

# Graphen

Die Stimmen werden lauter

Verzweifelte Studierende

31. Dezember 2023

## Inhaltsverzeichnis

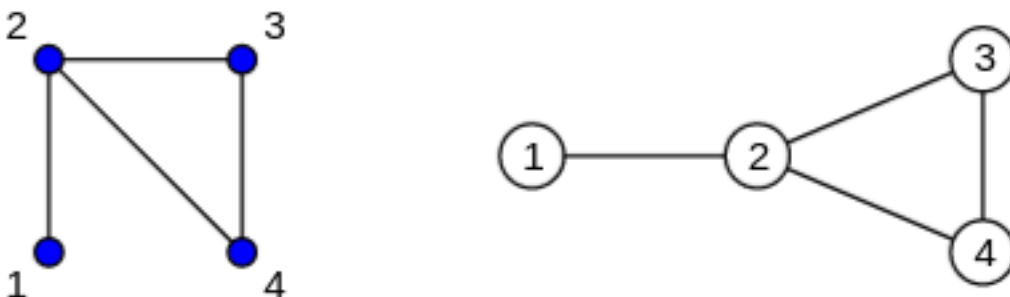
<b>Ungerichtete Graphen</b>	<b>2</b>
Spezielle ungerichtete Graphen . . . . .	2
Nachbarschaft . . . . .	2
Begriffe . . . . .	3
Teilgraph . . . . .	4
<b>Bäume und Wälder</b>	<b>5</b>
<b>Gerichtete Graphen</b>	<b>6</b>
Analoge Definitionen zum ungerichteten Graphen . . . . .	6
Zusammenhang . . . . .	6
Nachbarschaft . . . . .	7
Grafische Darstellung von Relationen . . . . .	7
Bewerteter Graph . . . . .	7
Entfernung . . . . .	8
Distanzgraph . . . . .	8
Wurzelbäume . . . . .	8
k-ärer, binärer, vollständiger, perfekter WB . . . . .	8
Graphenisomorphie . . . . .	8

## Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ , besteht aus einer Menge  $V$  von Knoten (vertices) und einer Menge  $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}$  von Kanten.

Die Kanten verbinden die Knoten ohne eine Richtung (daher sind sie zweielementige Mengen und keine Tupel).

Knoten werden graphisch durch Punkte und Kanten durch Verbindungslinien repräsentiert. Der Graph  $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$  könnte z.B. so aussehen:



## Spezielle ungerichtete Graphen

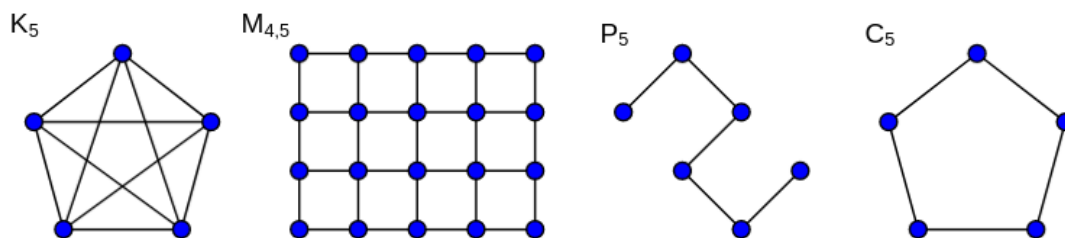
**Vollständiger Graph**  $K_n$  besteht aus  $n$  Knoten, die alle paarweise miteinander verbunden sind

**Gittergraph**  $M_{m,n}$  besteht aus  $m \cdot n$  Knoten, die in einem Gitter mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten angeordnet sind

**Pfad**  $P_n$  besteht aus  $n$  Kanten und  $n + 1$  Knoten, wobei aufeinanderfolgende Knoten miteinander verbunden sind

**Kreis**  $C_n$  besteht aus  $n$  Knoten, die zyklisch miteinander verbunden sind

**Multigraphen** Erlauben Mehrfachkanten und Schlingen (Kanten von einem Knoten zu sich selbst)



## Nachbarschaft

Die Menge der Kanten, die durch eine Kante mit dem Knoten  $v$  verbunden ist, ist die Nachbarschaft  $U(v)$ .  $v$  ist nicht in seiner eigenen Nachbarschaft (außer er hat eine Schlinge)

$$U(v) := \{u \in V \mid u, v \in E\}$$

Der Grad von  $v$  bezeichnet die Größe der Nachbarschaft von  $v$ .

$$g(v) := |U(v)|$$

**Handshlagslemma** In jedem ungerichteten Graph  $G = (V, E)$  gilt  $\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|$

Dies gilt, da der Grad eines Knotens die Anzahl der Kanten, die an diesem Knoten anliegen ist und jede Kante an genau zwei Knoten anliegt. Somit kommen pro Kante 2 zu Summe hinzu.

