Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 2

K odevzdání do čtvrtka, 23.10.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Spojitost a uzavřenost). *(2+2+2=6 bodů)*

a) Definujeme funkci $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ přes

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Rozhodněte, zda tato funkce je spojitá, a jestli ji (ne)můžeme rozšířit jako spojitou funkci do celé $\mathbb{R}^2$. *(Tip: Můžete bez důkazu používat, že pro každé $x, y \neq 0$ platí $|xy|/(x^2+y^2) \leq 1$.)*

b) Nechť být (X, d) metrický prostor a $a \in X$. Ukažte, že funkce

$$f : X \to [0, \infty), \qquad f(x) = d(x,a)$$

je spojitá.

c) Nechť být (X, d) metrický prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Ukažte, že jádro (anglicky *kernel*)

$$\ker f := f^{-1}(\{0\})$$

je uzavřené v X. *(Připomínka: vzor množiny $A \subset \mathbb{R}$ je definován přes $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.)*

Úkol 2 (Totální vs. parciální derivace). *(4 body)*

Dokažte, že funkce definována přes

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má totální diferenciál, ale parciální derivace jsou nespojité.