Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Pár slov k gradientu a derivaci

Zopakujme, že pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gradient je definován jako

$$\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f).$$

Je to vektor s dvěma složkami, který bere jako argumenty dvě proměnné. Geometrická interpretace je taková, že v každém bodě, tento vektor ukazuje směr největšího sklonu/směr maximální rychlosti nárůstu funkce f.

Představujeme si, že stojíme v pokoji. Každý bod v tomto prostoru (x, y, z) má teplotu $T(x, y, z)$. Gradient $\nabla T = (\partial_x T, \partial_y T, \partial_z T)$ ukazuje z oblasti nižších teplot k oblasti vyšších teplot, a tedy záporný gradient $-\nabla T$ ukazuje z vyšších teplot k nižším. Ve fyzice je to známé jako Fourierův zákon: vektor tepelného toku $q = -\nabla T$ nám říká, že teplo proudí z oblastí vyšších teploty k oblasti nižších (to je právě to znaménko minus).

Máme-li profil, představujeme si, že $H(x, y)$ je krajina, která přiřadí každému bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nějakou výšku H. Gradient ∇H zase ukazuje tam, kde sklon je největší, tedy z údolí k vrcholům hor. Absolutní hodnota tohoto vektoru je strmost svahu. Kdybyste někdy viděli značky na ulici nápisem "40 %", tak toto je strmost hory a můžeme to vidět jako velikost gradientu nějakého úhlu.

Bohužel tato interpretace se nedá použit pro *křivky* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Opakujeme, že derivace křivky je

$$g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t)).$$

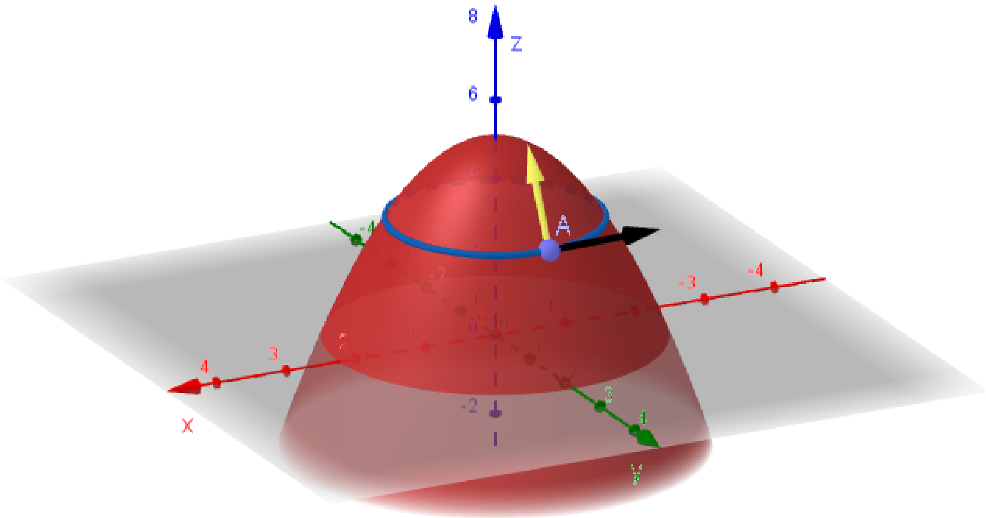
Neříká nám, kde je největší sklon, ale spíš jak vypadá tečna ke g a taky s jakou rychlostí se pohybujeme v jakém směru *na té křivce.*

Nicméně existuje spojení mezi derivacemi a gradienty:

Mějme krajinu s kopci, popsánou funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a představujeme si řez skrz kopce. Tento řez má hranici, která je křivka (tzv. vrstevnice), a můžeme ji reprezentovat jako funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (běžíme "kolem" kopce na specifikováně výšce). Gradient ∇f ukazuje směrem k vrcholu kopce a tedy *pryč* od křivky; jinými slovy, gradient ∇f a derivace g' jsou navzájem kolmé/ortogonální. Vypadá to jako v Obrázku 1.

Přehled toho co je a co není možné vám dává Obrázek 2.

Se směrovými derivacemi se budeme zabývat později. Dobrý souhrn interpretace najdete na anglické Wikipedii: `https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient#Motivation`. Český článek bohužel je moc krátký, nicméně je to dobrý nápad číst "Užití", a taky uplně první obrázek na té straně dobře ukáže, jak si máme gradient představit.



Obrázek 1: Červený: krajina, funkce f; modrá kružnice: vrstevnice, funkce g; černá šipka: tečna funkce g v bodě A, tj. $g'(t_A)$ v čase t_A kdy g dosáhne A; žlutá šipka: gradient funkce f v bodě A, tj. $\nabla f(x_A, y_A)$. Všimněte si, že žlutá a černá šipka jsou navzájem kolmé.

Souhrnná tabulka

Typ funkce	Gradient	Směrová derivace
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	Vektor, ukazuje nejstrmější vzestup	Skalár, míra změny v daném směru
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	(Není definováno)	Použít derivaci (tečný vektor)

Obrázek 2: Vztah mezi gradientem a derivací