

Matematická analýza II

Domácí úkol 1

K odevzdání do čtvrtka, 16.10.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Metriky).

(3+1=4)

a) Nechť $X = [1, \infty)$. Dokažte, že funkce definovaná přes

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

je metrika.

b) Nechť $X = \mathbb{R}$. Je funkce definovaná přes

$$d(x, y) = |x|^{|y|}$$

metrika? Zdůvodněte!

Úkol 2 (Otevřené a uzavřené množiny).

(3+3=6)

V tomto úkolu předpokládáme $X = \mathbb{R}$.

a) Nechť $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ být metrika, a definujeme

$$\delta(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Dokažte, že δ opravdu metrika je, a že d a δ definují stejné otevřené a zavřené množiny.

b) Nechť být

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že každá množina s touto metrikou je oboje otevřená i zavřená.