Mengen, Relationen, Funktionen

Die Schmerzen hören nie auf

Verzweifelte Studierende

18. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

Mengen – Einführung

Unter einer Menge (engl. set) versteht man eine Sammlung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

- Die Reihenfolge von Elementen in einer Menge ist irrelevant.
- Doppelte Elemente sind verboten (alle Elemente müssen unterscheidbar sein)
- Mengen sind ident, wenn sie dieselben Elemente haben.

Mengen per Angabe $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} :\Leftrightarrow \{1, 2, 3\}$
Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, ...\}$
$\Sigma^* = \{a, ab, abc, abcd, ...\}$ alle möglichen Wörter
Worte Zeichenketten aus mehreren Zeichen aus Σ.
Symbol für leeres Wort: ϵ
Sprache Eine Menge aus Worten nennt man eine Sprache und wird als L bezeichnet.
Konkatenationsoperator Kombiniert das Wort auf der linken mit dem Wort auf der rechten Seite.
Operator: $a||b :\Leftrightarrow ab$
Plus Operator Eine Menge M plus ein Element a: $M + a$ beschreibt meist das hinzufügen des Elements a zur Menge M.
Intervalle in dem Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$ werden durch Angabe von Intervallgrenzen angegeben.

- Eckige Klammer: Intervallgrenze gehört zur Menge, Runde Klammer: Intervallgrenze gehört nicht zur Menge.
- Komma als Trennzeichen: Grundmenge $\mathbb{R}$;

  Doppelpunkt als Trennzeichen: Grundmenge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

Beispiele (hier immer unter der Annahme $a \leq b$):

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ...alternative Schreibweise (seltener): $]a, b]$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ...alternative Schreibweise (seltener): $[a, b[$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ...alternative Schreibweise (seltener): $]a, b[$
- $[a : b] = \{a, a + 1, a + 2, \ldots, b - 2, b - 1, b\}$
- $(a : b] = \{a + 1, a + 2, \ldots, b - 2, b - 1, b\}$
- $[a : b) = \{a, a + 1, a + 2, \ldots, b - 2, b - 1\}$
- $(a : b) = \{a + 1, a + 2, \ldots, b - 2, b - 1\}$

Begriffe

Teilmenge, Obermenge Eine Menge A ist eine Teilmenge der Menge B, wenn gilt: $\forall x \in A : x \in B$.
A ist eine echte Teilemenge, wenn gilt: $(\forall x \in A : x \in B) \wedge A \neq B$
Die Leere Menge $\emptyset$ ist immer eine Teilmenge einer jeden Menge
B ist hier die Obermenge.
Gleichheit $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
$A = B \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \in B) \wedge (\forall b \in B : b \in A)$

Kardinalität Anzahl an Elemente in einer Menge

Schreibweise: $|A|$

$|\emptyset| = 0$

$|\{\emptyset\}| = 1$

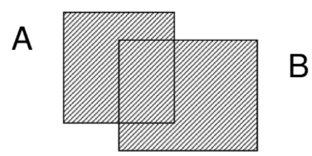
Für endliche Mengen M, N gilt: $|M \times N| = |M| \cdot |N|$

Potenzmenge Die Menge aller Teilmengen einer Menge M.

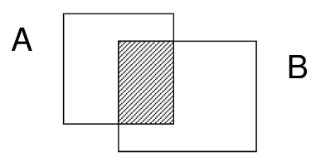
Schreibweise: 2^M oder $\mathcal{P}(A)$.

Für eine Menge M mit $n = |M|$ Elementen hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ genau $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ viele Elemente.

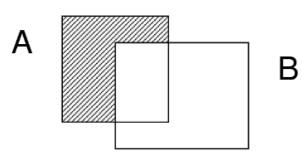
Vereinigung $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



Durchschnitt $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

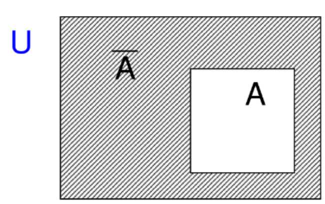


Differenz $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



Komplement ist $A \subseteq U$[1], so heißt die Menge $U \setminus A$ das Komplement von A bzgl. U

Schreibweise: $\overline{A}$



[1] Beim Komplement wird auf die übergeordnete Menge U (genannt Universum) häufig kein (besonderer) Bezug genommen.

