Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Mathematická analýza II

Dobrovolný domácí úkol 11

K dobrovolnému odevzdání kdykoli via OWL

Transformers

Úkol 1 (Isodiametrická nerovnost v 2D).

Nechť je $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ spojité a π-periodické, tj., $g(\theta + \pi) = g(\theta)$ pro každé $\theta \in \mathbb{R}$. Definujme

$$\Omega = \{(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi],\ 0 \le r \le g(\theta)\},$$

a diameter množiny Ω přes

$$\operatorname{diam}(\Omega) = \sup\{|x - y| : x, y \in \Omega\}.$$

a) Dokažte, že objem A množiny Ω je

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [g(\theta)]^2 d\theta.$$

(*Tip*: napište $A = \int_\Omega 1\, d(x, y)$, používejte transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, a používejte Fubiniovu větu.)

b) Dokažte, že

$$A \le \pi \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{2}\right)^2.$$

Dodejte geometrickou interpretaci této nerovnosti *pro fixovaný diameter* $\operatorname{diam}(\Omega)$. Porovnejte k tomu libovolnou funkci g se specialní konstantní funkcí $g_0 = \operatorname{diam}(\Omega)/2$. (*Tip*: jakou geometrickou vlastnost obsahuje periodicita pro g? Jaký vztah mezi $\operatorname{diam}(\Omega)$ a $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} g(\theta)$ můžete z toho usuzovat? Obraz by pomohl.)

Úkol 2 (Vánoce).

Definujme si

$$h(z) = z - \frac{1}{2}\lfloor z\rfloor - \lfloor z/4\rfloor(z - 5/2), \quad z \in (0, 5).$$

Tady je $\lfloor x\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$ největší celé číslo menší než reálné číslo $x \in \mathbb{R}$. Nechť je také

$$VS = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le h(z)^2\}.$$

a) Nakreslete h a VS (můžete i použit barvy).

b) Spočítejte objem VS.

Veselé Vánoce a Šťastný nový rok 2026!