Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 3

K odevzdání do čtvrtka, 30.10.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Řetězové pravidlo a extréma). *(2+2+2=6 bodů)*

a) Nechť být $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciabilní. Ukažte, že pro $z = f(\frac{xy}{x^2+y^2})$ platí

$$x\partial_x z + y\partial_y z = 0.$$

b) Nechť být $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciabilní a $a \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}$ být konstantní. Vypočítejte gradient funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(\langle a, x\rangle + b)$. Tady notace $\langle a, x\rangle$ je skalární součin těch vektorů. Přípomináme, že gradient je $\nabla g = (\partial_{x_1} g, ..., \partial_{x_n} g)$.

c) Nechť být

$$f(x, y) = (x - y - 1)^2.$$

Najděte všechny extréma a určete jejich typ (minimum/maximum/sedlový bod).

Úkol 2 (Derivace vyšších řádů). *(2+2=4 body)*

a) Vypočítejte pro následující funkci derivace až do druhého řádu:

$$f(x, y) = (x + y + 3)^2 - e^{2x+y^2}.$$

b) Pro vektorovou funkci $v = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definujeme divergenci a rotaci přes

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3,$$
$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

(Tady $\partial_i v_j$ znamená $\partial v_j / \partial x_i$ pro každé $i, j \in \{1, 2, 3\}$.) Ukažte, že $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$.

Úkol 3 (Bez odezvdání). Nechť být

$$f(t) = (1 + t, t^2, 1 - t), \qquad g(x, y, z) = 1 + x + xyz.$$

Vypočítejte jednou bez a jednou s pomocí řetězového pravidla $D(g \circ f)(0)$.