Knoten ohne Nachbarn, nennt man **isoliert**.

## Begriffe

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph

**adjazent** Die Knoten  $u, v$  heißen adjazent (benachbart) wenn  $u, v \in E$

**Endknoten** Die Knoten  $u, v$  heißen Endknoten der Kante  $u, v$

**inzident** ein Knoten  $u$  und eine Kante  $e$  heißen inzident, wenn  $u$  ein Endknoten von  $e$  ist

**Weg  $w$**  Eine Folge von Knoten aus  $V$ , die jeweils mit dem nächsten verbunden sind

$$w = (v_0, \dots, v_l) \text{ mit } \{v_i, v_{i+1}\} \in E$$

**Pfad  $w$**  Ein Weg, bei dem alle Knoten paarweise verschieden sind (keine doppelten Knoten und Kanten)

**Anfangsknoten**  $\alpha(w) := v_0$  vom Weg  $w$

**Endknoten**  $\omega(w) := v_l$  vom Weg  $w$

Einen Weg/Pfad mit Anfangsknoten  $u$  und Endknoten  $v$  nennt man  $u$ - $v$ -Weg bzw  $u$ - $v$ -Pfad

**geschlossener Weg** Anfangsknoten und Endknoten sind gleich

$$v_0 = v_l$$

**offener Weg** Anfangsknoten und Endknoten sind gleich

$$v_0 \neq v_l$$

**innere Knoten** alle Knoten vom Weg, außer Anfangs- und Endknoten

**Kreis** mit Länge  $l \geq 3$  ist eine Folge  $(v_0, \dots, v_{l-1}, v_0)$

$(v_0, \dots, v_{l-1})$  ist hierbei ein Pfad in  $G$

$\{v_{l-1}, v_0\}$  ist hierbei eine Kante in  $G$

Es sind keine doppelten Knoten außer am Ende wieder der Anfangsknoten erlaubt

Kreise der Länge 2 sind mit Mehrfachkanten möglich

Kreise der Länge 1 sind mit Schlingen möglich

**Notiz:** Prof. Rass fragen ob Kreis oder Weg

Wiederholung		offen/geschlossen	Name	Englisch
Knoten	Kanten			
ja	ja	offen	Weg/Kantenfolge	walk
ja	ja	geschlossen	geschl. Weg/Kantenfolge	closed walk
ja	nein	offen	Kantenzug	trail
ja	nein	geschlossen	geschl. Kantenzug	circuit
nein	nein	offen	Pfad	path
nein	nein	geschlossen	Kreis	cycle

Abbildung 1: Alt text

## Teilgraph

Ein Graph  $H = (V_H, E_H)$  heißt Teilgraph eines Graphen  $G = (V_G, E_G)$ , wenn  $V_H \subseteq V_G$  und  $E_H \subseteq E_G$ . Also wenn  $G$  alle Knoten und Kanten von  $H$  enthält.

**Induzierter Teilgraph** ist ein Teilgraph wo zusätzlich gilt,  $E_H = E_G \cap \{\{u, v\} \mid u, v \in V_H\}$ .

d.h. für alle Knoten die im Teilgraphen enthalten sind, müssen auch alle Kanten zwischen diesen Knoten enthalten sein

