Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 4

K odevzdání do čtvrtka, 06.11.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Kompaktnost). *(2+2=4 body)*

a) Nechť X je neprázdná množina a

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukažte, že podmnožina $A \subset X$ je kompaktní pravě, když je konečná. (Tip: mohli byste ukázat jeden směr přímo, druhý sporem.)

b) Ukažte, že konečné sjednocení kompaktních množin je zas kompaktní. Ukažte pomocí příkladu, že pro obecné (nekonečné) sjednocení to už neplatí.

Úkol 2 (Úplnost). *(1+2+3=6 bodů)*

a) Najděte příklad metrického prostoru (X, d) odlišný od úkolu c), který není úplný.

b) Ukažte nebo vyvraťte: Existuje neprázdná množina M taková, aby pro každou metriku d metrický prostor (M, d) nebyl úplný.

c) Už víme z lekce, že metrický prostor $(\mathbb{R}, |x-y|)$ je úplný metrický prostor. Tím úkolem chceme zdůraznit, že vlastnost úplnosti záleží na zvolené metrice:
Nechť je

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

Můžete bez důkazu použit, že tato funkce definuje metriku na $\mathbb{R}$. Ukažte, že prostor $(\mathbb{R}, d)$ není úplný. Tady $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je inverze funkce tan. (Tip: podívejte se na posloupnost $x_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.)