Sind A, B und C Mengen, dann gelten die folgenden Gesetze:

- Idempotenz:
  $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$
- Assoziativität:
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Distributivität:
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Kommutativität:
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- Absorption:
  $A \cap (A \cup B) = A$
  $A \cup (A \cap B) = A$
- Regeln von De Morgan:
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Analog zu Logic

Disjunkt Beschreibt zwei Mengen A und B die keine gemeinsamen Elemente haben.
$A \cap B = \emptyset$

Kartesisches Produkt

Tupel Anneinanderreihung von Objekten
Mehrfachwerte sind erlaubt
Reihenfolge ist relevant

Für zwei Mengen A, B nennen wir die Menge

$$A \times B \coloneqq \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

als kartesisches Produkt von A und B, gelesen als “A kreuz B”. Die Elemente dieser Menge heißen (geordnete) Paare (2-Tupel).

Mehrfaches kartesisches Produkt

Für zwei oder mehr Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$ ist das n-fache kartesisches Produkt die Menge:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

Ihre Elemente heißen geordnete n-Tupel.

- Sind alle A_i gleich A, so schreiben wir statt $A \times ... \times A$ auch kurz A^n.

  $A^0 \coloneqq \emptyset, A^* \coloneqq \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i, A^+ \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- Das mehrfache kartesische Produkt ist **nicht assoziativ**.

  $A \times A \times A \neq (A \times A) \times A \neq A \times (A \times A)$

- Das mehrfach kartesische Produkt ist **nicht kommutativ**.

  $A \times B \neq B \times A$

- Das mehrfach kartesische Produkt ist distributiv.

  $L \times (M \cap N) = (L \times M) \cap (L \times N)$

  $(L \cap M) \times N = (L \times N) \cap (M \times N)$

Relationen

Eine Relation R zwischen den Mengen M, N beschreibt eine Teilmenge des kartesischen Produkts von M und N:

$$R \subseteq M \times N$$

R ist also das kartesische Produkt $M \times N$ auf das ein Filter angewandt wird. (Vergleichbar mit dem `WHERE` statement aus SQL oder dem σ aus der relationalen Algebra.)

Man kann R auch als eine Zuordnung von Elementen aus N zur (evtl. mehreren) Elementen aus M sehen.

Häufig genutzte Relationen bei Zahlen $=, \neq, <, >, \leq, \geq$

- Relationen sind gut darstellbar als gerichtet Graphen.
- $R \subseteq A \times A$ heißt reflexiv $:\Leftrightarrow \forall a \in A : (a, a) \in R$
  - Die $<$- und $\neq$-Relationen sind nicht reflexiv.
  - Die $\leq$- und $=$-Relationen sind reflexiv.
- $R \subseteq A \times A$ heißt symmetrisch $:\Leftrightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
  - Symmetrische Relationen können ohne Pfeile dargestellt werden.
- $R \subseteq A \times A$ heißt antisymmetrisch $:\Leftrightarrow [(a, b) \in R \land (b, a) \in R] \Rightarrow a = b$
  - Intuitiv: Wenn beide Relationen gelten, ann muss es sich um das gleiche Element handeln.
- $R \subseteq A \times A$ heißt transitiv $:\Leftrightarrow (a, b) \in R \land (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
  - $<, >$ und $\prec$ (kürzer) sind transitiv.

Verkettungsoperator

Es seien A, B und C Mengen, und zwei Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ gegeben. Dann nennt man die Menge

$$\{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}$$

die Verkettung on R_1 und R_2, und schreibt hierfür $R_1 \circ R_2$.

Inverse Relation

Es seien A, B Mengen. Ist eine Relation $R \subseteq A \times B$ gegeben, so nenne wir die Menge

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

die inverse Relation.

- Die inverse Relation ist nur für das kartesische Produkt zwischen zwei Mengen definiert.

Äquivalenzrelation

Die Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation (über M) :⇔ R ist **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv**. Solche Relationen werden mit $\sim$ notiert; man schreibt $a \sim b$ anstatt $(a, b) \in R$ oder $a\ R\ b$.

Für ein Element $x \in M$ heißt die Menge

$$[x] = [x]_\sim \coloneqq \{y \in M \mid y \sim x\},$$

die durch x repräsentierte **Äquivalenzklasse**. Die Annotation $\sim$ kann entfallen, wenn die zugehörige Relation aus dem Kontext heraus klar ist.

Beispiel

Angenommen A beschreibt das Alter aller Personen und die Relatione $R \subseteq A \times A$ fasst alle Personen mit demselben Alter in 2-Tupel zusammen.

R ist sowohl reflexiv, symmetrisch, als auch transitiv $\Rightarrow$ R ist eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklasse $[18]$ ist dann die Menge aller Personen aus A, die 18 Jahre alt sind.

