Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 8

K odevzdání do čtvrtka, 04.12.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Stejnoměrná spojitost). *(1+3=4 body)*

Nechť jsou (X, d) a (Y, e) metrické prostory. Funkce $f : X \to Y$ je *Lipschitzovsky spojitá* (resp. jenom *Lipschitz*) pokud existuje $L \geq 0$ takové, aby

$$e(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

a) Dokažte, že každá Lipschitzovsky spojitá funkce je stejnoměrně spojitá.

b) Dokažte, že $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ je stejnoměrně spojitá, ale není Lipschitz. Tady používáme $d(x, y) = e(x, y) = |x - y|$. (*Tip:* Rozdělte nezápornou reálnou přímku do $[0, 2]$ a $[1, \infty)$ a dokažte stejnoměrnou spojitost na každém těch intervalů. Pak zdůvodněte, proč toto implikuje stejnoměrnou spojitost všude na $[0, \infty)$.)

Řešení. a) Nechť je $\varepsilon > 0$. Musíme najít $\delta = \delta(\varepsilon)$ takové, abychom pro každé $x, y \in X$ s $d(x, y) < \delta$ měli $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Nechť je $d(x, y) < \delta$, pak

$$e(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) < L\delta;$$

proto můžeme jen volit $\delta = \varepsilon/L$. Když $L = 0$, pak f je konstantní a můžeme tedy volit jakékoli $\delta > 0$.

b) Na $[0, 2]$ funkce je stejnoměrně spojitá, protože je spojitá a $[0, 2]$ je kompaktní. Na $[1, \infty)$ máme

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{2},$$

tak naše funkce je zejména Lipschitz na $[1, \infty)$ s $L = \frac{1}{2}$ a proto pomocí části a) také stejnoměrně spojitá. Tady jsme jen použili, že $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ i že $x, y \geq 1$. Usuzujeme, že f je stejnoměrně spojité všude, protože intervaly $[0, 2]$ a $[1, \infty)$ mají neprázdný průník. Ve víc detailech, když $\varepsilon > 0$ a $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ je δ z definice pro interval $[0, 2]$, a $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ je to δ pro $[1, \infty)$, pak volíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ a to funguje pro celou poloosu $[0, \infty)$. Funkce f ale není Lipschitz na $[0, \infty)$: kdyby byla, pak volíme $y = 0$ a existuje nějaké $L \geq 0$ takové, aby pro každé $x > 0$ platilo

$$\sqrt{x} \leq Lx \Leftrightarrow L \geq 1/\sqrt{x};$$

pro libovolně malé $x > 0$ to je ale nemožné, jelikož pravá strána jde k ∞ když $x \to 0$. Proto f není Lipschitz.

Důkaz stejnoměrné spojitosti bez rozdělení intervalu je následující: pro každé $x, y \geq 0$ máme

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Důkaz tohoto faktu je jenom mocnit oboje strany na druhou mocninu (a předpokládat díky symetrii že bez újmy na obecnosti $x \geq y$). Pak pro $|x-y| < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta},$$

a tedy stačí zvolit $\delta = \varepsilon^2$.

Úkol 2 (Riemannův integral). *(2+2+2=6 bodů)*

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilní (tj., $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je konečné), a nechť je

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dokažte:

a) Funkce f je omezená[1].

b) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je Lipschitzovsky spojité, tj., existuje nějaké $L \geq 0$ takové, aby

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b].$$

c) Pokud $f \geq 0$, pak F je monotónně rostoucí.

Řešení. a) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \geq 0$, jinak uvážujeme zvlášť $f_+ = \max\{f, 0\}$ a $f_- = \max\{-f, 0\}$ tak, aby $f = f_+ - f_-$, a používáme linearitu Riemannovu integralu. Pro spor nechť je f neomezené. Pak existuje bod $x_0 \in [a,b]$ takový, aby pro každé $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a,b]} f(x) = \infty.$$

Nechť je $P = \{t_i : t_0 = a,\ t_n = b,\ t_i < t_{i+1}\}$ libovolné rozdělení intervalu $[a,b]$. Pak máme pro horní Riemannův součin, že

$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\sup_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x) \Big] \cdot (t_{i+1} - t_i) \geq \Big[\sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} f(x) \Big] \cdot (t_{j+1} - t_j) = \infty,$$

kde $[t_j, t_{j+1}]$ je ten jedinečný interval s $x_0 \in [t_j, t_{j+1}]$. Všimněte si, že nerovnost platí, protože $f \geq 0$, a mohli bycho zvolit ε ještě menší, aby platilo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset [t_j, t_{j+1}]$. Jelikož rozdělení P bylo libovolné, máme

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P) : P \text{ partition}\} = \infty;$$

to ale je spor s tím, že f je integrabilní. Proto f musí být omezené.

b) Už víme, že f je omezené, tj., existuje číslo $L \geq 0$ takové, aby

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \leq L.$$

Bez újmy na obecnosti nechť je $y \geq x$. Potom

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq L \int_x^y 1dt = L|x-y|.$$

[1]To platí obecně: každá funkce, která je integrabilní v Riemannovém smyslu, je omezená.

c) Nechť jsou $x, y \in [a, b]$ s $y \geq x$. Pak

$$F(y) = \int_a^y f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt = F(x),$$

kde jsme použili, že $f \geq 0$ na intervalu $[x, y]$ a proto $\int_x^y f(t)dt \geq 0$.