Aussagenlogik

Endlose Schmerzen

Verzweifelte Studierende

18. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

Aussage

Eine (elementare) Aussage beschreibt ein bestimmtes Prädikat und Subjekts das einen eindeutigen Wahrheitswert hat.

Beispiele

Aussage	Keine Aussage
3 ist eine Primzahl.	Sie wird eine gute Informatikerin.
Ich glaube, dass es morgen regnen wird.	Löse die Gleichung $x^3 + 1 = 0$
Die Sonne scheint.	Dieser Satz ist falsch.

Prinzip des ausgeschlossenen Dritten Es gibt nur `wahr` oder `falsch`, keine dritte Option.

Aussagenvariable

Steht für eine bestimmte Aussage

Symbole, Junktoren

Negation $\neg p$
Und $p \wedge q$
Oder $p \vee q$
Xor $p \dot{\vee} q$
Alternative: $p \dot{\vee} q \iff (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
Implikation $p \rightarrow q$
Alternative: $p \rightarrow q \iff \neg p \vee q$
Negation: $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
Kontraposition: $\neg q \rightarrow \neg q$ ist logisch äquivalent zu $p \rightarrow q$
Äquivalenz $p \leftrightarrow q$
Alternative: $p \rightarrow q \wedge (q \rightarrow p)$ oder $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Aussagenlogische Begriffe

Tautologie Aussagenlogische Formel ist bei allen Belegungen der Variablen `wahr`.

Englisch: Tautology

Symbol: $\top$

Kontradiktion Aussagenlogische Formel ist bei allen Belegungen der Variablen `falsch`

Englisch: Contradiction, Unsatisfiable

Symbol: $\perp$

Erfüllbar Aussagenlogische Formel ist bei mindestens einer Belegung der Variablen ist `wahr`

English: Satisfiable

Logische Äquivalenz Zwei aussagenlogische Formeln r_1, r_2 sind ident, wenn gilt $r_1 \leftrightarrow r_2$.

r_1 und r_2 müssen dieselbe Wahrheitstabelle haben.

$r_1 \Leftrightarrow r_2$ ist eine Meta-Aussage

Meta-Aussage Eine Aussage über Aussagen

Eine Aussage über die Logik selbst

Aussagenlogische Formel Ausdrücke die aus elementaren Aussagen und der Verknüpfungen gebildet werden können

- w und f sind aussagenlogische Formeln
- für zwei AF p und q, sind auch $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ und $\neg p$ aussagenlogische Formeln
- Keine anderen Gebilde sind AF

Aussagenlogische Gesetze

Gesetz		$\wedge$			$\vee$	
Kommutativität	$p \wedge q$	$\Longleftrightarrow$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$\Longleftrightarrow$	$q \vee p$
Assoziativität	$(p \wedge q) \wedge r$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r$	$\Longleftrightarrow$	$p \vee (q \vee r)$
Distributivität	$p \wedge (q \vee r)$	$\Longleftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$\Longleftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identität	$p \wedge \top$	$\Longleftrightarrow$	p	$p \vee \bot$	$\Longleftrightarrow$	p
Negation	$p \wedge \neg p$	$\Longleftrightarrow$	$\bot$	$p \vee \neg p$	$\Longleftrightarrow$	$\top$
Doppelte Negation	$\neg(\neg p)$	$\Longleftrightarrow$	p			
Idempotenz	$p \wedge p$	$\Longleftrightarrow$	p	$p \vee p$	$\Longleftrightarrow$	p
De Morgan	$\neg(p \wedge q)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg p \wedge \neg q$
Universale Grenze	$p \wedge \bot$	$\Longleftrightarrow$	$\bot$	$p \vee \top$	$\Longleftrightarrow$	$\top$
Absorption	$p \wedge (p \vee q)$	$\Longleftrightarrow$	p	$p \vee (p \wedge q)$	$\Longleftrightarrow$	p
Tautologie/Kontradiktion	$\neg\top$	$\Longleftrightarrow$	$\bot$	$\neg\bot$	$\Longleftrightarrow$	$\top$

Duale Form Bei Aussagen, die nur die Junktoren $\wedge$ und $\vee$ enthält, ist die duale Formel r^d jene, bei denen sowohl alle $\vee$ und $\wedge$ als auch jedes $\top$ und $\bot$ vertauscht werden.