Allgemein

$[x]$ ist die Menge aller Personen aus A, die x Jahre alt sind.

Partitionen

Es sei M eine Menge, und $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Familie nicht-leerer Teilmengen von M. Wir nennen $\mathcal{Z}$ eine Partition (Zerlegung) der Menge M, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\bigcup_{X \in \mathcal{Z}} X = M$, d.h. die Vereinigung der Mengen in $\mathcal{Z}$ ergibt die gesamte Menge M.
2. Für alle X, Y und Z mit $X \neq Y$ gilt $X \cap Y = \emptyset$, d.h. die Elemente in Z sind paarweise disjunkt.

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, dann bilden die Äquivalenzklassen von R eine Partition von A. Umgekehrt legt jede Partition einer Menge A auch eine Äquivalenzrelation fest.

- Schreibweise für die von einer Äquivalenzrelation erzeugten Partitionen rechtfertigt, nämlich das Symbol

  $$A \ / \sim \coloneqq \{[x]_\sim \mid x \in A\}$$

  welche wir als Quotienten-Menge oder Faktormenge bezeichnen. Sie besteht aus allen Äquivalenzklassen der Relatione $\sim$.

Beispiel

Man nimmt an die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und $\mathcal{Z}\{\{a, b, e\}, \{c\}, \{f\}\}$. Eine Partition zerlegt also die Menge M in n Untermengen. Jedes Element $m \in M$ darf in allen n Untermengen lediglich einmal vorkommen $\Rightarrow$ Die Vereinigung aller Untermengen aus $\mathcal{Z}$ ist mit der ursprünglichen Menge M ident.

Ordnungsrelation

Sei M eine Menge, und $R \subsetneqq M \times M$ eine Relation. Wir nennen R eine:

- Partielle Ordnung oder Halbordnung :$\Leftrightarrow$ R ist **reflexiv**, **antisymmetrisch** und **transitiv**.
- Totale Ordnung :$\Leftrightarrow$ R ist **reflexiv**, **antisymmetrisch**, **transitiv** und für alle $(a, b \in M \times M)$ gilt entweder $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$.

  Das heißt, alle Elemente sind im Sinne von R vergleichbar.

Minimale / Maximale Elemente

- Betrachten wir (partielle oder totale) Ordnungen, dann stellt sich unmittelbar die Frage nach einem kleinsten bzw. größten Element im Sinne der Ordnung.

Es sei $R \subseteq A \times A$ eine partielle Ordnung. Das Element $a \in A$ heißt minimal (bzgl. der partiellen Ordnung R), wenn kein Element $b \neq a$ existiert, sodass $(b, a) \in R$.

Analog dazu heißt das Element a maximal (bzgl. der partiellen Ordnung R) wenn es kein Element $(a, b) \in R$ gibt.

- Ein Minimum bzw. Ein Maximum ist ein besonders minimales bzw. maximales Element, nämlich eines, das mit allen anderen Elementen vergleichbar ist.

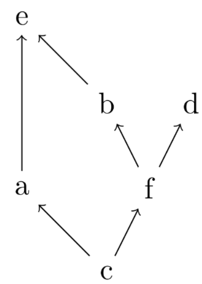
Beispiel 1 Stellt man sich eine Ordnungsrelation als eine Folge von Pfeilen vor: $\{a \to a, a \to b, b \to c, c \to d, d \to e, e \to e\}$ dann ist ein minimales Element jenes, auf das kein anderes Element zeigt. Das Element selbst darf auf sich selbst zeigen.

Analog dazu beschreibt maximal jene Elemente, die auf keine anderen Elemente zeigen. Auch hier darf das Element wieder auf sich selbst zeigen. Es kann allerdings auch mehrere Elemente geben, auf die diese Eigenschaft zutrifft.

In diesem Fall wäre das minimale Element a und das maximale e.

Beispiel 2 Beispiel mit Hilfe eines Hasse-Diagramms:

Beispiel 2.31 (Hasse-Diagramm für eine partielle Ordnung): Sei die partielle Ordnungsrelation $R = \{(c,a),(c,f),(f,d),(a,e),(f,b),(b,e),\ldots\}$ gegeben. Diese kann graphisch dargestellt werden:



In diesem Beispiel wären e, d maximale Elemente und c ein minimales Element. In diesem Beispiel gibt es zwar kein Maximum, allerdings ist e ein Minimum.

