons qu'il faut 9 guichets pour atteindre un temps moyen inférieur à 4 minutes pour 95% des clients. Le code a été rédigé de telle sorte à déterminer à nouveau ce nombre si les valeurs fixées par l'enoncé devait changer.

Ce modèle peut être soumis à des critiques sur les paramètres du modèle de file d'attente. Tout d'abord, la capacité de la file d'attente n'est pas infinie. Nous supposons que les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée, or les personnes à mobilité réduite, les femmes enceintes et les personnes âgées sont prioritaires et ne suivent pas cette règle. De plus, une arrivée peut se faire en même temps qu'une sortie, ce qui est impossible dans ce modèle.