Schreibweise:  $H = G[V_H]$

**Aufspannender Teilgraph** ist ein Teilgraph wo zusätzlich gilt,  $V_H = V_G$ .

d.h. der Teilgraph enthält alle Knoten, aber nicht zwingend alle Kanten

**Zusammenhangskomponente** ein Graph heißt zusammenhängend, wenn für jedes paar  $u, v \in V$  ein  $u$ - $v$ - Pfad existiert

einen Teilgraphen, der zusammenhängend ist, nennt man Zusammenhangskomponente

## Bäume und Wälder

**Kreisfreier Graph** enthält keinen Kreis als Teilgraph

**Baum** ein zusammenhängender Kreisfreier Graph

viele Probleme, die bei allgemeinen Graphen schwer lösbar sind, sind für Bäume leicht lösbar (z.B. kürzester Weg)

hat keinen bevorzugten Knoten

für alle Bäume gilt  $|E| = |V| - 1$

**Wald** ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind

**Blatt** ein Knoten eines Baumes mit dem Grad 1

jeder Baum mit zwei oder mehr Knoten, hat mindestens zwei Blätter

entfernt man bei einem Baum mit zwei oder mehr Knoten ein Blatt, ist das Ergebnis noch immer ein Baum

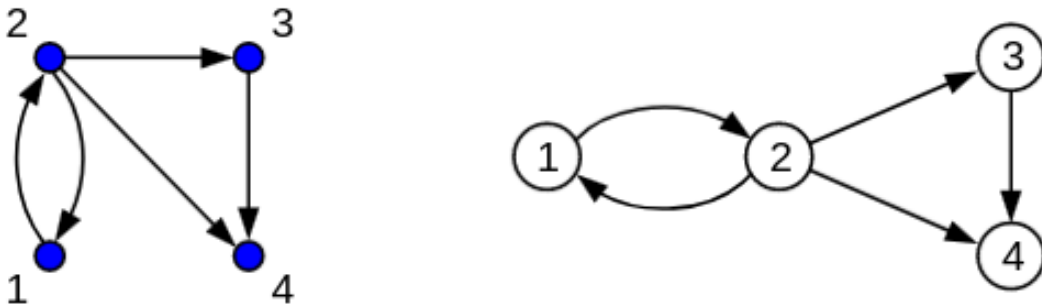
**Aufspannende Bäume** aufspannende Teilgraphen, die Bäume sind

## Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph (oder Digraph)  $D = (V, A)$ , besteht aus einer Menge  $V$  von Knoten (vertices) und einer Menge  $A \subseteq V \times V$  von gerichteten Kanten (arcs).

Die Kanten verbinden die Knoten in eine Richtung (daher Tupel). Eine gerichtete Kante  $(a, b)$  stellt eine Verbindung von  $a$  nach  $b$  dar und eine gerichtete Kante  $(b, a)$ , eine von  $b$  nach  $a$ . Es handelt sich also um zwei unterschiedliche Kanten.

Knoten werden graphisch durch Punkte und Kanten durch Verbindungslinien mit Richtungspfeil repräsentiert. Der Graph  $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  könnte z.B. so aussehen:



Bei der gerichteten Kante  $e = (u, v)$ , heißt  $u$  **Anfangsknoten**  $\alpha(e) := u$  und  $v$  **Endknoten**  $\omega(e) := v$

### Analoge Definitionen zum ungerichteten Graphen

Folgende Eigenschaften des gerichteten Graphen lassen sich analog zum ungerichteten definieren. Es sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph.

**Induzierter Teilgraph** Ein durch  $W \subseteq V$  induzierter Teilgraph ist  $D_W = D[W] := (W, A \cap (W \times W))$

**Gerichteter Weg  $w$**  Eine Folge von Knoten aus  $V$ , die jeweils eine gerichtete Kante zum nächsten haben

$$w = (v_0, \dots, v_l) \text{ mit } (v_i, v_{i+1}) \in A$$

**Gerichteter Pfad  $w$**  Ein gerichteter Weg, bei dem alle Knoten paarweise verschieden sind (keine doppelten Knoten und Kanten)

**Gerichteter Kreis  $c$**  mit Länge  $l \geq 2$  ist eine Folge  $(v_0, \dots, v_{l-1}, v_0)$

$(v_0, \dots, v_{l-1})$  ist hierbei ein gerichteter Pfad in  $G$

$(v_{l-1}, v_0)$  ist hierbei eine Kante in  $G$

Es sind keine doppelten Knoten außer am Ende wieder der Anfangsknoten erlaubt

Kreise der Länge 2 sind möglich, da man zwischen zwei Knoten eine Kante hin und eine Kante zurück machen kann.