Teilbarkeitsrelation

- Es seien $x, y \in \mathbb{N}$, dann schreiben wir $x \mid y$, falls x ein Teiler von y ist. Formal: $x \mid y$ wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $y = k \cdot x$ gilt.
- Teilbarkeit ist eine partielle Ordnung.
- Sie liefert auch eine Äquivalenzrelation, durch folgende Festlegung:

  Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ beliebig, aber fest, vorgegeben. Dann definieren wir die Relation

$$\begin{aligned} a \equiv_n b :\Leftrightarrow\ & n \mid (b-a) \\ & \Leftrightarrow (a \bmod n = b \bmod n) \end{aligned}$$

Rechenregeln für den ggT

- ggT$(x, y) \mid x$ und ggT$(x, y) \mid y$
- Für alle gemeinsamen Teiler t von x und y gilt auch $t \mid$ ggT(x, y)
- Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$ gilt $ggT(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot$ ggT(a, b).
- Ist ggT$(a, b) = t$ so gilt ggT$(a \div t, b \div t) = 1$
- Ist ggT$(a, m) =$ ggT$(b, m)?1$ dann ist auch ggT$(a \cdot b, m) = 1$.

Beispiel für den Euklidischen Algorithmus Mit $a = 412$ und $b = 134$

$$\begin{array}{llllllll} 412 & = & 134 & \cdot & 3 & + & 10 \\ 134 & = & 10 & \cdot & 13 & + & 4 \\ 10 & = & 4 & \cdot & 2 & + & 2 \\ 4 & = & 2 & \cdot & 2 & + & 0 \Rightarrow \text{Abbruch} \Rightarrow \text{ggT}(412, 134) = 2 \end{array}$$

Beispiel für die Linearkombination Mit $a = 412, b = 134$

$$\begin{aligned}\mathsf{ggT}(412, 134) &= 2\\ &= 10 - (4 \cdot 2)\\ &= 10 - ((134 - 10 \cdot 13) \cdot 2) = 27 \cdot 10 - 134 \cdot 2\\ &= 27 \cdot (412 - 134 \cdot 3) - 134 \cdot 2\\ &= 27 \cdot 412 - 83 \cdot 134\\ &= x \cdot a + y \cdot b\end{aligned}$$

damit ist $x = 27$ und $y = -83$.

Definitionsmenge, Bild und Urbild

Es sei eine Funktion $f : M \to N, x \mapsto y$ gegeben, und es seien $X \subseteq M$ und $y \in N$ beliebig.

Wir nenne die Mengen

- Def(f) = Definitionsmenge = alle $x \in M$, die von f abgebildet werden.
- Image(f) = Bildmenge = Alle $y \in N$ die von f zurückgegeben werden.
- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ = Bild der Menge $X \subseteq M$ unter f.
- $f^{-1}(y) = \{x \in M \mid f(x) = y\}$ = Urbildmenge.
  - Intuitiv: Urbild ist die Menge aller x, die von der Funktion auf y abgebildet werden.
  - Das Urbild einer Menge $Y \subseteq N$ ist definiert als $f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid \exists y \in Y : f(x) = y\}$.

Eigenschaften von Relationen

Eigenschaft	Definition
rechtseindeutig	$\forall x \in M : \lvert f(\{x\}) \rvert \leq 1$
linkseindeutig	$\forall y \in N : \lvert f^{-1}(\{y\}) \rvert \leq 1$
linkstotal	alle $x \in M$ besitzen wenigstens ein Bild
rechtstotal	alle $y \in N$ besitzen wenigstens ein Urbild

Eigenschaften				Bezeichnung
linkstotal	rechtseindeutig	rechtstotal	linkseindeutig	
nein	nein	nein	nein	Relation
nein	ja	nein	nein	partielle Funktion
ja	nein	nein	nein	Korrespondenz (siehe Folie 2-105)
ja	ja	nein	nein	(totale) Funktion
ja	ja	ja	nein	surjektive Funktion
ja	ja	nein	ja	injektive Funktion
ja	ja	ja	ja	bijektive Funktion

Funktionen

Es seien M, N Mengen. Dann bezeichnen wir die Relation $f \subseteq M \times N$ als Funktion oder Abbildung, wenn sie

1. rechtseindeutig und
2. linkstotal

ist, also jedem Element $x \in M$ (linkstotal) höchstens ein Element $y \in N$ zuordnet (rechtseindeutig).