Sind r und s zwei logisch äquivalente Formeln, so sind auch die dazu dualen Formeln äquivalent:

$$\text{Wenn } r \Leftrightarrow s, \text{ dann } r^d \Leftrightarrow s^d$$

$r : (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \bot)$
dual $r : (p \vee \neg q) \wedge (r \vee \top)$

Substitutionsregel Sei P eine logische Formel und p eine Variable aus P.

- Ist P eine Tautologie, und ersetzt man jedes p in der Formel durch immer dasselbe q, so entsteht eine neue Formel P_1 die ebenfalls eine Tautologie.
- Sei q eine eine logisch äquivalente Aussage, also $p \Leftrightarrow q$. Ersetzt man in der Formel P einige p durch q, so erhält man eine neue Formel P_2 für welche gilt $P_1 \Leftrightarrow P$.

Logische Beweise

Schlussfolge Ist eine Implikation von sogenannten Voraussetzungen (Prämissen) $p_1, ..., pn$ auf eine Folgerung (Konklusion / Behauptung) q
Notation: $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \rightarrow q$
Wie Entails ($\models$) in Logic

			Voraussetzungen		Konklusion
p	q	r	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	f	f
f	f	f	f	w	f

Modus Ponens Wenn $p \rightarrow q$ `wahr` ist und p `wahr` ist, muss q `wahr` sein.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

Modus Tollens Wenn $p \rightarrow q$ `wahr` ist und $\neg q$ `wahr` ist, muss $\neg p$ `wahr` sein.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \quad \neg p \end{array}$$

Syllogismus (Kettenschluss) Wenn $p \rightarrow q$ `wahr` ist und $q \rightarrow r$ `wahr` ist, gilt $p \rightarrow r$.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore \quad p \rightarrow r \end{array}$$

Kontradiktionsregel Man nimmt das Gegenteil dessen an, was man beweisen will, und führt diese (negierte) Aussage ad absurdum.

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \bot \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

Bedingungen

Bedingung	Erforderlich	Ausreichend
Notwendige Bedingungen	✓	✗
Hinreichende Bedingungen	✗	✓
Notwendig und hinreichende Bedingungen	✓	✓

			Prämissen				Konklusion	kritisch?	Konklusion auch wahr?
p	q	r	$q \to r$	$p \to q$	$p \wedge r$	q	$(p \wedge r) \leftrightarrow q$		
f	f	f	w	w	f	f	w	ja	ja
f	f	w	w	w	f	f	w	ja	ja
f	w	f	f	w	f	w	f	nein	irrelevant
f	w	w	w	w	f	w	f	ja	nein*
w	f	f	w	f	f	f	w	nein	irrelevant
w	f	w	w	f	w	f	f	nein	irrelevant
w	w	f	f	w	f	w	f	nein	irrelevant
w	w	w	w	w	w	w	w	ja	ja

*Die Gültigkeit des obigen Schlusses scheitert also wegen der mit * gekennzeichneten Zeile. Dieser Fall ist jener, wo zwar die notwendige Bedingung r erfüllt ist, aber die hinreichende Bedingung p nicht gilt. Die Aussage q kann dennoch aus (alternativen) Gründen $\neq p$ erfüllt, also* `wahr`*, sein; dennoch wäre, da p falsch ist, die "gemeinsame Bedingung" $p \wedge r$ falsch, obgleich q erfüllt ist. Damit ist die Schlussweise* `falsch`*, und $p \wedge r$ keine notwendige-und-hinreichende Bedingung für q*