Kreise der Länge 1 sind mit Schlingen möglich

### Zusammenhang

Es sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph. Zwei Knoten heißen stark zusammenhängend ( $u, v$ ), falls in  $D$  sowohl ein  $u$ - $v$ -Pfad und ein  $v$ - $u$ -Pfad existiert. (jeder Knoten ist mit sich selbst stark zusammenhängend).

Wenn  $u, v$  und  $v, w$  dann gilt auch  $u, w$ , somit ist starker Zusammenhang transitiv.

Der Graph  $D$  heißt:

- **stark zusammenhängend**, wenn für jedes Paar  $u, v \in D$  ein gerichteter  $u$ - $v$ -Pfad existiert.  
ein Graph mit nur einem Knoten ist immer stark zusammenhängend.
- **schwach zusammenhängend** falls der zugrundeliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.  
mit anderen Worten: wenn kein Knoten bei einem Graph mit  $|V| > 1$  keine eingehenden oder ausgehenden Kanten hat.

**Starke Zusammenhangskomponente:** ein Teilgraph eines gerichteten Graphen, der stark zusammenhängend ist.  
die Zusammenhangskomponenten teilen den ungerichteten Graphen in Äquivalenzklassen ein

## Nachbarschaft

Es sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph.

**Nachfolgermenge:**  $N(u) := \{v \in V \mid (u, v) \in A\}$   
alle Knoten auf die eine Kante (kein Pfad!) von  $u$  hingeht

**Vorgängermenge:**  $V(u) := \{v \in V \mid (v, u) \in A\}$   
alle Knoten auf die eine Kante (kein Pfad!) auf  $u$  hingeht

**Außengrad:**  $g^+(u) := |N(u)|$   
Anzahl der ausgehenden Kanten

**Innengrad:**  $g^-(u) := |V(u)|$   
Anzahl der eingehenden Kanten

**Grad:**  $g(u) = g^+(u) + g^-(u)$   
Außengrad + Innengrad

## Grafische Darstellung von Relationen

Die Relation  $R \subseteq M \times M$  kann als Graph  $G = (M, R)$  grafisch dargestellt werden. Jedes Tupel der Relation wird somit zu einer gerichteten Kante, zwischen den Werten der Grundmenge.

Einige Eigenschaften von Relationen können so grafisch erkannt werden

- **Symmetrie:** alle Knoten, die mit Kanten verbunden sind, müssen in beide Richtungen verbunden sein.
- **Reflexivität:** Schlingen an allen Knoten
- **Transitivität:** Für alle Knotentripel  $a, b, c$ , wo  $a$  mit  $b$ , und  $b$  mit  $c$  verbunden ist, muss auch eine Kante von  $a$  nach  $c$  existieren.

## Bewerteter Graph

Ein bewerteter Graph  $G = (V, E, c)$  besteht aus einem (gerichteten/ungerichteten) Graphen aus  $V$  und  $E$  und einer Bewertungsfunktion  $c : E \rightarrow \mathbb{R}$  (cost). Diese ordnet den Kanten eine (numerische) Bewertung (Gewichte, Längen, Kosten, etc.) zu.

Die Länge  $c(G)$  ist die Summe der Bewertungen aller Kanten des Graphen.

Ist die Bewertungsfunktion auf Knoten statt Kanten definiert ( $c : V \rightarrow \mathbb{R}$ ), spricht man von einem Graph mit Labels.

## Entfernung

Die Entfernung  $d$  zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$ , ist die Länge (Summe der Kosten) des minimalen Weges zwischen den Knoten (wobei minimal nicht durch die Anzahl der Kanten bestimmt wird, sondern die Kosten).

Entfernung  $d$ , Länge des kürzesten Wegs zwischen zwei Knoten, sonst unendlich.

Kürzester Weg  $sp()$

Negative Gewichte  $\Rightarrow$  können Problemen beim Wegfinden in Kreisen machen

## Distanzgraph

Bewertungsfunktion auf  $\mathbb{R}_0^+$ .

Gut zum finden von kürzesten Wegen, da der Entfernung

## Wurzelbäume

Wurzel gibt implizit richtung vor Jeder Knoten hat einen Pfad zur Wurzel Zwischen zwei Knoten genau ein Pfad Vorgänger: Knoten am Nachfolger

## **k-ärer, binärer, vollständiger, perfekter WB**

Prof. Rass fragen: hat ein Baum mit nur einer Wurzel ein Blatt?

## Graphenisomorphie

$G_1 = G_2$