Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 5

K odevzdání do čtvrtka, 13.11.25, 23:59 hod přes OWL

Explicitně implicitní

Úkol 1. *(3+2=5 bodů)*

Nechť je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = ye^x - x\ln(y) - 1$ a bod $P = (0,1)$.

a) Dokažte, že existuje funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, abychom mohli psát $y = g(x)$ v nějaké okolí bodu P. Dokažte též, že funkce g je spojitě diferencovatelná.

b) Počitejte $g'(x)$ i $g'(0)$.

Úkol 2. *(2+2+1=5 bodů)*

Nechť je $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definována přes

$$F(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3 + 2z^2 - 3xyz.$$

a) Dokažte, že existuje okolí bodu $(x_0, y_0) = (1,-1)$ a funkce $g = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s $g(1,-1) = -1$ takové, aby $F(x,y,g(x,y)) = 0$ v tomto okolí.

b) Dokažte, že g má stacionární bod v $(1,-1)$. (Tip: parciální derivace v x i y a řetězové pravidlo.)

c) Počitejte tečnou rovinu funkce g v bodu $(1,-1)$. Dejte *geometrické* vysvětlení, proč váš výsledek není překvapený ("gradient je nula" jako geometrické neplatí).