- Für Funktionen hat sich die Präfix-Notation $f(x) = y$ durchgesetzt.
- Sind die Mengen M, N nicht aus dem Kontext klar, so werden Funktionen durch ihre Signatur spezifiziert:

$$f : M \to N, x \mapsto y$$

Beispiel zu Funktionen

Man nimmt folgende Funktion f an mit der Signatur $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto y$

$$f(x) = 2 \cdot x$$

Dann ist $\mathbb{N}$ sowohl die Definitionsmenge und alle geraden natürlichen Zahlen, die Bildmenge.

Das Bild auf die Menge $X \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ ist

$$f(X) = \{2, 4, 6, 8\}$$

Die Umkehrfunktion ist

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$

und für $Y = \{2, 4, 6, 8\}$ ist

$$f^{-1}(Y) = \{1, 2, 3, 4\}$$

das Urbild zu Y.

Injektive und surjektive Funktionen

Es sei $f : M \to N$ eine Funktion. Wir nennen f

- **injektiv:** wenn f linkseindeutig ist, d.h. jedes y, hat maximal ein Urbild. Somit gilt $f(a) = f(b) \to a = b$. Unterschiedliche Elemente haben also auch unterschiedliche Bilder.
- **surjektiv:** wenn f rechtstotal ist, d.h. für jedes $y \in N$ existiert ein $x \in M$, dass auf dieses abbildet. d.h. jedes y hat mindestens ein Urbild.

- **bijektiv:** wenn f injektiv und surjektiv ist. D.h. jedes $x \in M$ ist genau einem $y \in N$ zugeordnet und umgekehrt. Somit ist die Umkehrrelation auch eine Funktion (Umkehrfunktion/inverse Funktion).

Verkettung von Funktionen

Sind $f : L \to M$ un d$g : N \to O$ zwei Funktionen und $Image(f) \subseteq Def(g)$, dann ist

$g \circ f : L \to O$ mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für $x \in L$

als Verkettung von f und g festgelegt.

- Verkettung ist nicht kommutativ
- Verkettung ist assoziativ

Injektivität und Surjektivität von verketteten Funktionen

- sind f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv
- sind f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv
- sind f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv

Grafik Injektiv/surjektiv

Umkehrung der Verkettung

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$ identische Abbildung = liefert Eingabewert

Funktionen und Ordnungsrelationen

Ordnungserhaltende (monotone) Funktion

Es sei $f : M \to N$ eine Funktion und $\leq_M$, $\leq_N$ Ordnungsrelationen auf den Mengen M und N. Dann ist f ordnungserhaltend bzw. monoton wachsend, wenn

$$\forall x, y \in M : (x \leq_M y) \to (f(x) \leq_N f(y))$$

Analog ist eine Funktion monoton fallend, wenn

$$\forall x, y \in M : (x \leq_M y) \to (f(x) \geq_N f(y))$$

Wobei $\geq_N = \leq_N^{-1}$

(Annahme:) Dies lässt sich bezüglich jeder Ordnungsrelation und nicht nur $\leq_M$ definieren.

Monotonie beim Umformen von Ungleichungen

Eine Ungleichung: - bleibt erhalten, wenn auf beiden Seiten eine monoton wachsende Funktion angewandt wird - wird umgedreht, wenn auf beiden Seiten eine monoton fallende Funktion angewandt wird

Wohldefinierte Funktionen

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist wohldefiniert (oder repräsentatenunabhängigkeit) bezüglich der Äquivalenzrelation , wenn gilt:

$$\forall x, y \in X : x\ y \to f(x) = f(y)$$

bzw.

$$\forall x, y \in X : [x] = [y] \to f([x]) = f([y])$$

d.h. sie liefert für jeden Wert einer Äquivalenzklasse den selben Funktionswert.

Induktion

Dient dazu, Behauptungen zu beweisen, die für alle natürlichen Zahlen gelten.

Definition: Es sei $S(n)$ eine eine Aussageform über $\mathbb{N}$. Wenn der
Induktionsanfang: $S(n_0)$ und der
Induktionsschritt: $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} : (S(n) \Rightarrow S(n+1))$ wahr ist, dann ist $S(n)$ für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ wahr.

Induktionsannahme: beim Beweisen des Induktionsschritts, darf $S(n), S(n-1), S(n-2), ..., S(n_0)$ angenommen werden.

Der Induktionsbeweis basiert auf dem Syllogismus: wenn wir, der Induktionsanfang und den Induktionsschritt bewiesen haben, können wir aus $S(n_0)$, $S(n_0+1)$ folgern und aus $S(n_0+1)$, $S(n_0+2)$, usw.

Wohlordnungsprinzip der natürlichen Zahlen

Jede nichtleere Teilmende der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element (Minimum)