

Matematická analýza II

Domácí úkol 9

K odevzdání do čtvrtka, 11.12.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Integrace per partes).
 $(2+3=5 \text{ bodů})$

- a) Dokažte, že pro každé dvě spojité diferencovatelné funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

(Tip: uvažujte funkci $F(x) = f(x)g(x)$.)

- b) Nechť je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojité diferencovatelné a nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$a_k := \int_a^b f(x) \sin(kx) dx.$$

Dokažte, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Úkol 2 (Riemannův integrál v nD).
 $(3+2=5 \text{ bodů})$

Používáme zde slova “interval” a “cihla” synonymně.

- a) Dokažte dle definice, že pro každý kompaktní interval (kompaktní cihlu) $J \subset \mathbb{R}^n$ a každé číslo $c \in \mathbb{R}$, Riemannův integrál $\int_J c dx$ existuje a že platí $\int_J c dx = c \cdot \text{vol}(J)$.
- b) Nechť je $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní interval. Funkci $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme *schodovitá funkce*, pokud jsou-li čísla $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ a párově disjunktní intervaly (cihly) $I_1, \dots, I_k \subset J$ takové, aby¹

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}(x), \quad \text{kde} \quad \chi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in I_i, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro každou schodovitou funkci platí

$$\int_J \phi(x) dx = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \text{vol}(I_i).$$

(Můžete bez důkazu používat, že pro intervaly $I \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$ platí $\text{vol}(I) = b - a$, a že funkce χ_{I_i} je integrabilní na cihle I_i . Obraz by mohl být nápomocný, třeba pro $k = 2$, $J = [0, 1]$, $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ i $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.)

¹I když naše definice integrálu toto používala, intervaly I_i tady nemusí být uzavřené.