DR. FLORIAN OSCHMANN

KARLOVA UNIVERZITA
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 6

K odevzdání do čtvrtka, 20.11.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Implicitnost a víc). *(3+1*+3+1=7+1* bodů)*

Zdůvodněte všechny odpovědi v tomto úkolu dostatečně (tj., ověřte podmínky vět, které používáte, jaké jsou z nich závěry, atd.)!

a) Dokažte, že v blízkosti bodu $x = 0$ existuje $\delta > 0$ a spojitě diferencovatelná funkce $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ takové, aby

$$g(x) = [g(x)]^3 + 2e^{g(x)} \sin(x).$$

**Bonus:* Kolik těch funkcí existuje (pro $\delta > 0$ dostatečně malá)?

b) Pro interval $I \subseteq (-\delta, \delta)$ definujeme graf funkce $f : I \to \mathbb{R}$ přes

$$\operatorname{gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Dokažte, že pro každý kompaktní interval $I \subset (-\delta, \delta)$ a každou spojitou funkci $f : I \to \mathbb{R}$, graf $\operatorname{gr}(f)$ je kompaktní v $\mathbb{R}^2$. Co můžete říct o grafech $\operatorname{gr}(g)$ i $\operatorname{gr}(g')$ pro takové intervaly I? (Tip: uvažujte funkci $\Phi : I \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x) = (x, f(x))$. Jaké vlastnosti Φ má?)

c) Co můžete říct o monotonii fce g v $x = 0$?

Úkol 2 (Taylor ve víc dimenzích). *(2+1=3 body)*

Občas můžeme Taylorův polynom ve víc proměnných dostat jednodušší než vypočítat

$$T^n_{f;x_0}(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot [H_f(x_0)(x - x_0)] + ...$$

a) Počítejte Taylorovy polynomy funkcí $\log(1 + x)$ a $\cos(x)$ kolem $x = 0$ až na druhý stupeň.

b) Usuzujte, že Taylorův polynom druhého stupně funkce

$$f(x, y, z) = (x + 1) \log(y + 1) \cos(z),$$

v bodě $x_0 = (0, 0, 0)$ je

$$T^2_{f;x_0}(x) = y + xy - \frac{1}{2}y^2.$$