

## Matematická analýza II

### Domácí úkol 9

K odevzdání do čtvrtka, 11.12.25, 23:59 hod přes OWL

---

#### Úkol 1 (Integrace per partes).

(2+3=5 bodů)

- a) Dokažte, že pro každé dvě spojitě diferencovatelné funkce  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  platí

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

(*Tip: uvažujte funkci  $F(x) = f(x)g(x)$ .*)

- b) Necht je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitě diferencovatelné a necht pro každé  $k \in \mathbb{N}$

$$a_k := \int_a^b f(x) \sin(kx) dx.$$

Dokažte, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

#### Úkol 2 (Riemannův integrál v nD).

(3+2=5 bodů)

Používáme zde slova “interval” a “cihla” synonymně.

- a) Dokažte *dle definice*, že pro každý kompaktní interval (kompaktní cihlu)  $J \subset \mathbb{R}^n$  a každé číslo  $c \in \mathbb{R}$ , Riemannův integrál  $\int_J c dx$  existuje a že platí  $\int_J c dx = c \cdot \text{vol}(J)$ .
- b) Necht je  $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  kompaktní interval. Funkci  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$  říkáme *schodovitá funkce*, pokud jsou-li čísla  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  a párově disjunktní intervaly (cihly)  $I_1, \dots, I_k \subset J$  takové, aby<sup>1</sup>

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}(x), \quad \text{kde} \quad \chi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in I_i, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro každou schodovitou funkci platí

$$\int_J \phi(x) dx = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \text{vol}(I_i).$$

(Můžete bez důkazu používat, že pro intervaly  $I \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$  platí  $\text{vol}(I) = b - a$ , a že funkce  $\chi_{I_i}$  je integrabilní na cihle  $I_i$ . Obraz by mohl být nápomocný, třeba pro  $k = 2$ ,  $J = [0, 1]$ ,  $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ ,  $I_2 = (\frac{1}{2}, 1]$  i  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ .)

---

<sup>1</sup>I když naše definice integrálu toto používala, intervaly  $I_i$  tady nemusí být uzavřené.