Dr. Florian Oschmann Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II
Domácí úkol 9

K odevzdání do čtvrtka, 11.12.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Integrace per partes). *(2+3=5 bodů)*

a) Dokažte, že pro každé dvě spojitě diferencovatelné funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(*Tip:* uvažujte funkci $F(x) = f(x)g(x)$.)

b) Nechť je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelné a nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$a_k := \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx.$$

Dokažte, že $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Úkol 2 (Riemannův integrál v nD). *(3+2=5 bodů)*

Používáme zde slova "interval" a "cihla" synonymě.

a) Dokažte *dle definice*, že pro každý kompaktní interval (kompaktní cihlu) $J \subset \mathbb{R}^n$ a každé číslo $c \in \mathbb{R}$, Riemannův integrál $\int_J c\,dx$ existuje a že platí $\int_J c\,dx = c \cdot vol(J)$.

b) Nechť je $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní interval. Funkci $\phi : J \to \mathbb{R}$ říkáme *schodovitá funkce*, pokud jsou-li čísla $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ a párově disjunktní intervaly (cihly) $I_1, \ldots, I_k \subset J$ takové, aby[1]

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}(x), \qquad \text{kde} \qquad \chi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in I_i, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro každou schodovitou funkci platí

$$\int_J \phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^k c_i \cdot vol(I_i).$$

(Můžete bez důkazu používat, že pro intervaly $I \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$ platí $vol(I) = b - a$, a že funkce χ_{I_i} je integrabilní na cihle I_i. Obraz by mohl být nápomocný, třeba pro $k = 2$, $J = [0, 1]$, $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ i $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.)

---

[1] I když naše definice integrálu toto používala, intervaly I_i tady nemusí být uzavřené.